

Analyse von tail-abhängigen Risikofunktionalen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften

Fachbereich Mathematik

der Universität Hamburg

vorgelegt von

Daniel Ebel

Hamburg, 2018

Folgende Gutachter empfehlen die Annahme der Dissertation:

Prof. Dr. Holger Drees

Prof. Dr. Hajo Holzmann

Vorsitzender der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Ingenuin Gasser

Tag der Disputation: 28. Mai 2019

Danksagung

Das Verfassen der vorliegenden Dissertation wäre mir ohne die Unterstützung einiger Personen nicht möglich gewesen, weshalb ich im Folgenden meinen Dank ausdrücken möchte.

Allen voran bedanke ich mich bei meinem Betreuer und Erstgutachter Herrn Prof. Dr. Holger Drees, der mir in den vielen Jahren meines Studiums und meiner Promotion stets mit Rat und Tat zur Seite stand, mir viele wertvolle Vorschläge zum Gelingen meines Promotionsvorhabens machte und für Originalität sowie Aktualität der Forschungsergebnisse sorgte. Insbesondere half er mir entscheidend bei der Bewerbung für mein sehr nützliches Abschlussstipendium.

Ein großer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. Hajo Holzmann, der sich bereiterklärt hat, das Zweitgutachten zu schreiben und für die Kommissionsteilnahme meiner Disputation den Weg von Marburg nach Hamburg auf sich zu nehmen.

Zu der richtigen und wichtigen Entscheidung, den Studiengang noch im Bachelorstudium von der Mathematik zur Wirtschaftsmathematik zu wechseln, brachte mich Herr Prof. Dr. Hans Daduna, dem ich vor allem hierfür meinen besonderen Dank zolle.

Meine Eltern Heike und Heinrich Ebel hatten es gerade in der letzten Phase meiner Promotion nicht immer leicht mit mir. Dennoch haben sie mir stets das Gefühl gegeben, nicht allein zu sein. Dies schenkte mir unendlich viel Kraft und Durchhaltevermögen. Danke liebe Mama und danke lieber Papa!

In dieser Danksagung dürfen mein Onkel Dr. Uwe Petersen, meine Tante Martina Petersen und meine Cousine Anna Petersen nicht fehlen. Die tiefgründigen Gespräche mit Ihnen werden mir immer in guter Erinnerung bleiben und halfen mir, über den Tellerrand hinwegzublicken.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Bereichs Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse bedanken. Insbesondere zählen hierzu meine großartigen Doktorschwestern und -brüder, die sich große Mühe beim Korrekturlesen meiner Dissertation gegeben haben oder mich einen Großteil dieser aufregenden Zeit begleitet haben. Namentlich sind hier Florian Hildebrandt, Nick Kloodt, Miran Knežević, Dr. Ruslan Krenzler, Dr. Maria Mohr, Dr. Sonja Otten, Tobias Sohr und Rui Wu zu nennen.

Ebenso spreche ich meinen Dank meinen Freunden André Carreras, Sören Düsterhöft, Christian Hahnel, Christoph Kowalski, Maik Mandelkow, Anna Lena Schenk, Kevin Untiet, Roman Weinberger und allen weiteren Personen in meinem Bekanntenkreis aus, die mich auch an die wichtigen Dinge wie Sport oder andere Freizeitaktivitäten erinnerten.

Mein letzter tiefer Dank gilt meiner leider verstorbenen Omi Ilse Petersen. Ja, du hast Recht behalten. „Der Junge“ hat es geschafft und sein Versprechen eingehalten!

Zusammenfassung

Im Bereich der Risiko- und Extremwerttheorie gilt es u.a., einer Risikoverteilung mittels eines geeigneten Risikomaßes ρ einen Wert zuzuordnen. Ist X zum Beispiel eine Gewinn- bzw. Verlustposition eines Anlageportfolios mit Verteilung F_X , so ist es für ein Unternehmen oft wichtig, darüber in Kenntnis zu sein, wie viel Sicherheitskapital $\rho(F_X)$ es zurücklegen muss, um beispielsweise auch im Extremfall solvent zu bleiben. Auf Grundlage dieses Werts können also wichtige Investitions- und Finanzierungsentscheidungen seitens des Risikomanagements unterstützt werden. Nun ist F_X im Allgemeinen unbekannt, weshalb $\rho(F_X)$ geschätzt werden muss. In dieser Doktorarbeit liegt das Hauptaugenmerk auf Risikomaßen, welche nur vom Tail der Verteilung abhängen, d.h. von extremen Bereichen der Verteilung. Insbesondere werden die Bedingten Tail-Momente (BTM) nach Methni et. al. [MGG14] (Kapitel 3) und das Expektil nach Newey und Powell [NP87] (Kapitel 4) als Risikomaße zum Gegenstand der Untersuchung gemacht. Sie können als Funktional der sogenannten Tail-Quantilfunktion (TQ) geschrieben werden.

In dieser Dissertation werden Zeitreihen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit einer schwachen Abhängigkeitsstruktur betrachtet, d.h. die Zeitreihen sind β -mischend und erfüllen weitere Abhängigkeitsbedingungen (siehe Grundmodell 1.1.3). Von Interesse sind die Güte der Schätzer und die Verteilung der relativen Schätzfehler. Für eine feste Stichprobengröße $n \in \mathbb{N}$ sind aufgrund der Komplexität des Modells keine Verteilungsaussagen möglich, sodass man dazu übergeht, das asymptotische Verhalten des Schätzers zu betrachten. Dabei wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Phänomen, dass es nur wenige oder auch gar keine Beobachtungen im interessierenden Extrembereich gibt, bei der asymptotischen Schätzung im Rahmen der stochastischen Modellierung mit berücksichtigt. Es wird dafür angenommen, dass das stochastische Verhalten in den extremen Bereichen ein Regularitätsverhalten aufweist. Diese Regularität wird dann genutzt, um von dem beobachteten stochastischen Verhalten der Daten, die dem interessierenden Bereich am nächsten liegen (z.B. die k_n größten Beobachtungen), in ebendiesen extremen Bereich zu extrapolieren. Der Rest der Daten wird zur statistischen Analyse nicht herangezogen, um die Schätzung nicht zu verzerren, da diese Daten zu weit weg vom extremen Bereich liegen und das stochastische Verhalten in diesem somit nicht valide beschreiben können. Dabei darf k_n nicht zu klein sein, um eine zu große Varianz des Schätzfehlers auszuschließen. Allerdings führt ein zu großes k_n , wie zuvor beschrieben, zu einer systematischen Verzerrung. Daher wird eine intermediäre Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gewählt.

Als Schätzer für die BTM wird das Funktional der empirischen TQ gewählt, wobei bekannte Resultate der empirischen TQ als Schätzer für die TQ ausgenutzt werden. Eine wichtige Größe, die den Tail einer Verteilung beschreibt, ist der Extremwertindex $\gamma > 0$, dessen Schätzer $\hat{\gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$, ebenfalls als Funktional der empirischen TQ aufgefasst werden kann. Als Beispiel sei hier der in der Extremwerttheorie bedeutende Hill-Schätzer genannt. Mit Hilfe bestimmter Glattheits- und Regularitätseigenschaften des Funktionals wird die asymptotische Normalität des relativen Schätzfehlers in Kapitel 3 nachgewiesen. Hierfür wird zum einen die Hadamard-Differenzierbarkeit und zum anderen eine alternative Glattheitseigenschaft hergeleitet und diskutiert.

In Kapitel 4 werden das Expektile und der Expektilschätzer als Nullstelle einer Funktion bzw. einer zufälligen Funktion definiert, wobei $\gamma \in (0, 1)$ vorausgesetzt wird. Für die Verwendung des Expektilschätzers werden zwei mögliche Erwartungswertschätzer und deren Asymptotik vorgestellt: das Arithmetische Mittel und das in dieser Dissertation so genannte entzerrte Mittel. Im nächsten Schritt werden die asymptotische Normalität des relativen Expektilschätzfehlers nachgewiesen und die Ergebnisse zusammengefasst. Außerdem werden verschiedene Möglichkeiten und Empfehlungen zur Wahl des Expektilschätzers im Hinblick auf den Erwartungswertschätzer herausgestellt. In einem Literaturvergleich werden die Ergebnisse mit denen von Daouia et al. [DGS18] verglichen, die einen alternativen Zugang zum Schätzen der Expektile gewählt haben. Schließlich wird eine Simulationsstudie für unabhängige Daten und Zeitreihen mit schwacher Abhängigkeitsstruktur durchgeführt, um die asymptotischen Resultate auch für endliche Stichprobenumfänge zu unterstützen. Diese Ergebnisse werden ebenfalls mit denen von [DGS18] verglichen. Hierbei stellt sich heraus, dass der in dieser Dissertation motivierte Expektilschätzer am zuverlässigsten performt.

Abstract

In the area of risk and extreme value theory one of the main tasks is to assign a value to a certain given risk distribution using a risk measure ρ . Say for instance X is a profit or loss position of an investment portfolio with distribution function F_X . Then, a company is often interested in the amount of solvency capital $\rho(F_X)$ it has to reserve to ensure its solvency in extreme scenarios. Important investment and financing decisions in risk management can thus be based on such values. In general, the distribution function F_X is unknown and therefore the quantity $\rho(F_X)$ has to be estimated. In this thesis, risk measures that only depend on the tail of the distribution, i.e. of extreme values will be considered. In particular, the focus will be set on the conditional tail moments (BTM) first introduced by Methni et. al. [MGG14] (Chapter 3) and the expectile first considered by Newey and Powell [NP87] (Chapter 4). They both can be expressed as a functional of the so called tail quantile (TQ) function.

In this thesis, a weakly dependent time series $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ will be considered. In particular, it will be assumed to be β -mixing fulfilling further conditions on the dependency (cf. the basic model in 1.1.3). The performance of the estimators as well as the distribution of the relative estimation error will be of interest. Due to the complexity of the model the distribution of the estimator is not known for fixed sample size $n \in \mathbb{N}$. Alternatively, the limiting distribution will be used, where it is particularly important to take into consideration that there are only a few or even none observations in extreme regions. To this end, specific regularity assumptions on the data in these extreme regions will be made. It will particularly allow for an extrapolation of the probabilistic behavior of the observed data that are closest to the extreme regions (for instance the k_n -th largest observations) to the actual extreme regions. The remaining observations will not be used for the statistical analysis as they lie far away from the extreme regions. Hence, they cannot be used to explain the probabilistic behavior in these extreme regions. The choice of k_n plays a crucial role. If it is too small, on the one hand, the variance of the estimation error will be large. On the other hand, k_n being too large causes a systematic bias. As a solution to this issue, an intermediate sequence $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ will be chosen.

To estimate the BTM, the given functional evaluated at the empirical TQ will be used. Due to this procedure known results for the empirical TQ can be used. The extreme value index $\gamma > 0$ is an important quantity to describe the tail of a distribution. It turns out that the statistic $\hat{\gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$ that will be used to estimate γ can again be expressed as a functional of the empirical TQ. An important example is the Hill estimator that is well known in extreme value theory. Under certain smoothness and regularity assumptions on the functional the asymptotic

normal distribution of the relative estimation error will be proven in Chapter 3. In order to do so Hadamard differentiability as well as an alternative smoothness property will be established and discussed.

In Chapter 4, the expectile and an estimator for it will be defined as roots of a function and a random function respectively. A main assumption here is $\gamma \in (0, 1)$. The estimator of the expectile requires some mean estimator. Here, two different estimators, namely the arithmetic mean and a modified version of it, and their asymptotic behavior will be introduced and discussed. Furthermore, the asymptotic normal distribution of the relative estimation error of the estimator for the expectile will be proven. Moreover, different choices for an estimator for the expectile will be discussed with respect to mean estimation. In a literature review the results will be compared with those of Daouia et al. [DGS18], who used an alternative procedure to estimate the expectile. Finally, a simulation study including independent and weakly dependent time series data is conducted for finite sample sizes to support the theoretical asymptotic results. These results are additionally compared with those of [DGS18]. It turns out that the new estimator for the expectile motivated in this thesis is most reliable in comparison with the estimators considered by [DGS18].

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	v
Einführung	xi
Anwendungsgebiete	xii
Aufbau der Dissertation	xiii
1 Grundlagen	1
1.1 Grundmodell	1
1.2 Asymptotisches Verhalten und Landau-Symbole	5
2 Empirische Tail-Quantilfunktion und Extremwertindex	11
2.1 Empirische Tail-Quantilfunktion	11
2.2 Wahl des Extremwertindexschätzers	15
2.2.1 Hill-Schätzer	15
2.2.2 Allgemeiner Schätzer des Extremwertindex	15
3 Bedingte Tail-Momente (BTM)	19
3.1 Motivation eines BTM-Schätzers	19
3.2 Asymptotik des BTM-Schätzers	22
3.2.1 Hadamard-Differenzierbarkeit	22
3.2.2 Alternative Glattheitseigenschaft	24
3.3 Asymptotik des relativen Schätzfehlers	27
3.4 Verwandte Ergebnisse	27
4 Expektil	29
4.1 Grundlagen und Motivation eines Expektilschätzers	29
4.1.1 Wahl des Erwartungswertschätzers	31
4.2 Asymptotik des relativen Schätzfehlers und Zusammenfassung der Ergebnisse . .	36

4.2.1	Zusammenstellung der Kombinationsmöglichkeiten mit Wahlempfehlungen	40
4.3	Literaturvergleich	44
4.3.1	Expektilschätzung nach Daouia et. al. [DGS18]	44
4.3.1.1	Intermediäre Expektilschätzung	44
4.3.1.2	Extreme Expektilschätzung	46
4.3.2	Vergleich der Konvergenzraten und Grenzverteilungen	46
4.3.3	Vergleich der Voraussetzungen und des Berechnungsaufwands	48
4.3.4	Zusammenhang zum indirekten Expektilschätzer	49
4.4	Simulationsstudie	52
4.4.1	Simulation unabhängiger Daten	53
4.4.2	GARCH(1,1)-Zeitreihe	75
4.4.3	MA(1)-Zeitreihe	80
4.4.4	Fazit	85
5	Beweise	87
5.1	Beweis von Satz 2.1.5	87
5.2	Beweis von Satz 2.2.3	88
5.3	Beweis von Satz 3.2.2	91
5.4	Beweis von Korollar 3.2.3	92
5.5	Beweis von Satz 3.2.4	94
5.6	Beweis von Korollar 3.2.5	98
5.7	Beweis von Satz 3.3.1	100
5.8	Beweis von Satz 4.1.3	102
5.9	Beweis von Satz 4.1.6	103
5.10	Beweis von Satz 4.2.1	107
5.10.1	Asymptotik des Expektils und des Expektilschätzers	107
5.10.1.1	Analyse des approximativen Expektils	107
5.10.1.2	Analyse des tatsächlichen Expektils	111
5.10.1.3	Analyse des Expektilschätzers	128
5.10.2	Asymptotik des relativen Schätzfehlers	140
5.10.2.1	Relativer systematischer Fehler im Fall (G1)	140
5.10.2.2	Relativer systematischer Fehler im Fall (G2)	142
5.10.2.3	Relativer stochastischer Fehler im Fall (F1)	142
5.10.2.4	Relativer stochastischer Fehler im Fall (F2)	148

5.10.2.5 Ratenvergleich des stochastischen und deterministischen relativen Fehlers	149
5.10.3 Beweis von Satz 4.2.1	149
5.11 Beweis von Korollar 4.2.2	151
A Anhang zu Kapitel 4	153
A.1 Pareto- und positive Student-t-Verteilung	154
Ausblick	165
Tabellenverzeichnis	167
Abbildungsverzeichnis	169
Literaturverzeichnis	173

Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	Menge aller natürlichen Zahlen exklusive der Null. 3
\mathbb{Z}	Menge aller ganzen Zahlen. 75
\mathbb{R}	Menge aller reellen Zahlen, $(-\infty, \infty)$. 1
$\bar{\mathbb{R}}$	Menge aller reellen Zahlen einschließlich $-\infty$ und ∞ , $[-\infty, \infty]$. 6
\mathbb{R}^+	Menge aller positiven reellen Zahlen exklusive der Null, $(0, \infty)$. 2
Ω	Grundraum. 1
\mathcal{A}	Ereignisraum, σ -Algebra. 1
\mathcal{B}	Borel- σ -Algebra über die reellen Zahlen. 1
\mathcal{B}_M	Borel- σ -Algebra über den metrischen Raum M . 1
\mathcal{B}^N	Die durch $(X_i)_{i \in N \subseteq \mathbb{N}}$ erzeugte σ -Algebra. 5
\mathcal{B}_1^l	Die durch $(X_i)_{1 \leq i \leq l}$ erzeugte σ -Algebra. 3
$\mathcal{B}_{l+k+1}^\infty$	Die durch $(X_i)_{l+k+1 \leq i < \infty}$ erzeugte σ -Algebra. 3
P	Wahrscheinlichkeitsmaß. 1
δ_ω	Dirac-Maß in ω . 17
$U_{[0,1]}$	Stetige Gleichverteilung $U_{[0,1]}$ auf $[0, 1]$. 21
ν_γ	Signiertes Maß auf $\mathcal{B}_{(0,1]}$. 16
X	Reellwertige Zufallsvariable auf Ω . 1
X^+	Positivteil von X . 30
X^-	Negativteil von X . 30
\mathbb{E}	Erwartungswert. 4

$\hat{\mu}_n$	Erwartungswertschätzer auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 31
\bar{X}_n	Arithmetisches Mittel auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 31
$\hat{T}r_n$	Entzerrtes Mittel auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 33
$S_n(k)$	Das auf die $n - k$ kleinsten Beobachtungen getrimmte Mittel. 33
Var	Varianz. 5
Cov	Kovarianz. 4
F_X	Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X . 1
\bar{F}_X	Survivalfunktion der Zufallsvariablen X , $1 - F_X$. 2
F_X^{\leftarrow}	Quantilfunktion bzw. verallgemeinerte Inverse der Verteilungsfunktion F_X . 1
R	Restglied der regulären Variation. 12
p_γ	Pareto-Verteilungsfunktion mit Extremwertindex γ . 53
T_γ	Positive Student-t-Verteilungsfunktion mit Extremwertindex γ . 53
Φ_γ	Fréchet-Verteilungsfunktion mit Extremwertindex γ . 53
$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$	Reellwertige stationäre und β -mischende Zeitreihe auf (Ω, \mathcal{A}, P) . 3
$(X_{i:n})_{i \in \{1, \dots, n\}}$	Ordnungsstatistik der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 11
$(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$	Reellwertige stationäre und β -mischende Zeitreihe über $[0, 1]$ gleichverteilter Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) . 4
α_X	Starker Mischungskoeffizient. 5
β_X	Mischungskoeffizient der absoluten Regularität. 3
\mathcal{RV}_ζ	Menge aller in ∞ regulär variierenden Funktionen mit Index ζ . 2

\mathcal{RV}_ζ^a	Menge aller in a regulär variierenden Funktionen mit Index ζ . 2
\mathcal{LV}_a	Menge aller in a langsam variierenden Funktionen. 2
\mathcal{LV}	Menge aller in 0 langsam variierenden Funktionen. 2
$\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, a, A)$	Bedingung zweiter Ordnung mit Indizes γ, ρ und Hilfsfunktionen a, A . 2
$(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Intermediäre Folge. 3
$\mathbb{1}_C$	Indikatorfunktion der Menge C . 4
\sim	Asymptotische Äquivalenz. 6
\cong	Asymptotische Äquivalenz modulo einer Konstanten. 6
$\stackrel{D}{=}$	Gleichheit in Verteilung. 87
\xrightarrow{P}	Stochastische Konvergenz. 8
\xrightarrow{D}	Verteilungskonvergenz, schwache Konvergenz. 8
$\xrightarrow{D_\gamma}$	Verteilungskonvergenz im Funktionenraum \mathcal{D}_γ . 12
$\xrightarrow{\bar{D}_\gamma}$	Verteilungskonvergenz im Funktionenraum $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$. 13
P -f.s.	P -fast sicher. 12
O, o	Landau-Symbole. 7
O_A, o_A	Landau-Symbole gleichmäßig auf der Menge A . 7
O_P, o_P	Stochastische Landau-Symbole. 8
$O_{P,A}, o_{P,A}$	Stochastische Landau-Symbole gleichmäßig auf der Menge A . 8
$D(0, 1]$	Skorohod-Raum auf $(0, 1]$. 12
\mathcal{C}_γ	Funktionsraum stetiger Funktionen in \mathcal{D}_γ . 12
$\bar{\mathcal{C}}_\gamma$	Funktionsraum stetiger Funktionen in $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$. 13
\mathcal{D}_γ	Funktionsraum. 12
$\bar{\mathcal{D}}_\gamma$	Funktionsraum. 13
ρ	Siehe $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, a, A)$. 2

γ	Extremwertindex. 2
$\hat{\gamma}_n$	Schätzer des Extremwertindex auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, Hill-Schätzer. 15
$(Q_n(t))_{t \in (0,1]}$	Empirische Quantilfunktion. 11
$(W(t))_{t \in (0,1]}$	Brown'sche Bewegung. 12
$(e(t))_{t \in (0,1]}$	Gaußprozess. 13
$CTE_\varrho(X)$	Conditional Tail Expectation von X zum Niveau $\varrho \in (0, 1)$. 20
$CTV_\varrho(X)$	Conditional Tail Variance von X zum Niveau $\varrho \in (0, 1)$. 20
$m_{\tau, \varrho}(X)$	Bedingtes Tail-Moment (BTM) von X zum Moment $\tau \geq 1$ und Niveau $\varrho \in (0, 1)$. 19
$\hat{m}_{\tau, \varrho_n}$	Schätzer des Bedingten Tail-Moments zum Moment $\tau \geq 1$ und Niveau $\varrho_n \in (0, 1)$ auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 22
T	Funktional. 15
D_T	Definitionsbereich des Funktionals. 20
\dot{T}_z	Hadamard-Ableitung des Funktionals T in $z \in D(0, 1]$. 15
$[\cdot]$	Untere Gaußklammer. 11
$\ \cdot\ _w$	Gewichtete Supremumsnorm mit Gewichtungsfunktion w . 22
$\ \cdot\ _{\mathcal{D}_\gamma}$	Seminorm auf \mathcal{D}_γ . 12
$\ \cdot\ _{\bar{\mathcal{D}}_\gamma}$	Seminorm auf $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$. 13
ξ_α	Expektil zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$. 30
e_{α_n}	Approximatives Expektil zum Niveau $\alpha_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. 36
$\hat{\xi}_{\alpha_n}$	Expektilschätzer zum Niveau $\alpha_n \in (0, 1)$ auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 36

$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}$	Expektilschätzer zum Niveau $\alpha_n \in (0, 1)$ unter Verwendung des entzerrten Mittels auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 53
$\hat{\Xi}_{\alpha_n}^*$	Intermediärer indirekter Expektilschätzer zum Niveau $\alpha_n \in (0, 1)$ auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 44
$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}^*$	Intermediärer direkter Expektilschätzer zum Niveau $\alpha_n \in (0, 1)$ auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 45
$\hat{\Xi}_{\alpha_n}$	Indirekter Expektilschätzer zum Niveau $\alpha_n \in (0, 1)$ auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 46
$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$	Direkter Expektilschätzer zum Niveau $\alpha_n \in (0, 1)$ auf Basis der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$. 46
Γ	Gamma-Funktion. 53
BTM	Bedingte Tail-Momente. 19
RBTM	Regressive Bedingte Tail-Momente. 27
RMSE	Empirischer Root Mean Squared Error. 53
TRMSE	Getrimmter empirischer Root Mean Squared Error. 57
MA	Moving Average. 80
ARMA	Autoregressive Moving Average. 4
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. 4
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. 4

Einführung

Im Bereich der Risiko- und Extremwerttheorie gilt es u.a., einer Verteilung F_X eines Risikos X mittels eines geeigneten Risikomaßes ρ einen Wert $\rho(F_X)$ zuzuordnen. Ist X zum Beispiel eine Gewinn- bzw. Verlustposition eines Anlageportfolios mit Verteilung F_X , so ist es für ein Unternehmen wie eine Versicherung oft wichtig, darüber in Kenntnis zu sein, wie viel Sicherheitskapital $\rho(F_X)$ es zurücklegen muss, um auch nach extremen Ereignissen wie zum Beispiel Naturkatastrophen oder Finanzkrisen mit einer zuvor festgelegten Wahrscheinlichkeit solvent zu bleiben. Auf Grundlage dieses Werts können also wichtige Investitions- und Finanzierungsentscheidungen seitens des Risikomanagements unterstützt werden. Nun ist F_X im Allgemeinen unbekannt, weshalb $\rho(F_X)$ geschätzt werden muss. In diesem Dissertationsprojekt liegt das Hauptaugenmerk auf Risikomaßen, welche hauptsächlich von extremen Bereichen der Verteilung abhängen.

Insbesondere werden im ersten Teil der Arbeit die Bedingten Tail-Momente nach Methni et. al. [MGG14] als solche Risikomaße zum Gegenstand der Untersuchung gemacht. Sie können als Funktional der Tail-Quantilfunktion geschrieben werden. Als Schätzer wird das Funktional der empirischen Tail-Quantilfunktion gewählt, wobei bekannte Resultate der empirischen Tail-Quantilfunktion als Schätzer der Tail-Quantilfunktion ausgenutzt werden. Die Analyse dieses Schätzers bedarf einer Auseinandersetzung mit Glattheits- und Regularitätseigenschaften des Funktionals. Es wird z.B. gezeigt, dass das zugehörige Funktional Hadamard-differenzierbar ist. Zudem wird eine alternative Glattheitseigenschaft hergeleitet.

Im zweiten Teil wird das Expektil als Risikomaß betrachtet und ein Expektilschätzer motiviert. Das Expektil ist eine Verallgemeinerung des Quantilbegriffs nach Newey und Powell [NP87] und ist als Minimierer einer asymmetrischen quadratischen Verlustfunktion ein weiterer Lageparameter von Verteilungen. Es eignet sich zur stochastischen Modellierung und statistischen Analyse zufälliger extremer Ereignisse.

In beiden Situationen sind die Güte der Schätzer und deren Verteilung von Interesse. Die statistische Analyse der relativen Schätzfehler wird auf Grundlage der Beobachtungen X_1, \dots, X_n ,

$n \in \mathbb{N}$, mit unbekannter Randverteilungsfunktion F_X durchgeführt. Für festes $n \in \mathbb{N}$ sind aufgrund der Komplexität des Modells keine Verteilungsaussagen möglich, sodass man dazu übergeht, das asymptotische Verhalten des Schätzers zu betrachten. Dabei wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Phänomen, dass es nur wenige oder auch gar keine Beobachtungen im interessierenden Extrembereich gibt, bei der asymptotischen Schätzung im Rahmen der stochastischen Modellierung mit berücksichtigt. Man nimmt dafür an, dass das stochastische Verhalten in den extremen Bereichen ein Regularitätsverhalten aufweist. Diese Regularität wird dann genutzt, um von dem beobachteten stochastischen Verhalten der Daten, die dem interessierenden Bereich am nächsten liegen (z.B. die k_n größten Beobachtungen), in ebendiesem extremen Bereich zu extrapolieren. Der Rest der Daten wird zur statistischen Analyse nicht herangezogen, um die Schätzung nicht zu verzerren, da diese Daten zu weit weg vom extremen Bereich liegen und das stochastische Verhalten in diesem somit nicht valide beschreiben können. Dabei darf k_n nicht zu klein sein, um eine zu große Varianz des Schätzfehlers auszuschließen. Allerdings führt ein zu großes k_n , wie zuvor beschrieben, zu einer systematischen Verzerrung. Die Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird daher als intermediäre Folge festgelegt, d.h. es gilt

$$k_n \longrightarrow \infty \quad \wedge \quad \frac{k_n}{n} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

In der Praxis spielt die Wahl von k_n in Abhängigkeit der Anzahl der Beobachtungen eine entscheidende Rolle.

Anwendungsgebiete

Die Extremwerttheorie findet ihre Anwendung zur Beschreibung seltener extremer Ereignisse. Hier sollen einige Beispiele solcher Ereignisse gegeben werden:

- Naturkatastrophen: Solche Katastrophen sind zum Glück selten, aber wenn sie einmal eintreten, so können sie erheblichen Schaden anrichten. Z.B. gilt dies für die Landwirtschaft im Fall einer Dürreperiode oder für viele Einwohner von Hafenstädten wie Hamburg im Fall von Überflutungen. Im letztgenannten Szenario könnte eine Fragestellung sein, wie hoch der schützende Damm gebaut werden muss, damit mit einer zuvor festgelegten hohen Wahrscheinlichkeit der Wasserpegel den Damm nicht überschreitet. Oft hat man in den letzten Jahrzehnten keine oder zumindest nur wenige Flutkatastrophen beobachtet, sodass man nur auf die Pegelstände der letzten Jahre zurückgreifen kann, sofern man sie auch aufgezeichnet hat, um die Frage zu beantworten.

- Finanzkrisen: Die letzte große Finanzkrise als Teil der Weltwirtschaftskrise ereignete sich in den Jahren um 2008, sodass auch in diesem Bereich das Interesse von Finanzdienstleistungs- und Versicherungsunternehmen an der Extremwerttheorie anwuchs und der Fokus der aktuellen Forschung zur Ursachenbeschreibung und zur Absicherung gegen weitere solcher Krisen gelenkt wurde.
- Luftschadstoffe: Um die Gesundheit des Menschen nicht zu gefährden, sollten gewisse Konzentrationswerte von Schadstoffen nicht überschritten werden. Es kann passieren, dass zwei verschiedene Schadstoffe sich gegenseitig im negativen Sinne beeinflussen. Gefährlich wird es dann, wenn sich diese Einflüsse gegenseitig begünstigen. Diese Abhängigkeit gilt es zu studieren und ggf. nach Abhilfe zu suchen.

Aufbau der Dissertation

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 1 wird das grundlegende Modell beschrieben. Dabei werden die für die Extremwerttheorie bedeutenden Begriffe der regulären Variation, der Bedingung zweiter Ordnung und des Extremwertindex eingeführt. Die Beschreibung der Abhängigkeitsstruktur und der Mischungsbedingungen sind ebenfalls Teil dieses Kapitels. Außerdem werden wichtige Notationen und verkürzte Schreibweisen wie die Landau-Symbole oder die asymptotische Äquivalenz erklärt. Im zweiten Kapitel werden die empirische Tail-Quantilfunktion definiert und wichtige Resultate zusammengestellt. Außerdem werden mögliche Schätzer des Extremwertindex wie z.B. der Hill-Schätzer vorgestellt. Die Bedingten Tail-Momente werden im dritten Kapitel im Hinblick auf die Motivation, der Hadamard-Differenzierbarkeit des zugrundeliegenden Funktionals und der Analyse des relativen Schätzfehlers behandelt. Im anschließenden Kapitel 4 wird das Expektil als Tail-abhängiges Risikomaß untersucht und ein Expektilschätzer motiviert. Hierfür werden zwei Schätzer für den Erwartungswert und deren Asymptotik vorgestellt: das Arithmetische Mittel und das in dieser Dissertation so genannte entzernte Mittel. Nach der Analyse des relativen Expektilschätzfehlers werden die Ergebnisse mit bekannten Resultaten des Zugangs von Daouia et al. [DGS18] verglichen. Es schließt sich eine Simulationsstudie der betrachteten Schätzer an. Die wichtigen Beweise der Dissertation findet man gesammelt in Kapitel 5. Nach dem Anhang wird die Dissertation mit einem kurzen Ausblick zur möglichen weiterführenden Forschung abgeschlossen.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel soll das grundlegende Modell beschrieben werden, in welchem sich die Arbeit bewegen wird. Unter anderem wird dazu der für die extremwerttheoretischen Betrachtungen bedeutende Begriff der regulären Variation eingeführt. Des Weiteren werden diverse Notationen und vereinfachende Schreibweisen wie die Landau-Symbole erklärt.

1.1 Grundmodell

Es sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , welche im konvexen Raum $\mathcal{X} := \{X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})\}$ aller möglichen Risiken liege. Hierbei sei \mathcal{B} die Borel- σ -Algebra über \mathbb{R} und allgemeiner \mathcal{B}_M die Borel- σ -Algebra über einen metrischen Raum M . Positive Werte von X mit zugehöriger stetiger Verteilungsfunktion F_X können zum Beispiel als Verlust und negative als Gewinn interpretiert werden. Alle weiteren Zufallsvariablen seien ebenfalls auf (Ω, \mathcal{A}, P) definiert.

Die stetige Verteilungsfunktion F_X liege im Anziehungsbereich einer verallgemeinerten Extremwertverteilung mit Index $\gamma > 0$, d.h.

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{F_X^{\leftarrow}(1-t\lambda)}{F_X^{\leftarrow}(1-t)} = \lambda^{-\gamma} \quad \forall \lambda > 0, \quad (1.1.1)$$

wobei F_X^{\leftarrow} die zu F_X gehörige Quantilfunktion bzw. verallgemeinerte Inverse bezeichne, d.h.

$$F_X^{\leftarrow}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq t\} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Die Quantilfunktion ist im folgenden Sinne regulär variierend in 1:

Definition 1.1.1. Eine Funktion $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ heißt regulär variierend

in a bzw. b , falls ein $\zeta \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{r(a + \lambda t)}{r(a + t)} = \lambda^\zeta \quad \forall \lambda > 0$$

bzw.

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{r(b - \lambda t)}{r(b - t)} = \lambda^\zeta \quad \forall \lambda > 0.$$

Zur Notation: $r \in \mathcal{RV}_\zeta^a$ bzw. $r \in \mathcal{RV}_\zeta^b$.

Eine Funktion $r : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$ heißt regulär variierend (in ∞), falls ein $\zeta \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(\lambda t)}{r(t)} = \lambda^\zeta \quad \forall \lambda > 0.$$

Zur Notation: $r \in \mathcal{RV}_\zeta$.

Ist $\zeta = 0$, so nennt man r auch langsam variierend in a bzw. b . Schreibe in diesem Fall $r \in \mathcal{LV}_a$ bzw. $r \in \mathcal{LV}^b$. Ist $a = 0$, setze $\mathcal{LV} := \mathcal{LV}_0$.

Demnach wird $F_X^{\leftarrow} \in \mathcal{RV}_{-\gamma}^1$ gefordert. Diese Bedingung ist äquivalent zu $\bar{F}_X := 1 - F_X \in \mathcal{RV}_{-1/\gamma}$. Einen Nachweis hierfür kann man in [DHF06, Theorem 1.2.1, Seite 19] finden. Diese Annahme ist ein extremwerttheoretischer Ansatz, wonach davon ausgegangen wird, dass das stochastische Verhalten in extremen Bereichen der Verteilung ein Regularitätsverhalten aufweist. Dieses Regularitätsverhalten lässt sich ausnutzen, um von den Beobachtungen, die dem interessierenden extremen Bereich am nächsten liegen, zu extrapolieren.

Mehr noch kann für F_X^{\leftarrow} neben der geforderten regulären Variation die sogenannte Bedingung zweiter Ordnung hilfreich sein:

Bedingung zweiter Ordnung. Es existieren messbare, lokal beschränkte Funktionen

$a, A : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ und $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - \lambda t) - F_X^{\leftarrow}(1 - t)}{a(t)} = \frac{\lambda^{-\gamma} - 1}{\gamma} + A(t)G(\lambda) + L(t, \lambda) \quad (1.1.2)$$

für alle $t \in (0, 1)$ und $\lambda > 0$. Dabei sei $\lambda \mapsto G(\lambda)/(\lambda^{-\gamma} - 1)$ nicht konstant, $A(t) = o(1)$ und $L(t, \lambda) = o(A(t))$ für alle $\lambda > 0$ und $t \searrow 0$.

Man kann zeigen, dass dann $a \in \mathcal{RV}_{-\gamma}$ und dass ein $\rho \geq 0$ existiert mit $A \in \mathcal{RV}_\rho$ (siehe [DHF06, Theorem 2.3.3, Seite 44; Theorem B.2.19, Seite 383 ff.]). Man schreibe für die Bedingung zweiter Ordnung kurz $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, a, A)$.

Oftmals ist es für den in dieser Dissertation betrachteten Fall $\gamma > 0$ zweckmäßig, die Funktion $a(t) := \gamma F_X^{\leftarrow}(1-t)$, $t \in (0, 1)$, zu wählen. Dann vereinfacht sich (1.1.2) zu

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\frac{F_X^{\leftarrow}(1-\lambda t)}{F_X^{\leftarrow}(1-t)} - \lambda^{-\gamma}}{A(t)} = G(\lambda). \quad (1.1.3)$$

Mit A ist also die Konvergenzrate in (1.1.1) gegeben. Bei dieser Wahl von a schreibe man kurz $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, A)$.

Die Bedingung zweiter Ordnung ist z.B. erforderlich, um aussagekräftige Konvergenzraten von Schätzern zu erhalten, die in dieser Arbeit untersucht werden. Insbesondere sei hier der Expektilschätzer (vgl. Kapitel 4) genannt. Näheres zur Bedingung zweiter Ordnung findet man in den Abschnitten 2.3 und B.3 aus [DHF06].

Wie in der Einführung motiviert, sei die reellwertige Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine intermediäre Folge, d.h. es gelte

$$k_n \longrightarrow \infty \quad \wedge \quad \frac{k_n}{n} \longrightarrow 0 \quad (1.1.4)$$

für $n \rightarrow \infty$. Des Weiteren gelte die Konvergenzeigenschaft

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k_n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) < \infty. \quad (1.1.5)$$

Die Konvergenzeigenschaft sichert für den in Kapitel 4 behandelten Expektilschätzer die Dominanz des stochastischen Schätzfehlers gegenüber den systematischen (vgl. Abschnitt 5.10.2.5).

Weiter sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine strikt stationäre, $(\beta := \beta_X)$ -mischende Zeitreihe, d.h. es gelte

$$\beta(k) := \sup_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left(\sup_{C \in \mathcal{B}_{l+k+1}^{\infty}} |P(C|\mathcal{B}_1^l) - P(C)| \right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

wobei mit \mathcal{B}_1^l und $\mathcal{B}_{l+k+1}^{\infty}$ die durch $(X_i)_{1 \leq i \leq l}$ bzw. $(X_i)_{l+k+1 \leq i < \infty}$ erzeugten σ -Algebren bezeichnet seien. Grob gesprochen bedeutet das, dass zwei Beobachtungen, die zeitlich weit auseinanderliegen, als nahezu unabhängig angesehen werden können. Die Zeitreihe $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ habe die oben genannte stetige Randverteilungsfunktion F_X , welche im Anziehungsbereich einer verallgemeinerten Extremwertverteilung liegt. Die Abhängigkeitsstruktur der Beobachtungen sei wie folgt modelliert.

Die strikt stationäre, β -mischende Zeitreihe $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ erfülle die folgenden Bedingungen: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, eine Folge $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n \rightarrow \infty$ und eine Funktion r , sodass

(B1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta(l_n)}{l_n} n + l_n k_n^{-1/2} \log^2(k_n) \right) = 0,$$

(B2) $\forall 0 \leq s, t \leq 1 + \varepsilon$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{l_n k_n} \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^{l_n} \mathbb{1}_{\{X_i > F_X^{\leftarrow}(1-(k_n/n)s)\}}, \sum_{i=1}^{l_n} \mathbb{1}_{\{X_i > F_X^{\leftarrow}(1-(k_n/n)t)\}} \right) = r(s, t),$$

(B3) $\exists C > 0 : \forall 0 \leq s < t \leq 1 + \varepsilon, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{l_n k_n} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{l_n} \mathbb{1}_{\{F_X^{\leftarrow}(1-(k_n/n)t) < X_i \leq F_X^{\leftarrow}(1-(k_n/n)s)\}} \right)^4 \right) \leq C(t - s).$$

Hierbei bezeichne $\mathbb{1}_C$ die Indikatorfunktion der Menge C . Nun ist $U_i := F_X(X_i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine aus $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine stationäre, β -mischende Zeitreihe, welche die folgenden Bedingungen erfüllt: Es existiert eine Folge $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n \rightarrow \infty$, sodass

($\tilde{B}1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta(l_n)}{l_n} n + l_n k_n^{-1/2} \log^2(k_n) \right) = 0,$$

($\tilde{B}2$) $\forall 0 \leq s, t \leq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{l_n k_n} \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^{l_n} \mathbb{1}_{\{U_i > 1-(k_n/n)s\}}, \sum_{i=1}^{l_n} \mathbb{1}_{\{U_i > 1-(k_n/n)t\}} \right) = r(s, t),$$

($\tilde{B}3$) $\exists C > 0 : \forall 0 \leq s < t \leq 1, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{l_n k_n} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{l_n} \mathbb{1}_{\{1-(k_n/n)t < U_i \leq 1-(k_n/n)s\}} \right)^4 \right) \leq C(t - s).$$

Eine Begründung hierfür findet sich in [Dre00, Seite 1282, Rem. 2].

Bemerkung 1.1.2. Der β -Koeffizient bzw. der Koeffizient der absoluten Regularität beschreibt den Einfluss der Vergangenheit der Zeitreihe auf die Zukunft. Die Bedingung ($\tilde{B}1$) legt demnach fest, wie schnell dieser Einfluss gemessen am zeitlichen Abstand der Zufallsvariablen abklingt. Unter schwachen Zusatzannahmen sind Beispiele für geometrisch abfallende β -Koeffizienten die Autoregressive Moving Average (ARMA)-, Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH)- und Generalized ARCH (GARCH)-Zeitreihen. Näheres hierzu findet man in [Dou94, Section 2.3].

Die Bedingung ($\tilde{B}2$) stellt sicher, dass der Prozess

$$e_n := \left(k_n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1}_{\{U_i > 1-(k_n/n)t\}}) \right)_{t \in (0,1]}$$

gegen einen Gaußprozess e konvergiert mit Kovarianzfunktion r . Vgl. mit [Roo95, Theorem 2.1, Seite 5]. Hier werden hinreichende Bedingungen für die genannte Konvergenz gegeben. Man kann mit Hilfe von $(\tilde{B}2)$ zeigen, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{l_n k_n} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{l_n} \mathbb{1}_{\{1-(k_n/n)t < U_i \leq 1-(k_n/n)s\}} \right) = r(t, t) - 2r(s, t) + r(s, s),$$

wobei die rechte Seite beschränkt werden kann durch ein Vielfaches von $t - s$, falls r in beiden Komponenten Lipschitz-stetig ist.

Unter Bedingung $(\tilde{B}3)$ gilt diese Beschränktheit sogar gleichmäßig für alle $0 \leq s < t \leq 1$. Für Details sei ebenfalls auf [Roo95] verwiesen.

Ein weiterer Parameter zur Beschreibung der Abhängigkeit der Zeitreihe $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist der Mischungskoeffizient $\alpha := \alpha_X$. Es sei \mathcal{B}^N die durch $(X_i)_{i \in N \subseteq \mathbb{N}}$ erzeugte σ -Algebra. Definiere

$$\alpha(\mathcal{B}^N, \mathcal{B}^M) := \sup \left\{ P(C)P(D) - P(C \cap D) \mid C \in \mathcal{B}^N, D \in \mathcal{B}^M \right\}$$

und

$$\alpha(k) := \sup_{u, v \geq 0} \sup \left\{ \alpha(\mathcal{B}^N, \mathcal{B}^M) \mid |N| \leq u, |M| \leq v \text{ und } a < b + k, \text{ falls } a \in N, b \in M \right\}.$$

Die Zeitreihe heißt dann α -mischend.

Bemerkung. Ist eine Zeitreihe $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ β -mischend, so ist sie auch α -mischend (siehe z.B. [Dou94, Proposition 1, Seite 4]).

Grundmodell 1.1.3. Die in diesem Abschnitt 1.1 beschriebene Situation, dass die stationäre und β -mischende Zeitreihe $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Bedingungen $(B1)$ - $(B3)$ erfüllt mit stetiger Randverteilung $F_X^* \in \mathcal{RV}_{-\gamma}$, die der Bedingung zweiter Ordnung $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, a, A)$ genügt, werde im Folgenden als Grundmodell bezeichnet.

1.2 Asymptotisches Verhalten und Landau-Symbole

Regulär variierende Funktionen konvergieren in folgendem Sinne sogar gleichmäßig.

Satz 1.2.1. *Es sei $r \in \mathcal{RV}_\rho$ für ein $\rho \in \mathbb{R}$. Ist $\rho > 0$, so sei r zusätzlich auf jedem Intervall $[c, \infty)$, $c > 0$, beschränkt. Dann gilt*

$$\sup_{\lambda^{-1} \in I} \left| \frac{r(\lambda t)}{r(t)} - \lambda^\rho \right| \longrightarrow 0, \quad t \searrow 0$$

mit

$$I = \begin{cases} [a, b], & \text{falls } \rho = 0, \\ (0, b], & \text{falls } \rho < 0, \\ [a, \infty), & \text{falls } \rho > 0 \end{cases}$$

für alle $b \geq a > 0$.

Beweis. Diese Aussage wird zum Beispiel in [BGT89, Theorem 1.5.2, Seite 22 f.] bewiesen. \square

Verhalten sich zwei Funktionen asymptotisch gleich, so spricht man von asymptotischer Äquivalenz.

Definition 1.2.2. Sind f und g reellwertige Funktionen auf \mathbb{R} , so schreibe $f(t) \sim g(t)$ für $t \rightarrow T \in \bar{\mathbb{R}}$, falls

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Die Funktionen f und g heißen dann asymptotisch äquivalent.

Existiert eine Konstante $c > 0$, sodass f und cg asymptotisch äquivalent sind, so schreibe $f(t) \cong g(t)$ für $t \rightarrow T \in \bar{\mathbb{R}}$.

Ein häufig verwendeter Satz über das asymptotische Verhalten des Integrals regulär variierender Funktionen ist der Satz von Karamata.

Satz 1.2.3 (Satz von Karamata). Für ein $b > 0$ sei $r: (0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf von 0 weg beschränkten Mengen beschränkte Funktion, d.h. $\sup_{s \in (\xi, b]} r(s) < \infty$ für alle $\xi \in (0, b)$. Dann gilt für $\rho \leq -1$

$$r \in \mathcal{RV}_\rho^0 \iff \lim_{t \searrow 0} \frac{r(t)t}{\int_t^1 r(s)ds} = -\rho - 1$$

und für $\rho > -1$

$$r \in \mathcal{RV}_\rho^0 \iff \int_0^t r(s)ds \sim \frac{1}{\rho + 1} r(t)t \quad \text{für } t \searrow 0.$$

Beweis. Einen Beweis liefert [BGT89, Prop. 1.5.8, 1.5.10, Seite 26 f.]. \square

Lemma 1.2.4. Sei $l \in \mathcal{LV}$. Dann gilt für alle $\delta > 0$

$$\lim_{x \searrow 0} x^\delta l(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} x^{-\delta} l(x) = \infty.$$

Beweis. Nach dem Darstellungssatz von Karamata [BGT89, Theorem 1.3.1, Seite 12 f.] hat die Funktion $\tilde{l}(x) := l(1/x)$ die Form

$$\tilde{l}(x) = c(x) \exp\left(\int_a^x \frac{\kappa(u)}{u} du\right) \quad \forall x \geq a,$$

wobei $a > 0$, $c(x) \rightarrow c \in (0, \infty)$ und $\kappa(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Es sei $a > 0$ so gewählt, dass $c(x) > 0$ und $|\kappa(x)| \leq \delta - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ und für alle $x \geq a$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} x^{-\delta} \tilde{l}(x) &\leq x^{-\delta} c(x) \exp\left((\delta - \varepsilon) \int_a^x \frac{1}{u} du\right) = x^{-\delta} c(x) \exp\left((\delta - \varepsilon) \ln\left(\frac{x}{a}\right)\right) \\ &= a^{\varepsilon - \delta} c(x) x^{-\varepsilon} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} x^{\delta} \tilde{l}(x) &\geq x^{\delta} c(x) \exp\left((\varepsilon - \delta) \int_a^x \frac{1}{u} du\right) = x^{\delta} c(x) \exp\left((\varepsilon - \delta) \ln\left(\frac{x}{a}\right)\right) \\ &= a^{\delta - \varepsilon} c(x) x^{\varepsilon} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

für $x \rightarrow \infty$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{x \searrow 0} x^{\delta} l(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} x^{-\delta} l(x) = \infty.$$

□

Lemma 1.2.5 (Potter-Schranken). *Es ist $r \in \mathcal{RV}_{\rho}$ genau dann, wenn für beliebige $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ein $\lambda_0 > 0$ existiert, sodass für alle $t, t\lambda < \lambda_0$ gilt*

$$(1 - \varepsilon_1) \lambda^{-\rho} \min(\lambda^{-\varepsilon_2}, \lambda^{\varepsilon_2}) < \frac{r(\lambda t)}{r(t)} < (1 + \varepsilon_1) \lambda^{-\rho} \max(\lambda^{-\varepsilon_2}, \lambda^{\varepsilon_2}).$$

Beweis. Ein Beweis wird z.B. in [DHF06, Proposition B.1.9, Seite 366 ff.] erbracht. □

Eine hilfreiche Schreibweise für das asymptotische Verhalten von Funktionen sind die sogenannten Landau-Symbole O, o bzw. O_A, o_A für eine beliebige Menge A .

Definition 1.2.6. Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Existiert ein $C > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq C \quad \forall n \geq N,$$

so schreibe $a_n = O(b_n)$ für $n \rightarrow \infty$.

Schreibe $a_n = o(b_n)$ für $n \rightarrow \infty$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = 0.$$

Sind $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reellwertiger Funktionen auf $A \subseteq \mathbb{R}$, so schreibe $f_n(t) = O_A(g_n(t))$ für $n \rightarrow \infty$, falls

$$\sup_{t \in A} \left| \frac{f_n(t)}{g_n(t)} \right| = O(1).$$

Entsprechend schreibe $f_n(t) = o_A(g_n(t))$ für $n \rightarrow \infty$, falls

$$\sup_{t \in A} \left| \frac{f_n(t)}{g_n(t)} \right| = o(1).$$

Handelt es sich um Zufallsvariablen bzw. um ganze Folgen stochastischer Prozesse, so wird dies durch die Schreibweisen O_P, o_P bzw. $O_{P,A}, o_{P,A}$ deutlich gemacht:

Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von reellwertigen Zufallsvariablen. Schreibe $X_n = O_P(Y_n)$ für $n \rightarrow \infty$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ existieren, sodass gilt:

$$P \left(\left| \frac{X_n}{Y_n} \right| \leq C \right) > 1 - \varepsilon.$$

Gilt

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} 0,$$

so schreibe $X_n = o_P(Y_n)$ für $n \rightarrow \infty$, wobei mit \xrightarrow{P} die stochastische Konvergenz gemeint sei. Darüber hinaus werde mit \xrightarrow{D} die Verteilungskonvergenz bzw. schwache Konvergenz bezeichnet.

Es seien $A \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$ und $((V_n(t))_{t \in T})_{n \in \mathbb{N}}$, $((W_n(t))_{t \in T})_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von stochastischen Prozessen. Dann schreibe $V_n(t) = O_{P,A}(W_n(t))$ für $n \rightarrow \infty$, falls gilt:

$$\sup_{t \in A} \left| \frac{V_n(t)}{W_n(t)} \right| = O_P(1).$$

Gilt

$$\sup_{t \in A} \left| \frac{V_n(t)}{W_n(t)} \right| = o_P(1),$$

so schreibe schließlich $V_n(t) = o_{P,A}(W_n(t))$ für $n \rightarrow \infty$.

Lemma 1.2.7. *Im Grundmodell 1.1.3 existieren Konstanten $c > 0$ und $l \in \mathbb{R}$, sodass F_X^{\leftarrow} bzw. \bar{F}_X dargestellt werden können durch*

$$F_X^{\leftarrow}(1-t) = ct^{-\gamma}(1 + \gamma A(t)) + l \quad \forall t \in (0, 1)$$

bzw. für $x \rightarrow \infty$

$$\bar{F}_X(x) = \left(\frac{x-l}{c} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} (1 + c^{\rho/\gamma} A(x^{-1/\gamma}) + o(A(x^{-1/\gamma}))),$$

falls die Hilfsfunktion a in der Bedingung zweiter Ordnung $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, a, A)$ durch $a(t) = c\gamma t^{-\gamma}$, $t \in (0, 1)$, gegeben ist.

Beweis. Aus [DHF06, Theorem B.3.6, Seite 388] erhält man eine weitere Darstellung von F_X^{\leftarrow} , nämlich

$$F_X^{\leftarrow}(1-t) = \tilde{c} \frac{t^{-\gamma} - 1}{\gamma} + \chi(t) + \tilde{l} \quad \forall t \in (0, 1)$$

für ein $\tilde{c} > 0$, $\tilde{l} \in \mathbb{R}$ und eine regulär variierende Funktion $\chi: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit Index $\rho - \gamma$, für welche eine Funktion $b: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ existiert, sodass gilt:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\chi(\lambda t) - \chi(t)}{b(t)} = \forall \lambda > 0.$$

Es existieren also $c > 0$ und $l \in \mathbb{R}$, sodass

$$F_X^{\leftarrow}(1-t) = ct^{-\gamma} + \chi(t) + l \quad \forall t \in (0, 1).$$

Nun gilt für die Hilfsfunktion a wegen der Bedingung zweiter Ordnung (1.1.3)

$$\begin{aligned} \frac{F_X^{\leftarrow}(1-\lambda t) - F_X^{\leftarrow}(1-t)}{a(t)} &= \frac{c(\lambda t)^{-\gamma} + \chi(\lambda t) - ct^{-\gamma} - \chi(t)}{c\gamma t^{-\gamma}} \\ &= \frac{\lambda^{-\gamma} - 1}{\gamma} + \frac{\chi(\lambda t) - \chi(t)}{c\gamma t^{-\gamma}} \\ &= \frac{\lambda^{-\gamma} - 1}{\gamma} + t^\gamma \frac{\chi(t)}{c\gamma} \underbrace{\left(\frac{\chi(\lambda t)}{\chi(t)} - 1 \right)}_{\rightarrow \lambda^{\rho-\gamma} - 1 = G(\lambda)}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$A(t) = t^\gamma \frac{\chi(t)}{c\gamma} \quad \forall t \in (0, 1)$$

und somit

$$F_X^{\leftarrow}(1-t) = ct^{-\gamma} + \chi(t) + l = ct^{-\gamma} (1 + \gamma A(t)) + l \quad \forall t \in (0, 1).$$

Um die Darstellung für \bar{F}_X nachzuweisen, zeige man, dass $F_X^{\leftarrow}(1-t)$ für

$$t := \left(\frac{x-l}{c} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} (1 + c^{\rho/\gamma} A(x^{-1/\gamma}) (1 \pm \varepsilon))$$

schließlich kleiner bzw. größer als x ist. Daraus folgt dann sofort die Behauptung $t = \bar{F}_X(x)$. In der Tat gilt wegen

$$\chi(\lambda t) = \lambda^{\rho-\gamma} \chi(t) (1 + o(1)) \quad \forall \lambda > 0$$

und

$$\frac{(x-l)^{-\frac{1}{\gamma}}}{x^{-\frac{1}{\gamma}}} (1 + c^{\rho/\gamma} A(x^{-1/\gamma}) (1 \pm \varepsilon)) = \left(1 - \frac{l}{x} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} (1 + c^{\rho/\gamma} A(x^{-1/\gamma}) (1 \pm \varepsilon)) \rightarrow 1$$

für $n \rightarrow \infty$ gerade

$$\begin{aligned}
 F_X^{\leftarrow}(1-t) &= (x-l) \left(1 + c^{\rho/\gamma} A(x^{-1/\gamma}) (1 \pm \varepsilon)\right)^{-\gamma} \\
 &\quad + \chi \left(\left(\frac{x-l}{c}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 + c^{\rho/\gamma} A(x^{-1/\gamma}) (1 \pm \varepsilon)\right) \right) + l \\
 &= (x-l) \left(1 + c^{\rho/\gamma} A(x^{-1/\gamma}) (1 \pm \varepsilon)\right)^{-\gamma} + c^{(\rho-\gamma)/\gamma} \chi(x^{-1/\gamma}) (1 + o(1)) + l \\
 &= (x-l) \left[1 - \gamma c^{\rho/\gamma} A(x^{-1/\gamma}) (1 \pm \varepsilon) + O(A^2(x^{-1/\gamma}))\right] \\
 &\quad + \gamma c^{\rho/\gamma} x A(x^{-1/\gamma}) (1 + o(1)) + l \\
 &= x + \gamma c^{\rho/\gamma} x A(x^{-1/\gamma}) (1 - (1 \pm \varepsilon)) + o(x A(x^{-1/\gamma})) \\
 &= x \pm \varepsilon \gamma c^{\rho/\gamma} x A(x^{-1/\gamma}) + o(x A(x^{-1/\gamma}))
 \end{aligned}$$

für $x \rightarrow \infty$. Die rechte Seite ist somit je nach Vorzeichen von ε größer oder kleiner gleich x . Es folgt die Behauptung. \square

Kapitel 2

Empirische Tail-Quantilfunktion und Extremwertindex

Im ersten Teil dieses Abschnitts wird die sogenannte empirische Tail-Quantilfunktion Q_n als grundlegende Größe für die in dieser Arbeit auftauchenden Schätzer eingeführt. Anschließend werden einige nützliche Resultate für Q_n bereitgestellt und diskutiert. Im zweiten Teil wird der Hill-Schätzer $\hat{\gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$, als häufig verwendeter Schätzer des Extremwertindex $\gamma > 0$ vorgestellt. Danach wird eine Klasse von Schätzern des Extremwertindex motiviert und deren Asymptotik präsentiert.

2.1 Empirische Tail-Quantilfunktion

Im Grundmodell 1.1.3 seien X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, Beobachtungen mit zugehöriger Ordnungsstatistik $(X_{i:n})_{i \in \{1, \dots, n\}}$ mit

$$X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n},$$

welche die beobachteten Daten der Größe nach sortiert.

Definition 2.1.1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ heißt der stochastische Prozess $(Q_n(t))_{t \in (0,1]}$ bzgl. einer intermediären Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$Q_n(t) := X_{n - \lfloor k_n t \rfloor : n}, \quad t \in (0, 1],$$

empirische Tail-Quantilfunktion. Hierbei steht $\lfloor \cdot \rfloor$ für die untere Gaußklammer.

Man setze

$$R(x, \lambda) := \lambda^\gamma \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - x\lambda)}{F_X^{\leftarrow}(1 - x)} - 1, \quad (2.1.1)$$

wobei dieser Term für $x \searrow 0$ wegen (1.1.1) für alle $\lambda > 0$ gegen 0 konvergiert. Man kann zeigen, dass Q_n (geeignet standardisiert) und auf Grundlage unabhängiger Beobachtungen, was ein Spezialfall des Grundmodells 1.1.3 darstellt ($\beta \equiv 0$), stochastisch gegen eine Version der Brown'schen Bewegung $(W(t))_{t \in (0,1]}$ konvergiert. Setze $W_\gamma(t) := \gamma t^{-(\gamma+1)} W(t)$, $t \in (0, 1]$.

Satz 2.1.2. *Im Grundmodell 1.1.3 gelte für eine intermediäre Folge $k_n \rightarrow \infty$, ein $\nu > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1/2)$*

$$R(k_n/n, t) = o_{[0,1+\nu]}(t^{-\varepsilon} k_n^{-1/2}).$$

Dann existieren Versionen von Q_n und einer zentrierten Brown'schen Bewegung W , sodass

$$\sup_{t \in (0,1]} t^{\gamma+\frac{1}{2}+\varepsilon} \left| \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - t^{-\gamma} \right) - W_\gamma(t) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (2.1.2)$$

Beweis. Ein Beweis findet sich in [Dre98b, Seiten 191 und 202 f., Theorem 2.1]. \square

Bemerkung. Es sei $D(0, 1]$ der Skorohod-Raum der rechtsstetigen Funktionen auf $(0, 1]$ mit existierenden linken Limiten. Die Konvergenz in (2.1.2) kann man mit

$$z_\gamma(t) := t^{-\gamma}$$

auffassen als schwache Konvergenz

$$Y_n := \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - z_\gamma \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}_\gamma} W_\gamma \quad (2.1.3)$$

im Funktionenraum

$$\mathcal{D}_\gamma := \left\{ z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid z|_{(0,1]} \in D(0, 1], \lim_{t \searrow 0} t^{\gamma+\frac{1}{2}+\varepsilon} |z(t)| = 0 \right\} \quad (2.1.4)$$

versehen mit der Seminorm $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_\gamma}$ durch

$$\|z\|_{\mathcal{D}_\gamma} := \sup_{t \in (0,1]} t^{\gamma+\frac{1}{2}+\varepsilon} |z(t)|.$$

Für den Grenzprozess in (2.1.3) gilt sogar

$$W_\gamma \in \{z \in \mathcal{D}_\gamma \mid z \text{ ist stetig}\} =: \mathcal{C}_\gamma \quad P\text{-f.s.}$$

Vgl. mit [Dre98b, Seite 192, Corollary 2.1]. Dies legt unter der Voraussetzung (1.1.1) nahe, die empirische Tail-Quantilfunktion Q_n als Schätzer von $F_X^{\leftarrow}(1 - (k_n/n) \cdot)$ zu wählen.

Allgemein, d.h. es gilt nicht notwendigerweise $\beta \equiv 0$, erhält man einen ähnlichen Konvergenzsatz wie in Satz 2.1.2 für schwach abhängige Beobachtungen. Für einen Gaußprozess $(e(t))_{t \in (0,1]}$ setze $e_\gamma := \gamma t^{-(\gamma+1)} e(t)$, $t \in (0, 1]$.

Satz 2.1.3. *Im Grundmodell 1.1.3 gelte für ein $\nu > 0$*

$$R(k_n/n, t) = o_{[0,1+\nu]}(k_n^{-1/2} t^{-(\gamma+1)} q(t)),$$

wobei $q: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ eine Gewichtungsfunktion sei mit den Eigenschaften $\lim_{t \searrow 0} q(t) = 0$, $\lim_{t \searrow 0} t^{\gamma+1}/q(t) = 0$, $\inf_{t \in [t_0, 1]} q(t) > 0$ für alle $t_0 > 0$ und

$$t^\nu |\log(t)|^\mu = O(q(t))$$

für ein $\nu \in [0, 1/2)$, $\mu \geq 0$ und $t \searrow 0$. Dann existieren Versionen von Q_n und eines zentrierten Gaußprozesses e , sodass

$$\sup_{t \in (0,1]} \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} \left| \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - z_\gamma(t) \right) - e_\gamma(t) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (2.1.5)$$

Beweis. Einen Nachweis findet man in [Dre00, Theorem 3.1, Seite 1281 f. und 1296-1298]. \square

Bemerkung 2.1.4. Die Konvergenz in (2.1.5) kann ebenfalls aufgefasst werden als schwache Konvergenz

$$\bar{Y}_n := \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - z_\gamma \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\bar{\mathcal{D}}_\gamma} e_\gamma \quad (2.1.6)$$

im Funktionenraum

$$\bar{\mathcal{D}}_\gamma := \left\{ y : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \left| \left(\frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} y(t) \right)_{t \in (0,1]} \in D(0, 1], \lim_{t \searrow 0} \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} |y(t)| = 0 \right. \right\}$$

versehen mit der Seminorm $\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{D}}_\gamma}$ durch

$$\|z\|_{\bar{\mathcal{D}}_\gamma} := \sup_{t \in (0,1]} \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} |z(t)|.$$

Für den Grenzprozess in (2.1.6) gilt sogar

$$e_\gamma \in \{z \in \bar{\mathcal{D}}_\gamma | z \text{ ist stetig}\} =: \bar{\mathcal{C}}_\gamma \quad P\text{-f.s.}$$

Der folgende Satz zeigt, dass Q_n (geeignet standardisiert) unter gewissen Bedingungen P -stochastisch beschränkt ist.

Satz 2.1.5. *Im Grundmodell 1.1.3 gelte für ein $\nu > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1/2)$*

$$R(k_n/n, t) = o_{[0,1+\nu]}(t^{-\varepsilon} k_n^{-1/2}) \quad (2.1.7)$$

für $n \rightarrow \infty$. Unter den Bedingungen

$$nU_{[k_n t]+1:n} = O_{P,[1/(2k_n),1]}(k_n t) \quad \text{und} \quad k_n t = O_{P,[0,1]}(nU_{[k_n t]+1:n}) \quad (2.1.8)$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt dann:

- (i) $t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)} = O_{P,[0,1]}(1) \quad \text{und}$
- (ii) $t^{-\gamma} \frac{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}{Q_n(t)} = O_{P,[1/(2k_n),1]}(1).$

Beweis. Der Beweis wird im Abschnitt 5.1 erbracht. □

Sind die Beobachtungen der Zeitreihe $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig, so folgt nach [SW86, Seite 415 f., inequality 2]

$$nU_{[k_n t]+1:n} = O_{P,[1/(2k_n),1]}(k_n t) \quad \text{und} \quad k_n t = O_{P,[0,1]}(nU_{[k_n t]+1:n})$$

für $n \rightarrow \infty$, also gerade (2.1.8).

Die Bedingungen aus (2.1.8) sind auch im Grundmodell 1.1.3 für abhängige Daten erfüllt, wie das Lemma 2.1.6 zeigt.

Lemma 2.1.6. *Im Grundmodell 1.1.3 gilt für die stationäre, β -mischende Zeitreihe $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ gleichverteilter Zufallsvariablen*

$$nU_{[k_n t]+1:n} = O_{P,[1/k_n,1]}(k_n t)$$

und

$$k_n t = O_{P,[0,1]}(nU_{[k_n t]+1:n}).$$

Beweis. Einen Beweis findet man in [Dre00, Seite 1279 f., Lemma 3.1]. □

Korollar 2.1.7. *Im Grundmodell 1.1.3 gelte (2.1.7) für ein $\nu > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Dann gilt*

- (i) $t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)} = O_{P,[0,1]}(1) \quad \text{und}$
- (ii) $t^{-\gamma} \frac{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}{Q_n(t)} = O_{P,[1/(2k_n),1]}(1).$

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 2.1.5, wobei die Bedingungen (2.1.8) wegen Lemma 2.1.6 gesichert sind. □

2.2 Wahl des Extremwertindexschätzers

2.2.1 Hill-Schätzer

Eine in der Extremwerttheorie übliche Wahl des Extremwertindexschätzers ist der sogenannte Hill-Schätzer. In diesem Abschnitt wird eine grobe Idee zur Motivation dieses Schätzers vorgestellt. Genaueres zum Hill-Schätzer findet man z.B. in [DHF06, Abschnitt 3.2, Seiten 69-83].

Nehme aufgrund der regulären Variation der zugrundeliegenden Verteilung F_X vereinfachend an, dass die standardisierten Exzedenten Y_1, \dots, Y_k über eine gewisse Schranke exakt Paretoverteilt sind mit Lebesgue-Dichte $h_\gamma(x) := (1-x^{-1/\gamma})\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$. Der zugehörige Extremwertindex γ werde durch den ML-Schätzer

$$\arg \max_{\gamma \in (0, \infty)} \log \left(\prod_{i=1}^k h_\gamma(Y_i) \right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log(Y_i)$$

geschätzt. Ersetze Y_i durch $X_i/X_{n-k:n} > 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, für die Beobachtungen X_1, \dots, X_n . Dann gibt es also k Exzedenten (über $X_{n-k:n}$), wenn alle Beobachtungen als unterschiedlich angenommen werden. Der Hill-Schätzer ist dann für eine intermediäre Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\hat{\gamma}_n := \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \log \left(\frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k_n:n}} \right)$$

gegeben.

Der Hill-Schätzer ist offenbar nur abhängig von den $k_n + 1$ größten Zufallsvariablen.

2.2.2 Allgemeiner Schätzer des Extremwertindex

Der unbekannte Extremwertindex $\gamma \in (0, 1)$ werde im Folgenden durch $\hat{\gamma}_n := S(Q_n)$ geschätzt. Für $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$ aus Bemerkung 2.1.4 sei $S: \bar{\mathcal{D}}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ hierbei ein $(\mathcal{B}_{\bar{\mathcal{D}}_\gamma}, \mathcal{B})$ -messbares Funktional, welches im Sinne der folgenden Definition von [Gil89, Seite 102] Hadamard-differenzierbar sei in $z_\gamma(t) := t^{-\gamma}$ tangential zu $\bar{\mathcal{C}}_\gamma := \{z \in \bar{\mathcal{D}}_\gamma | z \text{ stetig}\}$ mit den Eigenschaften

$$(S1) \quad S(az) = S(z) \quad \forall z \in \bar{\mathcal{D}}_\gamma, a > 0$$

$$(S2) \quad S(z_\gamma) = \gamma.$$

Definition 2.2.1. Seien $(Z, \|\cdot\|_Z)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Dann heißt ein Funktional $T: Z \rightarrow W$ in $z \in Z$ Hadamard-differenzierbar tangential zu $V \subseteq Z$, falls eine stetige lineare Abbildung $\dot{\mathcal{T}}_z: V \rightarrow W$ existiert, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{T(z + h_n v_n) - T(z)}{h_n} - \dot{\mathcal{T}}_z(v) \right\|_W = 0$$

für alle Tripel $(v, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (h_n)_{n \in \mathbb{N}})$ mit $v \in V$, $v_n \in Z$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_Z = 0$ und $h_n \searrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dabei heißt \dot{T}_z Hadamard-Ableitung von T in $z \in Z$.

In der Tat gilt dann wegen Satz 2.1.3 für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \approx z_\gamma$$

und somit

$$\hat{\gamma}_n = S(Q_n) \stackrel{(S1)}{=} S\left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}\right) \approx S(z_\gamma) \stackrel{(S2)}{=} \gamma,$$

da S stetig in z_γ ist. Da S in z_γ Hadamard-differenzierbar ist, lässt sich die Hadamard-Ableitung \dot{S}_{z_γ} nach dem Riesz'schen Darstellungssatz schreiben als Integral bzgl. eines signierten Maßes ν_γ auf $\mathcal{B}_{(0,1]}$, d.h.

$$\dot{S}_{z_\gamma}(v) = \int_{(0,1]} v(t) \nu_\gamma(dt) \quad \forall v \in D_S, \quad (2.2.1)$$

wobei $\nu_\gamma = \nu_\gamma^+ - \nu_\gamma^-$ und ν_γ^\pm Maße auf $\mathcal{B}_{(0,1]}$ sind mit

$$\int_{(0,1]} t^{-(\gamma+1)} q(t) \nu_\gamma^\pm(dt) < \infty.$$

und q aus Satz 2.1.3.

Bemerkung 2.2.2. Der Hill-Schätzer lässt sich über ein solches Funktional S mit den oben genannten Eigenschaften schreiben: Das Funktional $S: \bar{\mathcal{D}}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$S(z) := \int_0^1 \log\left(\frac{z(t)}{z(1)}\right) dt$$

ist in z_γ tangential zu $\bar{\mathcal{C}}_\gamma$ Hadamard-differenzierbar (vgl. [Dre98a, Example 3.1, Seite 103 f.]) mit Hadamard-Ableitung

$$\dot{S}_{z_\gamma}(v) = \int_0^1 t^\gamma v(t) - v(1) dt \quad \forall v \in \bar{\mathcal{C}}_\gamma.$$

Offenbar gilt Bedingung (S1) und wegen

$$S(z_\gamma) = \int_0^1 \log\left(\frac{z_\gamma(t)}{z_\gamma(1)}\right) dt = \int_0^1 \log(t^{-\gamma}) dt = -\gamma \int_0^1 \log(t) dt = \gamma$$

ist auch Bedingung (S2) gültig. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} S(Q_n) &= \int_0^1 \log\left(\frac{Q_n(t)}{Q_n(1)}\right) dt = \int_0^1 \log\left(\frac{X_{n-[k_n t]:n}}{X_{n-k_n:n}}\right) dt = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{\frac{i-1}{k_n}}^{\frac{i}{k_n}} \log\left(\frac{X_{n-[k_n t]:n}}{X_{n-k_n:n}}\right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \int_{\frac{i-1}{k_n}}^{\frac{i}{k_n}} \log\left(\frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k_n:n}}\right) dt = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \log\left(\frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k_n:n}}\right), \end{aligned}$$

was tatsächlich der Hill-Schätzer ist.

Satz 2.2.3. Im Grundmodell 1.1.3 gilt für den oben genannten Schätzer $\hat{\gamma}_n = S(Q_n)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{k_n} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_n - \gamma \\ \frac{X_{n-k_n:n}}{F_X^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(1-k_n/n)} - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_2(0, \Sigma) \quad (2.2.2)$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & \sigma_{S,T} \\ \sigma_{S,T} & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Kovarianzmatrix ist mit

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \gamma^2 \int_{(0,1]^2} (st)^{-(\gamma+1)} r(s,t) \nu_\gamma^2(ds, dt), \\ \sigma_T^2 &= \gamma^2 r(1,1) \quad \text{und} \\ \sigma_{S,T} &= \gamma^2 \int_{(0,1]} t^{-(\gamma+1)} r(1,t) \nu_\gamma(dt) \end{aligned}$$

für die Kovarianzfunktion r eines zentrierten Gaußprozesses $(e(t))_{t \in (0,1]}$ aus Satz 2.1.3.

Ist $\hat{\gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$, der Hill-Schätzer, so gilt (2.2.2) mit $\sigma_S = \sigma_T$.

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.2 erbracht. □

Bemerkung 2.2.4. Das T in der Kovarianzmatrix rührt daher, dass auch $X_{n-k_n:n} = Q_n(1)$ über ein Funktional T der empirischen Tail-Quantilfunktion Q_n geschrieben werden kann, nämlich mit $T(z) := z(1)$ für alle $z \in D(0,1]$. Das Funktional T ist in z_γ Hadamard-differenzierbar mit Hadamard-Ableitung $\dot{\mathcal{T}}_{z_\gamma}(v) = v(1)$, denn für alle Tripel $(v, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (h_n)_{n \in \mathbb{N}})$ mit $v \in D(0,1]$, $v_n \in D(0,1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{D(0,1]} = 0$ und $h_n \searrow 0$ gilt

$$\frac{T(z_\gamma + h_n v_n) - T(z_\gamma)}{h_n} = \frac{z_\gamma(1) + h_n v_n(1) - z_\gamma(1)}{h_n} \longrightarrow v(1)$$

für $n \rightarrow \infty$. Weiterhin lässt sich die Hadamard-Ableitung $\dot{\mathcal{T}}_{z_\gamma}$ darstellen als

$$\dot{\mathcal{T}}_{z_\gamma}(v) = v(1) = \int_{(0,1]} v(t) \delta_1(dt) \quad \forall v \in D(0,1],$$

wobei mit δ_ω das Dirac-Maß in $\omega \in \mathbb{R}$ bezeichnet sei.

Unter den Bedingungen des Satzes 2.2.3 gilt die Konvergenz

$$\sqrt{k_n} (\hat{\gamma}_n - \gamma) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2).$$

Es sei $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in γ differenzierbare Funktion. Aufgrund der Delta-Methode (siehe z.B. [Vaa98, Theorem 3.1, Seite 26]) ergibt sich die schwache Konvergenz

$$\sqrt{k_n} (l(\hat{\gamma}_n) - l(\gamma)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, (l'(\gamma) \sigma_S)^2\right) \quad (2.2.3)$$

und somit

$$l(\hat{\gamma}_n) = l(\gamma) + O(k_n^{-1/2}). \quad (2.2.4)$$

Die Funktion $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$l(x) := \frac{1}{x}$$

ist in γ differenzierbar. Daher folgt mit der Delta-Methode gerade

$$\sqrt{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - \frac{1}{\gamma} \right) = \sqrt{k_n} (l(\hat{\gamma}_n) - l(\gamma)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_S^2}{\gamma^4}\right). \quad (2.2.5)$$

Es existiert also eine Zufallsvariable $N_{1/\gamma} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_S^2/\gamma^4)$, sodass

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_n} = \frac{1}{\gamma} + k_n^{-1/2} N_{1/\gamma} + o_P(1). \quad (2.2.6)$$

Kapitel 3

Bedingte Tail-Momente (BTM)

Es liege im Folgenden das in Abschnitt 1.1 beschriebene Grundmodell 1.1.3 vor, u.a. sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ also eine stationäre, β -mischende Zeitreihe mit den Eigenschaften (B1)-(B3) und regulär variierender Randverteilungsfunktion $F_X \in \mathcal{RV}_{-1/\gamma}$, $\gamma > 0$. Zunächst werden die Bedingten Tail-Momente (BTM) definiert, welche sich als Funktional der Quantilfunktion schreiben lassen. Dann werden Schätzer dieser Größen motiviert. Mit Hilfe bestimmter Glattheitseigenschaften des Funktionals, wie z.B. die Hadamard-Differenzierbarkeit, wird die asymptotische Normalität des relativen Schätzfehlers nachgewiesen. Verwandte Ergebnisse werden im abschließenden Abschnitt dargestellt.

3.1 Motivation eines BTM-Schätzers

Methni et. al [MGG14] definieren zu einem Risiko X eine ganze Klasse von Risikomaßen. Sie werden als Bedingte Tail-Momente bezeichnet.

Definition 3.1.1. Eine Abbildung $m_{\tau, \varrho} : \mathcal{X}_\tau \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$m_{\tau, \varrho}(X) := \mathbb{E}(X^\tau | X > F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho))$$

heißt Bedingtes Tail-Moment (BTM) von X zum Moment $\tau \geq 1$ und Niveau $\varrho \in (0, 1)$. Hierbei bezeichne $\mathcal{X}_\tau := \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}(|X|^\tau) < \infty\}$ die Menge der Risiken mit existierendem Moment bzgl. τ .

Von besonderer Bedeutung sind Schätzer der BTM, da sich viele in der Praxis gebräuchliche Risikomaße als Bild der BTM unter einer bestimmten Abbildung schreiben lassen. Beispiele sind u.a.:

- Conditional Tail Expectation [ADEH99]:

$$CTE_\varrho(X) := \mathbb{E}(X | X > F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho)) = m_{1,\varrho}(X)$$

- Conditional Tail Variance [Val05]:

$$CTV_\varrho(X) := \mathbb{E}((X - CTE_\varrho(X))^2 | X > F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho))$$

- Conditional Value at Risk (CVaR) [RU00], Stop-Loss Premium (SP) [CT07], ...

Im Folgenden werden solche BTM untersucht, für die ϱ „klein“ ist, d.h. die Schranke $F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho)$ ist „groß“. Von Interesse sind die Güte des BTM-Schätzers $m_{\tau,\varrho}(\hat{S}_n)$ und dessen Verteilung, wobei \hat{S}_n ein beliebiger Schätzer der tatsächlichen, aber unbekanntem Verteilung F_X auf Grundlage der Beobachtungen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, sei. Für festes $n \in \mathbb{N}$ sind aufgrund der Komplexität des Modells keine Verteilungsaussagen möglich, sodass man dazu übergeht, das asymptotische Verhalten des Schätzers zu betrachten. Hierfür bettet man die gegebene Situation mit fester Beobachtungszahl in eine Folge ähnlich gelagerter Probleme ein, bei der der Stichprobenumfang gegen unendlich konvergiert. Dabei sollte für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Phänomen, dass es nur wenige Beobachtungen im interessierenden Extrembereich gibt, bei der asymptotischen Schätzung auf Grundlage der Beobachtungen X_1, \dots, X_n für $n \rightarrow \infty$ bei der Modellierung mit berücksichtigt werden. Dies erreicht man, indem man die Schranke $F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho)$ in der Definition der BTM von der Beobachtungsanzahl $n \in \mathbb{N}$ abhängig macht. Hierzu sei $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen $\varrho_n \in (0, 1)$, die die Konvergenzeigenschaften

$$\varrho_n = o\left(\frac{k_n}{n}\right) \quad \text{und} \quad \log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right) = o\left(\sqrt{k_n}\right) \quad (3.1.1)$$

erfülle. Dies hat zur Konsequenz, dass Glattheits- bzw. Differenzierbarkeitsaussagen des nun von n abhängigen Risikomaßes m_{τ,ϱ_n} nicht oder höchstens schwerlich über gewöhnliche Differentiationsbegriffe abgeleitet werden können. Ein erster Ansatz dieser Dissertation ist, zu den von n abhängigen BTM und zu einer noch zu spezifizierenden Menge von Funktionen D_T eine Abbildung $T : D_T \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, für welche

$$m_{\tau,\varrho_n}(X) = T(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n \cdot))$$

gilt.

Da F_X^{\leftarrow} linksstetig ist, ist $F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho \cdot)$ für jedes $\varrho \in (0, 1)$ rechtsstetig mit existierenden linken Limiten. Diese Funktionen werden im sogenannten Skorohod-Raum $D(0, 1] \supseteq D_T$ zusammengefasst.

Der nachfolgende Darstellungssatz gibt ein solches Funktional T für die BTM an.

Satz 3.1.2. Für $\tau \geq 1$, $\varrho \in (0, 1)$ sei das Bedingte Tail-Moment $m_{\tau, \varrho}$ vorgegeben. Weiter sei $T : D_T \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho \cdot) \in D_T \subseteq D(0, 1]$ und

$$T(z) := \int_0^1 z(t)^\tau dt.$$

Dann gilt

$$m_{\tau, \varrho}(X) = T(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho \cdot)),$$

sofern F_X im Punkt $F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho)$ stetig ist.

Beweis. Für $\varrho \in (0, 1)$ gilt für die stetige Gleichverteilung $U_{[0,1]}$ auf $[0, 1]$

$$\begin{aligned} m_{\tau, \varrho}(X) &= \mathbb{E}(X^\tau | X > F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho)) = \frac{\mathbb{E}(X^\tau \mathbf{1}_{\{X > F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho)\}})}{P(X > F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho))} \\ &= \frac{1}{1 - F_X(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho))} \int X^\tau \mathbf{1}_{\{X > F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho)\}} dP \\ &= \frac{1}{\varrho} \int_{\mathbb{R}} x^\tau \mathbf{1}_{(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho), \infty)}(x) P^X(dx) \\ &= \frac{1}{\varrho} \int_{\mathbb{R}} x^\tau \mathbf{1}_{(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho), \infty)}(x) U_{[0,1]}^{F_X^{\leftarrow}}(dx) \\ &= \frac{1}{\varrho} \int_{(0,1)} F_X^{\leftarrow}(u)^\tau \mathbf{1}_{(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho), \infty)}(F_X^{\leftarrow}(u)) U_{[0,1]}(du) \\ &= \frac{1}{\varrho} \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(u)^\tau \mathbf{1}_{(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho), \infty)}(F_X^{\leftarrow}(u)) du \\ &= \frac{1}{\varrho} \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(u)^\tau \mathbf{1}_{(1 - \varrho, 1)}(u) du = \frac{1}{\varrho} \int_{1 - \varrho}^1 F_X^{\leftarrow}(u)^\tau du \\ &\stackrel{u=1-\varrho t}{=} \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho t)^\tau dt = T(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho \cdot)), \end{aligned}$$

sofern F_X im Punkt $F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho)$ stetig ist. □

Mit Hilfe des voranstehenden Darstellungssatzes lässt sich ein BTM-Schätzer $\hat{m}_{\tau, \varrho_n}$ motivieren: Wegen $F_X^{\leftarrow} \in \mathcal{RV}_{-\gamma}^1$ gilt approximativ

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n t}{n})} \approx \left(\frac{n \varrho_n}{k_n}\right)^{-\gamma}$$

und somit

$$m_{\tau, \varrho_n}(X) \stackrel{3.1.2}{=} T(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n \cdot)) \approx T\left(F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n \cdot) \left(\frac{n \varrho_n}{k_n}\right)^{-\gamma}\right)$$

$$= T(F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n \cdot)) \left(\frac{n \varrho_n}{k_n} \right)^{-\gamma\tau}.$$

Wähle also

$$\hat{m}_{\tau, \varrho_n} := T(Q_n) \left(\frac{n \varrho_n}{k_n} \right)^{-\hat{\gamma}_n \tau} \quad (3.1.2)$$

als Schätzer für $m_{\tau, \varrho_n}(X)$. Hierbei ist $\hat{\gamma}_n := S(Q_n)$, $n \in \mathbb{N}$, ein Schätzer für γ , wobei S Regularitäts- und Differenzierbarkeitsbedingungen, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, erfüllt, welche beispielsweise für den Hill-Schätzer gelten.

3.2 Asymptotik des BTM-Schätzers

3.2.1 Hadamard-Differenzierbarkeit

Eine Analyse des Funktionals T auf Glattheitseigenschaften wird zeigen, dass T unter zusätzlichen Bedingungen Hadamard-differenzierbar im Sinne der Definition 2.2.1 ist.

Wegen $F_X^{\leftarrow}(1) = \infty$ ist $F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho \cdot) \in D_T$, $\varrho \in (0, 1)$, offenbar unbeschränkt. Die Supremumsnorm ist in diesem Fall also nicht hilfreich, um Abstände auf dem Raum der Verteilungen zu quantifizieren. Dies und die Sensitivitätsanalyse für T machen daher eine andere Wahl der Metrik und Norm auf D_T erforderlich. Hier soll speziell eine gewichtete Supremumsnorm mit geeigneter Gewichtungsfunktion $w: (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ zugrundegelegt werden, welche die kritischen Bereiche der Funktionen herabgewichtet.

Definition 3.2.1. Sei $U \subseteq D(0, 1]$ ein Untervektorraum und $w: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Gewichtungsfunktion mit $0 < \inf_{t \geq \varepsilon} w(t) \leq \sup_{t \geq \varepsilon} w(t) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann heißt $\|\cdot\|_w$ mit

$$\|z\|_w := \sup_{t \in (0, 1]} w(t) |z(t)| \quad \forall z \in U$$

gewichtete Supremumsnorm auf U .

Unter einer Integrierbarkeitsbedingung der Gewichtungsfunktion w kann die Hadamard-Differenzierbarkeit von T nachgewiesen werden.

Satz 3.2.2. Sei $V := \{v \in D(0, 1] \mid \|v\|_w < \infty\}$. Das Funktional $T: D_T \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_T := \{z \in D(0, 1] \mid z > 0 \text{ und } \|z\|_w < \infty\}$ sei für ein $\tau \geq 1$ durch

$$T(z) := \int_0^1 z(t)^\tau dt$$

gegeben. Die Gewichtungsfunktion w erfülle zusätzlich die Integrierbarkeitsbedingung $\int_0^1 w(t)^{-\tau} dt < \infty$. Dann ist T bezüglich der gewichteten Supremumsnorm in $z \in D_T$ Hadamard-differenzierbar tangential zu V mit Hadamard-Ableitung

$$\dot{\mathcal{T}}_z(v) = \tau \int_0^1 z(t)^{\tau-1} v(t) dt$$

für alle $v \in V$.

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.3 erbracht. □

Für die Asymptotik von $T(Q_n)$ ergibt sich folgendes Korollar.

Korollar 3.2.3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.3 und Satz 3.2.2 gilt im Grundmodell 1.1.3 für die Kovarianzfunktion r des Gaußprozesses e die schwache Konvergenz*

$$\sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) - T(z_\gamma) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, (\gamma\tau)^2 \int_0^1 \int_0^1 (st)^{-(\gamma\tau+1)} r(s,t) ds dt \right),$$

sofern das Integral $\sigma_r^2 := \int_0^1 \int_0^1 (st)^{-(\gamma\tau+1)} r(s,t) ds dt$ existiert.

Gilt sogar $\beta \equiv 0$, so folgt unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.2

$$\sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) - T(z_\gamma) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \frac{4(\gamma\tau)^4 - 10(\gamma\tau)^3 + 8(\gamma\tau)^2}{(1 - \gamma\tau)(2 - \gamma\tau)(1 - 2\gamma\tau)(3 - 2\gamma\tau)} \right),$$

falls $\tau\gamma < 1/2$.

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.4 erbracht. □

Bemerkung. Man beachte, dass der Term

$$\frac{4(\gamma\tau)^4 - 10(\gamma\tau)^3 + 8(\gamma\tau)^2}{(1 - \gamma\tau)(2 - \gamma\tau)(1 - 2\gamma\tau)(3 - 2\gamma\tau)}$$

endlich und positiv ist. Dies ist der Fall, da $\tau\gamma \in (0, 1/2)$ und das Polynom $4x^4 - 10x^3 + 8x^2$ strikt positiv ist für alle $x > 0$.

Es stellt sich leider heraus, dass die Integrierbarkeitsbedingung $\int_0^1 w(t)^{-\tau} dt < \infty$ für die Zwecke dieser Forschungsarbeit im Allgemeinen nicht erfüllt ist. Betrachtet man nämlich die aus Satz 2.1.2 bekannte Gewichtungsfunktion $w(t) := t^{\gamma+\frac{1}{2}+\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$ und alle $t \in (0, 1]$, so folgt

$$\int_0^1 w(t)^{-\tau} dt = \int_0^1 t^{-(\gamma+\frac{1}{2}+\varepsilon)\tau} dt \stackrel{!}{<} \infty$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -\left(\gamma + \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \tau > -1 \\ &\Leftrightarrow \tau < \frac{1}{\gamma + \frac{1}{2} + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Demnach müsste also $1 \leq \tau < 2$ gelten. Für die interessanten Fälle $\tau \geq 2$ wäre die obige Bedingung an die Gewichtungsfunktion w nicht mehr erfüllt. Daher wird im folgenden Abschnitt eine alternative Glattheitseigenschaft für das Funktional T hergeleitet.

3.2.2 Alternative Glattheitseigenschaft

Es seien $T: D_T \subseteq D(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional ähnlich zu dem aus Satz 3.2.2 mit

$$T(z) := \int_0^1 z(t)^\tau dt \quad \forall z \in D_T$$

und $(D_T, \|\cdot\|_{D_T})$ ein normierter Raum mit $D_T \subseteq \{z \in D(0, 1] \mid \int_0^1 z(t)^\tau dt < \infty\}$.

Um Bedingungen zu finden, unter denen eine ähnliche Glattheitseigenschaft mit gleichem Grenzwert $\dot{\mathcal{T}}_z(\tilde{v})$ aus Satz 3.2.2 gilt, betrachte man nur solche Tripel $(\tilde{v}, (\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}})$ mit $\tilde{v} \in D(0, 1]$, $\tilde{v}_n \in D_T$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_n - \tilde{v}\|_{D_T} = 0$ und $\tilde{h}_n \searrow 0$, sodass für die empirische Tail-Quantilfunktion auf Basis von zunächst unabhängigen Daten X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, im Grundmodell 1.1.3 gilt:

$$\tilde{z} + \tilde{h}_n \tilde{v}_n = \frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}.$$

Setze

$$\tilde{h}_n := k_n^{-1/2}.$$

Dann gilt wegen Satz 2.1.2 und anschließender Bemerkung

$$z(t) = z_\gamma(t) := t^{-\gamma},$$

$$\tilde{v}_n = \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} - z_\gamma \right) \xrightarrow{\mathcal{D}_\gamma} W_\gamma =: \tilde{v}$$

und

$$\tilde{\varepsilon}_n := \tilde{v}_n - \tilde{v} = \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} - z_\gamma \right) - W_\gamma.$$

Mit dem gleichen Argument aus dem Beweis von Satz 2.2.3 gilt obige Konvergenz für geeignete Versionen von Q_n und e sogar P -f.s. in \mathcal{D}_γ . Es sei $\eta \in [1/2, 3/4)$ und $\delta > 0$. Dies liefert

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0,1]} t^{\gamma+\eta+\delta} |\tilde{\varepsilon}_n(t)| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0,1]} t^{\gamma+\eta+\delta} \left| \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)} - z_\gamma(t) \right) - W_\gamma(t) \right| \\
 &= 0 \quad P\text{-f.s.}
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Außerdem gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in (0,1]} h_n^{1+\varepsilon} t^\gamma |\tilde{v}_n(t)| &= \sup_{t \in (0,1]} k_n^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} t^\gamma \sqrt{k_n} \left| \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)} - z_\gamma(t) \right| \\
 &= k_n^{-\frac{\varepsilon}{2}} \sup_{t \in (0,1]} \left| t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)} - 1 \right| \\
 &\leq k_n^{-\frac{\varepsilon}{2}} \sup_{t \in (0,1]} t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)} + k_n^{-\frac{\varepsilon}{2}} \\
 &\stackrel{2.1.7(i)}{=} O_P \left(k_n^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right) \\
 &= o_P(1).
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in (0,1]} t^{\gamma+\eta+\delta} |\tilde{v}(t)| &= \gamma \sup_{t \in (0,1]} t^{-\frac{1}{2}+\delta} |W(t)| \\
 &\leq \gamma \sup_{t \in (0,1/e)} t^{-\eta+\delta} |W(t)| + \gamma \sup_{t \in [1/e,1]} t^{-\eta+\delta} |W(t)| \\
 &\leq \gamma \sup_{t \in (0,1/e)} t^{\eta-\frac{1}{2}+\delta} \sqrt{2 \log(|\log(t)|)} \sup_{t \in (0,1/e)} \frac{|W(t)|}{\sqrt{2t \log(|\log(t)|)}} + \gamma \sup_{t \in [1/e,1]} t^{-\frac{1}{2}+\delta} |W(t)| \\
 &< \infty \quad P\text{-f.s.},
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

denn es gilt sowohl

$$\lim_{t \searrow 0} t^{\eta-\frac{1}{2}+\delta} \sqrt{2 \log(|\log(t)|)} = 0,$$

da $\sqrt{2 \log(|\log(t)|)}$ eine langsam variierende Funktion in 0 ist und $\eta - 1/2 + \delta > 0$, als auch nach dem Satz des iterierten Logarithmus

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{|W(t)|}{\sqrt{2t \log(|\log(t)|)}} = 1 \quad P\text{-f.s.}$$

Es seien $\tau \geq 1$ und $\gamma > 0$ mit der Voraussetzung

$$(\mathbf{V}) \quad \tau\gamma < 1 \quad \wedge \quad \tau \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \geq 1$$

gegeben. Andernfalls würde zum einen $T(z_\gamma)$ und damit das zugehörige Risikomaß den Wert ∞ annehmen und zum anderen wäre die Hadamard-Differenzierbarkeit aus Satz 3.2.2 gegeben. Die Eigenschaften (3.2.1), (3.2.2) und (3.2.3) motivieren die Bedingungen des folgenden Satzes.

Satz 3.2.4. *Es sei $T: D_T \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional mit $D_T := \{z \in D(0, 1] \mid \int_0^1 z(t)^\tau dt < \infty\}$ und*

$$T(z) := \int_0^1 z(t)^\tau dt.$$

Weiter seien $\eta \in [1/2, 3/4)$, $\nu \in D(0, 1]$ und unter der Voraussetzung (V) gelte die Bedingung $\gamma\tau + 2\eta < 3/2$. Für eine reellwertige Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n \searrow 0$ erfülle $v_n := \nu + \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $z_\gamma + h_n v_n \in D_T$ für ein Paar $(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\varepsilon \in \begin{cases} \left(0, \min\left(\frac{3-2(\gamma\tau+2\eta)}{\tau-2}, \frac{1-2\gamma\tau}{\tau}\right)\right), & \text{falls } \tau > 2, \\ \left(0, \frac{1-2\gamma\tau}{2}\right), & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.2.4)$$

und

$$\delta \in \begin{cases} \left(0, \min\left(1 - \gamma\tau - \eta, \frac{3-2(\gamma\tau+2\eta)-\varepsilon(\tau-2)}{4}\right)\right), & \text{falls } \tau > 2, \\ \left(0, \min\left(1 - \gamma\tau - \eta, \frac{3-2(\gamma\tau+2\eta)}{4}\right)\right), & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

die Eigenschaften

$$\varepsilon_n(t) = o_{(0,1]}(t^{-\gamma-\eta-\delta}), \quad v_n(t) = o_{(0,1]}(t^{-\gamma} h_n^{-1-\varepsilon}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und $\sup_{t \in (0,1]} t^{\gamma+\eta+\delta} |v(t)| < \infty$.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(z + h_n v_n) - T(z)}{h_n} = \tau \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-1)} v(t) dt = \dot{T}_{z_\gamma}(v) \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.5 erbracht. □

Für die Asymptotik von $T(Q_n)$ ergibt sich unter der alternativen Glattheitseigenschaft aus dem Satz 3.2.4 folgendes Korollar.

Korollar 3.2.5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.3 und Satz 3.2.4 mit der zusätzlichen Forderung $\lim_{t \searrow 0} t^{-1/2+\delta} q(t) = 0$ für ein $\delta > 0$, welches (3.2.5) erfüllt, gilt im Grundmodell 1.1.3 für die Kovarianzfunktion r des Gaußprozesses e die schwache Konvergenz*

$$\sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^\tau (1 - k_n/n)} \right) - T(z_\gamma) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, (\gamma\tau)^2 \sigma_r^2 \right),$$

sofern das Integral $\sigma_r^2 = \int_0^1 \int_0^1 (st)^{-(\gamma\tau+1)} r(s, t) ds dt$ existiert.

Gilt sogar $\beta \equiv 0$, so folgt unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.2

$$\sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) - T(z_\gamma) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \frac{4(\gamma\tau)^4 - 10(\gamma\tau)^3 + 8(\gamma\tau)^2}{(1 - \gamma\tau)(2 - \gamma\tau)(1 - 2\gamma\tau)(3 - 2\gamma\tau)} \right),$$

falls $\tau\gamma < 1/2$.

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.6 erbracht. \square

Bemerkung. Auch unter der alternativen Glattheitseigenschaft erhält man demnach unter modifizierten Annahmen die gleichen Konvergenzaussagen wie in Korollar 3.2.3.

3.3 Asymptotik des relativen Schätzfehlers

Im Grundmodell 1.1.3 gilt der nachfolgende Satz zur Asymptotik des relativen Schätzfehlers von $\hat{m}_{\tau, \varrho_n}$. Zur Erinnerung: Das Restglied R ist durch (2.1.1)

$$R(x, \lambda) := \lambda^\gamma \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - x\lambda)}{F_X^{\leftarrow}(1 - x)} - 1 \quad \forall x, \lambda > 0$$

gegeben.

Satz 3.3.1. *Unter den Voraussetzungen von Korollar 3.2.5 gilt im Grundmodell 1.1.3 unter der zusätzlichen Annahme*

$$R \left(\frac{k_n}{n}, \frac{n\varrho_n}{k_n} \right) = o_P \left(k_n^{-1/2} \log \left(\frac{k_n}{n\varrho_n} \right) \right)$$

für $n \rightarrow \infty$ die schwache Konvergenz

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\log \left(\frac{k_n}{n\varrho_n} \right)} \log \left(\frac{\hat{m}_{\tau, \varrho_n}}{m_{\tau, \varrho_n}(X)} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \tau^2 \sigma_S^2).$$

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.7 erbracht. \square

3.4 Verwandte Ergebnisse

Methni et. al. [MGG14] führen, wie bereits erwähnt, die BTM (vgl. Definition 3.1.1) ein. Anders als in dieser Dissertation machen sie die zugrundeliegende Zeitreihe von einer Kovariablen abhängig und untersuchen die Asymptotik einer modifizierten Version der Bedingten Tail-Momente, nämlich die Regressiven Bedingten Tail-Momente (RBTM). Ihre Schätzmethode verbindet nichtparametrische Kernschätzermethoden mit der Extremwertstatistik. Sie wenden ihr Schätzverfahren auf Beobachtungen des täglichen Niederschlags an.

In [Hog18] wird ebenfalls ein extremwerttheoretischer Zugang zum Schätzen der BTM für schwach abhängige Beobachtungen gewählt, deren Abhängigkeitsstruktur sich aber deutlich zur Struktur einer β -mischenden Zeitreihe, die die Bedingungen (B1)-(B3) erfüllt, unterscheidet. Hier wird unter Verwendung eines Kernschätzers ein mehrdimensionaler zentraler Grenzwertsatz speziell für die Wahl des Hill-Schätzers hergeleitet. Dieses Schätzverfahren wird auf log-Renditen der Volkswagen AG angewandt.

Kapitel 4

Expektil

Dem Kapitel 4 liege das Grundmodell 1.1.3 mit $\gamma \in (0, 1)$ zugrunde. Zu Beginn wird das Expektil definiert und ein Expektilschätzer motiviert. Anschließend werden für die Verwendung des Expektilschätzers zwei mögliche Erwartungswertschätzer und deren Asymptotik vorgestellt: das Arithmetische Mittel und das in dieser Dissertation so genannte entzernte Mittel. Im nächsten Schritt wird die Asymptotik des relativen Schätzfehlers untersucht und die Ergebnisse zusammengefasst. Außerdem werden verschiedene Möglichkeiten und Empfehlungen zur Wahl des Expektilschätzers im Hinblick auf den Erwartungswertschätzer diskutiert. Schließlich wird eine Simulationsstudie für unabhängige Daten und Zeitreihen mit schwacher Abhängigkeitsstruktur durchgeführt, um die asymptotischen Resultate auch für endliche Stichprobenumfänge zu unterstützen. Diese Ergebnisse werden ebenfalls mit denen von [DGS18] verglichen.

4.1 Grundlagen und Motivation eines Expektilschätzers

Bellini et al. [BKMG14] führten die sogenannten verallgemeinerten Quantile ein und zeigten, dass das Expektil das einzige verallgemeinerte Quantil ist, welches ein kohärentes Risikomaß darstellt. Die Kohärenz wird in der Praxis häufig gefordert, um u.a. gewöhnliche Diversifikationseffekte mehrerer Risiken berücksichtigen zu können. Mehr dazu findet sich in der Arbeit von [ADEH99]. Darüber hinaus ist das Expektil das einzige kohärente Risikomaß, welches elizitierbar (engl. elicitable) ist. Ein Risikomaß heißt elizitierbar, wenn es als Minimierer einer geeigneten erwarteten Score-Funktion geschrieben werden kann [LPS08]. Die Elizitierbarkeit ist eine wünschenswerte Eigenschaft für Rechenalgorithmen, Vorhersagen und Backtesting-Methoden. Aus diesen Gründen wurde das Expektil in den letzten Jahren vermehrt zum Gegenstand der Untersuchung gemacht.

Definition 4.1.1. Das Expektil $\xi_\alpha := \xi_\alpha(X)$ zu einem Risiko X und Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist definiert als Lösung der Gleichung

$$\xi_\alpha = \frac{2\alpha - 1}{1 - \alpha} \mathbb{E}((X - \xi_\alpha)^+) + \mathbb{E}(X), \quad (4.1.1)$$

wobei mit $X^+ := \max(0, X)$ der Positivteil von X gemeint sei.

Bemerkung 4.1.2. Das Expektil ξ_α kann auch als Minimierer einer asymmetrischen quadratischen Verlustfunktion, nämlich

$$\xi_\alpha := \arg \min_{u \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(\alpha[(X - u)^+]^2 + (1 - \alpha)[(X - u)^-]^2),$$

definiert werden, wobei mit $X^- := \max(0, -X)$ der Negativteil von X gemeint sei. Das Minimierungsproblem führt dann ebenfalls zur notwendigen Bedingung erster Ordnung (4.1.1). Diese Gleichung hat eine eindeutige Lösung, wenn $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Ein Nachweis hierfür wird in [BKMG14, Proposition 1, Seite 42 f.] gegeben. Da das Minimierungsproblem bei nicht existierender Varianz nicht wohldefiniert ist, was zum Beispiel für $\gamma > 1/2$ der Fall ist, ist Definition 4.1.1 dieser jedoch vorzuziehen.

Das Expektil ξ_{α_n} soll geschätzt werden, wobei das Verhalten des Schätzers für $\alpha_n \nearrow 1$ und der intermediären Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Konvergenzbedingungen

$$1 - \alpha_n = o\left(\frac{k_n}{n}\right), \quad \log\left(\frac{k_n}{n(1 - \alpha_n)}\right) = o\left(\sqrt{k_n}\right) \quad (4.1.2)$$

und

$$\sqrt{k_n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) = O(1) \quad (4.1.3)$$

untersucht wird, um wieder, wie in Kapitel 3 beschrieben, die Präsenz weniger Beobachtungen zu berücksichtigen. Das bedeutet, dass α_n hinreichend schnell, aber nicht zu schnell gegen 1 konvergiert. Das Expektil ξ_{α_n} ist gerade die Nullstelle der Funktion

$$f_{\alpha_n}(u_n) := -u_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \mathbb{E}((X - u_n)^+) + \mathbb{E}(X).$$

Mit dem Satz von Karamata 1.2.3 zeigt man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - u_n)^+) &= \int_{u_n}^{\infty} \bar{F}_X(t) dt \sim \frac{u_n \bar{F}_X(u_n)}{\frac{1}{\gamma} - 1} = \frac{u_n \bar{F}_X\left(F_X^{\leftarrow}\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) \frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)}\right)}{\frac{1}{\gamma} - 1} \\ &\approx \frac{u_n \bar{F}_X\left(F_X^{\leftarrow}\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1} = \frac{u_n \frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1}, \end{aligned}$$

da $\bar{F}_X \in \mathcal{RV}_{-1/\gamma}$. Dies führt auf die Funktion g_{α_n} mit

$$g_{\alpha_n}(u_n) := -u_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1} + \mathbb{E}(X),$$

welche f_{α_n} approximiert. Die Nullstelle von g_{α_n} , also das approximative Expektil, sei mit e_{α_n} bezeichnet. Es liegt nahe, einen Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ als Nullstelle der zufälligen Funktion

$$0 \stackrel{!}{=} \hat{g}_{\alpha_n}(\hat{\xi}_{\alpha_n}) := -\hat{\xi}_{\alpha_n} + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} \frac{k_n}{n} \left(\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n}}{Q_n(1)} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}}}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} + \hat{\mu}_n,$$

zu wählen, wobei $\hat{\gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$, ein geeigneter Schätzer des Extremwertindex $\gamma \in (0, 1)$, $\hat{\mu}_n$ ein Schätzer des Erwartungswerts $\mathbb{E}(X)$ und Q_n die in Kapitel 2 eingeführte empirische Tail-Quantilfunktion auf Basis einer stationären, β -mischenden Zeitreihe $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, welche die Bedingungen (B1)-(B3) erfüllt, seien.

4.1.1 Wahl des Erwartungswertschätzers

Eine Wahl von $\hat{\mu}_n$, $n \in \mathbb{N}$, als Schätzer des Erwartungswerts $\mathbb{E}(X)$ könnte zum Beispiel das arithmetische Mittel

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

sein.

Für die asymptotischen Aussagen des folgenden Abschnitts wird das nächste Hilfsresultat für das arithmetische Mittel \bar{X}_n , $n \in \mathbb{N}$, benötigt. Dazu erfüllt die Zeitreihe $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ neben den im Grundmodell 1.1.3 beschriebenen Voraussetzungen die zusätzlichen Bedingungen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(|X| > \lambda x)}{P(|X| > x)} = \lambda^{-1/\gamma} \quad (4.1.4)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x)}{P(|X| > x)} = p \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X \leq -x)}{P(|X| > x)} = 1 - p, \quad (4.1.5)$$

mit $p \in [0, 1]$.

Für $\gamma \in (0, 1/2)$ sei $r(\gamma) \in (0, 1)$ der Schwellenwert, für den gerade noch

$$\mathbb{E}(|X|^{2+\kappa}) < \infty \quad \forall \kappa \in (0, r(\gamma))$$

gilt.

Satz 4.1.3. *Es liege das Grundmodell 1.1.3 vor. Ist $\gamma \in (0, 1/2)$, so gilt für das arithmetische Mittel \bar{X}_n , $n \in \mathbb{N}$, unter der Mischungsbedingung*

$$(M) \quad \exists d \in \left(0, \frac{r(\gamma)}{6 + r(\gamma)}\right) : \quad \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^4 \alpha(i)^d < \infty$$

die Gleichung

$$\bar{X}_n = \mathbb{E}(X) + O_P(n^{-1/2}). \quad (4.1.6)$$

Ist $\gamma \in (1/2, 1)$, so gilt für das arithmetische Mittel \bar{X}_n , $n \in \mathbb{N}$, unter (4.1.4) und (4.1.5) sowie unter geeigneten Zusatzbedingungen (z.B. (3.1) und (3.2) in [DH95, Theorem 3.1, Seite 895]) die schwache Konvergenz

$$\frac{n}{F_X^{\leftarrow}(1 - p/n)} (\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \quad (4.1.7)$$

wobei Y eine stabile Verteilung besitzt.

Außerdem gilt in diesem Fall für eine geeignete Version von \bar{X}_n und $Y_p := p^{-\gamma} Y$

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &= \mathbb{E}(X) + \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n} Y_p + o_P\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n}\right) \\ &= \mathbb{E}(X) + O_P\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n}\right) = \mathbb{E}(X) + o_P(n^{\gamma-1+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.8 erbracht. □

Bemerkung 4.1.4. Ein Nachweis von (4.1.7) wird unter den Bedingungen (3.1) und (3.2) in [DH95, Theorem 3.1, Seiten 895-898] erbracht. Gegebenenfalls kann es erforderlich sein, das Grundmodell 1.1.3 auf geeignete Weise anzupassen, damit die genannten Bedingungen im Kontext dieser Dissertation tatsächlich erfüllt werden. Die stabile Verteilung von Y ist dann durch (3.3) in [DH95, Theorem 3.1, Seite 895] charakterisiert.

Die Konvergenzrate des arithmetischen Mittels wird immer „schlechter“, je größer der Extremwertindex $\gamma \in (0, 1)$ ist. Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Tatsache, dass die Konvergenzrate $F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)/n$ regulär variierend ist mit Index $\gamma - 1$ (vgl. (5.8.1)). Besonders langsam wird die Konvergenzrate, wenn $\gamma \approx 1$. Es wird sich zeigen, dass es sich lohnen kann, einen weiteren Schätzer $\hat{\mu}_n$ für den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ heranzuziehen, um „bessere“ Aussagen über den relativen Schätzfehler des Expektilschätzers zu gewinnen (siehe Abschnitt 5.10.2). Es wird nun ein solcher Schätzer motiviert: Es gilt wegen $\bar{F}_X \in \mathcal{RV}_{-1/\gamma}$ und des Satzes von Karamata 1.2.3

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left((X - F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n))^+\right) + \mathbb{E}\left(\min(X, F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n))\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}^{\infty} \bar{F}_X(t) dt + \mathbb{E}(\min(X, F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n))) \\
 &\sim \frac{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \bar{F}_X(F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n))}{\frac{1}{\gamma} - 1} + \mathbb{E}(\min(X, F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n))) \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + \mathbb{E}(\min(X, F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n))).
 \end{aligned}$$

Einen Schätzer für den Erwartungswert erhält man, indem man die Größen γ und $F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)$ durch geeignete Schätzer $\hat{\gamma}_n$ bzw. $Q_n(1) = X_{n-k_n:n}$ ersetzt und den zweiten Summanden, in dem größere Werte als $F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)$ ausgeschlossen sind, durch das arithmetische Mittel schätzt. Man wählt also als alternativen Schätzer des Erwartungswerts

$$\begin{aligned}
 \hat{T}r_n &:= \frac{1}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min(X_{i:n}, X_{n-k_n:n}) \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-k_n} X_{i:n} + \sum_{i=n-k_n+1}^n X_{n-k_n:n} \right) \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k_n} X_{i:n} + \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} \\
 &= \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_n} \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k_n} X_{i:n}.
 \end{aligned}$$

Die Idee bei der Motivation dieses Schätzers ist, das arithmetische Mittel nur zu nutzen, wenn besonders große Werte von X , d.h. größer als $F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)$, ausgeschlossen werden. Dann besteht nämlich die Hoffnung, dass das arithmetische Mittel schneller gegen den Erwartungswert konvergiert, da es nicht durch große Ausreißer verzerrt werden kann. Der Schätzer $\hat{T}r_n$ wird daher im Folgenden als entzerrtes Mittel und der Term

$$S_n(k) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} X_{i:n}$$

als auf die $n-k$ kleinsten Beobachtungen getrimmtes Mittel bezeichnet.

Bemerkung 4.1.5. Für gewisse Verteilungen, die auch auf der negativen Achse einen schweren Tail besitzen, ist es sinnvoll, auch die Werte, die kleiner sind als $F_X^{\leftarrow}(k_n/n)$ aus dem Erwartungswert zu extrahieren. Die Verteilungsfunktion F_X ist nach Annahme (4.1.4) für $x \rightarrow -\infty$ regulär variierend mit Index $-1/\gamma$. Daher folgt wieder mit dem Satz von Karamata 1.2.3

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}((X - F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n))^+) - \mathbb{E}((X - F_X^{\leftarrow}(k_n/n))^-) \\
 &\quad + F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \bar{F}_X(F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)) + F_X^{\leftarrow}(k_n/n) F_X(F_X^{\leftarrow}(k_n/n))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbb{E} \left(X \mathbb{1}_{\{F_X^{\leftarrow}(k_n/n) \leq X \leq F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)\}} \right) \\
 = & \int_{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}^{\infty} \bar{F}_X(t) dt + \int_{-\infty}^{F_X^{\leftarrow}(k_n/n)} F_X(t) dt + \frac{k_n}{n} (F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + F_X^{\leftarrow}(k_n/n)) \\
 & + \mathbb{E} \left(X \mathbb{1}_{\{F_X^{\leftarrow}(k_n/n) \leq X \leq F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)\}} \right) \\
 \sim & \frac{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \bar{F}_X(F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n))}{\frac{1}{\gamma} - 1} + \frac{F_X^{\leftarrow}(k_n/n) F_X(F_X^{\leftarrow}(k_n/n))}{\frac{1}{\gamma} - 1} \\
 & + \frac{k_n}{n} (F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + F_X^{\leftarrow}(k_n/n)) + \mathbb{E} \left(X \mathbb{1}_{\{F_X^{\leftarrow}(k_n/n) \leq X \leq F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)\}} \right) \\
 = & \frac{1}{1-\gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + \frac{1}{1-\gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(k_n/n) + \mathbb{E} \left(X \mathbb{1}_{\{F_X^{\leftarrow}(k_n/n) \leq X \leq F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)\}} \right).
 \end{aligned}$$

Dies lässt sich entsprechend schätzen durch

$$\tilde{T}r_n := \frac{1}{1-\hat{\gamma}_n} \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} + \frac{1}{1-\tilde{\gamma}_n} \frac{k_n}{n} X_{k_n+1:n} + \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-k_n} X_{i:n},$$

wobei $\tilde{\gamma}_n$ ein Schätzer des Extremwertindex γ auf Basis der k_n kleinsten Beobachtungen sei.

Es sei angenommen, dass die dem Grundmodell 1.1.3 zugrundeliegenden Beobachtungen unabhängig und nichtnegativ sind, d.h. $F_X^{\leftarrow}(0) \geq 0$. Aus [CHM86, Theorem 3 (1.7), Seite 5] folgt dann

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} X_{i:n} = o_P \left(n^{\gamma-1} L \left(\frac{1}{n} \right) \right),$$

wobei $L \in \mathcal{LV}$. Dies zeigt, dass der zweite Summand der Darstellung

$$S_n(k_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-k_n} X_{i:n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} X_{i:n}$$

auf der rechten Seite tatsächlich schneller konvergiert als mit der Rate einer regulär variierenden Funktion mit Index $\gamma - 1$. Da in diesem Term die k_n kleinsten Beobachtungen einfließen und diese vom extremen Bereich der Verteilung somit weit entfernt liegen, rechtfertigt dies, der Einfachheit halber die Zusatzannahme

$$(\mathbf{Z}) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} X_{i:n} = o_P \left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \right) \quad \wedge \quad \sqrt{k_n} = O_P(F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n))$$

zu treffen. Für das entzerrte Mittel gilt schließlich folgender Konvergenzsatz für unabhängige, nichtnegative Beobachtungen im Grundmodell 1.1.3.

Satz 4.1.6. *Im Grundmodell 1.1.3 seien die Beobachtungen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig und nichtnegativ, d.h. $F_X^{\leftarrow}(0) \geq 0$. Ist $\gamma \in (1/2, 1)$, so gilt unter (Z) für das entzerrte Mittel $\hat{T}r_n$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$\hat{T}r_n = \mathbb{E}(X) + O_P\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\right).$$

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.9 erbracht. □

Bemerkung 4.1.7. Der Satz 4.1.6 lässt sich im Grundmodell 1.1.3 unter zusätzlichen Mischungsbedingungen aus [HKS87] auch für schwach abhängige Beobachtungen zeigen. Dies soll an dieser Stelle ausgeklammert werden, da die Wahl des entzerrten Mittels ohnehin nur für Extremwertindizes nahe 1 sinnvoll ist. Für die anschließende Simulationsstudie in Abschnitt 4.4 ist die Aussage für unabhängige Daten ausreichend.

4.2 Asymptotik des relativen Schätzfehlers und Zusammenfassung der Ergebnisse

Es liege das Grundmodell 1.1.3 vor. Gegenstand der Untersuchung für eine intermediäre Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und für das Niveau $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\alpha_n \nearrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ sind wie im vorigen Abschnitt motiviert die tatsächliche Funktion

$$f_{\alpha_n}(u_n) := -u_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \mathbb{E}((X - u_n)^+) + \mathbb{E}(X)$$

mit dem tatsächlichen Expektil ξ_{α_n} als Nullstelle, die Approximation

$$g_{\alpha_n}(u_n) := -u_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1} + \mathbb{E}(X)$$

von f_{α_n} mit dem approximativen Expektil e_{α_n} als Nullstelle und die zufällige Funktion

$$\hat{g}_{\alpha_n}(u_n) := -u_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{u_n \left(\frac{u_n}{X_{n-k_n:n}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}}}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} + \hat{\mu}_n, \quad (4.2.1)$$

welche g_{α_n} schätzt, mit dem Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ als zufällige Nullstelle. Hierbei sei für ein $w \in \mathbb{R}$

$$u_n := \beta_n v_\gamma + w \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

angesetzt und definiere

$$v_\gamma := \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)^{-\gamma}, \quad \gamma \in (0, 1).$$

Dabei sei $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$\beta_n := \frac{\left(\frac{k_n}{n} \right)^\gamma F_{k_n}^{\leftarrow}}{(1 - \alpha_n)^\gamma} \quad (4.2.2)$$

und

$$F_{k_n}^{\leftarrow} := F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n).$$

Man setze die Konvergenzbedingungen

$$\mathbf{(K)} \quad 1 - \alpha_n = o\left(\frac{k_n}{n}\right), \quad \log\left(\frac{k_n}{n(1 - \alpha_n)}\right) = o\left(\sqrt{k_n}\right) \quad \text{und} \quad \sqrt{k_n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) = O(1)$$

voraus.

Zur Formulierung des zentralen Satzes dieser Dissertation werden für

$$z_n := k_n^{-1/2} \log \left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} \right)$$

die folgenden Bedingungen

- **(K1)** $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n < \infty$ mit
 - $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n > 0$ oder
 - $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0$ und $(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} = o(z_n)$
- **(K2)** $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n < \infty$ mit
 - $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0$, $\gamma \in (1/2, 1)$, $z_n = o(n^{\gamma-1}(1-\alpha_n)^\gamma)$ und $\hat{\mu}_n := \bar{X}_n$
- **(K3)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = \infty$

betrachtet, deren Motivation sich aus Kapitel 5 ergibt.

Satz 4.2.1. *Im Grundmodell 1.1.3 gelte (K1) oder (K3). Dann gilt unter (K)*

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\log \left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} \right)} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\alpha_n} - 1 \\ \xi_{\alpha_n} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2).$$

Ist $\hat{\gamma}_n$ der Hill-Schätzer, so gilt $\sigma_S^2 = \gamma^2 r(1, 1)$, wobei r die Kovarianzfunktion des Gaußprozesses e aus Satz 2.1.3 sei.

Gilt (K2) im Grundmodell 1.1.3, dann konvergiert

$$\frac{n^{1-\gamma}}{(1-\alpha_n)^\gamma} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\alpha_n} - 1 \\ \xi_{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

unter (K) schwach gegen eine stabile Verteilung.

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.10 erbracht. □

Korollar 4.2.2. *Im Grundmodell 1.1.3 gelte unter (K)*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n < \infty \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0.$$

Dann gilt unter den Voraussetzungen von Satz 4.1.3 und 4.1.6

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\log \left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} \right)} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\alpha_n} - 1 \\ \xi_{\alpha_n} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2),$$

falls eine der Bedingungen

(i) $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$ mit $\gamma \in (0, 1/2)$ oder $\gamma \in (1/2, 1)$ und $n^{\gamma-1}(1 - \alpha_n)^\gamma = o(z_n)$

(ii) $\hat{\mu}_n = \hat{T}r_n$ mit $\gamma \in (1/2, 1)$.

erfüllt ist, wobei in (ii) unabhängige Beobachtungen vorausgesetzt seien, d.h. $\beta \equiv 0$.

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 5.11 erbracht. □

In der Tabelle 4.1 werden alle möglichen Konvergenzraten und Typen der Grenzverteilungen des relativen stochastischen Schätzfehlers $(\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n})/e_{\alpha_n}$ unter den sich im Beweis (vgl. Abschnitt 5.10) ergebenden Bedingungen und unter den Wahlmöglichkeiten des Erwartungswertschätzers $\hat{\mu}_n$ zusammengestellt. Dabei werde unterschieden zwischen

$$\mathbf{(F1)} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n < \infty \quad \text{und}$$

$$\mathbf{(F2)} \quad \beta_n z_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

und

$$\mathbf{(G1)} \quad \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = O(1) \quad \text{und}$$

$$\mathbf{(G2)} \quad \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Der Einfachheit halber werden die möglichen Spezialfälle

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = \infty \quad \wedge \quad \beta_n z_n \not\rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = \infty \quad \wedge \quad \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \not\rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

außer Acht gelassen.

Setze $\tilde{A}(t) := A(t) + \frac{t}{\gamma c} t^\gamma$ mit dem $c > 0$ aus Lemma 1.2.7. Mehr zur Motivation von \tilde{A} (vgl. (5.10.18)) findet sich in Kapitel 5.

(F1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n < \infty$			
$\hat{\mu}_n$	Bedingungen	Rel. stoch. Fehler $\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}}$	Typ der Grenzvert.
$\hat{\mu}_n := \bar{X}_n$	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n > 0$	$O_P(z_n)$	$\mathcal{N}(0, \sigma_S^2)$
	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0$ $(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} = o(z_n)$		
	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0,$ $\gamma \in (0, 1/2)$		
$\hat{\mu}_n := \bar{X}_n$	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0,$ $\gamma \in (1/2, 1),$ $n^{\gamma-1}(1 - \alpha_n)^\gamma = o(z_n)$	$O_P\left(\frac{F_X^+(1-1/n)}{n\beta_n}\right)$	stabile Verteilung
	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0,$ $\gamma \in (1/2, 1),$ $z_n = o(n^{\gamma-1}(1 - \alpha_n)^\gamma)$		
$\hat{\mu}_n := \hat{T}r_n$	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0,$ $\gamma \in (1/2, 1)$	$O_P(z_n)$	$\mathcal{N}(0, \sigma_S^2)$
(F2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = \infty$			
$\hat{\mu}_n$	Bedingungen	Rel. stoch. Fehler $\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}}$	Typ der Grenzvert.
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = \infty$	$O_P(z_n)$	$\mathcal{N}(0, \sigma_S^2)$
(G1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) < \infty$			
	Bedingungen	Rel. syst. Fehler $\frac{e_{\alpha_n} - \hat{\xi}_{\alpha_n}}{\hat{\xi}_{\alpha_n}}$	Grenzwert
	$\beta_n^{-2} = o\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)$	$O\left(\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)$	γ
	$\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = O(\beta_n^{-2})$	$O(\beta_n^{-3})$	k.A.
(G2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = \infty$			
	Bedingungen	Rel. syst. Fehler $\frac{e_{\alpha_n} - \hat{\xi}_{\alpha_n}}{\hat{\xi}_{\alpha_n}}$	Grenzwert
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = \infty$	$O\left(\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)$	γ

Tabelle 4.1 – Zusammenstellung der möglichen Konvergenzraten und Grenzverteilungen des relativen stochastischen Fehlers $(\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n})/e_{\alpha_n}$ unter der Fallunterscheidung des Konvergenzverhaltens von $\beta_n z_n$ bzw. $\beta_n \tilde{A}(k_n/n)$ und der Wahl von $\hat{\mu}_n$.

4.2.1 Zusammenstellung der Kombinationsmöglichkeiten mit Wahl-empfehlungen

Um die in der Tabelle 4.1 aufgelisteten Bedingungen in den Fällen (F1) und (F2) nach k_n , $n \in \mathbb{N}$, aufzuschlüsseln, sei angenommen, dass die Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vorgegeben ist. Im Fall (F1) gilt

$$k_n^{-1/2} \log \left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} \right) = O(\beta_n^{-1}) = O((1-\alpha_n)^\gamma).$$

Es folgt $k_n^{-1/2} = o((1-\alpha_n)^\gamma)$, d.h.

$$\frac{(1-\alpha_n)^{-2\gamma-1}}{n} = o\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right).$$

Damit erhält man zum einen

$$\log \left(\frac{(1-\alpha_n)^{-2\gamma-1}}{n} \right) = O \left(\log \left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} \right) \right) \quad (4.2.3)$$

und zum anderen folgt aus

$$\frac{\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}}{\frac{1}{1-\alpha_n}} = \frac{k_n}{n} \rightarrow 0$$

auch

$$\log \left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} \right) = O \left(\log \left(\frac{1}{1-\alpha_n} \right) \right). \quad (4.2.4)$$

Nun ist (F1) wegen (4.2.4) insbesondere erfüllt, wenn gilt

$$k_n^{-1/2} \log \left(\frac{1}{1-\alpha_n} \right) = O((1-\alpha_n)^\gamma),$$

d.h.

$$\frac{\log^2(1-\alpha_n)}{(1-\alpha_n)^{2\gamma}} = O(k_n).$$

Gilt außerdem $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n > 0$, so muss

$$(1-\alpha_n)^\gamma = O \left(k_n^{-1/2} \log \left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} \right) \right)$$

erfüllt sein. Dies ist wegen (4.2.3) erst recht der Fall, wenn

$$(1-\alpha_n)^\gamma = O \left(k_n^{-1/2} \log \left(\frac{(1-\alpha_n)^{-2\gamma-1}}{n} \right) \right),$$

d.h.

$$k_n = O\left(\frac{\log^2\left(\frac{(1-\alpha_n)^{-2\gamma-1}}{n}\right)}{(1-\alpha_n)^{2\gamma}}\right). \quad (4.2.5)$$

Gilt aber $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0$ und $\gamma \in (0, 1/2)$, so darf (4.2.5) gerade nicht erfüllt sein. Dies ist der Fall, wenn gilt

$$\frac{\log^2\left(\frac{(1-\alpha_n)^{-2\gamma-1}}{n}\right)}{(1-\alpha_n)^{2\gamma}} = o(k_n).$$

Ist $\gamma \in (1/2, 1)$ und gilt $n^{\gamma-1}(1-\alpha_n)^\gamma = o(z_n)$, so ist dies wegen (4.2.3) insbesondere erfüllt, wenn

$$n^{\gamma-1}(1-\alpha_n)^\gamma = o\left(k_n^{-1/2} \log\left(\frac{(1-\alpha_n)^{-2\gamma-1}}{n}\right)\right)$$

gilt, d.h.

$$k_n = o\left(\frac{n^{2(1-\gamma)}}{(1-\alpha_n)^{2\gamma}} \log^2\left(\frac{(1-\alpha_n)^{-2\gamma-1}}{n}\right)\right).$$

Ist für $\gamma \in (1/2, 1)$ dagegen $z_n = o(n^{\gamma-1}(1-\alpha_n)^\gamma)$ erfüllt, so ist dies wegen (4.2.4) erst recht richtig, wenn gilt

$$k_n^{-1/2} \log\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right) = o(n^{\gamma-1}(1-\alpha_n)^\gamma),$$

d.h.

$$\frac{n^{2(1-\gamma)}}{(1-\alpha_n)^{2\gamma}} \log^2(1-\alpha_n) = o(k_n).$$

Im Fall (F2) gilt $\beta_n^{-1} = o(z_n)$. Dies ist insbesondere dann erfüllt, wenn $(1-\alpha_n)^\gamma = o(k_n^{-1/2})$, d.h.

$$k_n = o\left(\frac{1}{(1-\alpha_n)^{2\gamma}}\right). \quad (4.2.6)$$

Damit der systematische Fehler $O(\tilde{A}(k_n/n))$ vernachlässigbar ist, muss darüber hinaus immer

$$\sqrt{k_n} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = O(1)$$

gelten (vgl. Abschnitt 5.10.2.5). Aufgrund der Forderung $1-\alpha_n = o(k_n/n)$ ist dies unter der Maßgabe

$$k_n = O\left(\tilde{A}^{-2}(1-\alpha_n)\right)$$

gültig.

Diese an $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gestellten Bedingungen werden in der nachfolgenden Tabelle 4.2 für vorgegebenes $\gamma \in (0, 1)$ und $\alpha_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, zusammengefasst. Dabei bedeute $a_n \prec b_n$ für beliebige Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht schneller gegen unendlich konvergiert als $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass dies nur heuristisch zu interpretieren ist und keine formal korrekte Schreibweise ist. Hierfür sei wieder an die obige Tabelle 4.1 verwiesen. Setze für ein gegebenes $\alpha_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n := \log \left(\frac{(1 - \alpha_n)^{-2\gamma-1}}{n} \right) \quad \wedge \quad y_n := \log \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \quad \wedge \quad z_n := k_n^{-1/2} \log \left(\frac{k_n}{n(1 - \alpha_n)} \right).$$

Mit κ_n sei die exakte Konvergenzrate von $\hat{\mu}_n$ gegen den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ bezeichnet. Außerdem gelte zur Vernachlässigbarkeit des systematischen Fehlers stets

$$k_n \prec \tilde{A}^{-2}(1 - \alpha_n).$$

γ	$\hat{\mu}_n$	Bedingung	Rel. stoch. Fehler $\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}}$
$\gamma \in (0, 1/2)$		$\frac{y_n^2}{(1 - \alpha_n)^{2\gamma}} \prec k_n \prec \frac{x_n^2}{\kappa_n^2 (1 - \alpha_n)^{2\gamma}}$	$O_P(z_n)$
	$\hat{\mu}_n := \bar{X}_n$	$k_n \succ \frac{x_n^2}{(1 - \alpha_n)^{2\gamma}}$	$O_P(z_n)$
$\gamma \in (1/2, 1)$		$\frac{y_n^2}{(1 - \alpha_n)^{2\gamma}} \prec k_n \prec \frac{x_n^2}{\kappa_n^2 (1 - \alpha_n)^{2\gamma}}$	$O_P(z_n)$
	$\hat{\mu}_n := \bar{X}_n$	$\frac{x_n^2}{(1 - \alpha_n)^{2\gamma}} \prec k_n \prec \frac{n^{2(1-\gamma)} x_n^2}{(1 - \alpha_n)^{2\gamma}}$	$O_P(z_n)$
		$k_n \succ \frac{n^{2(1-\gamma)} y_n^2}{(1 - \alpha_n)^{2\gamma}}$	$O_P(n^{\gamma-1}(1 - \alpha_n)^\gamma)$
$\hat{\mu}_n := \hat{T}r_n$	$k_n \succ \frac{y_n^2}{(1 - \alpha_n)^{2\gamma}}$	$O_P(z_n)$	

Tabelle 4.2 – Zusammenstellung der Kombinationsmöglichkeiten von $\hat{\mu}_n$ und k_n für gegebenes γ und α_n im Fall (F1), die zur in der rechten Spalte gelisteten Konvergenzrate des relativen Schätzfehlers $(\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n})/\xi_{\alpha_n}$ führen. In hellgrün ist die jeweils schnellste Konvergenzrate markiert.

In Tabelle 4.2 sind für gegebenes γ und α_n Kombinationsmöglichkeiten von $\hat{\mu}_n$ und k_n im Fall (F1) mit zugehöriger Konvergenzrate des relativen Schätzfehlers $(\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n})/\xi_{\alpha_n}$ zusammengefasst. In hellgrün ist die jeweils schnellste Konvergenzrate markiert. Die Kombination von $\hat{\mu}_n$ und k_n links neben einem hellgrünen Feld kann als jeweilige Wahlempfehlung für $\gamma \in (0, 1/2)$ bzw. $\gamma \in (1/2, 1)$ aufgefasst werden. Unter dieser Wahl konvergiert der relative stochastische Fehler also am schnellsten gegen 0, denn zum einen gilt

$$z_n = o(n^{\gamma-1}(1 - \alpha_n)^\gamma)$$

und zum anderen gilt für eine weitere intermediäre Folge $(k_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ mit denselben Bedingungen wie für $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $k_n = o(k_n^*)$

$$\frac{k_n^{*-1/2} \log\left(\frac{k_n^*}{n(1-\alpha_n)}\right)}{k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)} = \frac{k_n^{*-1/2} \log(k_n^*)}{k_n^{-1/2} \log(k_n)} \frac{1 - \frac{\log(n(1-\alpha_n))}{\log(k_n^*)}}{1 - \frac{\log(n(1-\alpha_n))}{\log(k_n)}} = O(1),$$

da die Abbildung $t \mapsto t^{-1/2} \log(t)$ monoton fallend gegen 0 konvergiert und da $\log(n(1-\alpha_n)) < \log(k_n)$ bzw. $\log(n(1-\alpha_n)) < \log(k_n^*)$ ab einem hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ wegen $1-\alpha_n = o(k_n/n)$ bzw. $1-\alpha_n = o(k_n^*/n)$ gilt. Das bedeutet

$$k_n^{*-1/2} \log\left(\frac{k_n^*}{n(1-\alpha_n)}\right) = O\left(k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)\right),$$

falls $k_n = o(k_n^*)$.

Im Fall (F2) sei für einen beliebigen Schätzer $\hat{\mu}_n$ ein möglichst großes $k_n \prec (1-\alpha_n)^{-2\gamma}$ gewählt, um eine optimale Konvergenzrate des relativen Schätzfehlers von $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ zu erhalten (vgl. (4.2.6)).

4.3 Literaturvergleich

In diesem Teil des Kapitels soll der in dieser Arbeit beschriebene Zugang zur Schätzung des Expektils ξ_{α_n} mit dem bereits bekannten Ansatz von Daouia et. al. [DGS18] verglichen werden.

4.3.1 Expektilschätzung nach Daouia et. al. [DGS18]

Daouia et. al. [DGS18] benutzen in ihrem Artikel Expektile, um alternative Risikomaße zum Value at Risk (VaR), Expected Shortfall (ES), etc. zu schätzen. Sie diskutieren zwei Situationen zum Schätzen von Expektilen $\xi_{\alpha'_n}$ und ξ_{α_n} zu den hohen Niveaus $\alpha'_n, \alpha_n \nearrow 1$. Eine Situation ist die so genannte „intermediäre“ Expektilschätzung mit $n(1 - \alpha'_n) \rightarrow \infty$ und die andere die „extreme“ Expektilschätzung mit $n(1 - \alpha_n) \rightarrow d$ für eine Konstante $d \geq 0$. Im zweiten Fall konvergiert α_n also deutlich schneller gegen 1. Dies ist gerade ein Spezialfall der in dieser Dissertation gestellten Forderung

$$1 - \alpha_n = o\left(\frac{k_n}{n}\right).$$

4.3.1.1 Intermediäre Expektilschätzung

Es seien X_1, X_2, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit streng monoton wachsender Verteilungsfunktion F_X .

Daouia et. al. [DGS18] motivieren zwei Expektilschätzer zum Niveau $\alpha'_n \nearrow 1$ mit $n(1 - \alpha'_n) \rightarrow \infty$.

Der erste Schätzer, der sogenannte intermediäre indirekte Expektilschätzer, basiert auf dem Quantil $F_X^{\leftarrow}(\alpha'_n)$ zum Niveau α'_n :

$$\hat{\Xi}_{\alpha_n}^* := \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1\right)^{-\hat{\gamma}_n} X_{n - \lfloor n(1 - \alpha'_n) \rfloor : n}. \quad (4.3.1)$$

Hierbei sei $\hat{\gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$, ein geeigneter Schätzer für den Extremwertindex γ . Offenbar setzt diese Definition des Expektilschätzers $\hat{\gamma}_n < 1$ voraus.

Motiviert wurde dieser Schätzer über die Darstellung

$$\frac{\xi_\alpha}{F_X^{\leftarrow}(\alpha)} = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^{-\gamma} (1 + r(\alpha))$$

mit

$$r(\alpha) := \frac{\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^\gamma}{F_X^{\leftarrow}(\alpha)} (\mathbb{E}(X) + o(1)) + \left(\frac{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^\rho}{1 + \rho - \gamma} - \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^\rho - 1}{\rho} + o(1) \right) A(1 - \alpha)$$

für $\alpha \nearrow 1$. Hier wird also insbesondere für Verteilungen mit großem Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ in Relation zum wahren Expektil ein hoher systematischer Fehler in Kauf genommen. Der Fehler kann auch bei ungünstiger Kombination von γ und $F_X^{\leftarrow}(\alpha)$ aufgrund des Vorfaktors $\gamma(1/\gamma - 1)^\gamma / F_X^{\leftarrow}(\alpha)$ stark ins Gewicht fallen. Dieses Phänomen zeigt sich in der Simulationsstudie in Abschnitt 4.4.

Es wird gezeigt, dass der intermediäre Expektilschätzer $\hat{\Xi}_{\alpha'_n}^*$ bei der Wahl des Hill-Schätzers für $\hat{\gamma}_n$ und unter den folgenden Bedingungen mit der Rate $O_P\left(\left(n(1 - \alpha'_n)\right)^{-1/2}\right)$ schwach gegen eine Normalverteilung konvergiert.

Satz 4.3.1. *Es gelte $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, A)$ mit $\gamma \in (0, 1)$. Wenn*

$$\frac{\sqrt{k_n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \longrightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \sqrt{k_n}A\left(\frac{n}{k_n}\right) \longrightarrow \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$\sqrt{n(1 - \alpha'_n)} \begin{pmatrix} \hat{\Xi}_{\alpha'_n}^* \\ \xi_{\alpha'_n} \end{pmatrix} - 1 \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\frac{m(\gamma)}{1 + \rho} \lambda_2 - \lambda(\gamma), v(\gamma)\right)$$

mit

$$\lambda(\gamma) := \gamma \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^\gamma \mathbb{E}(X) \lambda_1 + \left(\frac{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^\rho}{1 + \rho - \gamma} - \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^\rho - 1}{\rho}\right) \lambda_2,$$

$$m(\gamma) := \frac{1}{1 - \gamma} - \log\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)$$

und

$$v(\gamma) := \gamma^2 (1 + m^2(\gamma)).$$

Beweis. Siehe [DGS18, Korollar 2, Seite 269]. □

Der zweite Schätzer, der sogenannte intermediäre direkte Expektilschätzer, lässt sich aus dem empirischen Gegenstück zur Definition des Expektils aus Bemerkung 4.1.2 motivieren:

$$\tilde{\Xi}_{\alpha'_n}^* := \arg \min_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - u)^2 |\alpha'_n - \mathbf{1}_{\{X_i \leq u\}}|.$$

Für diesen erhält man die nachfolgende Konvergenzaussage.

Satz 4.3.2. *Es sei $\gamma \in (0, 1/2)$ und es existiere ein $\delta > 0$, sodass $\mathbb{E}\left(|X^-|^{2+\delta}\right) < \infty$. Dann gilt*

$$\sqrt{n(1 - \alpha'_n)} \begin{pmatrix} \tilde{\Xi}_{\alpha'_n}^* \\ \xi_{\alpha'_n} \end{pmatrix} - 1 \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{2\gamma^3}{1 - 2\gamma}\right).$$

Beweis. Siehe [DGS18, Theorem 2, Seite 270 f.]. □

4.3.1.2 Extreme Expekttilschätzung

Die Grundidee der Autoren ist nun, die mittlere Expekttilschätzung zum Niveau α'_n mit $n(1 - \alpha'_n) \rightarrow \infty$ auf das extreme Niveau α_n mit $n(1 - \alpha_n) \rightarrow d$ zu extrapolieren. Sie motivieren je nach mittlerem Expekttilschätzer die beiden extremen Expekttilschätzer

$$\hat{\Xi}_{\alpha_n} := \left(\frac{1 - \alpha_n}{1 - \alpha'_n} \right)^{-\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha'_n}^* \quad (4.3.2)$$

bzw.

$$\tilde{\Xi}_{\alpha_n} := \left(\frac{1 - \alpha_n}{1 - \alpha'_n} \right)^{-\tilde{\gamma}_n} \tilde{\Xi}_{\alpha'_n}^*. \quad (4.3.3)$$

Zur besseren Unterscheidbarkeit werde $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ als indirekter und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ als direkter Expekttilschätzer bezeichnet. Wieder wird gezeigt, dass diese Schätzer unter geeigneten Bedingungen schwach gegen eine Normalverteilung konvergieren.

Satz 4.3.3. *Es gelte $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, A)$ mit $\gamma \in (0, 1)$ und $\rho > 0$. Wenn*

$$\frac{\sqrt{k_n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{k_n} A \left(\frac{k_n}{n} \right) \rightarrow \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{n(1 - \alpha'_n)}}{\log \left(\frac{1 - \alpha'_n}{1 - \alpha_n} \right)} \rightarrow \infty,$$

dann gilt die schwache Konvergenz

$$\frac{\sqrt{n(1 - \alpha'_n)}}{\log \left(\frac{1 - \alpha'_n}{1 - \alpha_n} \right)} \left(\frac{\hat{\Xi}_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} - 1 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\frac{\lambda_2}{1 + \rho}, \gamma^2 \right)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Gilt zusätzlich $\gamma \in (0, 1/2)$ und $\mathbb{E}(|X^-|^{2+\delta}) < \infty$ für ein $\delta > 0$, dann gilt auch

$$\frac{\sqrt{n(1 - \alpha'_n)}}{\log \left(\frac{1 - \alpha'_n}{1 - \alpha_n} \right)} \left(\frac{\tilde{\Xi}_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} - 1 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\frac{\lambda_2}{1 + \rho}, \gamma^2 \right).$$

Beweis. Siehe [DGS18, Korollar 3 und 4, Seite 273 f.]. □

4.3.2 Vergleich der Konvergenzraten und Grenzverteilungen

Unter den im vorigen Abschnitt beschriebenen Bedingungen soll die Konvergenzrate der Schätzer $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$, nämlich

$$(*) \quad O_P \left((n(1 - \alpha'_n))^{-1/2} \log \left(\frac{1 - \alpha'_n}{1 - \alpha_n} \right) \right),$$

mit den möglichen Konvergenzraten des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$, welcher in Abschnitt 4.1 motiviert wurde, verglichen werden. In den Fällen (F1) und (F2) sind insgesamt zwei verschiedene Konvergenzraten des relativen Schätzfehlers möglich (vgl. Abschnitt 4.2):

$$(i) \quad O_P(z_n) \quad \text{sowie}$$

$$(ii) \quad O_P\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n\beta_n}\right).$$

Gilt $k_n/n = o(1 - \alpha'_n)$, so folgt

$$\frac{(n(1 - \alpha'_n))^{-1/2} \log\left(\frac{1-\alpha'_n}{1-\alpha_n}\right)}{z_n} = \frac{\sqrt{k_n} \log\left(\frac{1-\alpha'_n}{1-\alpha_n}\right)}{\sqrt{n(1 - \alpha'_n)} \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, da der Quotient der Argumente der Logarithmen gerade der Kehrwert von $k_n/(n(1 - \alpha'_n))$ ist und der Quotient der Logarithmen dadurch langsamer gegen unendlich konvergiert als jede positive Potenz von $k_n/(n(1 - \alpha'_n))$ gegen 0. In dem Fall konvergiert die Rate aus (*) also schneller gegen 0 als die aus (i). Andernfalls, d.h. wenn $1 - \alpha'_n = O(k_n/n)$ gilt, konvergiert die Rate aus (i) mindestens genauso schnell gegen 0.

Klassischerweise wird in der Extremwerttheorie

$$\alpha'_n := 1 - \frac{k_n}{n}$$

vorausgesetzt. Ein Vergleich von (*) und (i) ergibt dann

$$\frac{(n(1 - \alpha'_n))^{-1/2} \log\left(\frac{1-\alpha'_n}{1-\alpha_n}\right)}{z_n} = \frac{k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)}{k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)} = 1,$$

d.h. die beiden Raten sind in diesem Fall sogar gleich. Im Fall unabhängiger Beobachtungen ist der Gaußprozess e aus Satz 2.2.3 eine Brown'sche Bewegung W , d.h. ein zentrierter Gaußprozess mit Kovarianzfunktion $r(s, t) = \min(s, t)$ für alle $(s, t) \in (0, 1]^2$. Unter den in Satz 2.2.3 genannten Bedingungen sind dann auch die Grenzverteilungen der konkurrierenden Schätzer gleich, falls $\lambda_2 = 0$, nämlich normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\gamma^2 = \gamma^2 r(1, 1)$.

Der Fall (ii) kann unter der Bedingung $n(1 - \alpha_n) \rightarrow d > 0$ nicht eintreten. Für $\gamma \in (1/2, 1)$ folgte nämlich wegen $1 - \alpha_n \sim d/n$ und Lemma 1.2.7

$$\begin{aligned} \beta_n z_n &= \frac{\left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}{(1 - \alpha_n)^\gamma} k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n(1 - \alpha_n)}\right) \sim \frac{c}{d^\gamma} n^\gamma k_n^{-1/2} \log(k_n) \\ &= \frac{c}{d^\gamma} n^{\gamma - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{n}{k_n}} \log(k_n) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Ein Vergleich mit der Rate aus (ii), für die $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0$ vorausgesetzt wird, ist daher entbehrlich.

4.3.3 Vergleich der Voraussetzungen und des Berechnungsaufwands

In diesem Abschnitt werden die einzelnen vorausgesetzten Annahmen miteinander verglichen. Zunächst ist für die Indizes $\gamma \in (0, 1)$ und $\rho \geq 0$ festzustellen, dass die natürlichen Bedingungen der regulären Variation und Bedingung zweiter Ordnung $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, A)$ mit der Hilfsfunktion zweiter Ordnung A Grundlage beider Schätzmethoden sind.

Ein erster Unterschied zeigt sich in der Abhängigkeitsstruktur der zugrundeliegenden Zeitreihen. Daouia et. al. [DGS18] betrachten unabhängige Zufallsvariablen, wohingegen in dieser Dissertation zusätzlich eine schwach abhängige Zeitreihe zugelassen ist, was die Realität in der Regel etwas genauer beschreiben kann.

Ferner wurden in dieser Dissertation für die intermediäre Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaften

$$1 - \alpha_n = o\left(\frac{k_n}{n}\right) \quad \text{und} \quad \log\left(\frac{k_n}{n(1 - \alpha_n)}\right) = o\left(\sqrt{k_n}\right)$$

sowie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k_n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) < \infty$$

gefordert. Diese Bedingungen finden sich im Wesentlichen auch in [DGS18] wieder. Hier gilt etwas spezieller $\sqrt{k_n} A(k_n/n) \rightarrow \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Allerdings wird außerdem die Annahme getroffen, dass

$$\frac{\sqrt{k_n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R} \tag{4.3.4}$$

gilt, was die Wahlmöglichkeiten von $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ weiter einschränkt. Es müsste nämlich wegen Lemma 1.2.7

$$\frac{\sqrt{k_n}}{c\left(\frac{k_n}{n}\right)^{-\gamma} (1 + \gamma A\left(\frac{k_n}{n}\right)) + l} \rightarrow \lambda_1$$

gelten, was wegen $A\left(\frac{k_n}{n}\right) \rightarrow 0$

$$\sqrt{k_n} = O\left(\left(\frac{k_n}{n}\right)^{-\gamma}\right)$$

bzw.

$$k_n = O\left(n^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}}\right) \tag{4.3.5}$$

für $n \rightarrow \infty$ zur Folge hat. Die Bedingung zweiter Ordnung $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, A)$ führt auf die Bedingung

$$k_n = O\left(n^{\frac{2\rho}{2\rho+1}}\right). \tag{4.3.6}$$

Vergleiche hierfür die Diskussion nach Bemerkung 3.2.7 in [DHF06, Seite 76 f.]. Im Fall $\gamma < \rho$ würde (4.3.5) eine echte Verschärfung der Bedingung (4.3.6) bedeuten. Es liegt die Vermutung nahe, dass das Theorem 3 in [DGS18, Theorem 3, Seite 273] auch ohne (4.3.4) auskommt. In diesem Fall wäre eine Schwäche in der Beweisführung des Theorems 3 von Daouia et. al. zu erwarten.

Ein Nachteil der Verwendung des Expektilschätzers dieser Dissertation ist der Aufwand der Berechnung. Der Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ ergibt sich nämlich als Nullstelle einer nicht linearen Abbildung, welche sich unter Umständen nur numerisch bestimmen lässt. Die Bestimmung des indirekten Expektilschätzers $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ in [DGS18] gestaltet sich aufgrund der expliziten Darstellung des Schätzers einfacher. Dagegen ist der direkte Expektilschätzer $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ ebenfalls nur über eine Nullstelle zu bestimmen. Die zugrundeliegende Funktion ist aber im Wesentlichen quadratisch.

4.3.4 Zusammenhang zum indirekten Expektilschätzer

In der Simulationsstudie in Abschnitt 4.4 stellte sich heraus, dass sich die Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ bei gleichem k_n unter der Wahl $\alpha'_n := 1 - k_n/n$ nur wenig unterscheiden und bei direkter Gegenüberstellung in einem Plot sogar auf einer Geraden liegen (siehe Abbildung 4.4.21 auf Seite 70). Hierfür soll im Folgenden ein Erklärungsansatz gegeben werden.

Wenn man in der Darstellung des Schätzers

$$\hat{\Xi}_{\alpha_n} \stackrel{(4.3.2)}{=} \left(\frac{1 - \alpha_n}{1 - \alpha'_n} \right)^{-\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha'_n}^* \stackrel{(4.3.1)}{=} \left(\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1 \right) \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \right)^{-\hat{\gamma}_n} X_{n-k_n:n} \quad (4.3.7)$$

überall $\hat{\gamma}_n$ durch γ und $X_{n-k_n:n}$ durch $F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)$ ersetzt, ist erkennbar, dass sich gerade der führende Term $\beta_n v_\gamma$ des Schätzers

$$\hat{\xi}_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma + o_P(\beta_n)$$

ergibt.

Als eine erste Näherung für die Nullstelle von \hat{g}_{α_n} ergibt sich

$$(2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n} + \hat{\gamma}_n \hat{\mu}_n.$$

In der Tat gilt nämlich

$$\hat{g}_{\alpha_n}((2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n}) \stackrel{(4.2.1)}{=} \left(\frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{\left(\frac{(2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n}}{X_{n-k_n:n}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}}}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} - 1 \right) (2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n} + \hat{\mu}_n$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1 \right)^{-1} X_{n-k_n:n}^{\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} \hat{\Xi}_{\alpha_n}^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} - 1 \right) \\
 &\quad \cdot (2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n} + \hat{\mu}_n \\
 &\stackrel{(4.3.7)}{=} \left(\hat{\Xi}_{\alpha_n}^{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - \frac{1}{\hat{\gamma}_n}} - 1 \right) (2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n} + \hat{\mu}_n \\
 &= \hat{\mu}_n
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \hat{g}'_{\alpha_n}((2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n}) &\stackrel{(5.10.31)}{=} -1 + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{X_{n-k_n:n}^{\frac{1}{\hat{\gamma}_n}}}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} \left(1 - \frac{1}{\hat{\gamma}_n} \right) \frac{1}{2\alpha_n - 1} \hat{\Xi}_{\alpha_n}^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} \\
 &\stackrel{(4.3.7)}{=} -1 - \frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} X_{n-k_n:n}^{\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} \frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1 \right) X_{n-k_n:n}^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} \\
 &= -\frac{1}{\hat{\gamma}_n}
 \end{aligned}$$

und daher approximativ

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_{\alpha_n}((2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n} + \hat{\gamma}_n \hat{\mu}_n) &\approx \hat{g}_{\alpha_n}((2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n}) + \hat{\gamma}_n \hat{\mu}_n \hat{g}'_{\alpha_n}((2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n}) \\
 &= \hat{\mu}_n - \hat{\mu}_n \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Falls die Schätzer $\hat{\gamma}_n$ und $\hat{\mu}_n$ „genau“ sind und $\mathbb{E}(X)$ „klein“ in Relation zum wahren Expektil ist, so sollten die Punkte $(\hat{\Xi}_{\alpha_n}, \hat{\xi}_{\alpha_n})$ auf der Geraden $x \mapsto (2\alpha_n - 1)^{\gamma} x + \gamma \mathbb{E}(X)$ liegen. Es ist zu beachten, dass $\hat{\gamma}_n$ selbst von $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ abhängt, denn für eine Funktion

$$h_n(x) := \exp \left(-x \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right) \right) X_{n-k_n:n} \quad \forall x > 0$$

folgt

$$\begin{aligned}
 h_n(\hat{\gamma}_n) &= \exp \left(-\hat{\gamma}_n \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1 \right) \right) \right) X_{n-k_n:n} \\
 &= \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1 \right) \right)^{-\hat{\gamma}_n} X_{n-k_n:n} \\
 &= \hat{\Xi}_{\alpha_n}.
 \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Um diesem Problem zu begegnen, betrachte man

$$h'_n(x) = \left(-\log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right) + \frac{1}{1-x} \right) h_n(x)$$

und

$$\begin{aligned} h_n''(x) &= \left(-\log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right) + \frac{1}{1-x} \right) h_n'(x) + \left(\frac{1}{x-x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \right) h_n(x) \\ &= \left(\left[-\log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right) + \frac{1}{1-x} \right]^2 + \frac{1}{x-x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \right) h_n(x). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Taylor existiert eine Zufallsvariable $\Theta_{\gamma,n} \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$h_n(\hat{\gamma}_n) = h_n(\gamma) + h_n'(\gamma)(\hat{\gamma}_n - \gamma) + \frac{h_n''(\gamma + \Theta_{\gamma,n}(\hat{\gamma}_n - \gamma))}{2}(\hat{\gamma}_n - \gamma)^2, \quad (4.3.9)$$

wobei für $\bar{\Theta}_{\gamma,n} := \gamma + \Theta_{\gamma,n}(\hat{\gamma}_n - \gamma)$

$$\begin{aligned} h_n''(\bar{\Theta}_{\gamma,n}) &= \left(-\log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\bar{\Theta}_{\gamma,n}} - 1 \right) \right) + \frac{1}{1-\bar{\Theta}_{\gamma,n}} \right)^2 h_n(\bar{\Theta}_{\gamma,n}) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\bar{\Theta}_{\gamma,n} - \bar{\Theta}_{\gamma,n}^2} + \frac{1}{(1-\bar{\Theta}_{\gamma,n})^2} \right) h_n(\bar{\Theta}_{\gamma,n}) \\ &= O_P \left(\log^2 \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) h_n(\bar{\Theta}_{\gamma,n}) \right) \end{aligned}$$

gilt mit

$$\begin{aligned} \frac{h_n(\bar{\Theta}_{\gamma,n})}{h_n'(\hat{\gamma})} &= \frac{\exp \left(-\bar{\Theta}_{\gamma,n} \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\bar{\Theta}_{\gamma,n}} - 1 \right) \right) \right) X_{n-k_n:n}}{\left(-\log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}} - 1 \right) \right) + \frac{1}{1-\hat{\gamma}} \right) \exp \left(-\hat{\gamma} \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}} - 1 \right) \right) \right) X_{n-k_n:n}} \\ &= \frac{\exp \left(-\bar{\Theta}_{\gamma,n} \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) + \gamma \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) \right)}{-\log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}} - 1 \right) \right) + \frac{1}{1-\hat{\gamma}}} \\ &\quad \cdot \exp \left(\gamma \log \left(\frac{1}{\hat{\gamma}} - 1 \right) - \bar{\Theta}_{\gamma,n} \log \left(\frac{1}{\bar{\Theta}_{\gamma,n}} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{\exp \left(-\Theta_{\gamma,n}(\hat{\gamma}_n - \gamma) \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) \right)}{-\log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}} - 1 \right) \right) + \frac{1}{1-\hat{\gamma}}} O_P(1) \\ &= O_P \left(\log^{-1} \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) \right), \end{aligned}$$

da

$$\Theta_{\gamma,n}(\hat{\gamma}_n - \gamma) \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) = O_P \left(k_n^{-1/2} \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) \right) = o_P(1).$$

Das bedeutet

$$h_n''(\bar{\Theta}_{\gamma,n}) = O_P \left(\log^2 \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) h_n(\bar{\Theta}_{\gamma,n}) \right) = O_P \left(\log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \right) h_n'(\gamma) \right).$$

Insgesamt folgt damit wegen (4.3.9)

$$h_n(\hat{\gamma}_n) = h_n(\gamma) + h'_n(\gamma)(\hat{\gamma}_n - \gamma) + O_P\left(k_n^{-1} \log\left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n}\right) h'_n(\gamma)\right)$$

und somit

$$\hat{\gamma}_n - \gamma \sim \frac{h_n(\hat{\gamma}_n) - h_n(\gamma)}{h'_n(\gamma)} \stackrel{(4.3.8)}{=} \frac{\hat{\Xi}_{\alpha_n} - h_n(\gamma)}{h'_n(\gamma)}.$$

Dies führt zur Approximation der Nullstelle von \hat{g}_{α_n} durch

$$(2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} \hat{\Xi}_{\alpha_n} + \left(\gamma + \frac{\hat{\Xi}_{\alpha_n} - h_n(\gamma)}{h'_n(\gamma)}\right) \hat{\mu}_n = \left((2\alpha_n - 1)^{\hat{\gamma}_n} + \frac{\hat{\mu}_n}{h'_n(\gamma)}\right) \hat{\Xi}_{\alpha_n} + \left(\gamma + \frac{h_n(\gamma)}{h'_n(\gamma)}\right) \hat{\mu}_n.$$

Eine genauere Näherung der Geraden, auf der die Punkte $(\hat{\Xi}_{\alpha_n}, \hat{\xi}_{\alpha_n})$ liegen sollten, ist demnach durch

$$\begin{aligned} x \mapsto & \left((2\alpha_n - 1)^\gamma + \frac{\mathbb{E}(X)}{\left(\frac{1}{1-\gamma} - \log\left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\right)\right)} \xi_{\alpha_n} \right) x \\ & + \left(\gamma - \frac{1}{\frac{1}{1-\gamma} - \log\left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\right)} \right) \mathbb{E}(X) \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

gegeben, wenn die Schätzer durch die entsprechenden wahren Größen ersetzt werden. Die nachfolgende Simulationsstudie wird unter anderem zeigen, dass dies in den meisten Fällen auch der Fall ist.

4.4 Simulationsstudie

Nach der theoretischen Auseinandersetzung mit der Asymptotik des relativen Schätzfehlers, soll in diesem Abschnitt das Ziel sein, das Verhalten des entwickelten Expekttilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ für endliche Datensätze X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, unabhängiger Zufallsvariablen mit Hilfe einer Simulationsstudie zu untersuchen. Dies wird im direkten Vergleich zu den Expekttilschätzern von Dauia et. al. [DGS18] für $\alpha'_n := 1 - k/n$ durchgeführt. Hierbei sei $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Die zugehörigen Expekttilschätzer aus (4.3.2) bzw. (4.3.3) sind dann entsprechend durch

$$\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k) := \left(\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1 \right) \frac{n}{k} (1 - \alpha_n) \right)^{-\hat{\gamma}_n} X_{n-k:n}$$

(der indirekte Expekttilschätzer) bzw.

$$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k) := \left(\frac{n}{k} (1 - \alpha_n) \right)^{-\hat{\gamma}_n} \arg \min_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - u)^2 \left| \mathbb{1}_{\{X_i > u\}} - \frac{k}{n} \right|$$

(der direkte Expektilschätzer) gegeben.

Für die Simulation werde der in dieser Dissertation motivierte Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ für $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$ und $\hat{\mu}_n = \hat{T}r_n$ betrachtet. Um die beiden Versionen des Expektilschätzers unterscheiden zu können, sei entsprechend die Notation $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ bzw. $\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}$ verwendet.

Der Extremwertindex γ werde in der Simulation durch den Hill-Schätzer $\hat{\gamma}_n$ geschätzt. Verwendet wurden die folgenden drei Verteilungen:

- $p_\gamma(x) := (1 - x^{-1/\gamma}) \mathbb{1}_{[1, \infty)}(x)$ (Pareto-Verteilung),
- $T_\gamma(x) := (2t_{1/\gamma}(x) - 1) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$ (positive Student-t-Verteilung),
- $\Phi_\gamma(x) := e^{-x^{-1/\gamma}} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$ (Fréchet-Verteilung),

wobei mit t_s die Verteilungsfunktion der Student-t-Verteilung mit $s > 0$ Freiheitsgraden und Dichte

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{s}\right)^{-\frac{s+1}{2}}.$$

bezeichnet sei. Dabei ist

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

die Gamma-Funktion.

Außerdem wurden in der Simulationsstudie die Zeitreihenmodelle GARCH(1,1) und MA(1) untersucht (siehe Abschnitt 4.4.2 bzw. 4.4.3).

4.4.1 Simulation unabhängiger Daten

Die nachfolgenden Ergebnisse beruhen für $n = 100$ und $n = 1000$ und zugehörigem Niveau $\alpha_n = 0.995$ bzw. $\alpha_n = 0.9977$ auf $m = 9999$ (aus Speicherplatzgründen) bzw. $m = 2500$ Replikationen von Datensätzen der Länge n . Die Werte für α_n wurden so gewählt, dass $\bar{F}_X(\xi_{\alpha_n})$ von der Ordnung $1/n$ ist. Dies stellt sicher, dass mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit $X_{n-k_n:n} < \xi_{\alpha_n}$ gilt.

In Tabelle 4.3 sind der empirische Root Mean Squared Error (RMSE) und der empirische Bias der normierten Expektilschätzer unter der Fréchet-Verteilung Φ_γ mit $\gamma \in \{1/10, 1/3, 1/2\}$ für das k_n gegeben, welches den jeweiligen empirischen RMSE minimiert. Der Einfachheit halber werde im Folgenden kurz RMSE und Bias geschrieben, gemeint sind aber stets die empirischen

Versionen. In den Tabellen 4.4 und 4.5 sind die entsprechenden Werte für die Pareto-Verteilung p_γ bzw. für die positive Student-t-Verteilung T_γ zusammengetragen.

$\Phi_\gamma, n = 100, \alpha_n = 0.995$									
		RMSE (k_n)				Bias			
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
1/10	1.5342	0.0728 (35)	0.0729 (35)	0.0595 (79)	0.1548 (8)	0.0259	0.0260	-0.0088	0.0773
1/3	5.1221	0.4571 (33)	0.4586 (33)	0.4096 (36)	0.7171 (25)	0.1822	0.1836	0.0962	0.4180
1/2	14.9801	1.8247 (39)	1.8342 (39)	1.8006 (39)	0.7051 (2)	0.7247	0.7301	0.6657	-0.1016

$\Phi_\gamma, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$									
		RMSE (k_n)				Bias			
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
1/10	1.6371	0.0306 (205)	0.0306 (205)	0.0211 (716)	0.0475 (2)	0.0129	0.0129	-0.0019	-0.0043
1/3	6.4892	0.1605 (167)	0.1607 (167)	0.1323 (270)	0.2470 (2)	0.0617	0.0619	0.0319	-0.0249
1/2	21.7048	0.3435 (188)	0.3440 (185)	0.3228 (188)	0.3865 (2)	0.1621	0.1602	0.1211	-0.1547

Tabelle 4.3 – Monte-Carlo Ergebnisse für den RMSE und Bias der normierten Expekttilschätzer unter der Verwendung des jeweils RMSE minimierenden k_n 's (in Klammern) für die Fréchet-Verteilung Φ_γ mit $\gamma \in \{1/10, 1/3, 1/2\}$.

$p_\gamma, n = 100, \alpha_n = 0.995$									
		RMSE (k_n)				Bias			
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
1/10	1.5463	0.0502 (80)	0.0502 (80)	0.1228 (80)	0.1563 (16)	0.0023	0.0024	-0.1159	0.1039
1/3	5.1839	0.2317 (80)	0.2319 (80)	0.2298 (80)	0.4709 (80)	0.0281	0.0284	-0.0769	0.3586
1/2	15.1068	0.5071 (80)	0.5072 (80)	0.4874 (80)	0.6153 (80)	0.0989	0.0994	0.0346	0.3342

$p_\gamma, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$									
		RMSE (k_n)				Bias			
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{Trn}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
1/10	1.6478	0.0172 (900)	0.0172 (900)	0.1065 (900)	0.0485 (2)	0.0002	0.0002	-0.1055	-0.0047
1/3	6.5476	0.0723 (900)	0.0723 (900)	0.1055 (900)	0.2516 (2)	0.0018	0.0018	-0.0798	-0.0261
1/2	21.8275	0.1335 (900)	0.1336 (900)	0.1354 (900)	0.2555 (900)	0.0093	0.0094	-0.0354	0.2149

Tabelle 4.4 – Monte-Carlo Ergebnisse für den RMSE und Bias der relativen Expekttilschätzer unter der Verwendung des k_n 's (in Klammern), welches den jeweiligen RMSE minimiert, für die Pareto-Verteilung p_γ mit $\gamma \in \{1/10, 1/3, 1/2\}$.

$T_\gamma, n = 100, \alpha_n = 0.995$

		RMSE (k_n)				Bias			
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
1/10	2.8663	0.3293 (4)	0.3212 (4)	0.2885 (4)	0.3005 (2)	0.0731	0.0735	0.0025	0.0401
1/3	6.3257	1.5752 (15)	1.5840 (15)	1.5427 (15)	0.7437 (2)	0.5960	0.5999	0.5228	0.0916
1/2	14.7801	17.4714 (23)	17.5638 (23)	17.6305 (23)	0.7108 (2)	2.3708	2.3860	2.3367	-0.1075

$T_\gamma, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$

		RMSE (k_n)				Bias			
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
1/10	3.2389	0.0822 (8)	0.0823 (8)	0.0808 (33)	0.0750 (2)	0.0087	0.0088	-0.0119	0.0010
1/3	8.1308	0.2781 (47)	0.2784 (47)	0.2568 (47)	0.2533 (2)	0.1037	0.2422	0.0527	-0.0307
1/2	21.5113	0.5046 (90)	0.5051 (90)	0.4862 (90)	0.3972 (2)	0.2416	0.0129	0.2085	-0.1513

Tabelle 4.5 – Monte-Carlo Ergebnisse für den RMSE und Bias der relativen Expektilschätzer unter der Verwendung des k_n 's (in Klammern), welches den jeweiligen RMSE minimiert, für die positive Student-t-Verteilung T_γ mit $\gamma \in \{1/10, 1/3, 1/2\}$.

Wie man den Tabellen 4.3-4.5 entnehmen kann, unterscheiden sich die RMSE der Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}$ bis auf wenige Ausnahmen erst ab der dritten Nachkommastelle. Die zugehörigen optimalen k_n 's sind bis auf eine Ausnahme stets gleich. Aus diesem Grund wird der Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}$ in den nachfolgenden Abbildungen vernachlässigt. Nur in Abbildung 4.4.19 wird ein direkter Vergleich der genannten Schätzer in Form von QQ-Plots und der empirischen Verteilungsfunktionen für die Pareto-Verteilung mit $\gamma = 3/4$, $n = 100000$, $\alpha_n = 0.79$, $k_n = 10000$ und $m = 850$ angestellt. Hier zeigt sich auch in der Simulation die asymptotische Überlegenheit des Schätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}$ gegenüber $\hat{\xi}_{\alpha_n}$. Dies scheint jedoch für realistische Stichprobenumfänge in der Regel nicht zum Tragen zu kommen.

Die Abbildung 4.4.1 zeigt für die Fréchet-Verteilung Φ_γ mit $\gamma = 1/10$ und $n = 100$ sowie $\alpha_n = 0.995$ den RMSE, die Standardabweichung und den Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$, $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ als Funktion von k im direkten Vergleich. Die zugehörigen QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$, $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ für das jeweils optimale k_n sind in Abbildung 4.4.2 zu finden. Entsprechendes zeigen die Abbildungen 4.4.3 bzw. 4.4.4 für $n = 1000$ mit $\alpha_n = 0.9977$.

Für $\gamma = \{1/3, 1/2\}$ sind die entsprechenden Graphen des RMSE und die QQ-Plots in den Abbildungen 4.4.5-4.4.12 zu finden.

Für $\gamma = 1/10$ ist der Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ den extremen Expektilschätzern $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ bezüglich des RMSE überlegen. Zwar ist der minimale RMSE des indirekten Expektilschätzers $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ kleiner als der des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$, allerdings ist das der Tatsache geschuldet, dass

der Bias des indirekten Expekttilschätzers $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ erst für größer werdende k_n verschwindet. Ein so großes k_n im Vergleich zu n widerspricht der Forderung an $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, eine intermediäre Folge zu sein. Dieses RMSE minimierende k_n liegt demnach weit außerhalb des Tails der Verteilung. Dass der indirekte Schätzer $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ ein grundsätzliches Bias-Problem für $\gamma = 1/10$ hat, zeigt sich deutlich in den Abbildungen 4.4.13-4.4.16 für die Pareto-Verteilung $p_{1/10}$. Ansonsten besitzen der Expekttilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und der indirekte Expekttilschätzer $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ einen sehr ähnlichen Graphenverlauf des RMSE.

Die entsprechenden Graphen der QQ-Plots weisen Verschiebungen der Punkte weg vom Ursprung nach oben (z.B. der direkte Expekttilschätzer $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ im Fall $\gamma = 1/10$ und $n = 100$) oder nach unten (z.B. der indirekte Expekttilschätzer $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ im Fall $\gamma = 1/10$ und $n = 100$) (beide Abbildung 4.4.2) auf. Das bedeutet, dass der Median der relativen Schätzfehler größer bzw. kleiner 0 ist, was bei der Wahl von k_n , die die jeweiligen RMSE minimieren, aufgrund des Minimierungsproblems der Gegenläufigkeit der Standardabweichung und des Bias zu erwarten ist. Für kleine k_n sollte dieser Effekt nicht beobachtbar sein. Als Beispiel sei hier der Expekttilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ für $k_n = 50$ und die Verteilung $\Phi_{1/10}$ im Vergleich zum RMSE minimierenden $k_n = 205$ in Abbildung 4.4.20 genannt. Für $k_n = 50$ liegen die Punkte des Expekttilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ dafür weiter weg von der Ausgleichsgeraden als für das RMSE minimierende $k_n = 205$.

Weiterhin fällt in den QQ-Plots für $n = 100$ auf, dass die Punkte aller Expekttilschätzer im Tail der Standardnormalverteilung tendenziell oberhalb der Ausgleichsgeraden liegen, welche das 25%-Quantil und das 75%-Quantil verbindet. Die Punkte des direkten Expekttilschätzers $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ weichen im extremen Bereich häufig am meisten von der Ausgleichsgeraden ab, was die Konstruktion eines passablen Konfidenzintervalls nicht begünstigt. Im Fall $n = 1000$ liegen die Punkte der Expekttilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ viel näher an der Ausgleichsgeraden, was die Ergebnisse des theoretischen asymptotischen Verhaltens dieser beiden Schätzer unterstützt. Dagegen liegen die Punkte des direkten Expekttilschätzers $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ nicht auf einer Geraden. Die Schätzwerte des direkten Expekttilschätzers $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ sind somit nicht annähernd normalverteilt bei einem Stichprobenumfang von $n = 1000$. In diesem Sinne ist der direkte Expekttilschätzer $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ auch hier als schwächster Schätzer identifiziert.

Für die positive Student-t-Verteilung zeigt sich ein sehr untypischer Verlauf der Standardabweichung (siehe Abbildung 4.4.17). Hier steigt die Abweichung mit steigendem k . Eine Erklärung hierfür konnte im Rahmen dieser Dissertation nicht gefunden werden. Den zugehörigen QQ-Plots in Abbildung 4.4.18 ist zu entnehmen, dass sich die Punkte der Expekttilschätzer $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ näher an der Ausgleichsgeraden befinden als für den Expekttilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$. Im Anhang A sind ergänzend weitere Abbildungen für die Pareto- und positive Student-t-Verteilung zu finden.

Auffällig ist, dass bei gleichem k_n die Punkte des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ scheinbar bis auf eine Verschiebung um eine Konstante die gleichen Punkte sind wie die des indirekten Expektilschätzers $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$. Dieses Phänomen wurde im Abschnitt 4.3.4 beschrieben. In Abbildung 4.4.21 erkennt man für die Fréchet-Verteilung, dass die Punkte $(\hat{\Xi}_{\alpha_n}, \hat{\xi}_{\alpha_n})$ der jeweiligen Simulation tatsächlich bis auf den Fall $\gamma = 1/10$ auf der in (4.3.10) bestimmten Geraden

$$G(x) := \left((2\alpha_n - 1)^\gamma + \frac{\mathbb{E}(X)}{\left(\frac{1}{1-\gamma} - \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right) \right)} \xi_{\alpha_n} \right) x + \left(\gamma - \frac{1}{\frac{1}{1-\gamma} - \log \left(\frac{n(1-\alpha_n)}{k_n} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right)} \right) \mathbb{E}(X) \quad (4.4.1)$$

liegen. Zur Demonstration dieses Effekts wurde das k_n , welches den RMSE von $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ minimiert, auch für $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ gewählt. Gleiches zeigt sich auch für die Pareto- und positive Student-t-Verteilung (vgl. Abbildungen 4.4.22 bzw. 4.4.23). Für die Pareto- und Fréchet-Verteilung stimmen im Fall $\gamma = 1/10$ zumindest die Steigungen näherungsweise überein. Für einen Erklärungsansatz im Fall $\gamma = 1/10$ sind weitere Untersuchungen notwendig, die in dieser Dissertation nicht weiter verfolgt werden.

Für größere Werte von γ , z.B. $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$, sind die zugehörigen Graphen der RMSE aufgrund ihres nicht glatten Verlaufs nur schwer zu interpretieren. Dies liegt daran, dass der RMSE sensitiv auf Ausreißer reagiert. Um geeignete Werte der jeweiligen k_n 's zu finden, betrachte man in der Situation mit $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$ und $m = 2500$ die folgende Modifikation des RMSE:

$$\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \left(\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n}(l)}{\xi_{\alpha_n}} \mathbb{1}_{\{\hat{\xi}_{\alpha_n}(l)/\xi_{\alpha_n} \leq S\}} + S \mathbb{1}_{\{\hat{\xi}_{\alpha_n}(l)/\xi_{\alpha_n} > S\}} - 1 \right)^2}$$

für eine Schranke $S > 0$. Hierbei sei $\hat{\xi}_{\alpha_n}(l)$ der Expektilschätzwert der l -ten Simulation. Die Variante des RMSE werde als getrimmter empirischer RMSE (TRMSE) bezeichnet. Die Tabelle 4.6 fasst die wahren Expektile und die TRMSE-Schätzwerte für die k_n 's, welche die entsprechenden TRMSE minimieren, die Schranke $S = 10$ und die Verteilung Φ_γ mit $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$ zusammen. Wählt man S größer, so wären auch hier die Graphen der TRMSE nicht glatt.

$\Phi_\gamma, n = 1000, \alpha_n = 0.9977, S = 10$				
		TRMSE (k_n)		
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
2/3	92.6100	0.8417 (189)	0.8333 (189)	0.5317 (2)
3/4	219.0060	1.6406 (165)	1.6398 (165)	0.6221 (6)

Tabelle 4.6 – Wahre Expektile und Monte-Carlo Ergebnisse der relativen Expektilschätzer für den TRMSE und die k_n 's (in Klammern), die den jeweiligen TRMSE minimieren, für die Fréchet-Verteilung Φ_γ mit $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$.

Für $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$ und $m = 2500$ sind in den Abbildungen 4.4.24-4.4.26 die Graphen der TRMSE und die empirischen Verteilungsfunktionen der relativen Expektilschätzer im direkten Vergleich für die jeweils optimalen k_n 's gemäß des TRMSE von $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ bzw. $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ und für den Mittelwert dieser k_n 's unter der Fréchet-Verteilung Φ_γ dargestellt (z.B. für $k_n = 189$, $k_n = 2$ und $k_n = 95$ im Fall $\gamma = 2/3$). Entsprechende Tabellen und Graphen für p_γ und T_γ findet man im Anhang A in den Tabellen A.1 bzw. A.2 und Abbildungen A.15-A.20. Diese werden hier nicht weiter erörtert, da diese im Wesentlichen zur gleichen Schlussfolgerung führen wie im Fall der Fréchet-Verteilung.

Die empirischen Verteilungsfunktionen der relativen Schätzfehler in den Abbildungen 4.4.25 und 4.4.26 mit den optimalen k_n 's gemäß des TRMSE (vgl. Tabelle 4.6) zeigen, dass der direkte Expektilschätzer $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ seinen Konkurrenten überlegen ist. Allerdings über- oder unterschätzen alle Expektilschätzer den wahren Wert deutlich. So unterschätzt der direkte Expektilschätzer $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ den wahren Wert für $\gamma = 2/3$ unter dem RMSE-minimierenden $k_n = 2$ in etwa 90% der Fälle. Expektile mit dem Niveau $\alpha_n = 0.9977$ für $n = 1000$ können demnach nicht valide geschätzt werden. Daher werde in den Fällen $\gamma = 2/3$ und $\gamma = 3/4$ das Niveau angepasst auf $\alpha_n = 0.8$, sodass noch mit hoher Wahrscheinlichkeit $X_{n-k_n:n} < \xi_{\alpha_n}$ sichergestellt ist. Eine erneute Simulation führt zur folgenden RMSE-Tabelle 4.7 und zu den Abbildungen 4.4.27-4.4.29.

$\Phi_\gamma, n = 1000, \alpha_n = 0.8$							
		RMSE (k_n)			Bias		
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
2/3	5.2668	0.2993 (187)	0.2380 (196)	0.4356 (7)	0.0758	-0.0107	-0.1525
3/4	8.0828	0.5100 (218)	0.6507 (218)	0.4641 (10)	0.2088	0.2726	-0.2556

Tabelle 4.7 – Monte-Carlo Ergebnisse für den RMSE und Bias der normierten Expektilschätzer unter der Verwendung des jeweils RMSE minimierenden k_n 's (in Klammern) für die Fréchet-Verteilung Φ_γ mit $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$.

Im Fall $\gamma = 3/4$ zeigen die Simulationsergebnisse für das niedrigere Niveau $\alpha_n = 0.8$, dass

alle Schätzer ein Bias-Problem aufweisen. Die RMSE-Kurven der Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ sind nicht glatt, sodass die Schätzer sehr anfällig auf eine suboptimale Wahl von k_n reagieren. Die QQ-Plots bilden im Wesentlichen keine Gerade. Für $\gamma = 2/3$ ist dies nur für den direkten Expektilschätzer $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ wenigstens annähernd der Fall.

Insgesamt ist festzuhalten, dass die untersuchten Expektilschätzer im Fall $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$ nicht brauchbar sind.

$$\Phi_{1/10}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

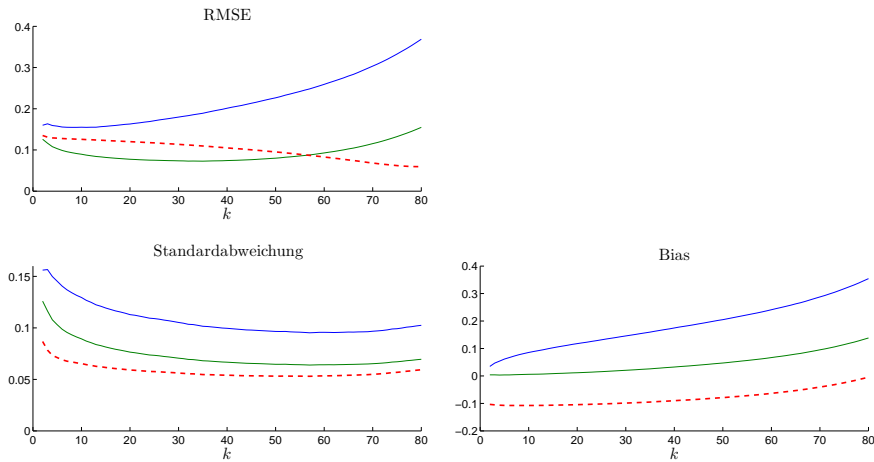


Abbildung 4.4.1 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 100$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$.

$$\Phi_{1/10}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

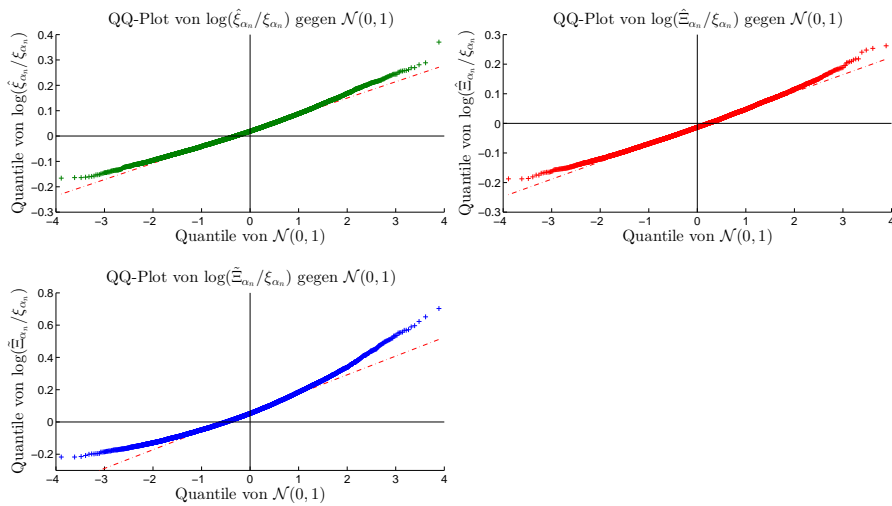


Abbildung 4.4.2 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 100$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$.

$$\Phi_{1/10}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

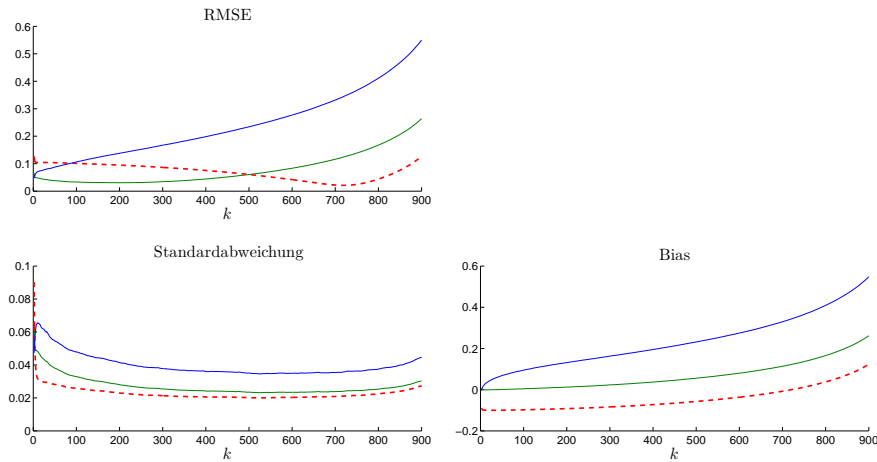


Abbildung 4.4.3 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$.

$$\Phi_{1/10}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

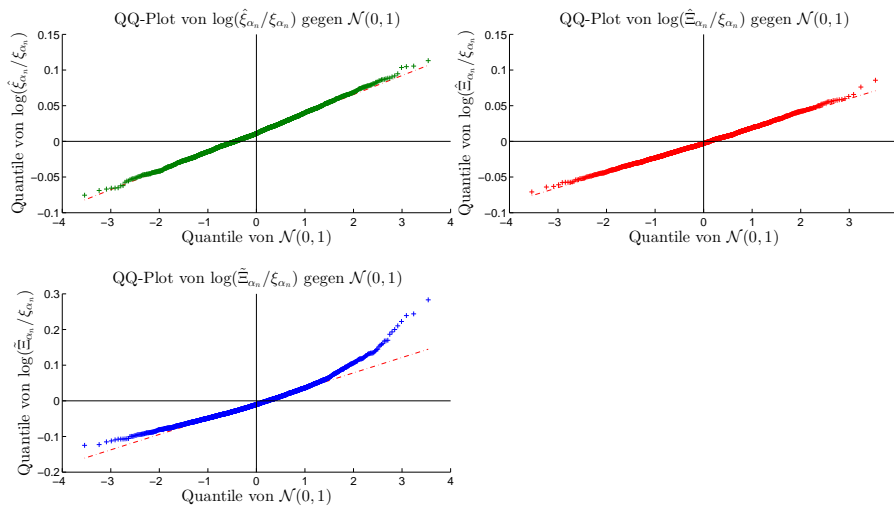


Abbildung 4.4.4 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$.

$$\Phi_{1/3}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

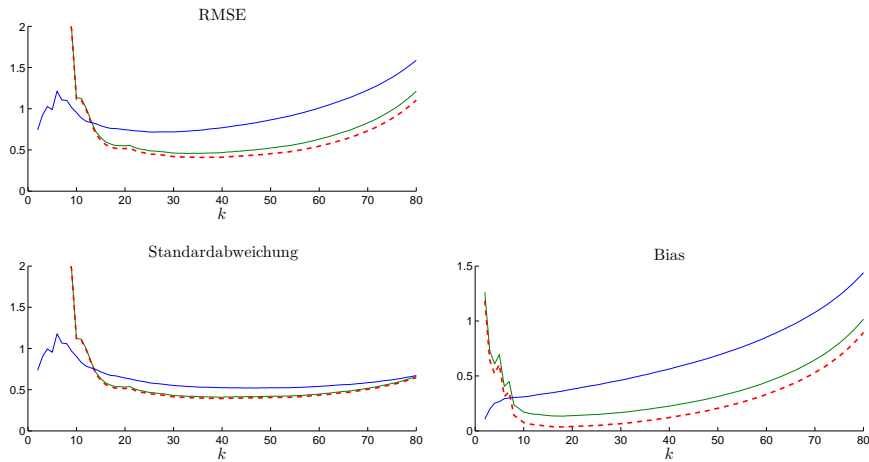


Abbildung 4.4.5 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 100$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/3}$.

$$\Phi_{1/3}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

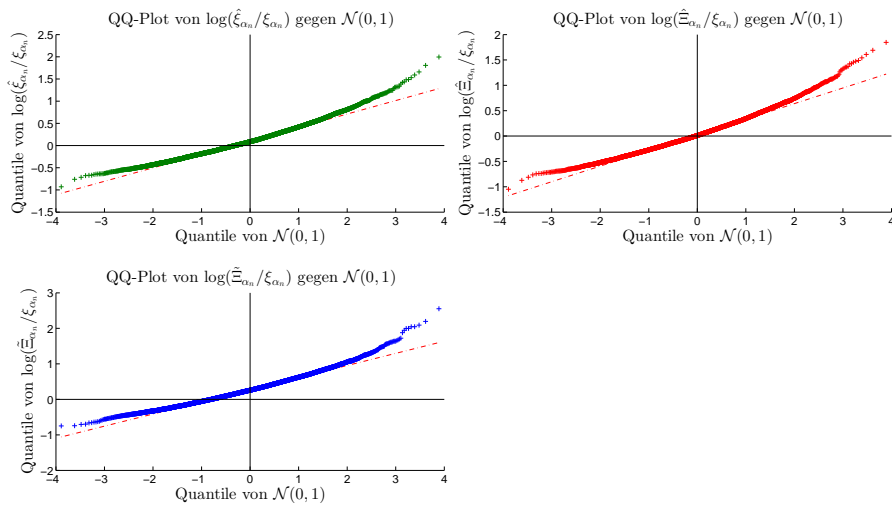


Abbildung 4.4.6 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 100$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/3}$.

$$\Phi_{1/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

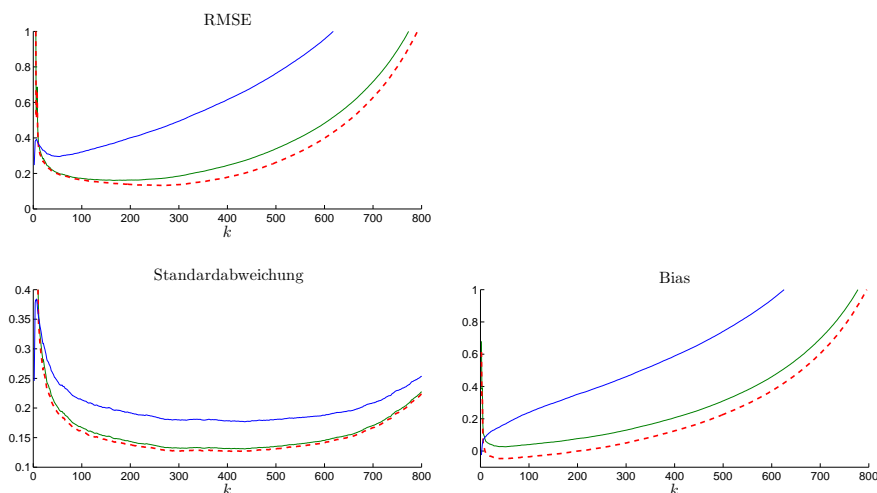


Abbildung 4.4.7 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/3}$.

$$\Phi_{1/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

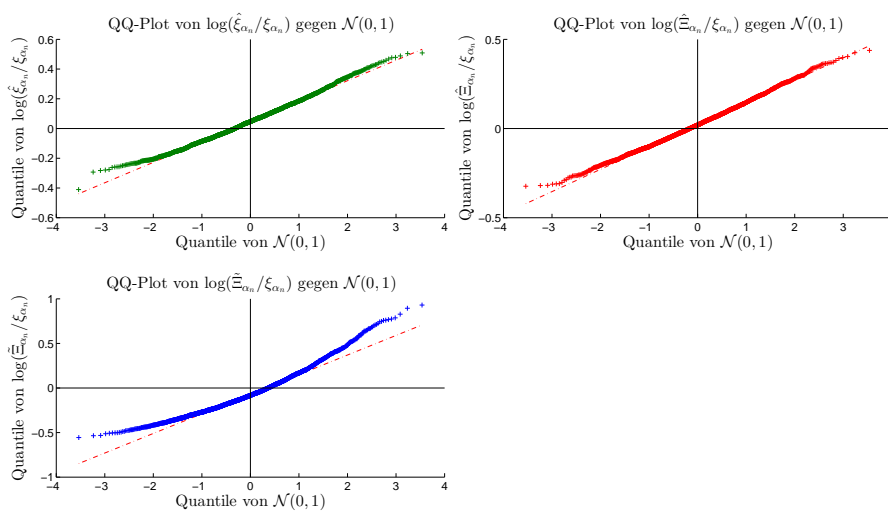


Abbildung 4.4.8 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/3}$.

$$\Phi_{1/2}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

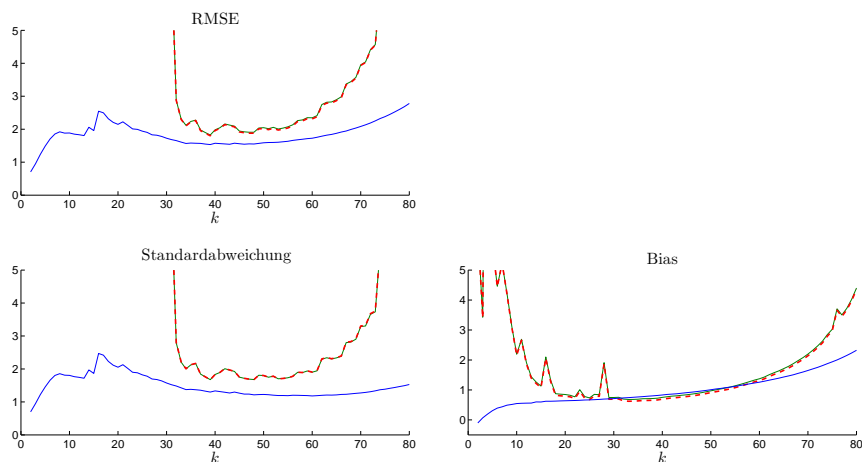


Abbildung 4.4.9 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expekttilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 100$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$.

$$\Phi_{1/2}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

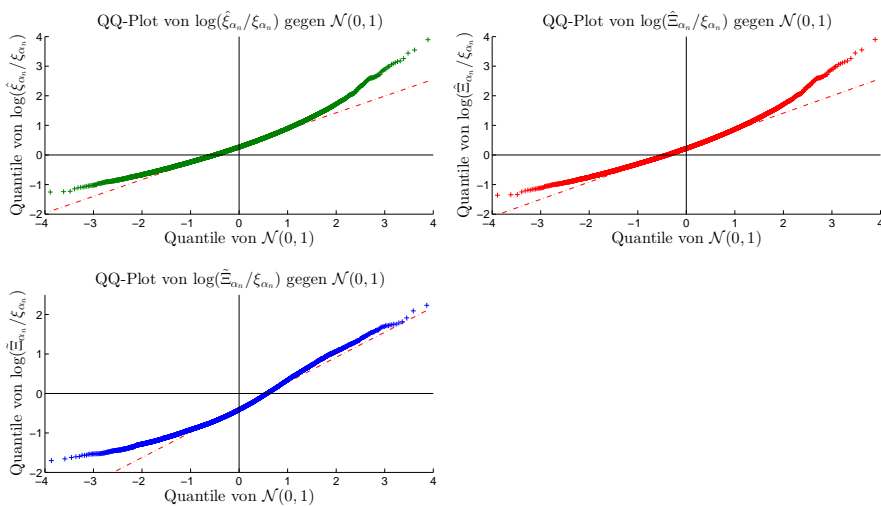


Abbildung 4.4.10 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 100$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$.

$$\Phi_{1/2}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

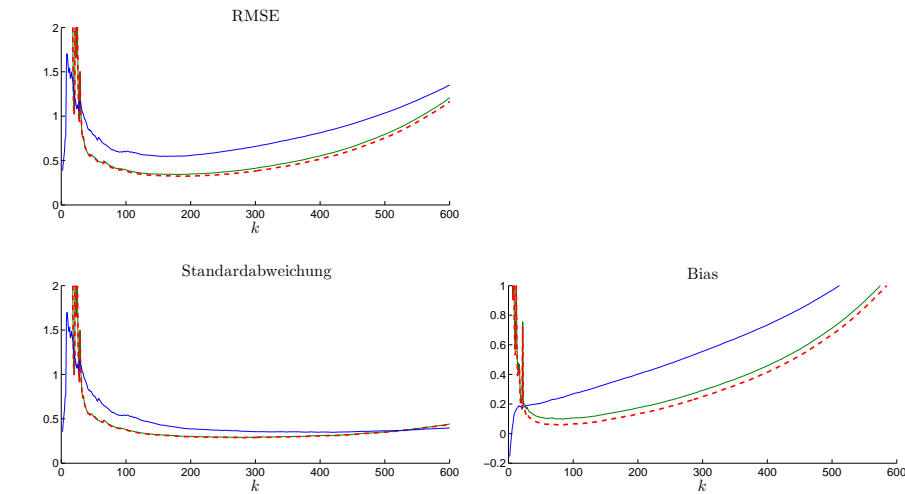


Abbildung 4.4.11 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$.

$$\Phi_{1/2}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

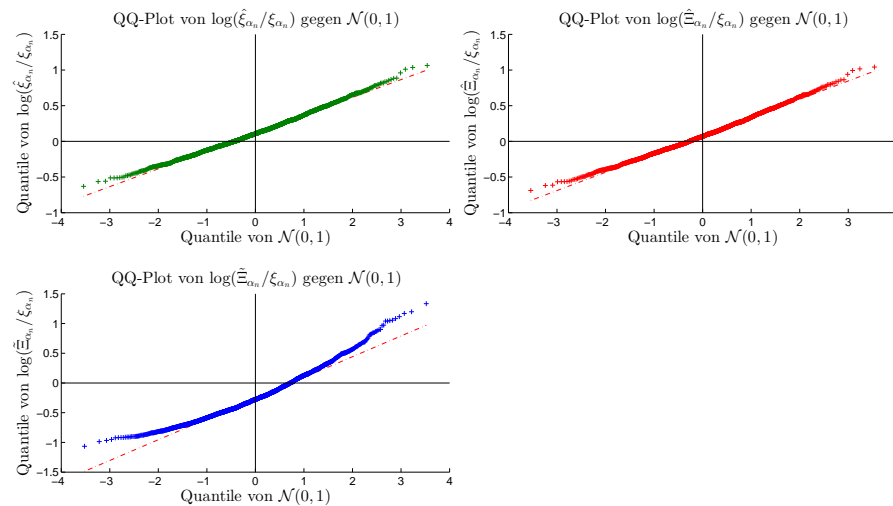


Abbildung 4.4.12 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$.

$$p_{1/10}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

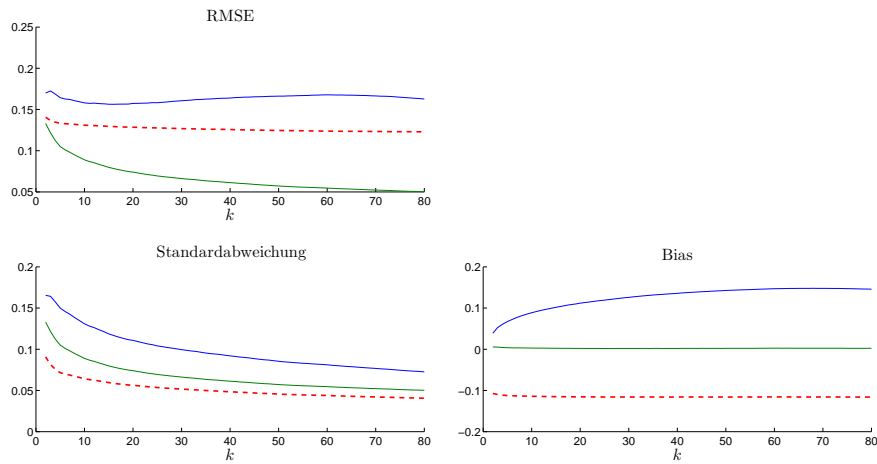


Abbildung 4.4.13 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expekttilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 100$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/10}$.

$$p_{1/10}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

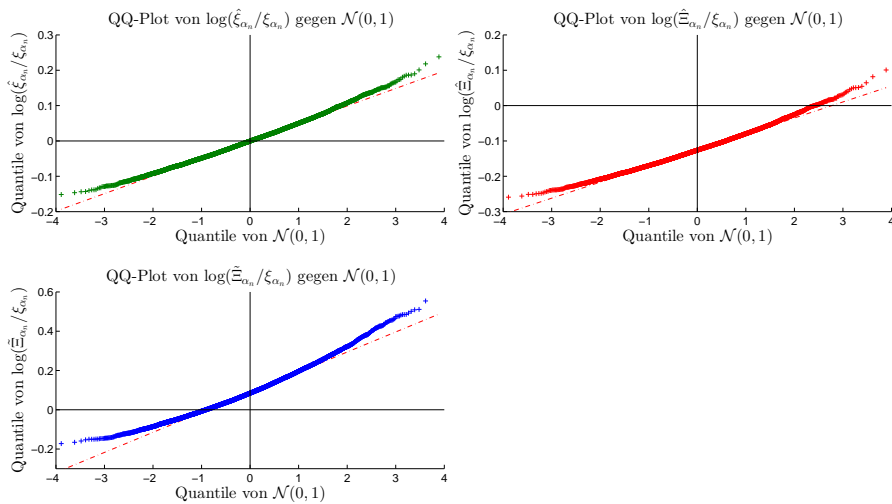


Abbildung 4.4.14 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 100$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/10}$.

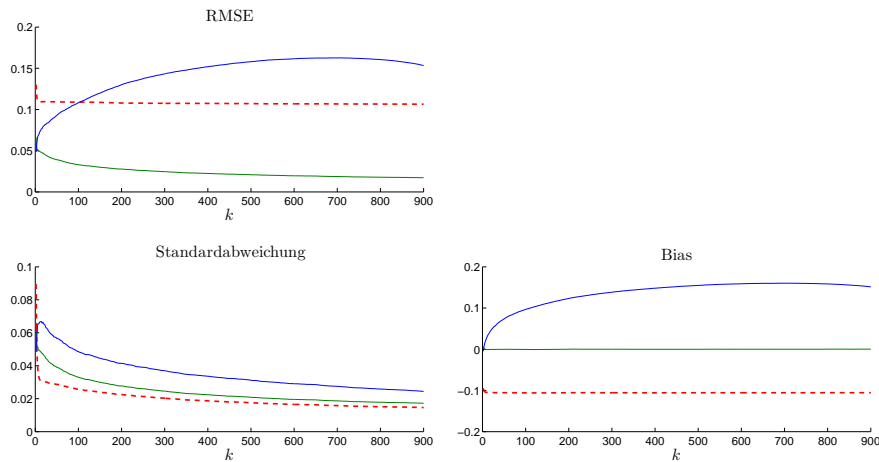
$p_{1/10}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$


Abbildung 4.4.15 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/10}$.

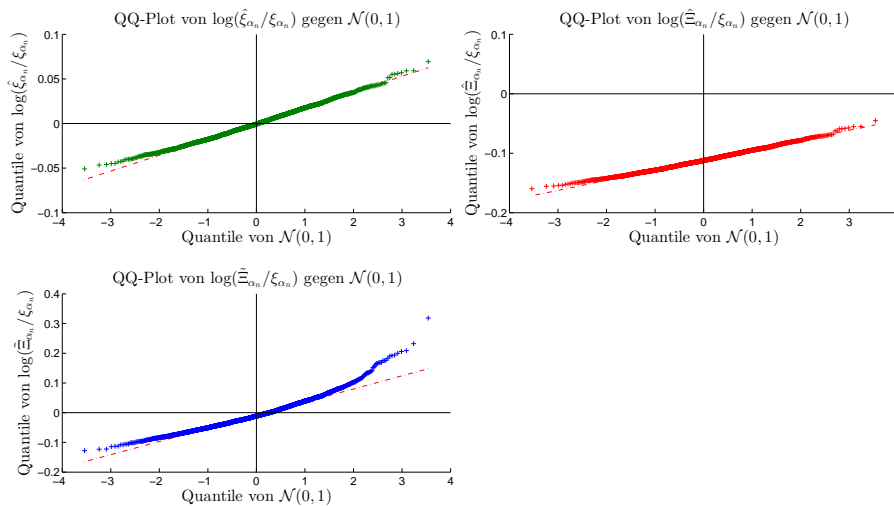
 $p_{1/10}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$


Abbildung 4.4.16 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/10}$.

$$T_{1/10}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

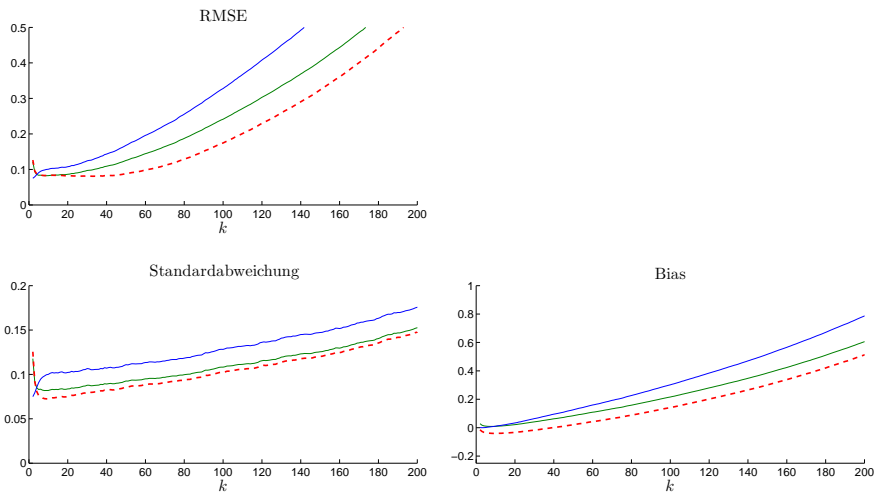


Abbildung 4.4.17 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{1/10}$.

$$T_{1/10}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

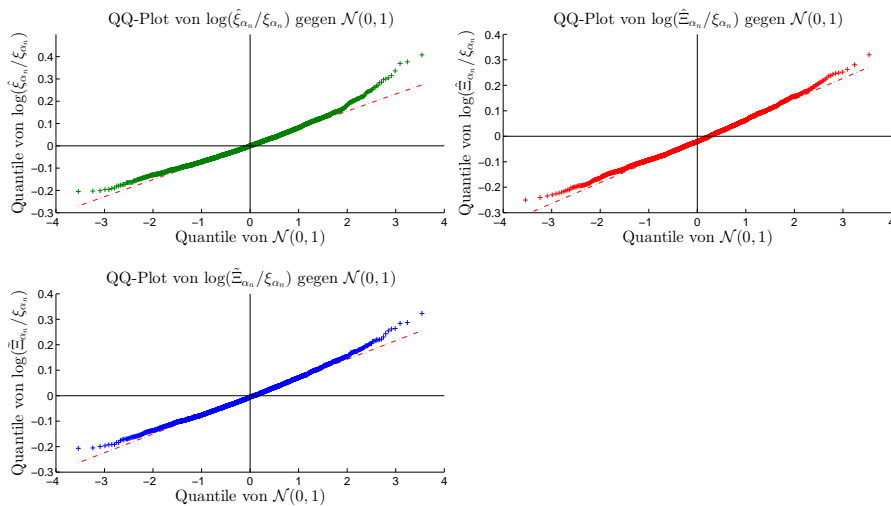


Abbildung 4.4.18 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{1/10}$.

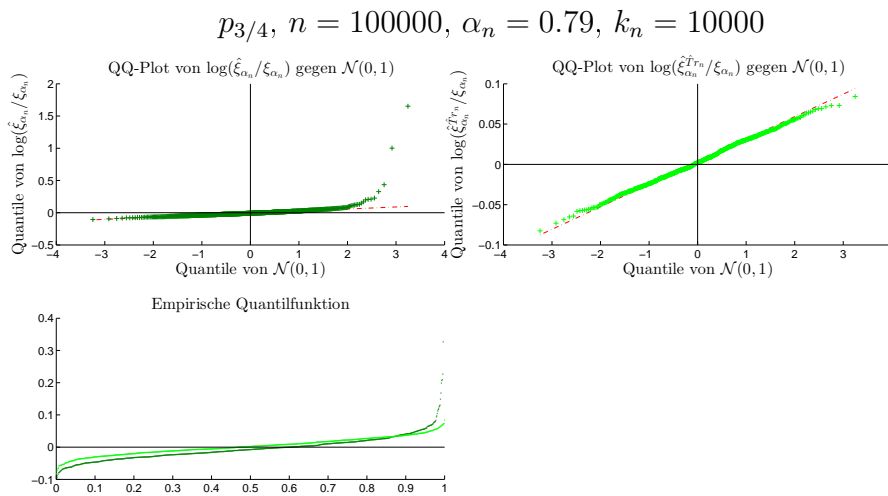


Abbildung 4.4.19 – Oben: QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (dunkelgrün) und $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}/\xi_{\alpha_n})$ (hellgrün) gegen $\mathcal{N}(0,1)$. Unten: Empirische Quantilfunktion von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (dunkelgrün) und $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}/\xi_{\alpha_n})$ (hellgrün) für $n = 100000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{3/4}$.

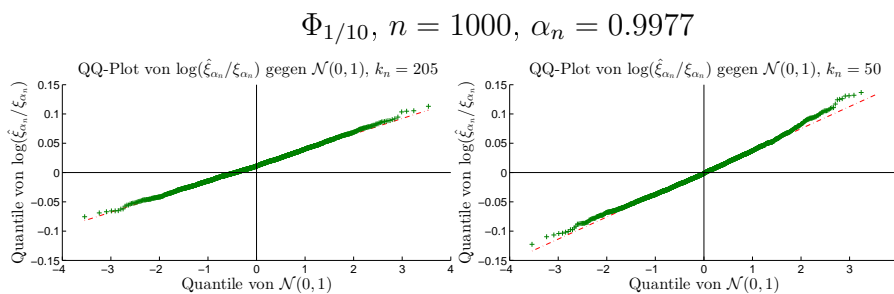


Abbildung 4.4.20 – QQ-Plot von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende $k_n = 205$ (links) im Vergleich zu $k_n = 50$ (rechts) für $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$.

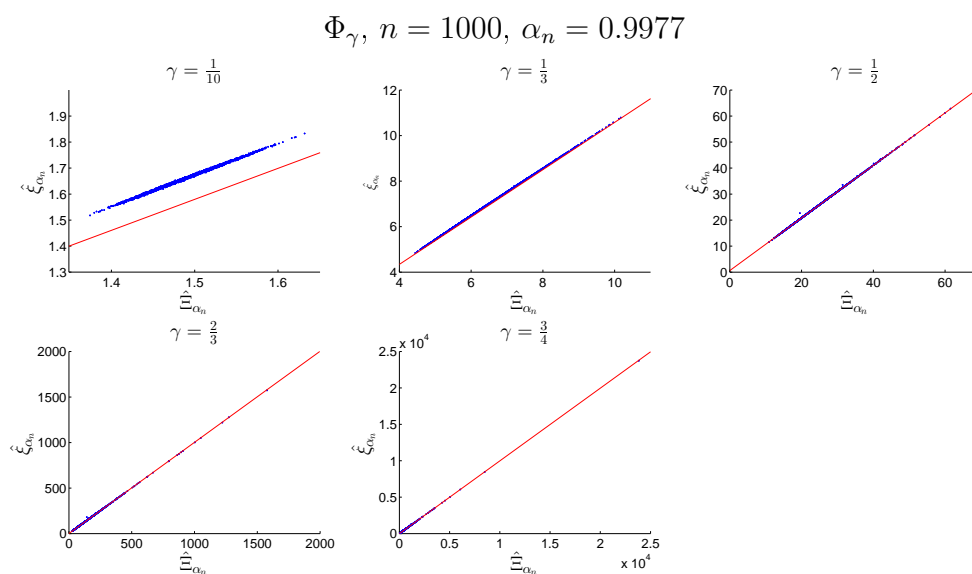


Abbildung 4.4.21 – Plot der Punkte $(\hat{\Xi}_{\alpha_n}, \hat{\xi}_{\alpha_n})$ (blau) und der Geraden G aus (4.4.1) (rote Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung Φ_γ mit $\gamma \in \{1/10, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4\}$.

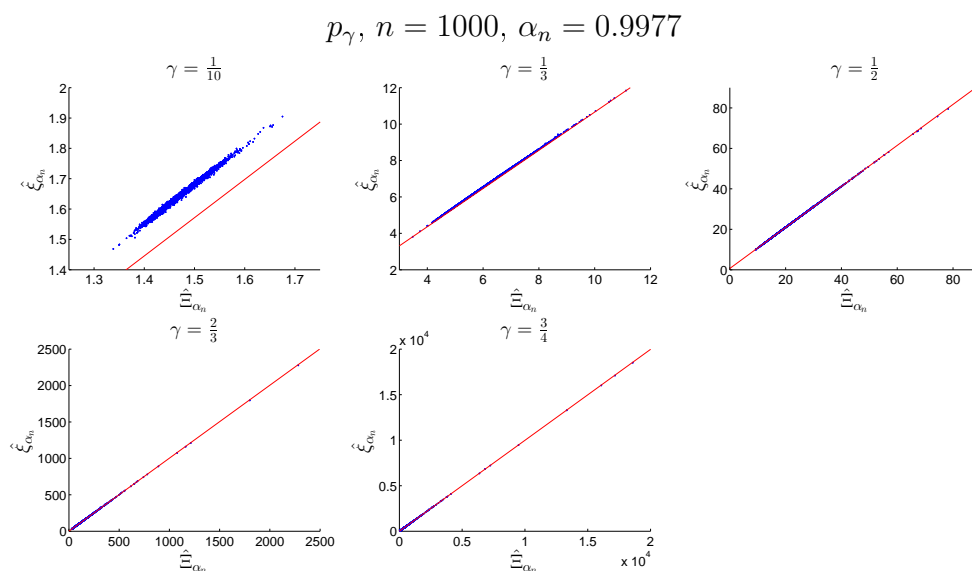


Abbildung 4.4.22 – Plot der Punkte $(\hat{\Xi}_{\alpha_n}, \hat{\xi}_{\alpha_n})$ (blau) und der Geraden G aus (4.4.1) (rote Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung p_γ mit $\gamma \in \{1/10, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4\}$.

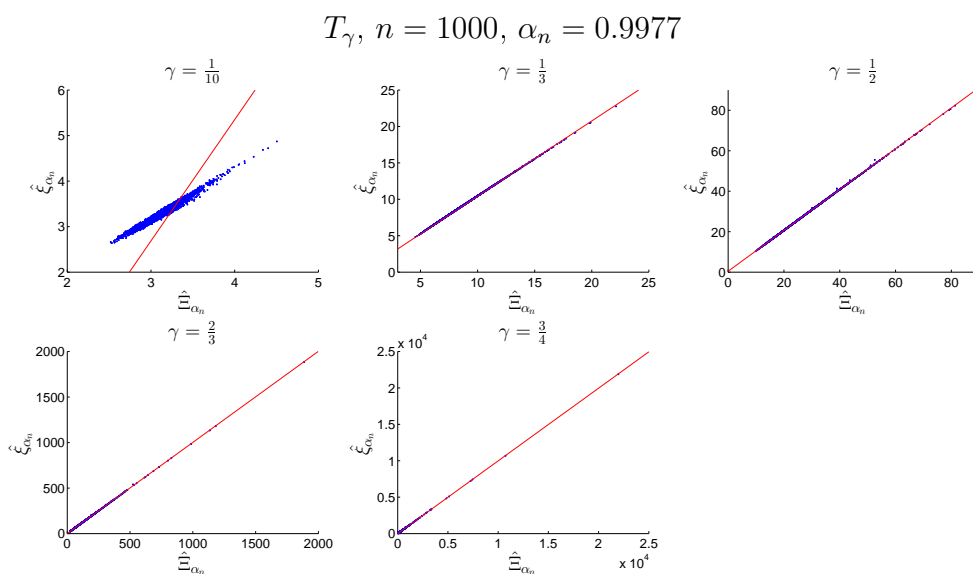


Abbildung 4.4.23 – Plot der Punkte $(\hat{\Xi}_{\alpha_n}, \hat{\xi}_{\alpha_n})$ (blau) und der Geraden G aus (4.4.1) (rote Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung T_γ mit $\gamma \in \{1/10, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4\}$.

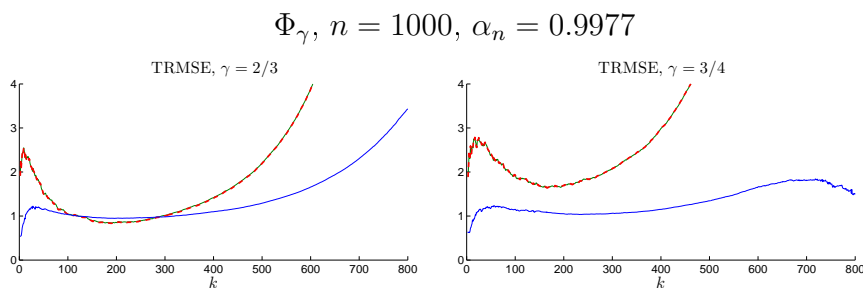


Abbildung 4.4.24 – TRMSE der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilungen $\Phi_{2/3}$ (links) und $\Phi_{3/4}$ (rechts).

$$\Phi_{2/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

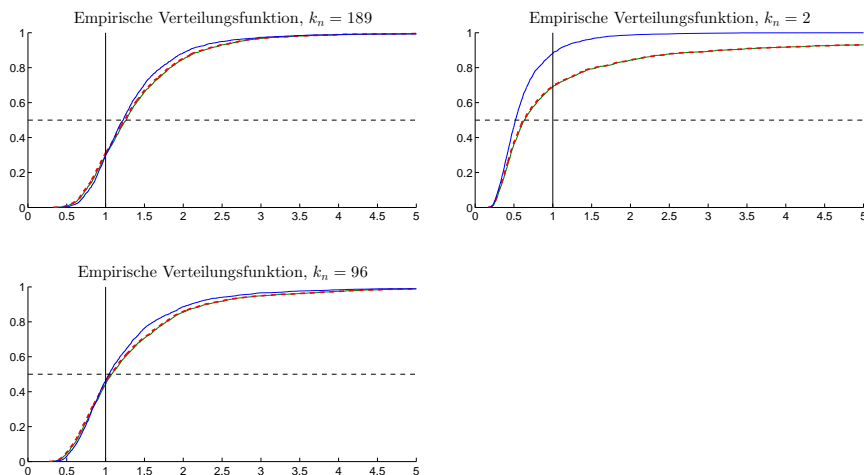


Abbildung 4.4.25 – Empirische Verteilungsfunktionen von $\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für verschiedene k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{2/3}$.

$$\Phi_{3/4}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

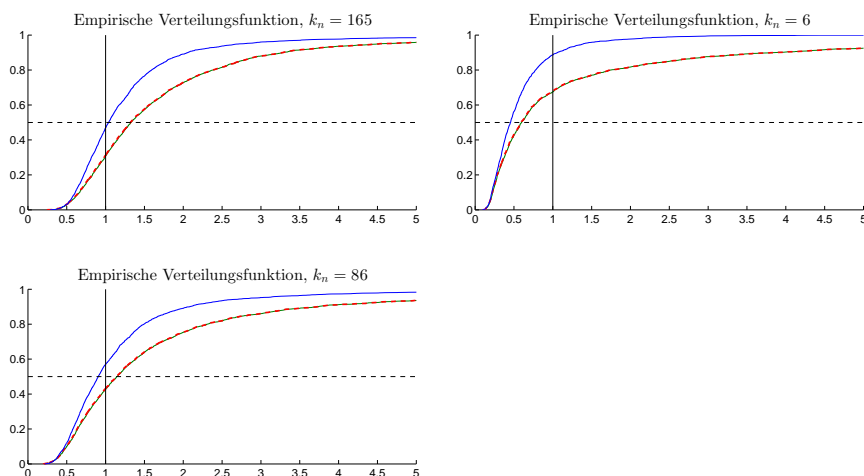


Abbildung 4.4.26 – Empirische Verteilungsfunktionen von $\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für verschiedene k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{3/4}$.

$\Phi_\gamma, n = 1000, \alpha_n = 0.8$

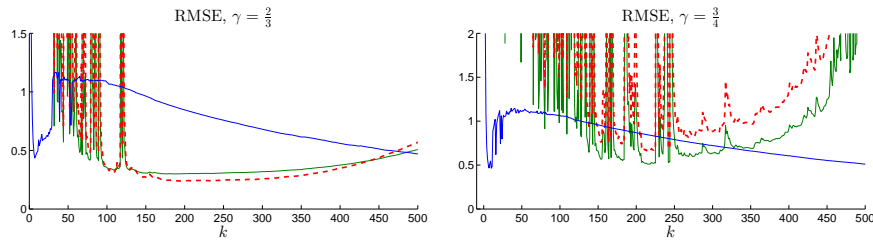


Abbildung 4.4.27 – RMSE der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilungen $\Phi_{2/3}$ (links) und $\Phi_{3/4}$ (rechts).

$\Phi_{2/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.8$

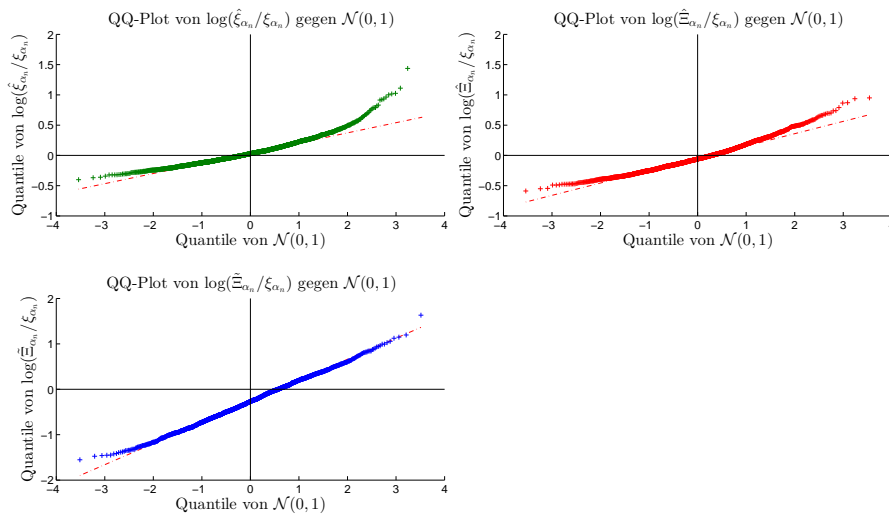


Abbildung 4.4.28 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{2/3}$.

$\Phi_{3/4}$, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.8$

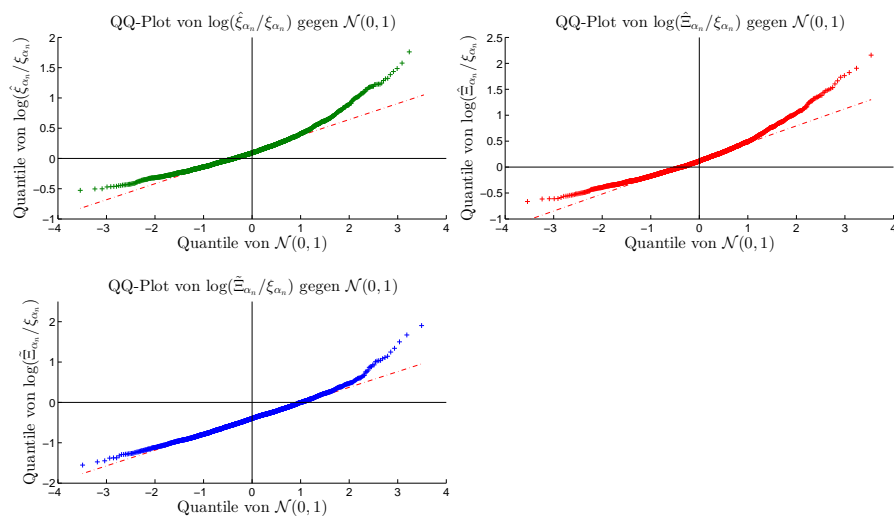


Abbildung 4.4.29 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Fréchet-Verteilung $\Phi_{3/4}$.

4.4.2 GARCH(1,1)-Zeitreihe

Die Simulationsstudie soll auch für $n = 1000$ abhängige Beobachtungen mit $m = 2500$ Simulationen zum Niveau $\alpha_n = 0.9$ durchgeführt werden. Dazu betrachte man das GARCH(1,1)-Modell (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), d.h. eine Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ als stationäre Lösung der Gleichungen

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (4.4.2)$$

und

$$\sigma_t^2 = \eta_0 + \eta_1 X_{t-1}^2 + \eta_2 \sigma_{t-1}^2, \quad \eta_0 > 0, \eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0,$$

wobei ε_t von σ_t und $(X_{t-i}, \sigma_{t-i})_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige standardnormalverteilte Innovationen seien.

Erzeugt werden $n = 1000$ Beobachtungen über die sogenannte „Burn-in“-Methode. D.h. man setzt z.B. $X_0 := \varepsilon_0$ und generiert zunächst deutlich mehr als n Zufallszahlen. Daraus wählt man dann die letzten n als Beobachtungen aus. Damit ist sichergestellt, dass die Beobachtungen sich annähernd stationär verhalten. Sie genügen unter geeigneter Parameterwahl somit tatsächlich einem stationären GARCH(1,1)-Modell. Man kann für alle $\kappa > 0$ zeigen (vgl. [BDM02, Theorem 3.1 und Bemerkung 3.4, Seite 106 ff.]), dass $\gamma = 1/(2\kappa)$, falls

$$\mathbb{E}((\eta_1 \varepsilon_1^2 + \eta_2)^\kappa) = 1.$$

In der Tabelle 4.8 sind alle untersuchten Konstellationen zusammengefasst.

γ	κ	η_0	η_1	η_2
1/10	5	0.1	0.1	0.839055
1/3	3/2	0.1	0.1	0.895251
1/2	1	0.1	0.1	0.9
2/3	3/4	0.1	0.1	0.902194
3/4	2/3	0.1	0.1	0.9029

Tabelle 4.8 – Parameterkonstellationen der GARCH(1,1)-Zeitreihe.

Der Erwartungswert $\mathbb{E}(X_1)$ ist im Fall $\gamma \in (0, 1)$ bekanntermaßen 0. Um das tatsächliche Expektil bestimmen zu können, ist $\mathbb{E}((X_1 - u)^+)$, $u > 0$, zu berechnen. Da die Verteilung von X_1 aber unbekannt ist, muss auch diese Größe geschätzt werden. Dazu werden gemäß (4.4.2) weitere Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{\tilde{n}}$ für $\tilde{n} = 100.000.000$ erzeugt. Das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{\tilde{n}} \sum_{j=1}^{\tilde{n}} (X_j - u)^+$$

wird schließlich als Approximation dieser Größe verwendet. Dies wurde jeweils ($\hat{n} = 10$)-mal durchgeführt. Als approximiertes Expektil $\xi_{\alpha_n}^{ap}$ wurde das arithmetische Mittel der \hat{n} geschätzten Expektile gewählt. Die approximierten Expektile $\xi_{\alpha_n}^{ap}$ und deren zugehörigen empirischen Standardabweichungen $\hat{\sigma}_{\hat{n}}$ lassen sich in der Tabelle 4.9 ablesen.

GARCH(1,1), $\hat{n} = 10$			
γ	$\xi_{\alpha_n}^{ap}$	$\hat{\sigma}_{\hat{n}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{n}}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$
1/10	1.0964	0.0001	0.01%
1/3	3.51	0.0017	0.04%
1/2	6.34	0.0204	0.32%
2/3	12.56	0.1409	1.12%
3/4	24.61	3.5590	14.46%

Tabelle 4.9 – Approximiertes Expektil $\xi_{\alpha_n}^{ap}$ und zugehörige empirische Standardabweichung $\hat{\sigma}_{\hat{n}}$ sowie das Verhältnis $\hat{\sigma}_{\hat{n}}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$ für die GARCH(1,1)-Zeitreihe mit $\mathcal{N}(0, 1)$ -Innovationen.

Bis auf den Fall $\gamma = 3/4$ sind die approximierten Expektile aufgrund der in Relation dazu kleinen empirischen Standardabweichungen akzeptabel. Für $\gamma = 3/4$ müsste ein erheblich größeres \tilde{n} gewählt werden, was nicht in angemessener Zeit zu simulieren ist. Daher wurde in dieser Dissertation darauf verzichtet. Die Graphen des RMSE für $\gamma \in \{1/2, 2/3, 3/4\}$ sind wegen ihres stark volatilen Verlaufs nicht zu interpretieren, sodass dieser Fall ebenfalls nicht weiter untersucht wird.

Es ergeben sich für $n = 1000$ analog zum Fall unabhängiger Beobachtungen folgende Tabelle 4.10 sowie die Abbildungen 4.4.30-4.4.33.

GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0, 1)$ -Innovationen, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9$							
		RMSE (k_n)			Bias		
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}$
1/10	1.0964	0.0951 (124)	0.1621 (113)	0.0729 (101)	-0.0572	0.1425	-0.0010
1/3	3.51	0.4515 (56)	0.5520 (52)	0.3313 (300)	0.1416	0.2149	-0.1380

Tabelle 4.10 – Monte-Carlo Ergebnisse für den RMSE und Bias unter der Verwendung des k_n 's (in Klammern), welches den jeweiligen RMSE minimiert, für die GARCH(1,1)-Zeitreihe.

GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0,1)$ -Innovationen, $\gamma = 1/10$, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9$

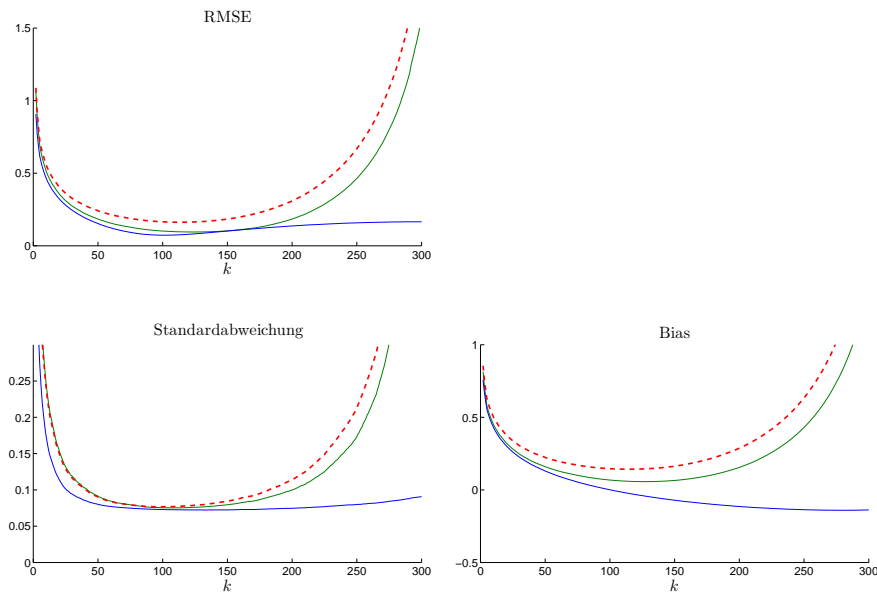


Abbildung 4.4.30 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der GARCH(1,1)-Zeitreihe mit $\gamma = 1/10$.

GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0,1)$ -Innovationen, $\gamma = 1/10$, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9$

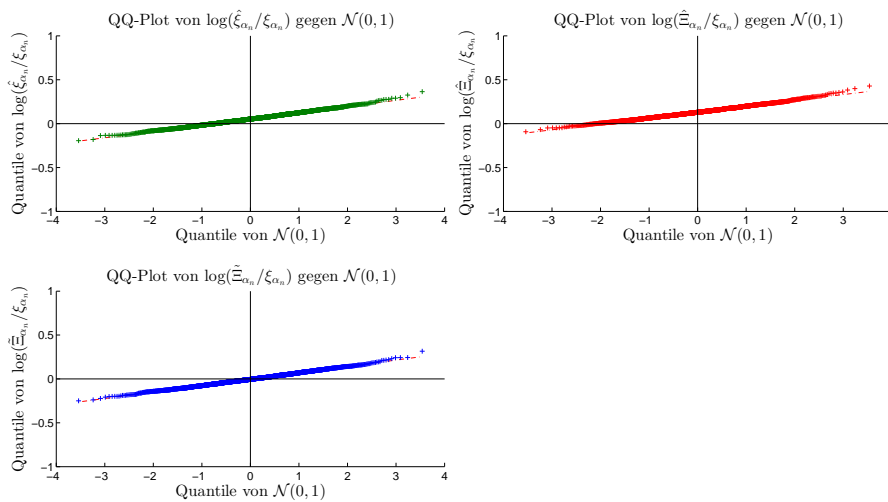


Abbildung 4.4.31 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der GARCH(1,1)-Zeitreihe mit $\gamma = 1/10$.

GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0,1)$ -Innovationen, $\gamma = 1/3$, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9$

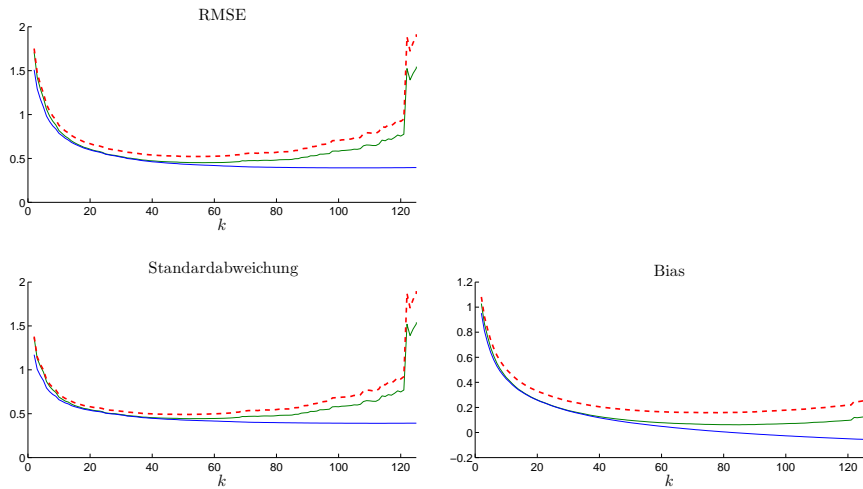


Abbildung 4.4.32 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der GARCH(1,1)-Zeitreihe mit $\gamma = 1/3$.

GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0,1)$ -Innovationen, $\gamma = 1/3$, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9$

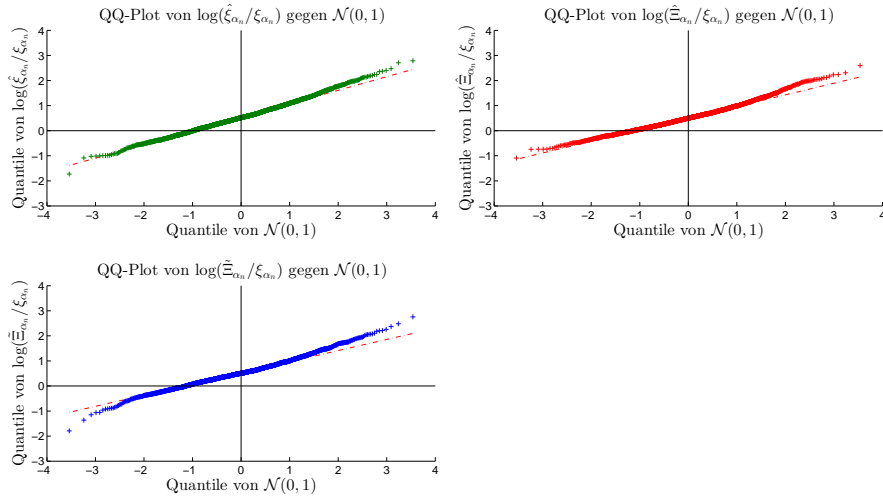


Abbildung 4.4.33 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der GARCH(1,1)-Zeitreihe mit $\gamma = 1/3$.

Es fällt auf, dass sich die Graphenverläufe der Schätzer bezüglich des RMSE, der Standardabweichung und des Bias unterscheiden. Dabei liegt die RMSE-Kurve des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ stets unter der des indirekten Expektilschätzers $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$.

Im Fall $\gamma = 1/10$ liegen die Punkte der QQ-Plots näherungsweise auf einer Geraden durch den Ursprung, was für den direkten Expektilschätzer $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ eine bemerkenswerte Ausnahme darstellt. Die Gerade des indirekten Expektilschätzers $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ ist deutlich weiter weg vom Ursprung nach oben verschoben als die des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$. Dies deutet auf eine erhebliche Verschiebung des Medians der Schätzfehler hin.

Insgesamt ist die Performance aller Schätzer im Fall $\gamma \in \{1/10, 1/3\}$ für das GARCH(1,1)-Modell zufriedenstellend. Man beachte, dass $\alpha_n = 0.9$ deutlich niedriger gewählt wurde als in Abschnitt 4.4.1, um obige einigermaßen passablen QQ-Plots zu erhalten.

Die Bias-Kurven weisen einen eigentümlichen Verlauf auf. Sie beginnen stets in der Nähe der 1 und fallen, ehe sie dann wieder steigen mit steigendem k . Hier ist unter Umständen zu hinterfragen, ob der wahre Wert überhaupt richtig berechnet wurde. Dieser Effekt konnte im Rahmen dieser Dissertation nicht aufgeklärt werden.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die relativen Expektilschätzer auf Basis linearer Modelle besser performen (siehe Abschnitt 4.4.3).

4.4.3 MA(1)-Zeitreihe

Die Simulationsstudie soll auch für $n = 1000$ abhängige Beobachtungen mit $\alpha_n = 0.9977$ und $m = 2500$ Simulationen durchgeführt werden. Dazu betrachte man das Moving Average (MA)-Modell mit

$$X_t := \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (4.4.3)$$

wobei $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Innovationen sei mit Verteilungsfunktion p_γ und $\gamma \in \{1/10, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4\}$. Die Randverteilungsfunktion der Zeitreihe ist dann regulär variierend mit Extremwertindex γ (vgl. [DM98, Lemma 5.2, Seite 350]).

Der Erwartungswert ist bekannt und ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(\varepsilon_1) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varepsilon_0) = \frac{3}{2}\mathbb{E}(\varepsilon_0) = \frac{3}{2} \frac{1}{1-\gamma}.$$

Um das tatsächliche Expektil bestimmen zu können, ist $\mathbb{E}((X_1 - u)^+)$, $u > 0$, zu berechnen. Da die Verteilung von X_1 aber unbekannt ist, muss auch diese Größe geschätzt werden. Dazu werden gemäß (4.4.3) weitere Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{\tilde{n}}$ für $\tilde{n} = 100.000.000$ erzeugt. Das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{\tilde{n}} \sum_{j=1}^{\tilde{n}} (X_j - u)^+$$

wird schließlich als Approximation dieser Größe verwendet. Dies wurde jeweils ($\hat{n} = 10$)-mal durchgeführt. Als approximiertes Expektil $\xi_{\alpha_n}^{ap}$ wurde das arithmetische Mittel der \hat{n} geschätzten Expektile gewählt. Die approximierten Expektile $\xi_{\alpha_n}^{ap}$ und deren zugehörigen empirischen Standardabweichungen $\hat{\sigma}_{\hat{n}}$ lassen sich in der Tabelle 4.11 ablesen.

MA(1) mit p_γ -Innovationen, $\hat{n} = 10$			
γ	$\xi_{\alpha_n}^{ap}$	$\hat{\sigma}_{\hat{n}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{n}}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$
1/10	2.2217	0.0001	0.003%
1/3	7.63	0.0024	0.03%
1/2	25.37	0.0410	0.16%
2/3	116.02	1.2613	1.09%
3/4	290.14	16.1325	5.56%

Tabelle 4.11 – Approximiertes Expektil $\xi_{\alpha_n}^{ap}$ und zugehörige empirische Standardabweichung $\hat{\sigma}_{\hat{n}}$ sowie das Verhältnis $\hat{\sigma}_{\hat{n}}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$ für die MA(1)-Zeitreihe mit p_γ -Innovationen.

Die approximierten Expektile sind aufgrund der in Relation dazu kleinen empirischen Standardabweichungen akzeptabel. Die Graphen des RMSE für $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$ sind wegen ihres stark volatilen Verlaufs nicht zu interpretieren, sodass dieser Fall nicht weiter untersucht wird.

Es ergeben sich für $n = 1000$ analog zum Fall unabhängiger Beobachtungen folgende Tabelle 4.12 sowie die Abbildungen 4.4.34-4.4.39.

MA(1) mit p_γ -Innovationen, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$							
γ^{-1}	$\xi_{\alpha_n}^{ap}$	RMSE (k_n)			Bias		
		$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$	$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$	$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}^{ap}$
10	2.2217	0.0194 (418)	0.0561 (900)	0.0387 (2)	0.0042	0.0530	0.0040
3	7.6274	0.0768 (690)	0.0779 (857)	0.2379 (154)	-0.0007	0.0886	-0.0599
2	25.3665	0.1484 (756)	0.1522 (818)	0.2954 (455)	-0.0230	0.0337	-0.1426

Tabelle 4.12 – Monte-Carlo Ergebnisse für den RMSE und Bias unter der Verwendung des k_n 's (in Klammern), welches den jeweiligen RMSE minimiert, für die MA(1)-Zeitreihe mit p_γ -Innovationen.

MA(1) mit $p_{1/10}$ -Innovationen, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$

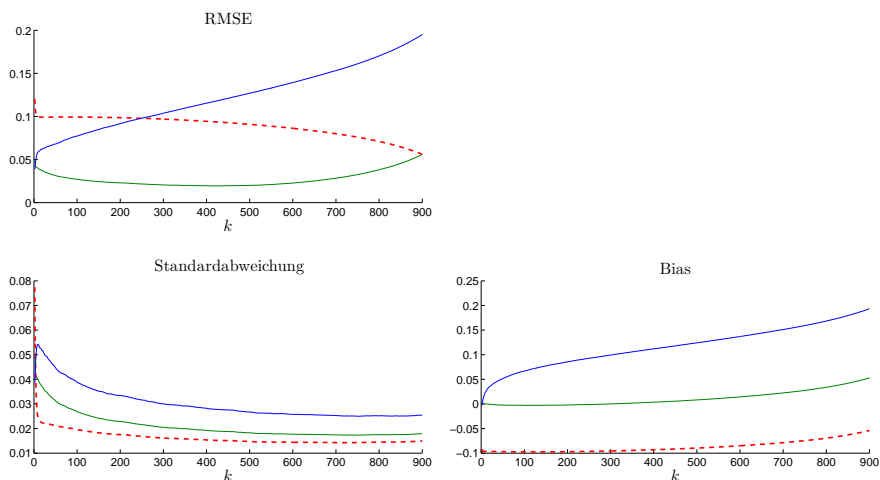


Abbildung 4.4.34 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/10}$ -Innovationen.

MA(1) mit $p_{1/10}$ -Innovationen, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$

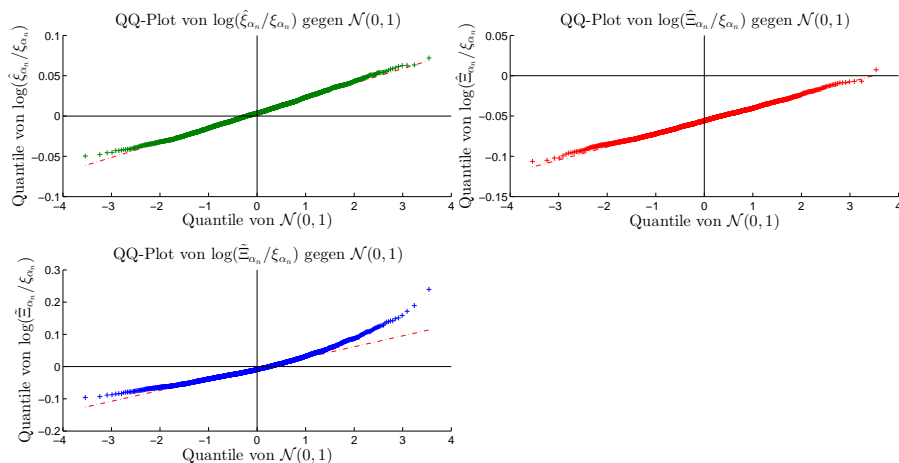


Abbildung 4.4.35 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/10}$ -Innovationen.

MA(1) mit $p_{1/3}$ -Innovationen, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$

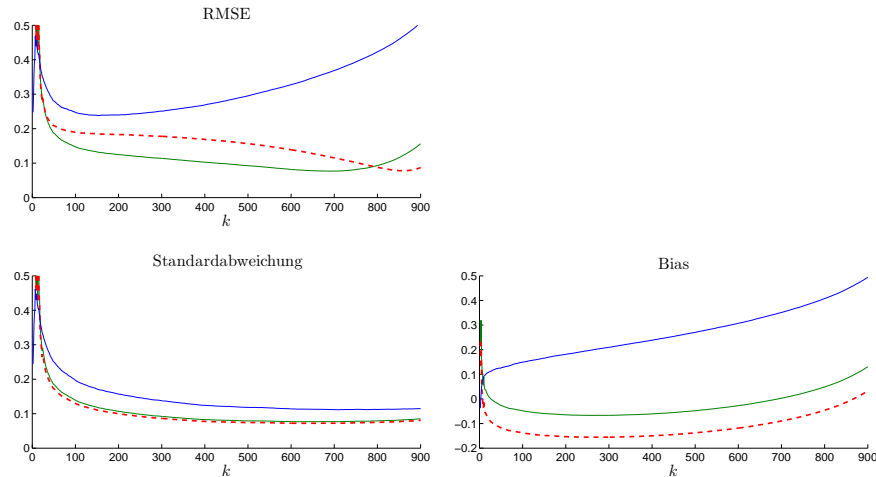


Abbildung 4.4.36 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/3}$ -Innovationen.

MA(1) mit $p_{1/3}$ -Innovationen, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$

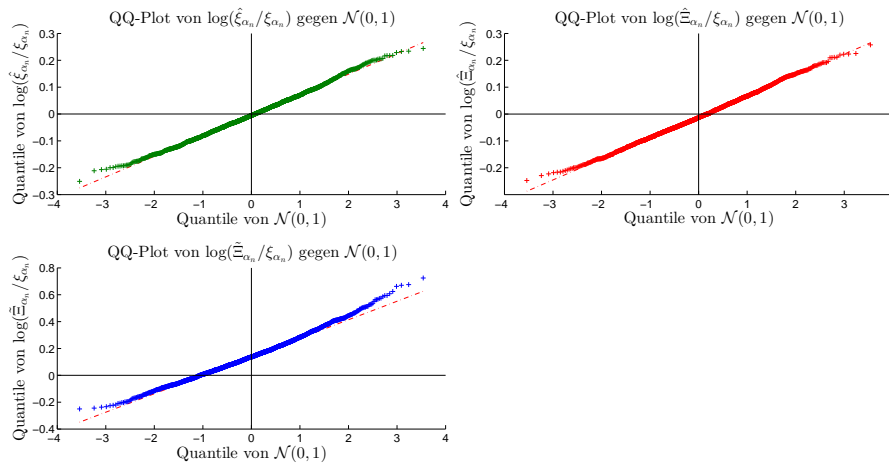


Abbildung 4.4.37 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/3}$ -Innovationen.

MA(1) mit $p_{1/2}$ -Innovationen, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$

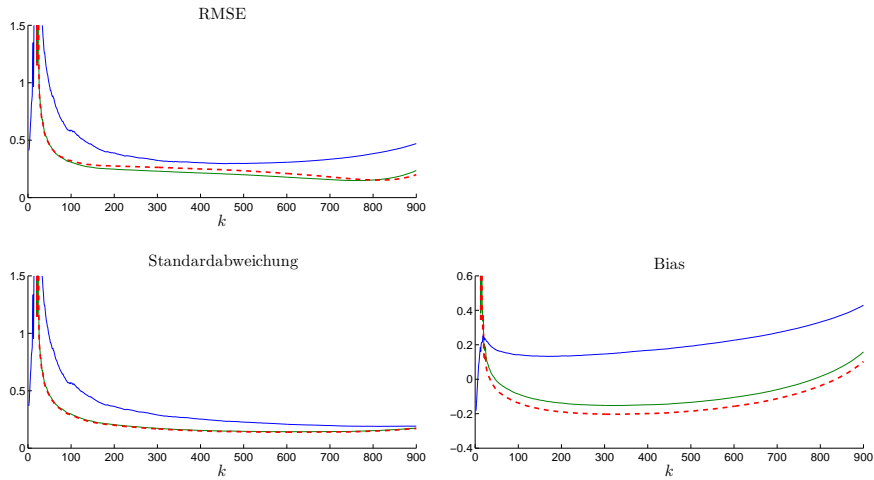


Abbildung 4.4.38 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/2}$ -Innovationen.

MA(1) mit $p_{1/2}$ -Innovationen, $n = 1000$, $\alpha_n = 0.9977$

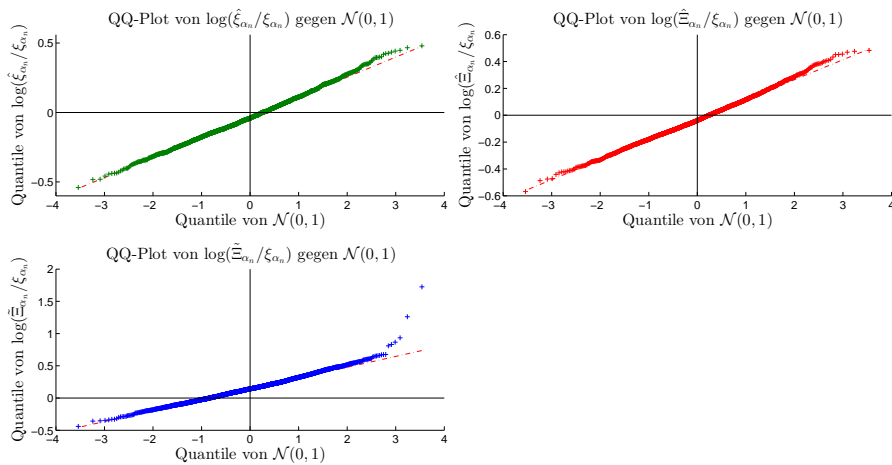


Abbildung 4.4.39 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/2}$ -Innovationen.

Die RMSE-Kurve des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ ist für geeignete k_n , die kleiner sind als $n/2$, stets unterhalb der RMSE-Kurven der Konkurrenten, sodass $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ diesbezüglich der beste Schätzer ist. Für $\gamma = 1/10$ weist der indirekte Expektilschätzer $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ abermals ein starkes Bias-Problem auf. In den QQ-Plots liegen die Schätzwerte der Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ annähernd auf der Ausgleichsgeraden. Die Ausgleichsgerade des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ verläuft im Gegensatz zu den anderen Schätzern zumindest annäherungsweise durch den Ursprung.

4.4.4 Fazit

Aus den Simulationsergebnissen geht hervor, dass alle untersuchten Expektilschätzer für $\gamma > 1/2$ weitestgehend unbrauchbar sind. Für $\gamma \leq 1/2$ performt der direkte Expektilschätzer $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}$ erheblich schlechter als die anderen Schätzer. Darüber hinaus ist festzustellen, dass die RMSE-Kurve für den Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ wesentlich stabiler ist als die der Konkurrenten. Dies macht den Schätzer robuster gegenüber einer ungünstigen Wahl von k_n . In den QQ-Plots zeigt sich, dass die Punkte des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ tendenziell am nächsten an der Ausgleichsgeraden liegen, welche am ehesten durch den Ursprung verläuft.

Insgesamt ist daher davon auszugehen, dass der Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ bei zugrundeliegender unbekannter Verteilung und Abhängigkeitsstruktur am zuverlässigsten performt. Das bedeutet, dass sich für diesen Schätzer auf Basis der in dieser Dissertation postulierten theoretischen asymptotischen Aussagen im Regelfall ein geeignetes Konfidenzintervall konstruieren lässt. Der Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ ist somit für die Anwendung zu empfehlen.

Kapitel 5

Beweise

5.1 Beweis von Satz 2.1.5

Beweis. Der Beweis wird ähnlich zu [DFH04, Lemma 3.2, Seite 1188 ff.] durchgeführt. Da F_X stetig ist und \bar{F}_X monoton fällt, gilt wegen $U_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \bar{F}_X(X_i)$ und somit wegen $U_{i+1:n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \bar{F}_X(X_{n-i:n})$, $i \in \mathbb{N}$, gerade $(Q_n(t))_{t \in [0,1]} = (X_{n-[k_n t]:n})_{t \in [0,1]} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (F_X^{\leftarrow}(1 - U_{[k_n t]+1:n}))_{t \in [0,1]}$. Betrachte den Term

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - U_{[k_n t]+1:n})}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} = \left(\frac{n}{k_n} U_{[k_n t]+1:n} \right)^{-\gamma} \left(1 + R \left(\frac{k_n}{n}, \frac{n}{k_n} U_{[k_n t]+1:n} \right) \right).$$

Hierbei gilt $n/k_n U_{[k_n t]+1:n} \leq 1 + \nu$ mit gegen 1 konvergierender Wahrscheinlichkeit, was sich direkt aus [Dre00, Korollar 3.1, Seite 1280] folgern lässt. Es folgt nach Voraussetzung (2.1.7)

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - U_{[k_n t]+1:n})}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} = \left(\frac{n}{k_n} U_{[k_n t]+1:n} \right)^{-\gamma} (1 + o_{P,[0,1+\nu]}(t^{-\varepsilon} k_n^{-1/2})). \quad (5.1.1)$$

Offenbar gilt die Gleichung auch dann, wenn man das Supremum auf $[1/(2k_n), 1]$ einschränkt. Somit folgt

$$\begin{aligned} t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} &\stackrel{\mathcal{D}}{=} t^\gamma \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - U_{[k_n t]+1:n})}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} = \left(\frac{k_n t}{n U_{[k_n t]+1:n}} \right)^\gamma (1 + o_{P,[1/(2k_n),1]}(t^{-\varepsilon} k_n^{-1/2})) \\ &\stackrel{(2.1.8)}{=} O_{P,[0,1]}(1) (1 + o_{P,[1/(2k_n),1]}(t^{-\varepsilon} k_n^{-1/2})) \\ &= O_{P,[1/(2k_n),1]}(1) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

für $n \rightarrow \infty$, da

$$o_{P,[1/(2k_n),1]}(t^{-\varepsilon} k_n^{-1/2}) = o_{P,[1/(2k_n),1]}(1) \quad (5.1.3)$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Wegen $\varepsilon \in (0, 1/2)$ gilt nämlich für jede zufällige Funktion $f_n(t) = o_{P, [1/(2k_n), 1]}(t^{-\varepsilon} k_n^{-1/2})$ für $n \rightarrow \infty$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [1/(2k_n), 1]} t^\varepsilon k_n^{1/2} |f_n(t)| \geq 2^{-\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} k_n^{1/2-\varepsilon} |f_n(t)| \geq 2^{-\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)|,$$

d.h. $f_n(t) = o_{P, [1/(2k_n), 1]}(1)$ für $n \rightarrow \infty$. Es folgt der erste Teil der Behauptung:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, 1]} t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} &\leq \sup_{t \in [0, 1/(2k_n))} t^\gamma \frac{X_{n:n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} + \sup_{t \in [1/(2k_n), 1]} t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} \\ &= \left(\frac{1}{2k_n}\right)^\gamma \frac{X_{n:n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} + \sup_{t \in [1/(2k_n), 1]} t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} \\ &\leq 2 \sup_{t \in [1/(2k_n), 1]} t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})}, \\ &\stackrel{(5.1.2)}{=} O_P(1), \end{aligned}$$

da $Q_n(t) = X_{n:n}$ für alle $t \in [0, 1/(2k_n))$.

Außerdem folgt aus (5.1.1) und (5.1.3) ($n \in \mathbb{N}$ ausreichend groß)

$$\begin{aligned} \inf_{t \in [1/(2k_n), 1]} t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})} &= \inf_{t \in [1/(2k_n), 1]} \left(\frac{k_n t}{nU_{[k_n t]+1:n}}\right)^\gamma (1 + o_{P, [1/(2k_n), 1]}(1)) \\ &= \left(\sup_{t \in [1/(2k_n), 1]} \frac{nU_{[k_n t]+1:n}}{k_n t}\right)^{-\gamma} \left(1 + \inf_{t \in [1/(2k_n), 1]} o_{P, [1/(2k_n), 1]}(1)\right) \\ &= \left(\sup_{t \in [1/(2k_n), 1]} \frac{nU_{[k_n t]+1:n}}{k_n t}\right)^{-\gamma} (1 + o_P(1)) \\ &\stackrel{(2.1.8)}{>} 0 \end{aligned}$$

der zweite Teil der Behauptung:

$$\sup_{t \in [1/(2k_n), 1]} t^{-\gamma} \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})}{Q_n(t)} = \left(\inf_{t \in [1/(2k_n), 1]} t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \frac{k_n}{n})}\right)^{-1} = O_P(1).$$

□

5.2 Beweis von Satz 2.2.3

Beweis. Der Beweis wird ähnlich zum Beweis von [Dre03, Theorem 2.2, Seite 626 f.] geführt. Der metrische Raum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}[0, 1]$ auf $[0, 1]$ ist separabel, was aus dem Approximationssatz von Weierstraß und aus der Tatsache folgt, dass die Menge der Polynome auf

$[0, 1]$ mit rationalen Koeffizienten dicht in der Menge aller Polynome auf $[0, 1]$ liegt. Damit ist $\bar{\mathcal{C}}_\gamma \subseteq \mathcal{C}[0, 1]$ aus Bemerkung 2.1.4 als Teilmenge eines separablen metrischen Raumes separabel. Daher gibt es Versionen von Q_n und des zentrierten Gaußprozesses e mit $e_\gamma(t) := \gamma t^{-(\gamma+1)}e(t)$, $t \in (0, 1]$, sodass die Konvergenz in (2.1.6) sogar P -f.s. in $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$ gilt:

$$\sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - z_\gamma \right) \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}_\gamma} e_\gamma \in \bar{\mathcal{C}}_\gamma \quad P\text{-f.s.} \quad (5.2.1)$$

Zusammen mit der Hadamard-Differenzierbarkeit von S in z_γ folgt mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_n &\stackrel{(S1)}{=} S \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) = S(z_\gamma + k_n^{-1/2}(e_\gamma + o(1))) \\ &= S(z_\gamma) + k_n^{-1/2} \dot{S}_{z_\gamma}(e_\gamma) + o(k_n^{-1/2}) \\ &= \gamma + k_n^{-1/2} \gamma \int_{(0,1]} t^{-(\gamma+1)} e(t) \nu_\gamma(dt) + o(k_n^{-1/2}), \end{aligned}$$

d.h.

$$\sqrt{k_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma) \longrightarrow \gamma \int_{(0,1]} t^{-(\gamma+1)} e(t) \nu_\gamma(dt) \quad P\text{-f.s.}$$

für $n \rightarrow \infty$. Des Weiteren erhält man wegen (5.2.1) die fast sichere Konvergenz

$$\sqrt{k_n} \left(\frac{X_{n-k_n:n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - 1 \right) = \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n(1)}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - z_\gamma(1) \right) \longrightarrow e_\gamma(1) = \gamma e(1) \quad P\text{-f.s.}$$

Insgesamt gilt demnach für die oben gewählten Versionen von Q_n und e sowie für $\psi_1(dt) := \gamma t^{-(\gamma+1)} \nu_\gamma(dt)$ und $\psi_2(dt) := \gamma t^{-(\gamma+1)} \delta_1(dt)$

$$\sqrt{k_n} \left(\frac{\hat{\gamma}_n - \gamma}{\frac{X_{n-k_n:n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - 1} \right) \longrightarrow \gamma \begin{pmatrix} \int_{(0,1]} t^{-(\gamma+1)} e(t) \nu_\gamma(dt) \\ e(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{(0,1]} e(t) \psi_1(dt) \\ \int_{(0,1]} e(t) \psi_2(dt) \end{pmatrix} \quad P\text{-f.s.}$$

und somit in Verteilung für die ursprünglichen Prozesse Q_n und e . Allgemein lässt sich zeigen, dass für einen zentrierten Gaußprozess e mit Kovarianzfunktion r und für signierte Maße ψ_1, ψ_2 die Integrale $\int_{(0,1]} e(t) \psi_i(dt)$, $i = 1, 2$, sofern sie definiert und endlich sind, gemeinsam zentriert und normalverteilt sind mit Kovarianzmatrix

$$\left(\int_{(0,1]} \int_{(0,1]} r(s, t) \psi_i(ds) \psi_j(dt) \right)_{i, j \in \{1, 2\}}.$$

Siehe hierzu z.B. [Adl90, Seite 26]. Mit obiger Wahl von ψ_1 und ψ_2 folgt

$$\sigma_S^2 = \int_{(0,1]^2} r(s, t) \psi_1^2(d(s, t)) = \gamma^2 \int_{(0,1]^2} (st)^{-(\gamma+1)} r(s, t) \nu_\gamma^2(d(s, t)),$$

$$\sigma_T^2 = \int_{(0,1]^2} r(s,t) \psi_2^2(d(s,t)) = \gamma^2 \int_{(0,1]^2} (st)^{-(\gamma+1)} r(s,t) \delta_1^2(d(s,t)) = \gamma^2 r(1,1)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{S,T} &= \int_{(0,1]} \int_{(0,1]} r(s,t) \psi_2(ds) \psi_1(dt) = \gamma^2 \int_{(0,1]} \int_{(0,1]} (st)^{-(\gamma+1)} r(s,t) \delta_1(ds) \nu_\gamma(dt) \\ &= \int_{(0,1]} t^{-(\gamma+1)} r(1,t) \nu_\gamma(dt). \end{aligned}$$

Ist $\hat{\gamma}_n$ der Hill-Schätzer, so ist das signierte Maß ν_γ durch

$$\nu_\gamma(dt) = t^\gamma dt - \delta_1(dt)$$

gegeben [Dre03, Seite 625]. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_S^2}{\gamma^2} &= \int_{(0,1]^2} (st)^{-(\gamma+1)} r(s,t) \nu_\gamma^2(d(s,t)) \\ &= \int_{(0,1]} \left[\int_0^1 s^{-1} t^{-(\gamma+1)} r(s,t) ds - \int_{(0,1]} (st)^{-(\gamma+1)} r(s,t) \delta_1(ds) \right] \nu_\gamma(dt) \\ &= \int_{(0,1]} \left[\int_0^1 s^{-1} t^{-(\gamma+1)} r(s,t) ds - t^{-(\gamma+1)} r(1,t) \right] \nu_\gamma(dt) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (st)^{-1} r(s,t) ds dt - \int_{(0,1]} \int_0^1 s^{-1} t^{-(\gamma+1)} r(s,t) ds \delta_1(dt) \\ &\quad - \int_0^1 t^{-1} r(1,t) dt + \int_{(0,1]} t^{-(\gamma+1)} r(1,t) \delta_1(dt) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (st)^{-1} r(s,t) ds dt - 2 \int_0^1 t^{-1} r(1,t) dt + r(1,1), \end{aligned}$$

da $r(s,t) = r(t,s)$ für alle $(s,t) \in (0,1]^2$. Die Behauptung $\sigma_S = \sigma_T$ folgt dann mit dem Satz von Fubini und der Substitution $s = lt$ aus

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (st)^{-1} r(s,t) ds dt &= \int_0^1 \int_0^t (st)^{-1} r(s,t) ds dt + \int_0^1 \int_t^1 (st)^{-1} r(s,t) ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^t (st)^{-1} r(s,t) ds dt + \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{(t,1]}(s) (st)^{-1} r(s,t) ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^t (st)^{-1} r(s,t) ds dt + \int_0^1 \int_0^s (st)^{-1} r(s,t) dt ds \\ &= \int_0^1 \int_0^t (st)^{-1} r(s,t) ds dt + \int_0^1 \int_0^s (ts)^{-1} r(t,s) dt ds \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^t (st)^{-1} r(s,t) ds dt = 2 \int_0^1 \int_0^1 (lt^2)^{-1} r(lt,t) t dl dt \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 l^{-1} r(l,1) dl dt = 2 \int_0^1 l^{-1} r(l,1) dl, \end{aligned}$$

da $r(s,t) = r(t,s)$ und $r(\lambda s, \lambda t) = \lambda r(s,t)$ für alle $(s,t) \in (0,1]^2$ und $\lambda > 0$. □

5.3 Beweis von Satz 3.2.2

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt für alle Tripel $(v, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (h_n)_{n \in \mathbb{N}})$ mit $v \in V$, $v_n \in D_T$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_\omega = 0$ und $h_n \searrow 0$ für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{T(z + h_n v_n) - T(z)}{h_n} - \tau \int_0^1 z(t)^{\tau-1} v(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{(z(t) + h_n v_n(t))^\tau - z(t)^\tau}{h_n} - \tau z(t)^{\tau-1} v(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{(z(t) + h_n v_n(t))^\tau - z(t)^\tau}{h_n v_n(t)} v_n(t) - \tau z(t)^{\tau-1} v(t) \right| dt. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\theta_{n,t} \in (0, 1)$, sodass für $z_n(t) := z(t) + \theta_{n,t} h_n v_n(t)$ gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \frac{(z(t) + h_n v_n(t))^\tau - z(t)^\tau}{h_n v_n(t)} v_n(t) - \tau z(t)^{\tau-1} v(t) \right| dt \\ &= \int_0^1 |\tau z_n(t)^{\tau-1} v_n(t) - \tau z(t)^{\tau-1} v(t)| dt \\ &= \tau \int_0^1 |z_n(t)^{\tau-1} v_n(t) - z(t)^{\tau-1} v(t)| dt. \end{aligned}$$

Da $\|\cdot\|_\omega$ eine Seminorm ist, folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_\omega = 0$ und der umgekehrten Dreiecksungleichung die Existenz eines hinreichend großen $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|v_n\|_\omega - \|v\|_\omega \leq \|v_n - v\|_\omega \leq 1 \quad \forall n \geq m$$

gilt, d.h. $\|v_n\|_\omega \leq \|v\|_\omega + 1$ für alle $n \geq m$. Daraus folgt aber auch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\|_\omega &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0,1]} w(t) |z_n(t) - z(t)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0,1]} w(t) |\theta_{n,t} h_n v_n(t)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \sup_{t \in (0,1]} w(t) |v_n(t)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \|v_n\|_\omega \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

und mit dem gleichen Argument wie zuvor $\|z_n\|_\omega \leq \|z\|_\omega + 1$ für alle $n \geq m$. Außerdem folgt aus (5.3.1) auch $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = z(t)$ für alle $t \in (0, 1]$, da

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in (0,1]} w(s) |z_n(s) - z(s)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} w(t) |z_n(t) - z(t)| \geq 0 \quad \forall t \in (0, 1]$$

und somit $w(t) \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n(t) - z(t)| = 0$ für alle $t \in (0, 1]$.

Es folgt

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T(z + h_n v_n) - T(z)}{h_n} - \tau \int_0^1 z(t)^{\tau-1} v(t) dt \right| \\
 &\leq \tau \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |z_n(t)^{\tau-1} v_n(t) - z(t)^{\tau-1} v(t)| dt \\
 &= \tau \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |z_n(t)^{\tau-1} v_n(t) - v_n(t) z(t)^{\tau-1} + v_n(t) z(t)^{\tau-1} - z(t)^{\tau-1} v(t)| dt \\
 &= \tau \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |v_n(t) (z_n(t)^{\tau-1} - z(t)^{\tau-1}) + (v_n(t) - v(t)) z(t)^{\tau-1}| dt \\
 &\leq \tau \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{w(t)^\tau} w(t) |v_n(t)| |(w(t) z_n(t))^{\tau-1} - (w(t) z(t))^{\tau-1}| dt \\
 &\quad + \tau \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{w(t)^\tau} w(t) |v_n(t) - v(t)| (w(t) |z(t)|)^{\tau-1} dt \\
 &\leq \tau \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{w(t)^\tau} \|v_n\|_w |(w(t) z_n(t))^{\tau-1} - (w(t) z(t))^{\tau-1}| dt \\
 &\quad + \tau \|z\|_w^{\tau-1} \int_0^1 \frac{1}{w(t)^\tau} dt \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n(t) - v(t)\|_w \\
 &\leq \tau (\|v\|_w + 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{w(t)^\tau} \left| \underbrace{(w(t) z_n(t))^{\tau-1}}_{\leq \|z\|_w + 1} - \underbrace{(w(t) z(t))^{\tau-1}}_{\leq \|z\|_w} \right| dt \\
 &\quad + \tau \|z\|_w^{\tau-1} \int_0^1 \frac{1}{w(t)^\tau} dt \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n(t) - v(t)\|_w \\
 &= \tau (\|v\|_w + 1) \int_0^1 \frac{1}{w(t)^\tau} \left| \left(w(t) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) \right)^{\tau-1} - (w(t) z(t))^{\tau-1} \right| dt \\
 &\quad + \tau \|z\|_w^{\tau-1} \int_0^1 \frac{1}{w(t)^\tau} dt \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n(t) - v(t)\|_w \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichheiten resultieren aus der majorisierten Konvergenz und der Integrierbarkeitsbedingung $\int_0^1 w(t)^{-\tau} dt < \infty$. Es folgt die Behauptung

$$\dot{\mathcal{T}}_z(v) = \tau \int_0^1 z(t)^{\tau-1} v(t) dt.$$

□

5.4 Beweis von Korollar 3.2.3

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.2.3 im Abschnitt 5.2 zeigt man, dass es Versionen von Q_n und des zentrierten Gaußprozesses e mit $e_\gamma(t) := \gamma t^{-(\gamma+1)} e(t)$, $t \in (0, 1]$, gibt, sodass die Konvergenz

in (2.1.6) sogar P -f.s. in $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$ gilt:

$$\sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} - z_\gamma \right) \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}_\gamma} e_\gamma \in \bar{\mathcal{C}}_\gamma \quad P\text{-f.s.}$$

Zusammen mit der Hadamard-Differenzierbarkeit von T in z_γ gemäß Satz 3.2.2 folgt mit Wahrscheinlichkeit 1:

$$\begin{aligned} \sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) - T(z_\gamma) \right) &= \sqrt{k_n} (T(z_\gamma + k_n^{-1/2}(e_\gamma + o(1))) - T(z_\gamma)) \\ &= \dot{T}_{z_\gamma}(e_\gamma) + o(1) \\ &= \gamma\tau \int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} e(t) dt + o(1), \end{aligned}$$

d.h. für die oben genannten Versionen von Q_n und e

$$\sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) - T(z_\gamma) \right) \longrightarrow \gamma\tau \int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} e(t) dt \quad P\text{-f.s.}$$

und somit in Verteilung für die ursprünglichen Prozesse Q_n und e . Man kann zeigen (siehe z.B. [Adl90, Seite 20]), dass $\int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} e(t) dt$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^1 \int_0^1 (st)^{-(\gamma\tau+1)} r(s, t) ds dt$. Dies liefert die erste Behauptung.

Sind die Beobachtungen stochastisch unabhängig, d.h. gilt $\beta \equiv 0$, so folgt analog

$$\sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) - T(z_\gamma) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \gamma\tau \int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} W(t) dt.$$

Die Brown'sche Bewegung hat die Kovarianzfunktion $r(s, t) = \min(s, t)$, $s, t \in (0, 1]$. Wie zuvor ist $\int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} W(t) dt$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (st)^{-(\gamma\tau+1)} \min(s, t) ds dt &= \int_0^1 \left[t^{-(\gamma\tau+1)} \int_0^t s^{-\gamma\tau} ds + t^{-\gamma\tau} \int_t^1 s^{-(\gamma\tau-1)} ds \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 - \gamma\tau} t^{-2\gamma\tau} + \frac{1}{2 - \gamma\tau} t^{-\gamma\tau} - \frac{1}{2 - \gamma\tau} t^{2(1-\gamma\tau)} dt \\ &= \frac{1}{(1 - \gamma\tau)(1 - 2\gamma\tau)} + \frac{1}{(1 - \gamma\tau)(2 - \gamma\tau)} \\ &\quad - \frac{1}{(2 - \gamma\tau)(3 - 2\gamma\tau)} \\ &= \frac{4(\gamma\tau)^2 - 10\gamma\tau + 8}{(1 - \gamma\tau)(2 - \gamma\tau)(1 - 2\gamma\tau)(3 - 2\gamma\tau)}, \end{aligned}$$

falls $\gamma\tau < 1/2$. Somit folgt auch der zweite Teil des Korollars. □

5.5 Beweis von Satz 3.2.4

Beweis. Ein derartiges Paar $(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{R}^2$, welches (3.2.4) und (3.2.5) erfüllt, existiert: Es gilt nämlich nach Voraussetzung $3 - 2(\gamma\tau + 2\eta) \geq 0$ und $1 - 2\gamma\tau > 1 - 2(3/2 - 2\eta) \geq 0$ bzw. $1 - \gamma\tau - \eta = 1 - (\gamma\tau + 2\eta) + \eta > \eta - 1/2 \geq 0$.

Man überzeugt sich davon, dass die Funktion $t \mapsto t^{-\gamma(\tau-1)}v(t)$ auf $(0, 1)$ endlich integrierbar ist: Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-1)}v(t)dt \right| &\leq \sup_{s \in (0,1)} s^{\gamma+\eta+\delta} |v(s)| \int_0^1 t^{-(\gamma\tau+\eta+\delta)} dt \\ &= \sup_{s \in (0,1)} s^{\gamma+\eta+\delta} |v(s)| \frac{1}{1 - (\gamma\tau + \eta + \delta)} < \infty, \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

da $\gamma\tau + \eta + \delta < 1$. Im nächsten Schritt zerlegt man die Differenz

$$\begin{aligned} T(z + h_n v_n) - T(z) &= \int_0^1 (t^{-\gamma} + h_n v_n(t))^\tau - t^{-\gamma\tau} dt = \int_0^1 t^{-\gamma\tau} [(1 + h_n t^\gamma v_n(t))^\tau - 1] dt \\ &= \tau h_n \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-1)} v_n(t) dt \\ &\quad + \int_0^1 t^{-\gamma\tau} [(1 + h_n t^\gamma v_n(t))^\tau - 1 - \tau h_n t^\gamma v_n(t)] dt \end{aligned}$$

in die Summanden

$$T_{1,n} := \tau h_n \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-1)} v_n(t) dt$$

und

$$T_{2,n} := \int_0^1 t^{-\gamma\tau} [(1 + h_n t^\gamma v_n(t))^\tau - 1 - \tau h_n t^\gamma v_n(t)] dt.$$

Es gilt

$$\frac{1}{h_n} T_{1,n} = \tau \int_0^{h_n^2} t^{-\gamma(\tau-1)} v_n(t) dt + \tau \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-1)} v_n(t) dt.$$

Für den ersten der beiden Summanden auf der rechten Seite ergibt sich für $n \rightarrow \infty$ nach betragsmäßigem Abschätzen die Konvergenzaussage

$$\begin{aligned} \tau \int_0^{h_n^2} t^{-\gamma(\tau-1)} |v_n(t)| dt &\leq \sup_{s \in (0,1)} s^\gamma |v_n(s)| \tau \int_0^{h_n^2} t^{-\gamma\tau} dt = \sup_{s \in (0,1)} s^\gamma |v_n(s)| \frac{\tau}{1 - \gamma\tau} h_n^{2-2\gamma\tau} \\ &= o(h_n^{-1-\varepsilon} h_n^{2-2\gamma\tau}) = o(h_n^{1-2\gamma\tau-\varepsilon}) = o(1), \end{aligned}$$

da $\varepsilon < (1 - 2\gamma\tau)/\tau \leq 1 - 2\gamma\tau$. Für den zweiten Summanden erhält man wegen (5.5.1)

$$\tau \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-1)} v_n(t) dt = \tau \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-1)} v(t) dt + \tau \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-1)} \varepsilon_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-1)} v(t) dt,$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \left| \tau \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-1)} \varepsilon_n(t) dt \right| &\leq \tau \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-1)} |\varepsilon_n(t)| dt \leq \tau \sup_{s \in (0,1]} s^{\gamma + \frac{1}{2} + \delta} |\varepsilon_n(s)| \underbrace{\int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma\tau - \frac{1}{2} - \delta} dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \gamma\tau - \frac{1}{2} - \delta} \in (0, \infty)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da $\gamma\tau + 1/2 + \delta \leq \gamma\tau + \eta + \delta < 1$.

Zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $T_{2,n}$ sei zunächst $\tau \geq 2$ angenommen. Es existiert nach dem Satz von Taylor eine Funktion $u \mapsto \vartheta_u \in (0, 1)$, sodass

$$f(u) := (1 + u)^\tau - 1 - \tau u = \frac{\tau(\tau - 1)}{2} (1 + \vartheta_u t)^{\tau-2} u^2.$$

Entsprechend gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $t \mapsto \vartheta_{t,n} \in (0, 1)$, sodass

$$\begin{aligned} T_{2,n} &= \int_0^1 t^{-\gamma\tau} [(1 + h_n t^\gamma v_n(t))^\tau - 1 - \tau h_n t^\gamma v_n(t)] dt \\ &= \frac{\tau(\tau - 1)}{2} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} (1 + \vartheta_{t,n} h_n t^\gamma v_n(t))^{\tau-2} (h_n t^\gamma v_n(t))^2 dt \\ &= \frac{\tau(\tau - 1)}{2} h_n^2 \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-2)} (1 + \vartheta_{t,n} h_n t^\gamma v_n(t))^{\tau-2} v_n^2(t) dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $\vartheta_{t,n} \leq 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h_n} T_{2,n} \right| &\leq \frac{\tau(\tau - 1)}{2} h_n \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-2)} (1 + h_n t^\gamma |v_n(t)|)^{\tau-2} v_n^2(t) dt \\ &= \frac{\tau(\tau - 1)}{2} \left(h_n \int_0^{h_n^2} t^{-\gamma(\tau-2)} (1 + h_n t^\gamma |v_n(t)|)^{\tau-2} v_n^2(t) dt \right. \\ &\quad \left. + h_n \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-2)} (1 + h_n t^\gamma |v_n(t)|)^{\tau-2} v_n^2(t) dt \right). \end{aligned}$$

Zum einen erhält man für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} h_n \int_0^{h_n^2} t^{-\gamma(\tau-2)} (1 + h_n t^\gamma |v_n(t)|)^{\tau-2} v_n^2(t) dt &\leq h_n \left(1 + h_n \sup_{s \in (0,1]} s^\gamma |v_n(s)| \right)^{\tau-2} \\ &\quad \cdot \left(\sup_{s \in (0,1]} s^\gamma v_n(s) \right)^2 \int_0^{h_n^2} t^{-\gamma\tau} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= o\left(h_n h_n^{-\varepsilon(\tau-2)} h_n^{-2-2\varepsilon} h_n^{2-2\gamma\tau}\right) \\
 &= o\left(h_n^{1-2\gamma\tau-\varepsilon\tau}\right) \\
 &= o(1),
 \end{aligned}$$

da $\varepsilon < (1 - 2\gamma\tau)/\tau$.

Es gilt $v_n(t) = O_{(0,1]}(t^{-(\gamma+\eta+\delta)})$ für $n \rightarrow \infty$, was direkt aus

$$\sup_{t \in (0,1]} |v_n(t) t^{\gamma+\eta+\delta}| \leq \underbrace{\sup_{t \in (0,1]} |v(t)| t^{\gamma+\eta+\delta}}_{\in [0, \infty)} + \underbrace{\sup_{t \in (0,1]} |\varepsilon_n(t)| t^{\gamma+\eta+\delta}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

nach Voraussetzung folgt. Hieraus erhält man zum anderen

$$\begin{aligned}
 &h_n \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-2)} (1 + h_n t^\gamma |v_n(t)|)^{\tau-2} v_n^2(t) dt \\
 &\leq h_n \left(1 + h_n \sup_{s \in (0,1]} s^\gamma |v_n(s)|\right)^{\tau-2} \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma(\tau-2)} \left(\frac{v_n(t)}{t^{-(\gamma+\eta+\delta)}}\right)^2 t^{-2(\gamma+\eta+\delta)} dt \\
 &\leq h_n \left(1 + h_n \sup_{s \in (0,1]} s^\gamma |v_n(s)|\right)^{\tau-2} \left(\sup_{s \in (0,1]} s^{\gamma+\eta+\delta} |v_n(s)|\right)^2 \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma\tau-2\eta-2\delta} dt \\
 &= o\left(h_n h_n^{-\varepsilon(\tau-2)} (1 - h_n^{2-2(\gamma\tau+2\eta+2\delta)})\right) \\
 &= o\left(h_n^{1-\varepsilon(\tau-2)} + h_n^{3-2(\gamma\tau+2\eta)-\varepsilon(\tau-2)-4\delta}\right) \\
 &= o(1),
 \end{aligned}$$

da $\varepsilon < (1 - 2\gamma\tau)/\tau < 1/(\tau - 2)$ und $\varepsilon < (3 - 2(\gamma\tau + 2\eta))/(\tau - 2)$ sowie $\delta < (3 - 2(\gamma\tau + 2\eta) - \varepsilon(\tau - 2))/4$, falls $\tau > 2$, und $\delta < (3 - 2(\gamma\tau + 2\eta))/4$, falls $\tau = 2$.

Daher erhält man für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{h_n} T_{2,n} = o(1).$$

Um abschließend den Fall $\tau \in [1, 2)$ behandeln zu können, wird eine genauere Abschätzung für die Funktion $f(u) = (1 + u)^\tau - 1 - \tau u = \frac{\tau(\tau-1)}{2} (1 + \vartheta_u u)^{\tau-2} u^2$ nahe $u = -1$ benötigt, denn der Exponent $\tau - 2$ ist negativ. Aus

$$0 \leq \frac{f(u)}{u^2} \leq 4((1 + u)^\tau + \tau |u| - 1) \leq 6 \quad \forall u \in (-1, -1/2]$$

folgt

$$|f(u)| \leq 6u^2 \quad \forall u \in (-1, -1/2]. \tag{5.5.2}$$

Es ist die Asymptotik von $T_{2,n}$ erneut zu untersuchen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h_n} T_{2,n} \right| &\leq \frac{1}{h_n} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} |(1 + h_n t^\gamma v_n(t))^\tau - 1 - \tau h_n t^\gamma v_n(t)| dt \\ &= \frac{1}{h_n} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} |f(h_n t^\gamma v_n(t))| \mathbb{1}_{\{h_n t^\gamma v_n(t) \in (-1, -1/2]\}} dt \\ &\quad + \frac{1}{h_n} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} |f(h_n t^\gamma v_n(t))| \mathbb{1}_{\{h_n t^\gamma v_n(t) > -\frac{1}{2}\}} dt. \end{aligned}$$

Es existiert wieder für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $t \mapsto \vartheta_{t,n}$, sodass die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_n} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} |f(h_n t^\gamma v_n(t))| \mathbb{1}_{\{h_n t^\gamma v_n(t) \in (-1, -1/2]\}} dt &\stackrel{(5.5.2)}{\leq} \frac{6}{h_n} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} (h_n t^\gamma v_n(t))^2 dt \\ &= 6h_n \int_0^1 t^{(2-\tau)\gamma} v_n^2(t) dt \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_n} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} |f(h_n t^\gamma v_n(t))| \mathbb{1}_{\{h_n t^\gamma v_n(t) > -\frac{1}{2}\}} dt \\ &= \frac{\tau(\tau-1)}{2} h_n \int_0^1 t^{(2-\tau)\gamma} |1 + \vartheta_{t,n} h_n t^\gamma v_n(t)|^{\tau-2} v_n^2(t) \mathbb{1}_{\{h_n t^\gamma v_n(t) > -\frac{1}{2}\}} dt \\ &\leq \tau(\tau-1) 2^{1-\tau} h_n \int_0^1 t^{(2-\tau)\gamma} v_n^2(t) dt. \end{aligned}$$

gelten. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h_n} T_{2,n} \right| &\leq (6 + \tau(\tau-1) 2^{1-\tau}) h_n \int_0^1 t^{(2-\tau)\gamma} v_n^2(t) dt \\ &= (6 + \tau(\tau-1) 2^{1-\tau}) \left[h_n \int_0^{h_n^2} t^{(2-\tau)\gamma} v_n^2(t) dt + h_n \int_{h_n^2}^1 t^{(2-\tau)\gamma} v_n^2(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Nun gilt einerseits für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} h_n \int_0^{h_n^2} t^{(2-\tau)\gamma} v_n^2(t) dt &\leq h_n \left(\sup_{s \in (0,1]} s^\gamma |v_n(s)| \right)^2 \int_0^{h_n^2} t^{-\gamma\tau} dt = o(h_n h_n^{-2-2\varepsilon} h_n^{2-2\gamma\tau}) \\ &= o(h_n^{1-2\gamma\tau-2\varepsilon}) = o(1), \end{aligned}$$

da $\varepsilon < (1 - 2\gamma\tau)/2$. Andererseits folgt aus der zuvor nachgewiesenen Eigenschaft $v_n(t) = O_{(0,1]}(t^{-(\gamma+\eta+\delta)})$ für $n \rightarrow \infty$ und ein hinreichend kleines $\delta > 0$

$$h_n \int_{h_n^2}^1 t^{(2-\tau)\gamma} v_n^2(t) dt \leq h_n \left(\sup_{s \in (0,1]} s^{\gamma+\eta+\delta} |v_n(s)| \right)^2 \int_{h_n^2}^1 t^{(2-\tau)\gamma} t^{-2(\gamma+\eta+\delta)} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= O\left(h_n \int_{h_n^2}^1 t^{-\gamma\tau-2\eta-2\delta} dt\right) \\
 &= O\left(h_n (1 - h_n^{2-2\gamma\tau-4\eta-4\delta})\right) \\
 &= O\left(h_n + h_n^{3-2(\gamma\tau+2\eta)-4\delta}\right) = o(1),
 \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $\delta < (3 - 2(\gamma\tau + 2\eta))/4$. Dies liefert auch für $\tau \in [1, 2)$

$$\frac{1}{h_n} T_{2,n} = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ingesamt ist der Beweis durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} T_{1,n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} T_{2,n} = \tau \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-1)} v(t) dt.$$

für alle $\tau \geq 1$ erbracht. □

5.6 Beweis von Korollar 3.2.5

Beweis. Ziel ist, Satz 3.2.4 auf $z_\gamma + h_n v_n = Q_n / F^{\leftarrow} (1 - k_n/n)$ anzuwenden. Setze $h_n := k_n^{-1/2}$, dann gilt wegen Satz 2.1.3

$$v_n = \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n}{F^{\leftarrow} (1 - \frac{k_n}{n})} - z_\gamma \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\bar{\mathcal{D}}_\gamma} e_\gamma = v \quad (5.6.1)$$

und

$$\varepsilon_n = v_n - v = \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n}{F^{\leftarrow} (1 - \frac{k_n}{n})} - z_\gamma \right) - e_\gamma.$$

Mit dem gleichen Argument wie im Beweis aus Satz 2.2.3 gilt obige Konvergenz (5.6.1) für geeignete Versionen von Q_n und e sogar P -f.s. in $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$. Es sei $\eta \in [1/2, 3/4)$ und ein Paar $(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{R}^2$ erfülle die Bedingungen (3.2.4) und (3.2.5). Mit Hilfe von Satz 2.1.3 zeigt man, dass ε_n die gewünschte Bedingung erfüllt: Es existiert wegen der Annahme $\lim_{t \searrow 0} t^{-1/2+\delta} q(t) = 0$ ein $C > 0$ mit

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in (0,1]} t^{\gamma+\eta+\delta} |\varepsilon_n(t)| &= \sup_{t \in (0,1]} t^{\eta+\delta-1} q(t) \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} |\varepsilon_n(t)| \leq C \sup_{t \in (0,1]} \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} |\varepsilon_n(t)| \\
 &= C \sup_{t \in (0,1]} \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} \left| \sqrt{k_n} \left(\frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow} (1 - \frac{k_n}{n})} - z_\gamma(t) \right) - e_\gamma(t) \right| \\
 &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad P\text{-f.s.}
 \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

Außerdem gilt analog zu (3.2.2) für $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \in (0,1]} h_n^{1+\varepsilon} t^\gamma |v_n(t)| = o_P(1).$$

Demnach existiert zu jeder Teilfolge $(n_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(n_{l_j})_{j \in \mathbb{N}}$, sodass gilt

$$\sup_{t \in (0,1]} h_{n_{l_j}}^{1+\varepsilon} t^\gamma |v_{n_{l_j}}(t)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Ferner existiert wieder ein $C > 0$, sodass

$$\sup_{t \in (0,1]} t^{\gamma+\eta+\delta} |v(t)| = \sup_{t \in (0,1]} t^{\eta+\delta-1} q(t) \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} |e_\gamma(t)| \leq C \sup_{t \in (0,1]} \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} |e_\gamma(t)|.$$

Da der Raum der beschränkten Funktionen auf $(0, 1]$ versehen mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist, ist die rechte Seite wegen (5.6.2) P -f.s. endlich, denn aus der Forderung $t^\iota |\log(t)|^\mu = O(q(t))$ für $\iota \in [0, 1/2)$, $\mu \geq 0$ in Satz 2.1.3 folgt $t/q(t) \rightarrow 0$ für $t \searrow 0$ und somit für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beschränktheit von

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0,1]} \frac{t^{\gamma+1}}{q(t)} \sqrt{k_n} \left| \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)} - z_\gamma(t) \right| &= \sqrt{k_n} \sup_{t \in (0,1]} \frac{t}{q(t)} \left| t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)} - 1 \right| \\ &\leq \sqrt{k_n} \sup_{t \in (0,1]} \frac{t}{q(t)} \left(t^\gamma \frac{Q_n(t)}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)} + 1 \right) \stackrel{2.1.7(i)}{<} \infty. \end{aligned}$$

Für jede Teilfolge $(n_l)_{l \in \mathbb{N}}$ existiert demnach eine Teilfolge $(n_{l_j})_{j \in \mathbb{N}}$, sodass die Bedingungen des Satzes 3.2.4 P -f.s. für die Teilfolge $(n_{l_j})_{j \in \mathbb{N}}$ erfüllt sind. Es folgt für jede dieser Teilfolgen

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{n_{l_j}}} \left(T \left(\frac{Q_{n_{l_j}}}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - k_{n_{l_j}}/n_{l_j}\right)} \right) - T(z_\gamma) \right) &= \sqrt{k_{n_{l_j}}} \left(T \left(z_\gamma + k_{n_{l_j}}^{-1/2} v_{n_{l_j}} \right) - T(z_\gamma) \right) \\ &= \sqrt{k_{n_{l_j}}} \left(T \left(z_\gamma + k_{n_{l_j}}^{-1/2} (v + o(1)) \right) - T(z_\gamma) \right) \\ &= \dot{T}_{z_\gamma}(v) + o(1) = \tau \int_0^1 t^{-\gamma(\tau-1)} e_\gamma(t) dt + o(1) \\ &= \gamma\tau \int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} e(t) dt + o(1) \quad P\text{-f.s.}, \end{aligned}$$

für $j \rightarrow \infty$. Das ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow} \left(1 - k_n/n\right)} \right) - T(z_\gamma) \right) \xrightarrow{P} \gamma\tau \int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} e(t) dt$$

für $n \rightarrow \infty$. Somit gilt obige Konvergenz in Verteilung für die ursprünglichen Prozesse Q_n und e . Wieder kann man zeigen (siehe z.B. [Adl90, Seite 20]), dass $\int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} e(t) dt$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^1 \int_0^1 (st)^{-(\gamma\tau+1)} r(s, t) ds dt$. Dies liefert die erste Behauptung.

Die Bedingungen des Satzes 3.2.4 für unabhängige Beobachtungen, d.h. $\beta \equiv 0$, werden im Sinne der Eigenschaften (3.2.1), (3.2.2) und (3.2.3) mit dem Teilfolgenargument P -f.s. erfüllt. Analog zum Fall schwach abhängiger Beobachtungen folgt

$$\sqrt{k_n} \left(T \left(\frac{Q_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) - T(z_\gamma) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \gamma\tau \int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} W(t) dt.$$

Nun ist $\int_0^1 t^{-(\gamma\tau+1)} W(t) dt$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz

$$\frac{4(\gamma\tau)^2 - 10\gamma\tau + 8}{(1 - \gamma\tau)(2 - \gamma\tau)(1 - 2\gamma\tau)(3 - 2\gamma\tau)},$$

falls $\gamma\tau < 1/2$ (vgl. Beweis zu Korollar 3.2.3). Es folgt der zweite Teil des Korollars. \square

5.7 Beweis von Satz 3.3.1

Beweis. Der relative Schätzfehler von $\hat{m}_{\tau, \varrho_n}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{\hat{m}_{\tau, \varrho_n}}{m_{\tau, \varrho_n}(X)} \right) &= \log \left(\frac{T(Q_n) \left(\frac{n\varrho_n}{k_n} \right)^{-\hat{\gamma}_n\tau}}{T(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n \cdot))} \right) \\ &= \log \left(\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n)} \right)^\tau \left(\frac{n\varrho_n}{k_n} \right)^{-\gamma\tau} \left(\frac{n\varrho_n}{k_n} \right)^{(\gamma - \hat{\gamma}_n)\tau} \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n))^\tau T(z_\gamma)}{T(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n \cdot))} \frac{T(Q_n)}{T(z_\gamma) (F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n))^\tau} \right) \\ &= -\tau \log \left(\left(\frac{n\varrho_n}{k_n} \right)^\gamma \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n)}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) + \tau(\hat{\gamma}_n - \gamma) \log \left(\frac{k_n}{n\varrho_n} \right) \\ &\quad - \log \left(\frac{T(F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n \cdot)/F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n))}{T(z_\gamma)} \right) + \log \left(\frac{T(Q_n/F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n))}{T(z_\gamma)} \right) \\ &= -\tau \log \left(\left(\frac{n\varrho_n}{k_n} \right)^\gamma \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n)}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right) + \tau(\hat{\gamma}_n - \gamma) \log \left(\frac{k_n}{n\varrho_n} \right) \\ &\quad - \log \left(\frac{1}{T(z_\gamma)} \int_0^1 \left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n t)}{F_X^{\leftarrow}(1 - \varrho_n)} \right)^\tau dt \right) + \log \left(\frac{T(Q_n/F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n))}{T(z_\gamma)} \right) \\ &= -\tau \log \left(1 + R \left(\frac{k_n}{n}, \frac{n\varrho_n}{k_n} \right) \right) + \tau (k_n^{-1/2} N_\gamma + o_P(k_n^{-1/2})) \log \left(\frac{k_n}{n\varrho_n} \right) \\ &\quad - \log \left(\frac{1}{T(z_\gamma)} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} (1 + R(\varrho_n, t))^\tau dt \right) \\ &\quad + \log \left(1 + k_n^{-1/2} \frac{N_T}{T(z_\gamma)} + o_P(k_n^{-1/2}) \right), \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

wobei $N_\gamma \sim \mathcal{N}(0, \sigma_S^2)$ und $N_T \sim \mathcal{N}(0, \sigma_r^2)$ gemäß Satz 2.2.3 und Korollar 3.2.5 geeignet gewählt seien.

Es sei zunächst $\tau \in [1, 2)$. Aufgrund des Satzes von Taylor gibt es ein $\theta_{n,t} \in (0, 1)$, sodass gilt

$$(1 + R(\varrho_n, t))^\tau = 1 + \tau (1 + \theta_{n,t} R(\varrho_n, t))^{\tau-1} R(\varrho_n, t).$$

Außerdem gilt

$$\sup_{t \in (0,1]} t^\varepsilon |R(\varrho_n, t)| = o(k_n^{-1/2})$$

für alle $\varepsilon > 0$, da $\varrho_n = o(k_n/n)$. Es folgt für alle $\varepsilon > 0$ mit $1 - \gamma\tau - \varepsilon\tau > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} (1 + R(\varrho_n, t))^\tau dt &= T(z_\gamma) + \tau \int_0^1 t^{-\gamma\tau} (1 + \theta_{n,t} R(\varrho_n, t))^{\tau-1} R(\varrho_n, t) dt \\ &\leq T(z_\gamma) + \tau \left(1 + \sup_{s \in (0,1]} s^\varepsilon |R(\varrho_n, s)| \right)^{\tau-1} \sup_{s \in (0,1]} s^\varepsilon |R(\varrho_n, s)| \\ &\quad \cdot \int_0^1 t^{-\gamma\tau - \varepsilon\tau} dt \\ &= T(z_\gamma) + o(k_n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Für $\tau \geq 2$ gibt es wegen des Satzes von Taylor ein $\theta_{n,t} \in (0, 1)$, sodass gilt

$$(1 + R(\varrho_n, t))^\tau = 1 + \tau R(\varrho_n, t) + \frac{\tau(\tau-1)}{2} (1 + \theta_{n,t} R(\varrho_n, t))^{\tau-2} R^2(\varrho_n, t).$$

Abermals folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} (1 + R(\varrho_n, t))^\tau dt &= T(z_\gamma) + \tau \int_0^1 t^{-\gamma\tau} R(\varrho_n, t) dt \\ &\quad + \frac{\tau(\tau-1)}{2} \int_0^1 t^{-\gamma\tau} (1 + \theta_{n,t} R(\varrho_n, t))^{\tau-2} R^2(\varrho_n, t) dt \\ &\leq T(z_\gamma) + \tau \sup_{s \in (0,1]} s^\varepsilon |R(\varrho_n, s)| \int_0^1 t^{-\gamma\tau - \varepsilon} dt \\ &\quad + \frac{\tau(\tau-1)}{2} \left(1 + \sup_{s \in (0,1]} s^\varepsilon |R(\varrho_n, s)| \right)^{\tau-2} \left(\sup_{s \in (0,1]} s^\varepsilon |R(\varrho_n, s)| \right)^2 \\ &\quad \cdot \int_0^1 t^{-\gamma\tau - \varepsilon\tau} dt \\ &= T(z_\gamma) + o(k_n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Für den relativen Schätzfehler ergibt sich damit wegen $\log(1+x) = x + O(x^2)$ für $x \rightarrow 0$

$$\log \left(\frac{\hat{m}_{\tau, \varrho_n}}{m_{\tau, \varrho_n}(X)} \right) \stackrel{(5.7.1)}{=} -\tau \log \left(1 + R \left(\frac{k_n}{n}, \frac{n\varrho_n}{k_n} \right) \right) + \tau k_n^{-1/2} \log \left(\frac{k_n}{n\varrho_n} \right) N_\gamma$$

$$\begin{aligned}
 & +o_P\left(k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right)\right) - \log(1 + o_P(k_n^{-1/2})) \\
 & + \log\left(1 + k_n^{-1/2} \frac{N_T}{T(z_\gamma)} + o_P(k_n^{-1/2})\right) \\
 = & -\tau R\left(\frac{k_n}{n}, \frac{n\varrho_n}{k_n}\right) + O\left(R^2\left(\frac{k_n}{n}, \frac{n\varrho_n}{k_n}\right)\right) + \tau k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right) N_\gamma \\
 & + o_P\left(k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right)\right) + o(k_n^{-1/2}) + k_n^{-1/2} \frac{N_T}{T(z_\gamma)} + O_P(k_n^{-1}) \\
 = & -\tau R\left(\frac{k_n}{n}, \frac{n\varrho_n}{k_n}\right) + \tau k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right) N_\gamma \\
 & + o_P\left(R\left(\frac{k_n}{n}, \frac{n\varrho_n}{k_n}\right) + k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Unter der zusätzlichen Annahme $R(k_n/n, n\varrho_n/k_n) = o_P(k_n^{-1/2} \log(k_n/(n\varrho_n)))$ erhält man die folgende Entwicklung des relativen Schätzfehlers von $\hat{m}_{\tau, \varrho_n}$:

$$\log\left(\frac{\hat{m}_{\tau, \varrho_n}}{m_{\tau, \varrho_n}(X)}\right) = \tau k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right) N_\gamma + o_P\left(k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right)\right).$$

Es folgt die Behauptung

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\log\left(\frac{k_n}{n\varrho_n}\right)} \log\left(\frac{\hat{m}_{\tau, \varrho_n}}{m_{\tau, \varrho_n}(X)}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \tau N_\gamma \sim \mathcal{N}(0, \tau^2 \sigma_S^2).$$

□

5.8 Beweis von Satz 4.1.3

Beweis. Es sei zunächst $\gamma \in (0, 1/2)$ und es gelte (M) für ein geeignetes $d \in (0, r(\gamma)/(6 + r(\gamma)))$. Für den Beweis von (4.1.6) betrachte man die Differenz $\bar{X}_n - \mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i)) =: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. Dann sind $Y_i, i \in \{1, \dots, n\}$, zentriert und es gilt für $\kappa := 6d/(1-d) < r(\gamma)$ nach Voraussetzung $\mathbb{E}(|Y_1|^{2+\kappa}) < \infty$. Es existiert unter (M) wegen der Momentenungleichung [Dou94, Theorem 2, Seite 26] ein $C > 0$, sodass nach Anwendung der Markov- und der Jensen-Ungleichung auf die konkave Funktion $x \mapsto x^{1/(2+\kappa)}$ gilt

$$\begin{aligned}
 P\left(\left|\sum_{i=1}^n Y_i\right| > \sqrt{n}K\right) & \leq \frac{\mathbb{E}\left(|\sum_{i=1}^n Y_i|^2\right)}{(\sqrt{n}K)^2} \leq \frac{C \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|Y_i|^{2+\kappa})^{\frac{2}{2+\kappa}}}{nK^2} = \frac{C \mathbb{E}(|Y_1|^{2+\kappa})^{\frac{2}{2+\kappa}}}{K^2} \\
 & \leq \frac{C \mathbb{E}(|Y_1|)^2}{K^2} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

für $K \rightarrow \infty$. Somit existiert zu jedem $\delta > 0$ ein $K > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$P \left(n^{-1/2} \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| \leq K \right) \geq 1 - \frac{C \mathbb{E}(|Y_1|)^2}{K^2} > 1 - \delta \quad \forall n \geq N.$$

Das bedeutet

$$n^{-1/2} \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| = O_P(1) \iff \bar{X}_n = \mathbb{E}(X) + O_P(n^{-1/2}).$$

Zum Beweis von (4.1.7) sei auf Bemerkung 4.1.4 verwiesen.

Die ersten beiden Gleichheiten in (4.1.8) folgen direkt aus (4.1.7) und

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - p/n)}{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)} \sim p^{-\gamma}$$

bzw.

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - p/n)}{n} = \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n} p^{-\gamma} + o\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$, da $F_X^{\leftarrow} \in \mathcal{RV}_{-\gamma}^1$.

Es bleibt

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n} = o_P(n^{\gamma-1+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0$$

zu verifizieren. Nun ist $F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)/n$ regulär variierend mit Index $\gamma - 1$, denn es gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/(\lambda n))}{\lambda n}}{\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n}} = \frac{1}{\lambda} \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/(\lambda n))}{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)} \longrightarrow \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\gamma} = \lambda^{\gamma-1} \quad \forall \lambda > 0, \quad (5.8.1)$$

da $F_X^{\leftarrow} \in \mathcal{RV}_{-\gamma}^1$. Somit ist $f(1/n) := F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)/n^\gamma$ langsam variierend in 0 und es gilt wegen Lemma 1.2.4 für alle $\varepsilon > 0$ und $n \rightarrow \infty$

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n^{\gamma+\varepsilon}} \longrightarrow 0.$$

Dies war die Behauptung. □

5.9 Beweis von Satz 4.1.6

Beweis. Man betrachte für

$$\hat{T}r_n = \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_n} \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} + S_n(k_n)$$

zuerst den ersten Summanden. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_n} \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} &= \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_n} \frac{X_{n-k_n:n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n) \\ &= f(\hat{\gamma}_n, X_{n-k_n:n}/F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)) \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n), \end{aligned}$$

wobei

$$f(x, y) := \frac{y}{1 - x}$$

eine in $x \in (0, 1)$ und $y \in \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Abbildung ist. Man zeigt mit der Delta-Methode, dass unter Berücksichtigung von Satz 2.2.3 gilt

$$f(\hat{\gamma}_n, X_{n-k_n:n}/F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)) = \frac{1}{1 - \gamma} + O_P(k_n^{-1/2}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_n} \frac{k_n}{n} X_{n-k_n:n} &= f(\hat{\gamma}_n, X_{n-k_n:n}/F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)) \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n) \\ &= \frac{1}{1 - \gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n) + O_P\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\right). \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

Man betrachte für den zweiten Summanden von $\hat{T}r_n$ die Darstellung

$$S_n(k_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-k_n} X_{i:n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} X_{i:n}.$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite ist nach Annahme (Z) von der Ordnung

$$o_P\left(\sqrt{k_n}/n F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\right).$$

Da $F_X^{\leftarrow} \in \mathcal{RV}_{-\gamma}^1$, existiert eine Funktion $L \in \mathcal{L}\mathcal{V}$, sodass gilt

$$F_X^{\leftarrow}(1 - t) = t^{-\gamma} L(t). \quad (5.9.2)$$

Aus [CHM86, Theorem 1, Seite 3] erhält man die schwache Konvergenzaussage

$$\frac{\sqrt{n}}{v(k_n/n)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-k_n} X_{i:n} - \int_{\frac{k_n}{n}}^{1 - \frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(u) du \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei $v(k_n/n)$ wegen [CHM86, Lemma 1 (3.1), Seite 6] für ein $C_\gamma > 0$ asymptotisch äquivalent zu

$$C_\gamma \left(\frac{k_n}{n}\right)^{\frac{1}{2} - \gamma} L\left(\frac{k_n}{n}\right)$$

ist. Wegen

$$\frac{\frac{\sqrt{k_n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{v(k_n/n)}} \sim \frac{\frac{\sqrt{k_n}}{n} \left(\frac{k_n}{n}\right)^{-\gamma} L\left(\frac{k_n}{n}\right)}{C_\gamma n^{-1/2} \left(\frac{k_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} L\left(\frac{k_n}{n}\right)} = \frac{1}{C_\gamma}$$

folgt damit

$$\begin{aligned} S_n(k_n) &= \int_{\frac{k_n}{n}}^{1-\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(u) du + O_P\left(\frac{v(k_n/n)}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(u) du - \int_{1-\frac{k_n}{n}}^1 F_X^{\leftarrow}(u) du - \int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(u) du + O_P\left(\frac{v(k_n/n)}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{E}(X) - \int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(1-u) du - \int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(u) du \\ &\quad + O_P\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} \left(\frac{k_n}{n}\right)^{-\gamma} L\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \\ &\stackrel{(5.9.2)}{=} \mathbb{E}(X) - \int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(1-u) du - \int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(u) du + O_P\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\right). \end{aligned}$$

Hierbei gilt wegen (Z) und $F_X^{\leftarrow}(0) \geq 0$

$$\frac{\int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(u) du}{\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \leq \frac{\frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(k_n/n)}{\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} = \frac{\sqrt{k_n}}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} F_X^{\leftarrow}(k_n/n) = O(1)$$

für $n \rightarrow \infty$, d.h.

$$S_n(k_n) = \mathbb{E}(X) - \int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(1-u) du + O_P\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\right). \quad (5.9.3)$$

Die Bedingung zweiter Ordnung $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, A)$ aus (1.1.3) gilt auf $(0, 1)$ sogar gleichmäßig, denn wegen [Dre98b, Lemma 2.1, Seite 190] gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $t \searrow 0$

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \lambda^{\gamma+\varepsilon} \left| \frac{\frac{F_X^{\leftarrow}(1-\lambda t)}{F_X^{\leftarrow}(1-t)} - \lambda^{-\gamma}}{A(t)} - G(\lambda) \right| = o(1),$$

d.h.

$$\frac{\frac{F_X^{\leftarrow}(1-\lambda t)}{F_X^{\leftarrow}(1-t)} - \lambda^{-\gamma}}{A(t)} - G(\lambda) = o_{(0,1)}(\lambda^{-(\gamma+\varepsilon)}).$$

Es folgt für $\lambda \in (0, 1)$ und $t \searrow 0$

$$F_X^{\leftarrow}(1 - \lambda t) = F_X^{\leftarrow}(1 - t) \left[\lambda^{-\gamma} + A(t) \left(G(\lambda) + o_{(0,1)}(\lambda^{-(\gamma+\varepsilon)}) \right) \right].$$

Also gilt für $\lambda := u/t$ mit $u \leq t$ und $t \searrow 0$

$$F_X^{\leftarrow}(1-u) = F_X^{\leftarrow}(1-t) \left[\left(\frac{u}{t} \right)^{-\gamma} + A(t) \left(G \left(\frac{u}{t} \right) + o_{(0,1)} \left(\left(\frac{u}{t} \right)^{-\gamma+\varepsilon} \right) \right) \right]$$

und insbesondere für $t := k_n/n$

$$F_X^{\leftarrow}(1-u) = F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \left[\left(\frac{k_n}{n} \right)^{\gamma} u^{-\gamma} + A \left(\frac{k_n}{n} \right) \left(G \left(\frac{n}{k_n} u \right) + o_{(0,1)} \left(u^{-(\gamma+\varepsilon)} \left(\frac{k_n}{n} \right)^{\gamma+\varepsilon} \right) \right) \right]$$

für $n \rightarrow \infty$. Integration auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(1-u) du \\ = & \int_0^{\frac{k_n}{n}} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \\ & \cdot \left[\left(\frac{k_n}{n} \right)^{\gamma} u^{-\gamma} + A \left(\frac{k_n}{n} \right) \left(G \left(\frac{n}{k_n} u \right) + o_{(0,1)} \left(u^{-(\gamma+\varepsilon)} \left(\frac{k_n}{n} \right)^{\gamma+\varepsilon} \right) \right) \right] du \\ = & F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \left(\frac{k_n}{n} \right)^{\gamma} \int_0^{\frac{k_n}{n}} u^{-\gamma} du \\ & + F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) A \left(\frac{k_n}{n} \right) \int_0^{\frac{k_n}{n}} G \left(\frac{n}{k_n} u \right) du \\ & + F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) A \left(\frac{k_n}{n} \right) \left(\frac{k_n}{n} \right)^{\gamma+\varepsilon} \int_0^{\frac{k_n}{n}} o_{(0,1)} \left(u^{-(\gamma+\varepsilon)} \right) du \\ = & \frac{1}{1-\gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + A \left(\frac{k_n}{n} \right) \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \int_0^1 G(s) ds \\ & + F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) A \left(\frac{k_n}{n} \right) \left(\frac{k_n}{n} \right)^{\gamma+\varepsilon} o \left(\int_0^{\frac{k_n}{n}} u^{-(\gamma+\varepsilon)} du \right) \\ = & \frac{1}{1-\gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + A \left(\frac{k_n}{n} \right) \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \int_0^1 G(s) ds \\ & + o \left(A \left(\frac{k_n}{n} \right) \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \right) \\ = & \frac{1}{1-\gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + \sqrt{k_n} A \left(\frac{k_n}{n} \right) \frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \int_0^1 G(s) ds \\ & + o \left(\sqrt{k_n} A \left(\frac{k_n}{n} \right) \frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \right) \\ \stackrel{(1.1.5)}{=} & \frac{1}{1-\gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + O_P \left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \right). \end{aligned}$$

Eingesetzt in (5.9.3) ergibt sich

$$S_n(k_n) = \mathbb{E}(X) - \frac{1}{1-\gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) + O_P \left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \right).$$

Insgesamt folgt hiermit und mit (5.9.1) die Behauptung

$$\begin{aligned}\hat{T}r_n &= \frac{1}{1-\gamma} \frac{k_n}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n) + O_P\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\right) + S_n(k_n) \\ &= \mathbb{E}(X) + O_P\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\right).\end{aligned}$$

□

5.10 Beweis von Satz 4.2.1

Zum Beweis von Satz 4.2.1 müssen einige Vorbereitungen getroffen werden.

5.10.1 Asymptotik des Expektils und des Expektilschätzers

Es gelten die Bezeichnungen und Bedingungen aus Abschnitt 4.2. Im ersten Schritt wird die Asymptotik von g_{α_n} bzw. des approximativen Expektils e_{α_n} als Nullstelle von g_{α_n} untersucht.

5.10.1.1 Analyse des approximativen Expektils

Ziel ist, eine Entwicklung des approximativen Expektils e_{α_n} zu bestimmen. Es existiert ein $\theta_{w,n} \in (0, 1)$, sodass

$$\begin{aligned}g_{\alpha_n}(u_n) - \mathbb{E}(X) &= -u_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{u_n \left(\frac{u_n}{F_{k_n}^{\leftarrow}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1} \\ &= u_n \left(\frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} v_\gamma^{1/\gamma} F_{k_n}^{\leftarrow-1/\gamma} (\beta_n v_\gamma)^{-1/\gamma} \left(1 + \frac{w}{\beta_n v_\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) \\ &= u_n \left((2\alpha_n - 1) \left(\frac{\left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma F_{k_n}^{\leftarrow}}{(1 - \alpha_n)^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \beta_n^{-1/\gamma} \left(1 + \frac{w}{\beta_n v_\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) \\ &\stackrel{(4.2.2)}{=} u_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 + \frac{w}{\beta_n v_\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) \\ &= u_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 - \frac{w}{\gamma v_\gamma \beta_n} + \frac{1 + \gamma}{2\gamma^2} \frac{w^2}{v_\gamma^2 \beta_n^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1 + 3\gamma + 2\gamma^2}{6\gamma^3} \left(1 + \theta_{w,n} \frac{w}{\beta_n v_\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-3} \frac{w^3}{\beta_n^3 v_\gamma^3} \right) - 1 \right). \quad (5.10.1)\end{aligned}$$

Es sei $M > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $M/(\beta_n v_\gamma) < 1 - \delta$ für ein beliebiges $\delta \in (0, 1)$. Nun gilt für alle $|w| \leq M$

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \theta_{w,n} \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}-3} w^3 \right| &\leq \left(1 + \theta_{w,n} \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}-3} M^3 \leq \left(1 - \theta_{w,n} \frac{M}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}-3} M^3 \\ &\leq (1 - \theta_{w,n}(1 - \delta))^{-\frac{1}{\gamma}-3} M^3 \leq \delta^{-\frac{1}{\gamma}-3} M^3 < \infty. \end{aligned}$$

Daher folgt weiter (vgl. Definition 1.2.6)

$$\begin{aligned} g_{\alpha_n}(u_n) - \mathbb{E}(X) &= u_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 - \frac{w}{\gamma v_\gamma \beta_n} + \frac{1 + \gamma}{2\gamma^2} \frac{w^2}{v_\gamma^2 \beta_n^2} + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-3}) \right) - 1 \right) \\ &= 2u_n(\alpha_n - 1) - (2\alpha_n - 1) \frac{w}{\gamma v_\gamma \beta_n} u_n + (2\alpha_n - 1) \frac{1 + \gamma}{2\gamma^2} \frac{w^2}{v_\gamma^2 \beta_n^2} u_n \\ &\quad + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-2}) \\ &= 2v_\gamma \beta_n (\alpha_n - 1) + 2w(\alpha_n - 1) - (2\alpha_n - 1) \frac{w}{\gamma v_\gamma} \left(v_\gamma + \frac{w}{\beta_n} \right) \\ &\quad + (2\alpha_n - 1) \frac{1 + \gamma}{2\gamma^2} \frac{w^2}{v_\gamma^2} \left(\frac{v_\gamma}{\beta_n} + \frac{w}{\beta_n^2} \right) + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-2}) \\ &= \frac{1 - \gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} \frac{2\alpha_n - 1}{\beta_n} w^2 + \left(2(\alpha_n - 1) - \frac{2\alpha_n - 1}{\gamma} \right) w \\ &\quad + 2v_\gamma \beta_n (\alpha_n - 1) + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-2}) \\ &=: a_n w^2 + b_n w + c_n + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-2}), \end{aligned} \tag{5.10.2}$$

wobei

$$a_n = O(\beta_n^{-1}), \quad b_n = -\frac{1}{\gamma} + 2\frac{1 - \gamma}{\gamma}(1 - \alpha_n) < 0 \quad \text{und} \quad c_n = O(\beta_n(1 - \alpha_n)) \tag{5.10.3}$$

für $n \rightarrow \infty$. Eine Idee ist, die tatsächliche Nullstelle $w = w_n$ von

$$g_{\alpha_n}(u_n) = a_n w^2 + b_n w + c_n + \mathbb{E}(X) + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-2})$$

durch die Nullstelle $w = w_{n,0}$ der Funktion

$$g_{\alpha_n}^{ap}(u_n) := a_n w^2 + b_n w + c_n + \mathbb{E}(X)$$

zu approximieren. Da der Ausdruck

$$\frac{(c_n + \mathbb{E}(X))a_n}{b_n^2} \stackrel{(5.10.3)}{=} O(\beta_n^{-1})$$

gegen 0 konvergiert für $n \rightarrow \infty$, ist eine Nullstelle $w_{n,0}$ mit

$$d_n := \frac{(c_n + \mathbb{E}(X))^2 \beta_n a_n}{b_n^3} = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2v_\gamma} \mathbb{E}^2(X) + O(\beta_n(1 - \alpha_n))$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}
 w_{n,0} &= -\frac{b_n}{2a_n} - \sqrt{\left(\frac{b_n}{2a_n}\right)^2 - \frac{c_n + \mathbb{E}(X)}{a_n}} = -\frac{b_n}{2a_n} - \frac{|b_n|}{2a_n} \sqrt{1 - \frac{4(c_n + \mathbb{E}(X))a_n}{b_n^2}} \\
 &= -\frac{b_n}{2a_n} + \frac{b_n}{2a_n} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4(c_n + \mathbb{E}(X))a_n}{b_n^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{4(c_n + \mathbb{E}(X))a_n}{b_n^2}\right)^2 + O(\beta_n^{-3})\right) \\
 &= -\frac{c_n + \mathbb{E}(X)}{b_n} - \frac{(c_n + \mathbb{E}(X))^2 a_n}{b_n^3} + O(\beta_n^{-2}) \\
 &= -\frac{c_n + \mathbb{E}(X)}{b_n} - d_n \beta_n^{-1} + O(\beta_n^{-2}) \\
 &= \frac{\gamma \mathbb{E}(X) + 2\gamma(1-\gamma)\mathbb{E}(X)(1-\alpha_n) + \gamma c_n + 2\gamma(1-\gamma)c_n(1-\alpha_n) - d_n \beta_n^{-1}}{b_n} \\
 &\quad - \frac{(\gamma \mathbb{E}(X) + 2\gamma(1-\gamma)\mathbb{E}(X)(1-\alpha_n)) b_n + \mathbb{E}(X)}{b_n} \\
 &\quad - \frac{(\gamma c_n + 2\gamma(1-\gamma)c_n(1-\alpha_n)) b_n + c_n}{b_n} + O(\beta_n^{-2}) \\
 &= \frac{\gamma \mathbb{E}(X) + 2\gamma(1-\gamma)\mathbb{E}(X)(1-\alpha_n) + \gamma c_n + 2\gamma(1-\gamma)c_n(1-\alpha_n) - d_n \beta_n^{-1}}{b_n} \\
 &\quad - \frac{4(1-\gamma)^2 \mathbb{E}(X)(1-\alpha_n)^2}{b_n} - \frac{4(1-\gamma)^2 c_n(1-\alpha_n)^2}{b_n} + O(\beta_n^{-2}) \\
 &= \frac{\gamma \mathbb{E}(X) + 2\gamma(1-\gamma)\mathbb{E}(X)(1-\alpha_n) + \gamma c_n + 2\gamma(1-\gamma)c_n(1-\alpha_n) - d_n \beta_n^{-1}}{b_n} \\
 &\quad + O(\beta_n^{-2}) \\
 &= \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n(1-\alpha_n) + 2\gamma(1-\gamma)\mathbb{E}(X)(1-\alpha_n) - 4\gamma(1-\gamma)v_\gamma \beta_n(1-\alpha_n)^2 \\
 &\quad - d_n \beta_n^{-1} + O(\beta_n^{-2}). \tag{5.10.4}
 \end{aligned}$$

Für die Rechenschritte wurde (5.10.3) benutzt. Nun ist $\beta_n^2 (g_{\alpha_n}(u_n) - g_{\alpha_n}^{ap}(u_n))$ lokal gleichmäßig in w beschränkt: Für jedes $M > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 &\sup_{|w| \leq M} \beta_n^2 |g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w) - g_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma + w)| \\
 &= \sup_{|w| \leq M} \beta_n^2 |a_n w^2 + b_n w + c_n + \mathbb{E}(X) + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-2}) - (a_n w^2 + b_n w + c_n + \mathbb{E}(X))| \\
 &= \sup_{|w| \leq M} O_{[-M, M]}(1) = O(1). \tag{5.10.5}
 \end{aligned}$$

In einem nächsten Schritt der Analyse überzeugt man sich davon, dass die Abbildung $g_{\alpha_n} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ streng monoton fallend ist, denn es gilt

$$g_{\alpha_n}(u) = -u + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} u \left(\frac{u}{F_{k_n}^\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} + \mathbb{E}(X) = -u + K_n u^{1-\frac{1}{\gamma}} + \mathbb{E}(X)$$

mit

$$K_n := \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{F_{k_n}^{\gamma-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1} > 0$$

und somit für die Ableitung

$$g'_{\alpha_n}(u) = -1 + K_n \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) u^{-\frac{1}{\gamma}} < -1 \quad \forall u > 0. \quad (5.10.6)$$

Da $w_{n,0} = O(1)$, gilt wegen (5.10.5)

$$g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w_{n,0}) = g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w_{n,0}) - g_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma + w_{n,0}) = O(\beta_n^{-2}).$$

Es existiert also ein $L > 0$, sodass für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$

$$-L\beta_n^{-2} < g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w_{n,0}) < L\beta_n^{-2}$$

gilt. Es folgt sowohl

$$0 < g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w_{n,0}) + L\beta_n^{-2} < g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w_{n,0} - L\beta_n^{-2})$$

als auch

$$0 > g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w_{n,0}) - L\beta_n^{-2} > g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w_{n,0} + L\beta_n^{-2}),$$

da die Steigung von g_{α_n} auf \mathbb{R}_+ kleiner ist als -1 . Da g_{α_n} auf \mathbb{R}_+ stetig und streng monoton fallend ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle w_n von $g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \cdot)$, für die

$$w_{n,0} - L\beta_n^{-2} < w_n < w_{n,0} + L\beta_n^{-2}$$

gilt, d.h.

$$\begin{aligned} w_n &= w_{n,0} + O(\beta_n^{-2}) = \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) \\ &\quad - 4\gamma(1 - \gamma)v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 - d_n \beta_n^{-1} + O(\beta_n^{-2}). \end{aligned}$$

Das Expektil e_{α_n} ist dann durch

$$\begin{aligned} e_{\alpha_n} &= \beta_n v_\gamma + w_n = \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) \\ &\quad - 4\gamma(1 - \gamma)v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 - d_n \beta_n^{-1} + O(\beta_n^{-2}) \end{aligned}$$

charakterisiert.

5.10.1.2 Analyse des tatsächlichen Expektils

In diesem Abschnitt wird der deterministische Fehler

$$f_{\alpha_n}(u_n) - g_{\alpha_n}(u_n) = \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \left[\mathbb{E}((X - u_n)^+) - \frac{k_n u_n \left(\frac{u_n}{\bar{F}_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1} \right] \quad (5.10.7)$$

untersucht und daraus eine Entwicklung des tatsächlichen Expektils ξ_{α_n} hergeleitet. Hierfür bedarf es zunächst einer präziseren Betrachtung von $\mathbb{E}((X - u_n)^+)$. In der Bedingung zweiter Ordnung $\mathcal{B}_2(\gamma, \rho, a, A)$

$$\frac{\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - \lambda t) - F_X^{\leftarrow}(1 - t)}{a(t)} - \frac{\lambda^{-\gamma} - 1}{\gamma}}{A(t)} \longrightarrow G(\lambda), \quad t \searrow 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

wähle man

$$a(t) := dt^{-\gamma} \quad (5.10.8)$$

für ein noch nicht weiter festgelegtes $d > 0$. Sei $\varepsilon > 0$, sodass $\gamma + \varepsilon < 1$. Dann gilt wegen [Dre98b, Lemma 2.1, Seite 190] sogar

$$\frac{\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - \lambda t) - F_X^{\leftarrow}(1 - t)}{a(t)} - \frac{\lambda^{-\gamma} - 1}{\gamma}}{A(t)} - G(\lambda) = o_{(0,1)}(\lambda^{-(\gamma+\varepsilon)})$$

für $t \searrow 0$. Somit gilt für $t \searrow 0$

$$F_X^{\leftarrow}(1 - \lambda t) = F_X^{\leftarrow}(1 - t) + \frac{\lambda^{-\gamma} - 1}{\gamma} a(t) + G(\lambda) a(t) A(t) + o_{(0,1)}(\lambda^{-(\gamma+\varepsilon)} a(t) A(t)).$$

Mit der Wahl $\lambda := u/\bar{F}_X(u_n) \leq 1$ und $t := \bar{F}_X(u_n)$ folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} F_X^{\leftarrow}(1 - u) &= u_n + a(\bar{F}_X(u_n)) \frac{\bar{F}_X^\gamma(u_n) u^{-\gamma} - 1}{\gamma} + G\left(\frac{u}{\bar{F}_X(u_n)}\right) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n)) \\ &\quad + o_{(0, \bar{F}_X(u_n))}(\bar{F}_X^{\gamma+\varepsilon}(u_n) u^{-(\gamma+\varepsilon)} a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n))). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - u_n)^+) &= \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X > u_n\}}) - u_n \bar{F}_X(u_n) = \int_0^{\bar{F}_X(u_n)} F_X^{\leftarrow}(1 - u) du - u_n \bar{F}_X(u_n) \\ &= u_n \bar{F}_X(u_n) - u_n \bar{F}_X(u_n) + \frac{1}{\gamma} \left[\bar{F}_X^\gamma(u_n) \int_0^{\bar{F}_X(u_n)} u^{-\gamma} du - \bar{F}_X(u_n) \right] a(\bar{F}_X(u_n)) \\ &\quad + \int_0^{\bar{F}_X(u_n)} G\left(\frac{u}{\bar{F}_X(u_n)}\right) du a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\bar{F}_X(u_n)} o_{(0, \bar{F}_X(u_n))}(\bar{F}_X^{\gamma+\varepsilon}(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n)) u^{-(\gamma+\varepsilon)}) du \\
 \leq & \frac{1}{1-\gamma} \bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) + \int_0^1 G(u) du \bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n)) \\
 & + \sup_{\bar{u} \in (0, \bar{F}_X(u_n))} o_{(0, \bar{F}_X(u_n))}(\bar{F}_X^{\gamma+\varepsilon}(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n))) \int_0^{\bar{F}_X(u_n)} u^{-(\gamma+\varepsilon)} du \\
 = & \frac{1}{1-\gamma} \bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) + \int_0^1 G(u) du \bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n)) \\
 & + o(\bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n))). \tag{5.10.9}
 \end{aligned}$$

Es ist eine Auseinandersetzung mit $\bar{F}_X(u_n)$ nötig.

Man unterscheide im Folgenden zwischen $\rho > \gamma$ und $\rho < \gamma$. Der Fall $\rho = \gamma$ wird aus technischen Gründen nicht weiter verfolgt.

Der Fall $\rho > \gamma$

Für ein geeignetes $c > 0$ und $l \neq 0$ aus dem Lemma 1.2.7 setze $d := c\gamma$ in (5.10.8), d.h. $a(t) = c\gamma t^{-\gamma}$. Mit Lemma 1.2.7 folgt für den ersten Summanden in (5.10.9)

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) & = c\gamma \bar{F}_X^{1-\gamma}(u_n) = c\gamma \left(\frac{u_n - l}{c} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(1 + c^{\rho/\gamma} A(u_n^{-1/\gamma}) + o(A(u_n^{-1/\gamma})) \right)^{1-\gamma} \\
 & = \gamma c^{1/\gamma} (u_n - l)^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(1 + (1-\gamma) c^{\rho/\gamma} A(u_n^{-1/\gamma}) + o(A(u_n^{-1/\gamma})) \right) \\
 & = \gamma c^{1/\gamma} u_n (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} - \gamma c^{1/\gamma} l (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 & \quad + \gamma(1-\gamma) c^{(1+\rho)/\gamma} (u_n - l)^{1-\frac{1}{\gamma}} A(u_n^{-1/\gamma}) + o\left((u_n - l)^{1-\frac{1}{\gamma}} A(u_n^{-1/\gamma}) \right) \\
 & = \gamma c^{1/\gamma} u_n (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} - \gamma c^{1/\gamma} l (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} + o\left((u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} \right). \tag{5.10.10}
 \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus der Tatsache, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t A(t^{-1/\gamma}) = \lim_{s \searrow 0} s^{-\gamma} A(s) = \lim_{s \searrow 0} s^{\rho-\gamma} s^{-\rho} A(s) \stackrel{1.2.4}{=} 0.$$

Für den führenden Summanden zeigt man weiter mit Hilfe des Lemmas 1.2.7

$$\begin{aligned}
 \gamma c^{1/\gamma} u_n (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} & = \gamma c^{1/\gamma} u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)^{-1/\gamma} \\
 & = \gamma c^{1/\gamma} u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(c \left(\frac{k_n}{n} \right)^{-\gamma} \left(1 + \gamma A \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) + l \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 & = \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \gamma A \left(\frac{k_n}{n} \right) + \frac{l}{c} \left(\frac{k_n}{n} \right)^{\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 &\quad \cdot \left(1 - A\left(\frac{k_n}{n}\right) - \frac{l}{\gamma c} \left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma + o\left(A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma\right) \right) \\
 &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 &\quad - u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\gamma \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \frac{l}{c} \left(\frac{k_n}{n}\right)^{1+\gamma} \right) \\
 &\quad + o\left(u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \left(\frac{k_n}{n}\right)^{1+\gamma} \right) \right) \\
 &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 &\quad - \underbrace{u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\gamma \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \frac{l}{c} \left(\frac{k_n}{n}\right)^{1+\gamma} \right)}_{=: r_n} \\
 &\quad + o\left(\underbrace{u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \left(\frac{k_n}{n}\right)^{1+\gamma} \right)}_{=: \tilde{r}_n} \right) \\
 &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n - l}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} + r_n + o(\tilde{r}_n) \\
 &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{l}{u_n} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} + r_n + o(\tilde{r}_n) \\
 &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \frac{l}{\gamma u_n} + o(u_n^{-1}) \right) + r_n + o(\tilde{r}_n) \\
 &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} + r_n + o(\tilde{r}_n).
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus

$$\frac{\frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\tilde{r}_n} = \frac{1}{u_n \left(A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma \right)} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, da wegen Lemma 1.2.7 und Bedingung (4.1.2)

$$u_n \left(\frac{k_n}{n} \right)^\gamma \sim v_\gamma \beta_n \left(\frac{k_n}{n} \right)^\gamma = v_\gamma \frac{\left(\frac{k_n}{n} \right)^\gamma F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}{\left(\frac{n}{k_n}(1 - \alpha_n) \right)^\gamma}$$

$$= v_\gamma \frac{c(1 + \gamma A(\frac{k_n}{n})) + l(\frac{k_n}{n})^\gamma}{\left(\frac{n}{k_n}(1 - \alpha_n)\right)^\gamma} \rightarrow \infty \quad (5.10.11)$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \bar{F}_X(u_n)a(\bar{F}_X(u_n)) &= \gamma u_n \frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} + r_n + o(\tilde{r}_n) - \gamma c^{1/\gamma} l (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &\quad + o\left((u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}}\right) \\ &= \gamma u_n \frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} + r_n + o(\tilde{r}_n), \end{aligned} \quad (5.10.12)$$

da ähnlich wie zuvor

$$\begin{aligned} \frac{(u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\tilde{r}_n} &= \frac{1}{u_n \left[\left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n) \right]^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{l}{u_n}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma\right)} \\ &= \frac{1}{u_n \left[c(1 + \gamma A(\frac{k_n}{n})) + l\left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{l}{u_n}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma\right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Eingesetzt in (5.10.9) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - u_n)^+) &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} u_n \frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{1 - \gamma} r_n + o(\tilde{r}_n) \\ &\quad + \int_0^1 G(u) du \bar{F}_X(u_n)a(\bar{F}_X(u_n))A(\bar{F}_X(u_n)) \\ &\quad + o(\bar{F}_X(u_n)a(\bar{F}_X(u_n))A(\bar{F}_X(u_n))) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} u_n \frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{1 - \gamma} r_n + o(\tilde{r}_n). \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit wurde

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{F}_X(u_n)a(\bar{F}_X(u_n))A(\bar{F}_X(u_n))}{\tilde{r}_n} \\ &\stackrel{(5.10.12)}{=} \frac{\gamma u_n \frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} A(\bar{F}_X(u_n)) + r_n A(\bar{F}_X(u_n)) + o(\tilde{r}_n A(\bar{F}_X(u_n)))}{\tilde{r}_n} \\ &= \gamma \frac{A(\bar{F}_X(u_n))}{A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma} + \frac{r_n}{\tilde{r}_n} A(\bar{F}_X(u_n)) + o(A(\bar{F}_X(u_n))) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ ausgenutzt, was wegen $r_n = O(\tilde{r}_n)$ und

$$\frac{n}{k_n} \bar{F}_X(u_n) \stackrel{1.2.7}{=} \frac{n}{k_n} \left(\frac{u_n - l}{c} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} (1 + o(1)) = \left(\frac{u_n \left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma - l \left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma}{c} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} (1 + o(1)) \stackrel{(5.10.11)}{\rightarrow} 0$$

aus Lemma 1.2.1

$$\frac{A(\bar{F}_X(u_n))}{A\left(\frac{k_n}{n}\right)} = \frac{A\left(\frac{k_n}{n}\right) \left(\frac{n}{k_n} \bar{F}_X(u_n)\right)^\rho + o\left(A\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)}{A\left(\frac{k_n}{n}\right)} = \left(\frac{n}{k_n} \bar{F}_X(u_n)\right)^\rho + o(1) \longrightarrow 0 \quad (5.10.13)$$

für $n \rightarrow \infty$ folgt. Dies wiederum eingesetzt in (5.10.7) liefert

$$f_{\alpha_n}(u_n) - g_{\alpha_n}(u_n) = \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} (l_n + o(l_n)), \quad (5.10.14)$$

wobei

$$l_n := \frac{1}{1 - \gamma} r_n = -u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \frac{l}{c(1 - \gamma)} \left(\frac{k_n}{n}\right)^{1+\gamma} \right).$$

Die Entwicklung in (5.10.14) bleibt auch im Fall $l = 0$ richtig. Allerdings müssen obige Rechnungen für den Nachweis leicht modifiziert werden. Eine erneute Auseinandersetzung mit dem ersten Term in (5.10.9) ergibt

$$\begin{aligned} \bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) &= c\gamma \bar{F}_X^{1-\gamma}(u_n) = c\gamma \left(\frac{u_n}{c} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} (1 + c^{\rho/\gamma} A(u_n^{-1/\gamma}) + o(A(u_n^{-1/\gamma})))^{1-\gamma} \\ &= \gamma c^{1/\gamma} u_n^{1-1/\gamma} (1 + (1 - \gamma)c^{\rho/\gamma} A(u_n^{-1/\gamma}) + o(A(u_n^{-1/\gamma}))) \\ &= \gamma c^{1/\gamma} u_n^{1-1/\gamma} + \gamma(1 - \gamma)c^{(1+\rho)/\gamma} u_n^{1-1/\gamma} A(u_n^{-1/\gamma}) + o(u_n^{1-1/\gamma} A(u_n^{-1/\gamma})). \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden folgt

$$\begin{aligned} \gamma c^{1/\gamma} u_n^{1-1/\gamma} &= \gamma c^{1/\gamma} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)^{-1/\gamma} \\ &= \gamma c^{1/\gamma} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(c \left(\frac{k_n}{n} \right)^{-\gamma} \left(1 + \gamma A\left(\frac{k_n}{n}\right) \right) \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \gamma A\left(\frac{k_n}{n}\right) \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 - A\left(\frac{k_n}{n}\right) + o\left(A\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \right) \\ &= \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} - \gamma u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) \\ &\quad + o\left(u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) = \gamma \frac{k_n}{n} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} - \gamma u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right)$$

$$+ o\left(u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right)\right), \quad (5.10.15)$$

da wegen Satz 1.2.1 und Lemma 1.2.7

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{1-1/\gamma} A(u_n^{-1/\gamma})}{u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right)} &= \frac{1}{\left[\left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)\right]^{\frac{1}{\gamma}} A\left(\frac{k_n}{n}\right)} A(u_n^{-1/\gamma}) \\ &= \frac{1}{c(1+\gamma A\left(\frac{k_n}{n}\right))^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{A\left(\frac{k_n}{n}\right) \left(\frac{n}{k_n} u_n^{-1/\gamma}\right)^\rho + o\left(A\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)}{A\left(\frac{k_n}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{c(1+\gamma A\left(\frac{k_n}{n}\right))^{\frac{1}{\gamma}}} \left(\frac{n}{k_n} u_n^{-1/\gamma}\right)^\rho + o(1) \\ &\stackrel{(5.10.11)}{\longrightarrow} 0 \end{aligned} \quad (5.10.16)$$

gilt. Da nun wieder

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n))}{u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right)} &\stackrel{(5.10.15)}{=} \gamma \frac{A(\bar{F}_X(u_n))}{A\left(\frac{k_n}{n}\right)} - \gamma A(\bar{F}_X(u_n)) + o\left(A(\bar{F}_X(u_n))\right) \\ &\stackrel{(5.10.13)}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt, folgt durch Einsetzen in (5.10.9)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - u_n)^+) &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} u_n \frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &\quad - \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) \\ &\quad + o\left(u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \\ &\quad + \int_0^1 G(u) du \bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n)) \\ &\quad + o\left(\bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) A(\bar{F}_X(u_n))\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} u_n \frac{k_n}{n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &\quad - \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) \\ &\quad + o\left(u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung für $l = 0$:

$$\begin{aligned} f_{\alpha_n}(u_n) - g_{\alpha_n}(u_n) &= \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \left(-\frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. + o\left(u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) \right) \right) \\ &= \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} (l_n + o(l_n)). \end{aligned}$$

Der Fall $\rho < \gamma$

In diesem Fall gilt anders als zuvor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tA(t^{-1/\gamma}) = \lim_{s \searrow 0} s^{-\gamma} A(s) = \lim_{s \searrow 0} s^{\rho-\gamma} s^{-\rho} A(s) \stackrel{1.2.4}{=} \infty.$$

Dies bedeutet für den ersten Summanden in (5.10.9)

$$\begin{aligned} \bar{F}_X(u_n) a(\bar{F}_X(u_n)) &\stackrel{(5.10.10)}{=} \gamma c^{1/\gamma} u_n (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} - \gamma c^{1/\gamma} l (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &\quad + \gamma(1 - \gamma) c^{(1+\rho)/\gamma} (u_n - l)^{1-\frac{1}{\gamma}} A(u_n^{-1/\gamma}) \\ &\quad + o\left((u_n - l)^{1-\frac{1}{\gamma}} A(u_n^{-1/\gamma}) \right) \\ &= \gamma c^{1/\gamma} u_n (u_n - l)^{-\frac{1}{\gamma}} + \gamma(1 - \gamma) c^{(1+\rho)/\gamma} (u_n - l)^{1-\frac{1}{\gamma}} A(u_n^{-1/\gamma}) \\ &\quad + o\left((u_n - l)^{1-\frac{1}{\gamma}} A(u_n^{-1/\gamma}) \right). \end{aligned}$$

Nun gilt aber auch in dieser Situation für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{(u_n - l)^{1-\frac{1}{\gamma}} A(u_n^{-1/\gamma})}{\tilde{r}_n} = \frac{1}{\left[\left(\frac{k_n}{n} \right)^\gamma F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n) \right]^{\frac{1}{\gamma}} A\left(\frac{k_n}{n}\right) + \left(\frac{k_n}{n} \right)^\gamma} \rightarrow 0.$$

Dies zeigt man mit einer analogen Rechnung wie in (5.10.16). Da alle weiteren Rechnungen von der Fallunterscheidung $\rho > \gamma$ bzw. $\rho < \gamma$ unberührt bleiben, folgt auch hier für alle $l \in \mathbb{R}$ die Entwicklung (5.10.14).

Bis auf den Fall $\rho = \gamma$ ist daher für $l = 0$ gezeigt, dass

$$\begin{aligned} f_{\alpha_n}(u_n) &= g_{\alpha_n}(u_n) - \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) \\ &\quad + o\left(\frac{u_n}{1 - \alpha_n} \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} A\left(\frac{k_n}{n}\right) \right). \end{aligned} \tag{5.10.17}$$

Für ein $M > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 u_n \left(\frac{u_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} &= (\beta_n v_\gamma + w) \left(\frac{\beta_n v_\gamma + w}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 &= (\beta_n v_\gamma + w) \left(\frac{\beta_n v_\gamma}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \frac{w}{v_\gamma \beta_n} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 &= (\beta_n v_\gamma + w) \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \\
 &\quad \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma v_\gamma \beta_n} \frac{w}{\gamma^2 v_\gamma^2 \beta_n^2} + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-3}) \right) \\
 &= \frac{(1 - \gamma)^2}{2\gamma^3 v_\gamma} \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \beta_n^{-1} w^2 - \frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma^2} \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) w \\
 &\quad + v_\gamma \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \beta_n + O_{[-M, M]} \left(\frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \beta_n^{-2} \right).
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (5.10.17) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha_n}(u_n) &= g_{\alpha_n}(u_n) - (2\alpha_n - 1) \frac{1 - \gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} \beta_n^{-1} A \left(\frac{k_n}{n} \right) w^2 + (2\alpha_n - 1) \frac{1 - \gamma}{\gamma} A \left(\frac{k_n}{n} \right) w \\
 &\quad - (2\alpha_n - 1) v_\gamma \beta_n A \left(\frac{k_n}{n} \right) + O_{[-M, M]} \left(\beta_n^{-2} A \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \\
 &= \left(a_n - (2\alpha_n - 1) \frac{1 - \gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} \beta_n^{-1} A \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) w^2 + \left(b_n + (2\alpha_n - 1) \frac{1 - \gamma}{\gamma} A \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) w \\
 &\quad + c_n - (2\alpha_n - 1) v_\gamma \beta_n A \left(\frac{k_n}{n} \right) + \mathbb{E}(X) + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-2}).
 \end{aligned}$$

Im Fall $l = 0$ kann man also wie im vorigen Abschnitt mit der Nullstellenbestimmung fortfahren. Ist $l \neq 0$, so kann man durch die Wahl

$$\tilde{A}(t) := A(t) + \frac{l}{\gamma c} t^\gamma \tag{5.10.18}$$

künstlich erreichen, dass die additive Konstante l wegfällt, denn dann gilt

$$F_X^{\leftarrow}(1 - t) \stackrel{1.2.7}{=} ct^{-\gamma}(1 + \gamma A(t)) + l = ct^{-\gamma}(1 + \gamma \tilde{A}(t))$$

und \tilde{A} bleibt im Fall $\rho < \gamma$ regulär variierend mit Index ρ :

$$\frac{\tilde{A}(\lambda t)}{\tilde{A}(t)} = \frac{A(\lambda t) + \frac{l}{\gamma c} (\lambda t)^\gamma}{A(t) + \frac{l}{\gamma c} t^\gamma} = \frac{\frac{A(\lambda t)}{A(t)} + \frac{l}{\gamma c} \frac{\lambda^\gamma}{t^{-\gamma} A(t)}}{1 + \frac{l}{\gamma c} \frac{1}{t^{-\gamma} A(t)}} \longrightarrow \lambda^\rho,$$

da A regulär variierend ist mit Index ρ und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\gamma} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\rho - \gamma} t^{-\rho} A(t) \stackrel{1.2.4}{=} \infty.$$

Ist $\rho > \gamma$, so gilt $\tilde{A}(t) \sim l/(\gamma c)t^\gamma$, denn

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\gamma c}{l} t^{-\gamma} \tilde{A}(t) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\gamma c}{l} t^{-\gamma} A(t) + 1 = \frac{\gamma c}{l} \lim_{t \searrow 0} t^{\rho-\gamma} t^{-\rho} A(t) + 1 = 1.$$

Insgesamt ist damit für alle $l \in \mathbb{R}$ gezeigt, dass f_{α_n} die Darstellung

$$f_{\alpha_n}(u_n) = \zeta_n w^2 + \eta_n w + \kappa_n + O_{[-M, M]}(\beta_n^{-2})$$

mit

$$\begin{aligned} \zeta_n &:= a_n - (2\alpha_n - 1) \frac{1-\gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} \beta_n^{-1} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \stackrel{(5.10.2)}{=} \frac{1-\gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} \frac{2\alpha_n - 1}{\beta_n} - (2\alpha_n - 1) \frac{1-\gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} \beta_n^{-1} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \\ &= \frac{1-\gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} \frac{2\alpha_n - 1}{\beta_n} \left(1 - \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) = O(\beta_n^{-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_n &:= b_n + (2\alpha_n - 1) \frac{1-\gamma}{\gamma} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \stackrel{(5.10.3)}{=} -\frac{1}{\gamma} + 2 \frac{1-\gamma}{\gamma} (1 - \alpha_n) + (2\alpha_n - 1) \frac{1-\gamma}{\gamma} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(2(1 - \alpha_n) + \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) + O\left((1 - \alpha_n) \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\gamma} + O\left((1 - \alpha_n) + \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \kappa_n &:= c_n - (2\alpha_n - 1) v_\gamma \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + \mathbb{E}(X) \\ &\stackrel{(5.10.2)}{=} 2v_\gamma \beta_n (\alpha_n - 1) - (2\alpha_n - 1) v_\gamma \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + \mathbb{E}(X) \\ &= -v_\gamma \beta_n \left(2(1 - \alpha_n) + (2\alpha_n - 1) \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) + \mathbb{E}(X) \\ &= O\left(1 + \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \end{aligned} \tag{5.10.19}$$

besitzt.

Zur Nullstellenbestimmung von f_{α_n} betrachte man wieder eine Approximation

$$f_{\alpha_n}^{ap}(u_n) := \zeta_n w^2 + \eta_n w + \kappa_n,$$

bestimmt hiervon eine Nullstelle $w = \xi_{n,0}$ und beweist analog zur Nullstellenbestimmung von g_{α_n} für die Nullstelle ξ_n der ursprünglichen Funktion $f_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \cdot)$

$$\xi_n = \xi_{n,0} + O(\beta_n^{-2}),$$

falls $\xi_{n,0}$ beschränkt ist. Hierfür beachte man, dass auch f_{α_n} stetig und streng monoton fallend ist mit

$$\begin{aligned} f'_{\alpha_n}(u_n) &= -1 + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{d}{du_n} \mathbb{E}((X - u_n)^+) = -1 + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{d}{du_n} \int_{u_n}^{\infty} \bar{F}_X(t) dt \\ &= -1 - \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \bar{F}_X(u_n) < -1. \end{aligned} \quad (5.10.20)$$

Eine Nullstelle von $f_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma + \cdot)$ ist durch

$$\begin{aligned} \xi_{n,0} &= -\frac{\eta_n}{2\zeta_n} - \sqrt{\left(\frac{\eta_n}{2\zeta_n}\right)^2 - \frac{\kappa_n}{\zeta_n}} = -\frac{\eta_n}{2\zeta_n} - \frac{|\eta_n|}{2\zeta_n} \sqrt{1 - \frac{4\kappa_n \zeta_n}{\eta_n^2}} \\ &= -\frac{\eta_n}{2\zeta_n} + \frac{\eta_n}{2\zeta_n} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{4\kappa_n \zeta_n}{\eta_n^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{4\kappa_n \zeta_n}{\eta_n^2} \right)^2 + O\left(\beta_n^{-3} + \tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \right] \\ &= -\frac{\kappa_n}{\eta_n} - \frac{\kappa_n^2 \zeta_n}{\eta_n^3} + O\left(\beta_n^{-2} + \beta_n \tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.10.21)$$

gegeben, da $\kappa_n \zeta_n = O(\beta_n^{-1} + \tilde{A}(k_n/n))$. Man unterscheide zwischen

$$\begin{aligned} \text{(G1)} \quad & \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = O(1) \quad \text{und} \\ \text{(G2)} \quad & \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber wird der mögliche Spezialfall

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = \infty \quad \wedge \quad \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \not\rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

außer Acht gelassen.

Entwicklung des tatsächlichen Expektils im Fall (G1)

Es gelte also die Bedingung (G1). Für den ersten Summanden in (5.10.21) folgt

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa_n}{\eta_n} &= \frac{v_\gamma \beta_n \left(2(1 - \alpha_n) + (2\alpha_n - 1) \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \right) - \mathbb{E}(X)}{-\frac{1}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(2(1 - \alpha_n) + \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \right) + O\left((1 - \alpha_n) \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \right)} \\ &= \frac{2v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + v_\gamma \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) - 2v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) - \mathbb{E}(X)}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(2(1 - \alpha_n) + \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \right) + O\left((1 - \alpha_n) \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \right)} \\ &= \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) - 4\gamma(1 - \gamma) v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \\
 & + O(1) \left[[-\gamma \mathbb{E}(X) + 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)] \eta_n - \mathbb{E}(X) + 2v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) \right. \\
 & \quad + \gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \eta_n + v_\gamma \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) + O \left(\beta_n (1 - \alpha_n) \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \\
 & \quad \left. + [-2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) + 4\gamma(1 - \gamma) v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2] \eta_n \right] \\
 = & \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) - 4\gamma(1 - \gamma) v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 \\
 & - \gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \\
 & + O(1) \left[-(1 - \gamma) \mathbb{E}(X) \left(2(1 - \alpha_n) + \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \right. \\
 & \quad + 2(1 - \gamma) v_\gamma \left(2\beta_n (1 - \alpha_n)^2 + \beta_n (1 - \alpha_n) \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \\
 & \quad + O \left((1 - \alpha_n) \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \\
 & \quad + O \left(\beta_n (1 - \alpha_n) \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) + \beta_n \tilde{A}^2 \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \\
 & \quad + 2(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) - 4(1 - \gamma) v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 \\
 & \quad \left. - O \left((1 - \alpha_n)^2 + (1 - \alpha_n) \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) + \beta_n (1 - \alpha_n)^3 + \beta_n (1 - \alpha_n)^2 \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \right] \\
 = & \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) - 4\gamma(1 - \gamma) v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 \\
 & - \gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) + O \left(\tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) + (1 - \alpha_n)^2 \right). \tag{5.10.22}
 \end{aligned}$$

Damit ist $\xi_{n,0}$ beschränkt und es folgt für das exakte Expektil ξ_{α_n} zum Niveau α_n

$$\begin{aligned}
 \xi_{\alpha_n} & = \beta_n v_\gamma + \xi_n \\
 & = \beta_n v_\gamma - \frac{\kappa_n}{\eta_n} - \frac{\kappa_n^2 \zeta_n}{\eta_n^3} + O(\beta_n^{-2}) \\
 & = \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) \\
 & \quad - 4\gamma(1 - \gamma) v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 - \gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) - \frac{\kappa_n^2 \zeta_n \beta_n}{\eta_n^3} \beta_n^{-1} + O \left(\beta_n^{-2} + \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Entwicklung des approximativen und tatsächlichen Expektils im Fall (G2)

Im Fall (G2) folgt

$$\xi_{n,0} \stackrel{(5.10.21)}{=} -\frac{\kappa_n}{\eta_n} - \frac{\kappa_n^2 \zeta_n}{\eta_n^3} + O\left(\beta_n^{-2} + \beta_n \tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) = O\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right),$$

da wegen (5.10.19)

$$\kappa_n = O\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right), \quad \zeta_n = O(\beta_n^{-1})$$

und $\eta_n = -1/\gamma + o(1)$ gilt. Man erkennt, dass $\xi_{n,0}$ nicht beschränkt ist. Damit dies kein Problem darstellt, wird in diesem Fall der modifizierte Ansatz

$$\tilde{u}_n := \beta_n v_\gamma + \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}$$

gemacht. Es wird nun nachgewiesen, dass $f_{\alpha_n}(\tilde{u}_n)$ für jedes $M > 0$ folgende Darstellung aufweist:

$$f_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) = \zeta_n \beta_n^2 \tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}^2 + \eta_n \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w} + \kappa_n + O_{[-M,M]}\left(\beta_n \tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right). \quad (5.10.23)$$

Wie bereits in (5.10.17) bewiesen, gilt unabhängig vom gewählten Ansatz von $u_n = O(\beta_n)$

$$\begin{aligned} f_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) &= g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \tilde{u}_n \left(\frac{\tilde{u}_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \\ &\quad + o\left(\frac{\tilde{u}_n}{1 - \alpha_n} \left(\frac{\tilde{u}_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{k_n}{n} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.10.24)$$

Ähnlich zu (5.10.1) gibt es für jede Paramterisierung

$$\tilde{u}_n := \beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{w} \quad \text{mit } 0 < \nu_n = o(1)$$

ein $\tilde{\theta}_{\tilde{w},n} \in (0, 1)$, sodass

$$\begin{aligned} g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - \mathbb{E}(X) &= -\tilde{u}_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{\tilde{u}_n \left(\frac{\tilde{u}_n}{F_{k_n}^{\leftarrow}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1} \\ &= \tilde{u}_n \left(\frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} v_\gamma^{1/\gamma} F_{k_n}^{\leftarrow 1/\gamma} (\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{w})^{-\frac{1}{\gamma}} - 1\right) \\ &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 + \frac{\nu_n \tilde{w}}{v_\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 - \frac{\nu_n \tilde{w}}{\gamma v_\gamma} + \frac{1 + \gamma \nu_n^2 \tilde{w}^2}{2\gamma^2 v_\gamma^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1 + 3\gamma + 2\gamma^2}{6\gamma^3} \left(1 + \tilde{\theta}_{\tilde{w},n} \frac{\nu_n \tilde{w}}{v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}-2} \frac{\nu_n^3 \tilde{w}^3}{v_\gamma^3} \right) - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Für ein $M > 0$ sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\nu_n M / v_\gamma < 1 - \delta$ für ein beliebiges $\delta \in (0, 1)$. Nun gilt für alle $|\tilde{w}| \leq M$

$$\begin{aligned}
 \left| \left(1 + \tilde{\theta}_{\tilde{w},n} \frac{\nu_n \tilde{w}}{v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}-2} \tilde{w}^3 \right| &\leq \left(1 - \tilde{\theta}_{\tilde{w},n} \frac{\nu_n M}{v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}-2} M^3 \\
 &\leq \left(1 - \tilde{\theta}_{\tilde{w},n} (1 - \delta) \right)^{-\frac{1}{\gamma}-2} M^3 \leq \delta^{-\frac{1}{\gamma}-2} M^3 < \infty.
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - \mathbb{E}(X) &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 - \frac{\nu_n \tilde{w}}{\gamma v_\gamma} + \frac{1 + \gamma \nu_n^2 \tilde{w}^2}{2\gamma^2 v_\gamma^2} + O_{[-M,M]}(\nu_n^3) \right) - 1 \right) \\
 &= 2(\alpha_n - 1)\tilde{u}_n - (2\alpha_n - 1) \frac{\nu_n \tilde{w}}{\gamma v_\gamma} \tilde{u}_n + (2\alpha_n - 1) \frac{1 + \gamma \nu_n^2 \tilde{w}^2}{2\gamma^2 v_\gamma^2} \tilde{u}_n \\
 &\quad + O_{[-M,M]}(\beta_n \nu_n^3) \\
 &= 2(\alpha_n - 1)\beta_n v_\gamma + 2(\alpha_n - 1)\beta_n \nu_n \tilde{w} - (2\alpha_n - 1) \frac{\beta_n \nu_n}{\gamma} \tilde{w} \\
 &\quad - (2\alpha_n - 1) \frac{\beta_n \nu_n^2}{\gamma v_\gamma} \tilde{w}^2 + (2\alpha_n - 1) \frac{1 + \gamma \beta_n \nu_n^2}{2\gamma \gamma v_\gamma} \tilde{w}^2 + O_{[-M,M]}(\beta_n \nu_n^3) \\
 &= (2\alpha_n - 1) \frac{1 - \gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} \beta_n \nu_n^2 \tilde{w}^2 + \frac{2\gamma(\alpha_n - 1) - 2\alpha_n + 1}{\gamma} \beta_n \nu_n \tilde{w} \\
 &\quad + 2v_\gamma \beta_n (\alpha_n - 1) + O_{[-M,M]}(\beta_n \nu_n^3) \\
 &= a_n \beta_n^2 \nu_n^2 \tilde{w}^2 + b_n \beta_n \nu_n \tilde{w} + c_n + O_{[-M,M]}(\beta_n \nu_n^3). \tag{5.10.25}
 \end{aligned}$$

Eine Nullstelle $w = \tilde{e}_{n,0}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_{n,0} &= -\frac{b_n}{2a_n \beta_n \nu_n} - \sqrt{\left(\frac{b_n}{2a_n \beta_n \nu_n} \right)^2 - \frac{c_n + \mathbb{E}(X)}{a_n \beta_n^2 \nu_n^2}} \\
 &= -\frac{b_n}{2a_n \beta_n \nu_n} - \frac{|b_n|}{2a_n \beta_n \nu_n} \sqrt{1 - \frac{4(c_n + \mathbb{E}(X))a_n}{b_n^2}} \\
 &= -\frac{b_n}{2a_n \beta_n \nu_n} + \frac{b_n}{2a_n \beta_n \nu_n} \left(1 - \frac{2(c_n + \mathbb{E}(X))a_n}{b_n^2} + O(\beta_n^{-2}) \right) \\
 &= -\frac{c_n + \mathbb{E}(X)}{b_n \beta_n \nu_n} + O(\beta_n^{-2} \nu_n^{-1}).
 \end{aligned}$$

Da

$$\sup_{|\tilde{w}| \leq M} \beta_n^{-1} \nu_n^{-3} |g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - g_{\alpha_n}^{ap}(\tilde{u}_n)| = O(1),$$

gilt wegen $\tilde{e}_{n,0} = O(1)$

$$g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0}) = g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0}) - g_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0}) = O(\beta_n \nu_n^3),$$

d.h. es existiert ein $L > 0$, sodass

$$g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0}) > -L\beta_n \nu_n^3$$

und

$$g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0}) < +L\beta_n \nu_n^3$$

gilt. Aufgrund der Tatsache, dass g_{α_n} auf \mathbb{R}_+ streng monoton fallend mit einer kleineren Steigung als -1 ist (siehe (5.10.6)), folgt sowohl

$$\begin{aligned} 0 &< g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0}) + L\beta_n \nu_n^3 < g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0} - L\beta_n \nu_n^3) \\ &= g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n (\tilde{e}_{n,0} - L\nu_n^2)) \end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned} 0 &> g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0}) - L\beta_n \nu_n^3 > g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0} + L\beta_n \nu_n^3) \\ &= g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n (\tilde{e}_{n,0} + L\nu_n^2)). \end{aligned}$$

Da g_{α_n} auf \mathbb{R}_+ stetig und streng monoton fallend ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle \tilde{e}_n von $g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \cdot)$, für die

$$\tilde{e}_{n,0} - L\nu_n^2 < \tilde{e}_n < \tilde{e}_{n,0} + L\nu_n^2$$

gilt, d.h.

$$\tilde{e}_n = \tilde{e}_{n,0} + O(\nu_n^2).$$

Für das approximative Expektil folgt

$$\begin{aligned} e_{\alpha_n} &= \beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_n = \beta_n v_\gamma + \beta_n \nu_n \tilde{e}_{n,0} + O(\beta_n \nu_n^3) \\ &= \beta_n v_\gamma - \beta_n \nu_n \frac{c_n + \mathbb{E}(X)}{b_n \beta_n \nu_n} + O(\beta_n^{-1} + \beta_n \nu_n^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \beta_n v_\gamma - \frac{\gamma}{2\gamma(\alpha_n - 1) - 2\alpha_n + 1} (2v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + \mathbb{E}(X)) + O(\beta_n^{-1} + \beta_n \nu_n^3) \\
 &= \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) + O(\beta_n (1 - \alpha_n) + \beta_n^{-1} + \beta_n \nu_n^3).
 \end{aligned}$$

Setzt man $\nu_n := \tilde{A}(k_n/n) > 0$, so folgt daher wegen $\tilde{A}(k_n/n) = o(1)$ mit den Bezeichnungen aus (5.10.2)

$$g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) \stackrel{(5.10.25)}{=} a_n \beta_n^2 \tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}^2 + b_n \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w} + c_n + \mathbb{E}(X) + O_{[-M, M]}\left(\beta_n \tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)$$

sowie

$$e_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) + O\left(\beta_n (1 - \alpha_n) + \beta_n^{-1} + \beta_n \tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right).$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_n \left(\frac{\tilde{u}_n}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} &= \left(\beta_n v_\gamma + \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w} \right) \left(\frac{\beta_n v_\gamma + \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 &= \left(\beta_n v_\gamma + \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w} \right) \left(\frac{\beta_n v_\gamma}{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 &\quad \cdot \left(1 + \frac{\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}}{v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 &= \left(\beta_n v_\gamma + \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w} \right) \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \\
 &\quad \cdot \left[1 - \frac{1}{\gamma v_\gamma} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w} + \frac{1 + \gamma}{\gamma^2 v_\gamma^2} \tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}^2 \right. \\
 &\quad \left. + O_{[-M, M]}\left(\tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \right] \\
 &= \frac{(1 - \gamma)^2}{2\gamma^3 v_\gamma} \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \beta_n \tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}^2 \\
 &\quad - \frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma^2} \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w} \\
 &\quad + v_\gamma \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \beta_n + O_{[-M, M]}\left(\frac{n}{k_n} (1 - \alpha_n) \beta_n \tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Setzt man dies und $g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n)$ in (5.10.24) ein, so erhält man wie in (5.10.23) behauptet

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) &= \left(a_n - \frac{1 - \gamma}{2\gamma^2 v_\gamma} (2\alpha_n - 1) \beta_n^{-1} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \right) \beta_n^2 \tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}^2 \\
 &\quad + \left(b_n + \frac{1 - \gamma}{\gamma} (2\alpha_n - 1) \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \right) \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) \tilde{w}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + c_n + \mathbb{E}(X) - v_\gamma(2\alpha_n - 1)\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + O_{[-M,M]}\left(\beta_n\tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \\
 \stackrel{(5.10.19)}{=} & \zeta_n\beta_n^2\tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right)\tilde{w}^2 + \eta_n\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\tilde{w} + \kappa_n + O_{[-M,M]}\left(\beta_n\tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Eine Lösung $\tilde{w} = \tilde{\xi}_{n,0}$ von

$$f_{\alpha_n}^{ap}(\tilde{u}_n) := \zeta_n\beta_n^2\tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right)\tilde{w}^2 + \eta_n\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\tilde{w} + \kappa_n$$

ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{\xi}_{n,0} &= -\frac{\eta_n}{2\zeta_n\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)} - \sqrt{\left(\frac{\eta_n}{2\zeta_n\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)}\right)^2 - \frac{\kappa_n}{\zeta_n\beta_n^2\tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right)}} \\
 &= -\frac{\eta_n}{2\zeta_n\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)} - \frac{|\eta_n|}{2\zeta_n\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)}\sqrt{1 - \frac{4\kappa_n\zeta_n}{\eta_n^2}} \\
 &= \frac{\eta_n}{2\zeta_n\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)}\left(-\frac{1}{2}\frac{4\kappa_n\zeta_n}{\eta_n^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{4\kappa_n\zeta_n}{\eta_n^2}\right)^2 + O\left(\tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)\right) \\
 &= \frac{1}{\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)}\left(-\frac{\kappa_n}{\eta_n} - \frac{\kappa_n^2\zeta_n}{\eta_n^3} + O\left(\beta_n\tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)\right)
 \end{aligned}$$

mit

$$-\frac{\kappa_n}{\eta_n} \stackrel{(5.10.22)}{=} -\gamma v_\gamma\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + O(1)$$

und

$$-\frac{\kappa_n^2\zeta_n}{\eta_n^3} = -\frac{\kappa_n}{\eta_n} - \frac{\kappa_n\zeta_n}{\eta_n^2} + O\left(\beta_n\tilde{A}^2\left(\frac{k_n}{n}\right)\right),$$

da $\kappa_n\zeta_n = O(\tilde{A}(k_n/n))$, d.h.

$$\tilde{\xi}_{n,0} = -\gamma v_\gamma + o(1).$$

Offenbar ist $\tilde{\xi}_{n,0}$ beschränkt. Wegen

$$\sup_{|w|\leq M} \beta_n^{-1}\tilde{A}^{-3}\left(\frac{k_n}{n}\right) |f_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - f_{\alpha_n}^{ap}(\tilde{u}_n)| = O_P(1)$$

folgt daher

$$f_{\alpha_n}\left(\beta_n v_\gamma - \beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\tilde{\xi}_{n,0}\right) = f_{\alpha_n}\left(\beta_n v_\gamma - \beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\tilde{\xi}_{n,0}\right)$$

$$\begin{aligned}
 & - f_{\alpha_n}^{ap} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \tilde{\xi}_{n,0} \right) \\
 & = O_P \left(\beta_n \tilde{A}^3 \left(\frac{k_n}{n} \right) \right),
 \end{aligned}$$

d.h. es existiert ein $L > 0$, sodass

$$f_{\alpha_n} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \tilde{\xi}_{n,0} \right) > -L \beta_n \tilde{A}^3 \left(\frac{k_n}{n} \right)$$

und

$$f_{\alpha_n} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \tilde{\xi}_{n,0} \right) < +L \beta_n \tilde{A}^3 \left(\frac{k_n}{n} \right)$$

gilt. Aufgrund der Tatsache, dass f_{α_n} auf \mathbb{R}_+ streng monoton fallend mit einer kleineren Steigung als -1 (siehe (5.10.20)) ist, folgt sowohl

$$\begin{aligned}
 0 & < f_{\alpha_n} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \tilde{\xi}_{n,0} \right) + L \beta_n \tilde{A}^3 \left(\frac{k_n}{n} \right) \\
 & < f_{\alpha_n} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \tilde{\xi}_{n,0} - L \beta_n \tilde{A}^3 \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \\
 & = f_{\alpha_n} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \left(\tilde{\xi}_{n,0} - L \tilde{A}^2 \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned}
 0 & > f_{\alpha_n} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \tilde{\xi}_{n,0} \right) - L \beta_n \tilde{A}^3 \left(\frac{k_n}{n} \right) \\
 & > f_{\alpha_n} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \tilde{\xi}_{n,0} + L \beta_n \tilde{A}^3 \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \\
 & = f_{\alpha_n} \left(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \left(\tilde{\xi}_{n,0} + L \tilde{A}^2 \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Da f_{α_n} auf \mathbb{R}_+ stetig und streng monoton fallend ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle $\tilde{\xi}_n$ von $\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \beta_n \tilde{A}(k_n/k) \cdot)$, für die

$$\tilde{\xi}_{n,0} - L \tilde{A}^2 \left(\frac{k_n}{n} \right) < \tilde{\xi}_n < \tilde{\xi}_{n,0} + L \tilde{A}^2 \left(\frac{k_n}{n} \right)$$

gilt, d.h.

$$\tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_{n,0} + O \left(\tilde{A}^2 \left(\frac{k_n}{n} \right) \right) = -\gamma v_\gamma + o(1).$$

Für das tatsächliche Expektil ξ_{α_n} erhält man schließlich die gewünschte Entwicklung

$$\xi_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma + \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \tilde{\xi}_n = \beta_n v_\gamma - \gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) + o \left(\beta_n \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \right).$$

5.10.1.3 Analyse des Expektilschätzers

Abschließend soll auch für den Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ eine Entwicklung gefunden werden. Für \hat{g}_{α_n} ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_{\alpha_n}(u_n) - \hat{\mu}_n &= -u_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{u_n \left(\frac{u_n}{X_{n-k_n:n}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}}}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} \\
 &= u_n \left(\frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} v_{\hat{\gamma}_n}^{1/\hat{\gamma}_n} X_{n-k_n:n}^{1/\hat{\gamma}_n} (\beta_n v_\gamma)^{-1/\hat{\gamma}_n} \left(1 + \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} - 1 \right) \\
 &= u_n \left((2\alpha_n - 1) \left(\frac{v_{\hat{\gamma}_n}}{v_\gamma} \right)^{\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} \left(\frac{\binom{k_n}{n}^\gamma F_{k_n}^{\leftarrow}}{(1 - \alpha_n)^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \beta_n^{-1/\hat{\gamma}_n} \frac{X_{n-k_n:n}^{1/\hat{\gamma}_n}}{F_{k_n}^{\leftarrow-1/\gamma}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(1 + \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} - 1 \right) \\
 &= u_n \left((2\alpha_n - 1) \left(\frac{v_{\hat{\gamma}_n}}{v_\gamma} \right)^{\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} \frac{X_{n-k_n:n}^{1/\hat{\gamma}_n}}{F_{k_n}^{\leftarrow-1/\gamma}} \beta_n^{1/\gamma-1/\hat{\gamma}_n} \left(1 + \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Eine Analyse der Asymptotik von

$$A_n := \left(\frac{v_{\hat{\gamma}_n}}{v_\gamma} \right)^{1/\hat{\gamma}_n} \frac{X_{n-k_n:n}^{1/\hat{\gamma}_n}}{F_{k_n}^{\leftarrow-1/\gamma}} \beta_n^{1/\gamma-1/\hat{\gamma}_n}$$

zeigt

$$\begin{aligned}
 A_n &= \left(\frac{v_{\hat{\gamma}_n}}{v_\gamma} \right)^{1/\hat{\gamma}_n} \left(\frac{X_{n-k_n:n}}{F_{k_n}^{\leftarrow}} \right)^{\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} F_{k_n}^{\leftarrow-1/\hat{\gamma}_n-1/\gamma} \beta_n^{1/\gamma-1/\hat{\gamma}_n} \\
 &= g(\hat{\gamma}_n) f(\hat{\gamma}_n, X_{n-k_n:n}/F_{k_n}^{\leftarrow}) F_{k_n}^{\leftarrow-1/\hat{\gamma}_n-1/\gamma} \beta_n^{1/\gamma-1/\hat{\gamma}_n} \tag{5.10.26}
 \end{aligned}$$

mit

$$f(x, y) := y^{1/x}$$

und

$$g(x) := \left(\frac{v_x}{v_\gamma} \right)^{1/x} = e^{-\log(\frac{1}{x}-1)} e^{-\frac{1}{x} \log(v_\gamma)}.$$

Die Funktion g ist auf $(0, 1)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(x) = g(x) \left(\frac{1}{x-x^2} + \frac{1}{x^2} \log(v_\gamma) \right) \quad \forall x \in (0, 1).$$

Aus (2.2.3) folgt

$$\sqrt{k_n} (g(\hat{\gamma}_n) - g(\gamma)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, (g'(\gamma) \sigma_S)^2 \right) = \mathcal{N} \left(0, \left(\frac{1}{\gamma - \gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} \log(v_\gamma) \right)^2 \sigma_S^2 \right)$$

und daher

$$g(\hat{\gamma}_n) = g(\gamma) + O_P(k_n^{-1/2}) = 1 + O_P(k_n^{-1/2}).$$

Außerdem ist die Funktion $f(x, y) = y^{1/x}$ in beiden Komponenten für alle $x \in (0, 1)$ und $y \in \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Daher folgt aus Satz 2.2.3 und der Delta-Methode [Vaa98, Theorem 3.1, Seite 26] gerade

$$\begin{aligned} \sqrt{k_n} (f(\hat{\gamma}_n, X_{n-k_n:n}/F_{k_n}^{\leftarrow}) - 1) &= \sqrt{k_n} (f(\hat{\gamma}_n, X_{n-k_n:n}/F_{k_n}^{\leftarrow}) - f(\gamma, 1)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, (\nabla f(\gamma, 1))^T \Sigma \nabla f(\gamma, 1)\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_T^2}{\gamma^2}\right), \end{aligned}$$

wobei ∇f den Vektor der partiellen Ableitungen von f bezeichne:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \log(y) e^{\frac{1}{x} \log(y)} \\ \frac{1}{x} y^{\frac{1}{x}-1} \end{pmatrix}.$$

Man folgert daraus

$$f(\hat{\gamma}_n, X_{n-k_n:n}/F_{k_n}^{\leftarrow}) = f(\gamma, 1) + O_P(k_n^{-1/2}) = 1 + O_P(k_n^{-1/2}).$$

Eine Fortsetzung der Analyse von A_n ergibt

$$\begin{aligned} A_n &\stackrel{(5.10.26)}{=} g(\hat{\gamma}_n) f(\hat{\gamma}_n, X_{n-k_n:n}/F_{k_n}^{\leftarrow}) F_{k_n}^{\leftarrow-1/\hat{\gamma}_n-1/\gamma} \beta_n^{1/\gamma-1/\hat{\gamma}_n} \\ &= (1 + O_P(k_n^{-1/2})) F_{k_n}^{\leftarrow-1/\hat{\gamma}_n-1/\gamma} \beta_n^{1/\gamma-1/\hat{\gamma}_n} \\ &= (1 + O_P(k_n^{-1/2})) \exp\left(\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - \frac{1}{\gamma}\right) \log\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right)\right) \\ &= (1 + O_P(k_n^{-1/2})) \left(1 + \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - \frac{1}{\gamma}\right) \log\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right) + O_P\left(k_n^{-1} \log^2\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right)\right)\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - \frac{1}{\gamma}\right) \log\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right) + O_P\left(k_n^{-1/2} + k_n^{-1} \log^2\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right)\right) \\ &= 1 + \sqrt{k_n} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - \frac{1}{\gamma}\right) k_n^{-1/2} \log\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right) + O_P\left(k_n^{-1/2} + k_n^{-1} \log^2\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right)\right) \\ &= 1 + (N_{1/\gamma} + o_P(1)) k_n^{-1/2} \log\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right) + O_P\left(k_n^{-1/2} + k_n^{-1} \log^2\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right)\right) \\ &= 1 + N_{1/\gamma} k_n^{-1/2} \log\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right) + O_P\left(k_n^{-1/2} \log\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right)\right) \\ &= 1 - \gamma N_{1/\gamma} z_n + o_P(z_n), \end{aligned} \tag{5.10.27}$$

wobei

$$z_n := k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right) = -\frac{1}{\gamma} k_n^{-1/2} \log\left(\frac{F_{k_n}^{\leftarrow}}{\beta_n}\right)$$

und $N_{1/\gamma} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_S^2/\gamma^4)$ aus (2.2.6). Man beachte, dass wegen der Forderung (4.1.2)

$$z_n = k_n^{-1/2} \log \left(\frac{k_n}{n(1 - \alpha_n)} \right) = o(1)$$

gilt. Außerdem existiert eine Zufallsvariable $\Theta_{w,n}$ mit Werten in $(0, 1)$, sodass

$$\left(1 + \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} = 1 - \frac{w}{\hat{\gamma}_n v_\gamma \beta_n} + \frac{1 + \hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_n^2} \frac{w^2}{v_\gamma^2 \beta_n^2} - \frac{1 + 3\hat{\gamma}_n + 2\hat{\gamma}_n^2}{6\hat{\gamma}_n^3} \left(1 + \Theta_{w,n} \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} \frac{w^3}{\beta_n^3 v_\gamma^3}$$

gilt. Für ein beliebiges $\delta \in (0, 1)$ sei $M > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $M/(\beta_n v_\gamma) < 1 - \delta$. Nun gilt für alle $|w| \leq M$

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \Theta_{w,n} \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} w^3 \right| &\leq \left(1 + \Theta_{w,n} \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} M^3 \leq \left(1 - \Theta_{w,n} \frac{M}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} M^3 \\ &\leq (1 - \Theta_{w,n}(1 - \delta))^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} M^3 \leq \delta^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} M^3 < \infty \quad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Daher gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\alpha_n}(u_n) - \hat{\mu}_n &= u_n \left((2\alpha_n - 1) A_n \left(1 + \frac{w}{\beta_n v_\gamma} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} - 1 \right) \tag{5.10.28} \\ &= u_n \left((2\alpha_n - 1) A_n \left(1 - \frac{w}{\hat{\gamma}_n v_\gamma \beta_n} + \frac{1 + \hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_n^2} \frac{w^2}{v_\gamma^2 \beta_n^2} + O_{P,[-M,M]}(\beta_n^{-3}) \right) - 1 \right) \\ &= u_n \left((2\alpha_n - 1) A_n - 1 \right) - (2\alpha_n - 1) A_n \frac{w}{\hat{\gamma}_n v_\gamma \beta_n} \\ &\quad + (2\alpha_n - 1) A_n \frac{1 + \hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_n^2} \frac{w^2}{v_\gamma^2 \beta_n^2} + O_{P,[-M,M]}(\beta_n^{-2}) \\ &= \frac{1 - \hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_n^2 v_\gamma} \frac{2\alpha_n - 1}{\beta_n} A_n w^2 + \left((2\alpha_n - 1) \frac{\hat{\gamma}_n - 1}{\hat{\gamma}_n} A_n - 1 \right) w \\ &\quad + \beta_n v_\gamma \left((2\alpha_n - 1) A_n - 1 \right) + O_{P,[-M,M]}(\beta_n^{-2}) \\ &=: R_n w^2 + S_n w + T_n + O_{P,[-M,M]}(\beta_n^{-2}), \end{aligned}$$

wobei wegen (5.10.27)

$$R_n = O_P(\beta_n^{-1}),$$

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + 2(\alpha_n - 1)) \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} + O_P(k_n^{-1/2}) \right) A_n - 1 \\ &= -\frac{1}{\gamma} + 2\frac{1 - \gamma}{\gamma} (1 - \alpha_n) + (1 - \gamma) N_{1/\gamma} z_n + o_P(z_n) = -\frac{1}{\gamma} + O_P(1 - \alpha_n + z_n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_n &= \beta_n v_\gamma (2(\alpha_n - 1) - \gamma N_{1/\gamma} z_n + o_P(z_n)) \\ &= 2v_\gamma \beta_n (\alpha_n - 1) - \gamma v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + o_P(\beta_n z_n) \end{aligned} \quad (5.10.29)$$

gilt. Wegen

$$\frac{(T_n + \hat{\mu}_n)R_n}{S_n^2} \stackrel{(5.10.29)}{=} O_P(\beta_n^{-1})$$

ist eine Nullstelle $w = W_{n,0}$ der zufälligen Abbildung

$$\hat{g}_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma + w) := R_n w^2 + S_n w + T_n + \hat{\mu}_n$$

mit

$$D_n := \frac{(T_n + \hat{\mu}_n(X))^2 \beta_n R_n}{S_n^3} = O_P(1)$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} W_{n,0} &:= -\frac{S_n}{2R_n} - \sqrt{\left(\frac{S_n}{2R_n}\right)^2 - \frac{T_n + \hat{\mu}_n}{R_n}} = -\frac{S_n}{2R_n} - \frac{|S_n|}{2R_n} \sqrt{1 - \frac{4(T_n + \hat{\mu}_n)R_n}{S_n^2}} \\ &= \frac{S_n}{2R_n} \left(\sqrt{1 - \frac{4(T_n + \hat{\mu}_n)R_n}{S_n^2}} - 1 \right) \\ &= -\frac{S_n}{2R_n} + \frac{S_n}{2R_n} \left(-\frac{1}{2} \frac{4(T_n + \hat{\mu}_n)R_n}{S_n^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{4(T_n + \hat{\mu}_n)T_n}{R_n^2} \right)^2 + O(\beta_n^{-3}) \right) \\ &= -\frac{T_n + \hat{\mu}_n}{S_n} - \frac{(T_n + \hat{\mu}_n)^2 R_n}{S_n^3} + O(\beta_n^{-2}) \\ &= -\frac{T_n + \hat{\mu}_n}{S_n} - D_n \beta_n^{-1} + O(\beta_n^{-2}). \end{aligned} \quad (5.10.30)$$

Man stellt fest, dass $\hat{g}_{\alpha_n} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ P -fast sicher streng monoton fallend ist, denn es gilt

$$\hat{g}_{\alpha_n}(u) = -u + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{u \left(\frac{u}{X_{n-k_n:n}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}}}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} + \hat{\mu}_n = -u + J_n u^{1 - \frac{1}{\hat{\gamma}_n}} + \hat{\mu}_n$$

mit

$$J_n := \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{X_{n-k_n:n}^{\frac{1}{\hat{\gamma}_n}}}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} > 0 \quad P\text{-f.s.}$$

und Ableitung

$$\hat{g}'_{\alpha_n}(u) = -1 + J_n \left(1 - \frac{1}{\hat{\gamma}_n}\right) u^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} < -1 \quad P\text{-f.s.} \quad \forall u > 0. \quad (5.10.31)$$

Offenbar ist $\beta_n^2 (\hat{g}_{\alpha_n}(u_n) - \hat{g}_{\alpha_n}^{ap}(u_n))$ stochastisch lokal gleichmäßig beschränkt. Es gilt nämlich für alle $M > 0$

$$\begin{aligned} & \sup_{|w| \leq M} \beta_n^2 \left| \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + w) - \hat{g}_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma + w) \right| \\ &= \sup_{|w| \leq M} \beta_n^2 \left| R_n w^2 + S_n w + T_n + \hat{\mu}_n + O_{P,[-M,M]}(\beta_n^{-2}) - (R_n w^2 + S_n w + T_n + \hat{\mu}_n) \right| \\ &= \sup_{|w| \leq M} O_{P,[-M,M]}(1) = O_P(1). \end{aligned} \quad (5.10.32)$$

Es wird wieder gezeigt, dass es genau eine Nullstelle W_n der zufälligen Abbildung $\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \cdot)$ mit $\beta_n v_\gamma + W_n > 0$ gibt, die durch $W_{n,0}$ bis auf einen Term der Ordnung $O_P(\beta_n^{-2})$ approximiert wird, sofern $W_{n,0}$ stochastisch beschränkt ist.

Lemma 5.10.1. *Ist die Nullstelle $W_{n,0}$ der zufälligen Abbildung $\hat{g}_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma + \cdot)$ stochastisch beschränkt, dann gibt es genau eine Nullstelle W_n der zufälligen Abbildung $\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \cdot)$ mit $\beta_n v_\gamma + W_n > 0$ und es gilt*

$$W_n = W_{n,0} + O_P(\beta_n^{-2}).$$

Beweis. Es gelte $W_{n,0} = O_P(1)$. Dann gilt wegen (5.10.32)

$$\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + W_{n,0}) = \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + W_{n,0}) - \hat{g}_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma + W_{n,0}) = O_P(\beta_n^{-2}).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert demnach ein $L > 0$, sodass für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \varepsilon$

$$-L\beta_n^{-2} < \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + W_{n,0}) < L\beta_n^{-2}$$

gilt. Es folgt sowohl

$$0 < \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + W_{n,0}) + L\beta_n^{-2} < \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + W_{n,0} - L\beta_n^{-2})$$

als auch

$$0 > \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + W_{n,0}) - L\beta_n^{-2} > \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + W_{n,0} + L\beta_n^{-2})$$

mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \varepsilon$, da die Steigung von \hat{g}_{α_n} kleiner ist als -1 (siehe (5.10.31)). Da \hat{g}_{α_n} auf \mathbb{R}_+ stetig und P -fast sicher streng monoton fallend ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle W_n von $\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \cdot)$, für die mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \varepsilon$

$$W_{n,0} - L\beta_n^{-2} < W_n < W_{n,0} + L\beta_n^{-2}$$

gilt, d.h.

$$W_n = W_{n,0} + O_P(\beta_n^{-2}).$$

Dies war zu zeigen. □

Es wird im Folgenden unterschieden zwischen

$$\begin{aligned} \text{(F1)} \quad & \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n < \infty \quad \text{und} \\ \text{(F2)} \quad & \beta_n z_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber wird der mögliche Spezialfall

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = \infty \quad \wedge \quad \beta_n z_n \not\rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

außer Acht gelassen.

Zunächst wird der Fall (F1) diskutiert.

Der Fall (F1)

Für den möglichen Fall

$$\beta_n z_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

setze man voraus, dass dieser Term höchstens so schnell gegen 0 konvergiert, dass noch

$$\beta_n^{-3} = o_P(z_n) \tag{5.10.33}$$

seine Gültigkeit besitzt. Andernfalls müsste für $W_{n,0}$ eine genauere Entwicklung angegeben werden, denn die Abschätzung des Restglieds von $W_{n,0}$ durch $O_P(\beta_n^{-2})$ wäre wegen

$$\beta_n z_n = O_P(\beta_n^{-2})$$

zu grob. Ansonsten gilt (5.10.33) ohnehin.

In der Situation (F1) ist $W_{n,0}$ stochastisch beschränkt, denn es gilt dann

$$T_n \stackrel{(5.10.29)}{=} 2v_\gamma\beta_n(\alpha_n - 1) - \gamma v_\gamma N_{1/\gamma}\beta_n z_n + o_P(\beta_n z_n) = O_P(1)$$

und somit

$$W_{n,0} \stackrel{(5.10.30)}{=} -\frac{T_n + \hat{\mu}_n}{S_n} - D_n\beta_n^{-1} + O_P(\beta_n^{-2}) = O_P(1).$$

Aus Lemma 5.10.1 folgt die Existenz einer eindeutigen Nullstelle W_n von $\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma + \cdot)$ mit $\beta_n v_\gamma + W_n > 0$ und

$$\begin{aligned} W_n &= W_{n,0} + O_P(\beta_n^{-2}) = -\frac{T_n + \hat{\mu}_n}{S_n} - D_n\beta_n^{-1} + O_P(\beta_n^{-2}) \\ &= \gamma\mathbb{E}(X) + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) + 2\gamma(1 - \gamma)\mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) + \gamma^2(1 - \gamma)N_{1/\gamma}\mathbb{E}(X)z_n \\ &\quad + \gamma T_n + 2\gamma(1 - \gamma)T_n(1 - \alpha_n) + \gamma^2(1 - \gamma)N_{1/\gamma}T_n z_n - D_n\beta_n^{-1} + O_P(\beta_n^{-2}) \\ &\quad - \frac{(\gamma\hat{\mu}_n + 2\gamma(1 - \gamma)\mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) + \gamma^2(1 - \gamma)N_{1/\gamma}\mathbb{E}(X)z_n) S_n + \hat{\mu}_n}{S_n} \\ &\quad - \frac{(\gamma T_n + 2\gamma(1 - \gamma)T_n(1 - \alpha_n) + \gamma^2(1 - \gamma)N_{1/\gamma}T_n z_n) S_n + T_n}{S_n} \\ &= \gamma\mathbb{E}(X) + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) + 2\gamma(1 - \gamma)\mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) + \gamma^2(1 - \gamma)N_{1/\gamma}\mathbb{E}(X)z_n \\ &\quad + \gamma T_n + 2\gamma(1 - \gamma)T_n(1 - \alpha_n) + \gamma^2(1 - \gamma)N_{1/\gamma}T_n z_n - D_n\beta_n^{-1} + O_P(\beta_n^{-2}) \\ &\quad - \frac{2(1 - \gamma)(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))(1 - \alpha_n) + \gamma(1 - \gamma)(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))z_n}{S_n} \\ &\quad + o_P((\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))(1 - \alpha_n + z_n)) + o_P(\beta_n(1 - \alpha_n)(1 - \alpha_n + z_n)) \\ &= \gamma\mathbb{E}(X) + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) + 2\gamma(1 - \gamma)\mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) + \gamma^2(1 - \gamma)N_{1/\gamma}\mathbb{E}(X)z_n \\ &\quad + \gamma T_n + 2\gamma(1 - \gamma)T_n(1 - \alpha_n) + \gamma^2(1 - \gamma)N_{1/\gamma}T_n z_n - D_n\beta_n^{-1} \\ &\quad + O_P(\beta_n^{-2} + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))(1 - \alpha_n + z_n)) \\ &= \gamma\mathbb{E}(X) + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) + 2\gamma(1 - \gamma)\mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) \\ &\quad - 2\gamma v_\gamma\beta_n(1 - \alpha_n) - \gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma}\beta_n z_n - 4\gamma(1 - \gamma)v_\gamma\beta_n(1 - \alpha_n)^2 + o_P(\beta_n z_n) - D_n\beta_n^{-1} \\ &\quad + O_P(\beta_n^{-2} + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))(1 - \alpha_n + z_n)) \\ &= \gamma\mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma\beta_n(1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma)\mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) - 4\gamma(1 - \gamma)v_\gamma\beta_n(1 - \alpha_n)^2 \\ &\quad - \gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma}\beta_n z_n + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) - D_n\beta_n^{-1} + o_P(\beta_n z_n + \hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)). \end{aligned}$$

Eine Entwicklung des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ ist dann gerade

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{\alpha_n} &= \beta_n v_\gamma + W_n \\ &= \beta_n v_\gamma + \gamma\mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma\beta_n(1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma)\mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) - 4\gamma(1 - \gamma)v_\gamma\beta_n(1 - \alpha_n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) - D_n \beta_n^{-1} \\
 & + o_P(\beta_n z_n + \hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)).
 \end{aligned}$$

Der Fall (F2)

In diesem Fall (F2) ist $W_{n,0}$ nicht stochastisch beschränkt. Lemma 5.10.1 ist daher nicht anwendbar. Man betrachte im Folgenden eine neue Parametrisierung \tilde{u}_n mit

$$\tilde{u}_n := \beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n w. \quad (5.10.34)$$

Abermals gibt es für diese Parametrisierung eine Zufallsvariable $\tilde{\Theta}_{w,n}$ mit Werten in $(0, 1)$, sodass

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - \hat{\mu}_n &= -\tilde{u}_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{\tilde{u}_n \left(\frac{\tilde{u}_n}{X_{n-k_n:n}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}}}{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 1} \\
 &= \tilde{u}_n \left(\frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} v_{\hat{\gamma}_n}^{1/\hat{\gamma}_n} X_{n-k_n:n}^{1/\hat{\gamma}_n} (\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n w)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} - 1 \right) \\
 &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) A_n \left(1 - \frac{\gamma}{v_\gamma} z_n w \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n}} - 1 \right) \\
 &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) A_n \left(1 + \frac{\gamma}{v_\gamma} \frac{z_n}{\hat{\gamma}_n} w + \frac{\gamma^2}{2v_\gamma^2} \frac{1 + \hat{\gamma}_n}{\hat{\gamma}_n^2} z_n^2 w^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\gamma^3}{6v_\gamma^3} \frac{1 + 3\hat{\gamma}_n + 2\hat{\gamma}_n^2}{\hat{\gamma}_n^3} \left(1 - \tilde{\Theta}_{w,n} \frac{\gamma}{v_\gamma} z_n w \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} z_n^3 w^3 \right) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

gilt. Für ein beliebiges $\delta \in (0, 1)$ sei $M > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\gamma z_n M / v_\gamma < 1 - \delta$ gilt. Es folgt für alle $|w| \leq M$

$$\begin{aligned}
 \left| \left(1 - \tilde{\Theta}_{w,n} \frac{\gamma}{v_\gamma} z_n w \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} w^3 \right| &\leq \left(1 - \tilde{\Theta}_{w,n} \frac{\gamma}{v_\gamma} z_n M \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} M^3 \\
 &\leq \left(1 - \tilde{\Theta}_{w,n} (1 - \delta) \right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} M^3 \leq \delta^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - 3} M^3 < \infty \quad P\text{-f.s.}
 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - \hat{\mu}_n &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) A_n \left(1 + \frac{\gamma}{v_\gamma} \frac{z_n}{\hat{\gamma}_n} w + \frac{\gamma^2}{2v_\gamma^2} \frac{1 + \hat{\gamma}_n}{\hat{\gamma}_n^2} z_n^2 w^2 + O_{P,[-M,M]}(z_n^3) \right) - 1 \right) \\
 &= ((2\alpha_n - 1) A_n - 1) \tilde{u}_n + \frac{\gamma}{v_\gamma} (2\alpha_n - 1) A_n \frac{z_n}{\hat{\gamma}_n} w \tilde{u}_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\gamma^2}{2v_\gamma^2} (2\alpha_n - 1) A_n \frac{1 + \hat{\gamma}_n}{\hat{\gamma}_n^2} z_n^2 w^2 \tilde{u}_n + O_{P,[-M,M]}(\beta_n z_n^3) \\
 = & ((2\alpha_n - 1) A_n - 1) \beta_n v_\gamma - \gamma ((2\alpha_n - 1) A_n - 1) \beta_n z_n w + \gamma (2\alpha_n - 1) A_n \frac{\beta_n z_n}{\hat{\gamma}_n} w \\
 & - \gamma^2 (2\alpha_n - 1) A_n \frac{\beta_n z_n^2}{\hat{\gamma}_n v_\gamma} w^2 + \gamma^2 (2\alpha_n - 1) A_n \frac{1 + \hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_n} \frac{\beta_n z_n^2}{\hat{\gamma}_n v_\gamma} w^2 \\
 & + O_{P,[-M,M]}(\beta_n z_n^3) \\
 = & \frac{\gamma^2}{2v_\gamma} (2\alpha_n - 1) A_n \frac{1 - \hat{\gamma}_n}{\hat{\gamma}_n^2} \beta_n z_n^2 w^2 + \gamma \left(1 - (2\alpha_n - 1) A_n \frac{\hat{\gamma}_n - 1}{\hat{\gamma}_n} \right) \beta_n z_n w \\
 & + v_\gamma \beta_n (2(\alpha_n - 1) A_n - 1) + O_{P,[-M,M]}(\beta_n z_n^3) \\
 =: & \tilde{R}_n w^2 + \tilde{S}_n w + \tilde{T}_n + O_{P,[-M,M]}(\beta_n z_n^3),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{R}_n = O_P(\beta_n z_n^2), \quad \tilde{S}_n = O_P(\beta_n z_n)$$

und

$$\tilde{T}_n = -\gamma v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + 2v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + o_P(\beta_n z_n) = -\gamma v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + o_P(\beta_n z_n),$$

da $\beta_n z_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Da der Ausdruck

$$\frac{(\tilde{T}_n + \mathbb{E}(X)) \tilde{R}_n}{\tilde{S}_n^2} = O_P(z_n)$$

stochastisch gegen Null konvergiert, ist eine Nullstelle $w = \tilde{W}_{n,0}$ der approximierenden zufälligen Funktion von \hat{g}_{α_n}

$$\hat{g}_{\alpha_n}^{ap}(\tilde{u}_n) := \tilde{R}_n w^2 + \tilde{S}_n w + \tilde{T}_n$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}_{n,0} & = -\frac{\tilde{S}_n}{2\tilde{R}_n} - \sqrt{\left(\frac{\tilde{S}_n}{2\tilde{R}_n}\right)^2 - \frac{\tilde{T}_n + \hat{\mu}_n}{\tilde{R}_n}} = -\frac{\tilde{S}_n}{2\tilde{R}_n} - \frac{|\tilde{S}_n|}{2\tilde{R}_n} \sqrt{1 - \frac{4(\tilde{T}_n + \hat{\mu}_n)\tilde{R}_n}{\tilde{S}_n^2}} \\
 & = -\frac{\tilde{S}_n}{2\tilde{R}_n} + \frac{\tilde{S}_n}{2\tilde{R}_n} \left(1 - \frac{2(\tilde{T}_n + \hat{\mu}_n)\tilde{R}_n}{\tilde{S}_n^2} + O_P(z_n^2) \right) \\
 & = -\frac{\tilde{T}_n + \hat{\mu}_n}{\tilde{S}_n} + O_P(z_n) = -\frac{-\gamma v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + o_P(\beta_n z_n) + \hat{\mu}_n}{\gamma \left(1 - (2\alpha_n - 1) A_n \frac{\hat{\gamma}_n - 1}{\hat{\gamma}_n} \right) \beta_n z_n} + O_P(z_n) \\
 & = \gamma v_\gamma N_{1/\gamma} + o_P(1).
 \end{aligned}$$

Offenbar ist $\tilde{W}_{n,0}$ stochastisch beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen

$$\sup_{|w| \leq M} \beta_n^{-1} z_n^{-3} |\hat{g}_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - \hat{g}_{\alpha_n}^{ap}(\tilde{u}_n)| = O_P(1)$$

folgt daher

$$\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0}) = \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0}) - \hat{g}_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0}) = O_P(\beta_n z_n^3),$$

d.h. es existiert ein $L > 0$, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \varepsilon$

$$\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0}) > -L \beta_n z_n^3$$

und

$$\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0}) < +L \beta_n z_n^3$$

gilt. Aufgrund der Tatsache, dass \hat{g}_{α_n} auf \mathbb{R}_+ fast sicher streng monoton fallend mit einer kleineren Steigung als -1 (siehe (5.10.31)) ist, folgt mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \varepsilon$ sowohl

$$\begin{aligned} 0 &< \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0}) + L \beta_n z_n^3 < \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0} - L \beta_n z_n^3) \\ &= \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n (\tilde{W}_{n,0} - L z_n^2)) \end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned} 0 &> \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0}) - L \beta_n z_n^3 > \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0} + L \beta_n z_n^3) \\ &= \hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n (\tilde{W}_{n,0} + L z_n^2)). \end{aligned}$$

Da g_{α_n} auf \mathbb{R}_+ P -f.s. stetig und streng monoton fallend ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle \tilde{W}_n von $\hat{g}_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \cdot)$, für die

$$\tilde{W}_{n,0} - L z_n^2 < \tilde{W}_n < \tilde{W}_{n,0} + L z_n^2$$

mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \varepsilon$ gilt, d.h.

$$\tilde{W}_n = \tilde{W}_{n,0} + O_P(z_n^2).$$

Eine Entwicklung des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ ist dann

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{\alpha_n} &= \beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_n = \beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{W}_{n,0} + O_P(\beta_n z_n^3) \\ &= \beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n (\gamma v_\gamma N_{1/\gamma} + o_P(1)) + O_P(\beta_n z_n^3) \end{aligned}$$

$$= \beta_n v_\gamma - \gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + O_P(\beta_n z_n^3).$$

Im nächsten Abschnitt 5.10.2 soll der relative Schätzfehler $(\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n})/\xi_{\alpha_n}$ näher beleuchtet werden. Dafür muss im Fall (F2) unter der Parametrisierung (5.10.34) das Verhalten des approximativen Expektils e_{α_n} erneut untersucht werden.

Ähnlich zu (5.10.1) gibt es für die Paramterisierung (5.10.34) ein $\tilde{\theta}_{w,n} \in (0, 1)$, sodass

$$\begin{aligned} g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - \mathbb{E}(X) &= -\tilde{u}_n + \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} \frac{\tilde{u}_n \left(\frac{\tilde{u}_n}{F_{k_n}^*}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{\gamma} - 1} \\ &= \tilde{u}_n \left(\frac{2\alpha_n - 1}{1 - \alpha_n} \frac{k_n}{n} v_\gamma^{1/\gamma} F_{k_n}^{*1/\gamma} (\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n w)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) \\ &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 - \frac{\gamma}{v_\gamma} z_n w \right)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) \\ &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 - v_\gamma^{-1} z_n w + \frac{1 + \gamma}{2v_\gamma^2} z_n^2 w^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1 + 3\gamma + 2\gamma^2}{6} \left(1 - \tilde{\theta}_{w,n} \frac{\gamma}{v_\gamma} z_n w \right)^{-\frac{1}{\gamma}-3} \frac{z_n^3 w^3}{v_\gamma^3} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

gilt. Für ein beliebiges $\delta \in (0, 1)$ sei $M > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\gamma z_n M / v_\gamma < 1 - \delta$. Nun gilt für alle $|w| \leq M$

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \tilde{\theta}_{w,n} \frac{\gamma}{v_\gamma} z_n w \right)^{-\frac{1}{\gamma}-3} w^3 \right| &\leq \left(1 - \tilde{\theta}_{w,n} \frac{\gamma}{v_\gamma} z_n M \right)^{-\frac{1}{\gamma}-3} M^3 \\ &\leq \left(1 - \tilde{\theta}_{w,n} (1 - \delta) \right)^{-\frac{1}{\gamma}-3} M^3 \leq \delta^{-\frac{1}{\gamma}-3} M^3 < \infty. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - \mathbb{E}(X) &= \tilde{u}_n \left((2\alpha_n - 1) \left(1 + v_\gamma^{-1} z_n w + \frac{1 + \gamma}{2} \frac{z_n^2 w^2}{v_\gamma^2} + O_{[-M, M]}(z_n^3) \right) - 1 \right) \\ &= 2(\alpha_n - 1)\tilde{u}_n + v_\gamma^{-1}(2\alpha_n - 1)z_n w \tilde{u}_n + \frac{1 + \gamma}{2v_\gamma^2}(2\alpha_n - 1)z_n^2 w^2 \tilde{u}_n \\ &\quad + O_{[-M, M]}(\beta_n z_n^3) \\ &= 2(\alpha_n - 1)\beta_n v_\gamma - 2\gamma(\alpha_n - 1)\beta_n z_n w + (2\alpha_n - 1)\beta_n z_n w \\ &\quad - \frac{\gamma}{v_\gamma}(2\alpha_n - 1)\beta_n z_n^2 w^2 + \frac{1 + \gamma}{2v_\gamma}(2\alpha_n - 1)\beta_n z_n^2 w^2 + O_{[-M, M]}(\beta_n z_n^3) \\ &= \frac{1 - \gamma}{2v_\gamma}(2\alpha_n - 1)\beta_n z_n^2 w^2 + (2\gamma(1 - \alpha_n) + 2\alpha_n - 1)\beta_n z_n w \\ &\quad + 2v_\gamma \beta_n (\alpha_n - 1) + O_{[-M, M]}(\beta_n z_n^3) \end{aligned}$$

$$=: \tilde{a}_n w^2 + \tilde{b}_n w + \tilde{c}_n + O_{[-M,M]}(\beta_n z_n^3),$$

wobei

$$\tilde{a}_n = O(\beta_n z_n^2), \quad \tilde{b}_n = O(\beta_n z_n) \quad \text{und} \quad \tilde{c}_n = O(\beta_n(1 - \alpha_n)).$$

Da der Ausdruck

$$\frac{(\tilde{c}_n + \mathbb{E}(X)) \tilde{a}_n}{\tilde{b}_n^2} = O(\beta_n^{-1})$$

gegen Null konvergiert, ist eine Nullstelle $w = \tilde{w}_{n,0}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{n,0} &= -\frac{\tilde{b}_n}{2\tilde{a}_n} - \sqrt{\left(\frac{\tilde{b}_n}{2\tilde{a}_n}\right)^2 - \frac{\tilde{c}_n + \mathbb{E}(X)}{\tilde{a}_n}} = -\frac{\tilde{b}_n}{2\tilde{a}_n} - \frac{|\tilde{b}_n|}{2\tilde{a}_n} \sqrt{1 - \frac{4(\tilde{c}_n + \mathbb{E}(X))\tilde{a}_n}{\tilde{b}_n^2}} \\ &= -\frac{\tilde{b}_n}{2\tilde{a}_n} + \frac{\tilde{b}_n}{2\tilde{a}_n} \left(1 - \frac{2(\tilde{c}_n + \mathbb{E}(X))\tilde{a}_n}{\tilde{b}_n^2} + O(\beta_n^{-2})\right) \\ &= -\frac{\tilde{c}_n + \mathbb{E}(X)}{\tilde{b}_n} + O(\beta_n^{-2} z_n^{-1}). \end{aligned}$$

Da

$$\sup_{|w| \leq M} \beta_n^{-1} z_n^{-3} |g_{\alpha_n}(\tilde{u}_n) - g_{\alpha_n}^{ap}(\tilde{u}_n)| = O(1),$$

gilt wegen $\tilde{w}_{n,0} = O(1)$

$$g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0}) = g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0}) - g_{\alpha_n}^{ap}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0}) = O(\beta_n z_n^3),$$

d.h. es existiert ein $L > 0$, sodass

$$g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0}) > -L \beta_n z_n^3$$

und

$$g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0}) < +L \beta_n z_n^3$$

gilt. Aufgrund der Tatsache, dass g_{α_n} auf \mathbb{R}_+ streng monoton fallend mit einer kleineren Steigung als -1 ist (siehe (5.10.6)), folgt sowohl

$$\begin{aligned} 0 &< g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0}) + L \beta_n z_n^3 < g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0} - L \beta_n z_n^3) \\ &= g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n (\tilde{w}_{n,0} - L z_n^2)) \end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned} 0 &> g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0}) - L \beta_n z_n^3 > g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0} + L \beta_n z_n^3) \\ &= g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n (\tilde{w}_{n,0} + L z_n^2)). \end{aligned}$$

Da g_{α_n} auf \mathbb{R}_+ stetig und streng monoton fallend ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle \tilde{w}_n von $g_{\alpha_n}(\beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \cdot)$, für die

$$\tilde{w}_{n,0} - L z_n^2 < \tilde{w}_n < \tilde{w}_{n,0} + L z_n^2$$

gilt, d.h.

$$\tilde{w}_n = \tilde{w}_{n,0} + O(z_n^2).$$

Für das approximative Expektil folgt

$$\begin{aligned} e_{\alpha_n} &= \beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_n = \beta_n v_\gamma - \gamma \beta_n z_n \tilde{w}_{n,0} + O(\beta_n z_n^3) \\ &= \beta_n v_\gamma + \gamma \beta_n z_n \frac{\tilde{c}_n + \mathbb{E}(X)}{\tilde{b}_n} + O(\beta_n^{-1} + \beta_n z_n^3) \\ &= \beta_n v_\gamma + \frac{\gamma}{2\gamma(1 - \alpha_n) + 2\alpha_n - 1} (2v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + \mathbb{E}(X)) + O(\beta_n^{-1} + \beta_n z_n^3) \\ &= \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) + O(\beta_n (1 - \alpha_n) + \beta_n^{-1} + \beta_n z_n^3). \end{aligned}$$

Nun kann mit der Untersuchung des relativen Schätzfehlers begonnen werden.

5.10.2 Asymptotik des relativen Schätzfehlers

In diesem Teil der Arbeit wird der relative Schätzfehler

$$\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} = \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} \frac{e_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} + \frac{e_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}}$$

untersucht, welcher sich, wie obige Darstellung zeigt, aus einem stochastischen und einem systematischen Fehleranteil zusammensetzt.

5.10.2.1 Relativer systematischer Fehler im Fall (G1)

In den Abschnitten 5.10.1.1 und 5.10.1.2 wurden die Entwicklungen des approximativen Expektils e_{α_n} und des tatsächlichen Expektils ξ_{α_n} für den Fall (G1) hergeleitet:

$$\xi_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n)$$

$$-4\gamma(1-\gamma)v_\gamma\beta_n(1-\alpha_n)^2 - \gamma v_\gamma\beta_n\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) - \frac{\kappa_n^2\zeta_n}{\eta_n^3} + O\left(\beta_n^{-2} + \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)$$

bzw.

$$\begin{aligned} e_{\alpha_n} &= \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) \\ &\quad - 4\gamma(1 - \gamma)v_\gamma\beta_n(1 - \alpha_n)^2 - \frac{(c_n + \mathbb{E}(X))^2 a_n}{b_n^3} + O(\beta_n^{-2}). \end{aligned}$$

Es gilt (vgl. (5.10.2) und (5.10.19))

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_n^2\zeta_n}{\eta_n^3} - \frac{(c_n + \mathbb{E}(X))^2 a_n}{b_n^3} &= -\gamma^3 \kappa_n^2 \zeta_n + \gamma^3 (c_n + \mathbb{E}(X))^2 a_n + \frac{\gamma^3 \eta_n^3 + 1}{\eta_n^3} \kappa_n^2 \zeta_n \\ &\quad - \frac{\gamma^3 b_n^3 + 1}{b_n^3} (c_n + \mathbb{E}(X))^2 a_n \\ &= \gamma^3 \kappa_n^2 \left(\left(\frac{c_n + \mathbb{E}(X)}{\kappa_n} \right)^2 a_n - \zeta_n \right) \\ &\quad + O\left(\beta_n^{-1} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + \beta_n^{-1}(1 - \alpha_n)\right) \\ &= \gamma^3 \kappa_n^2 \left(\left[1 + O\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \right] a_n - \zeta_n \right) \\ &\quad + O\left(\beta_n^{-1} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + \beta_n^{-1}(1 - \alpha_n)\right) \\ &= \gamma^3 \kappa_n^2 \left(a_n - \zeta_n + O\left(\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) \right) \\ &\quad + O\left(\beta_n^{-1} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + \beta_n^{-1}(1 - \alpha_n)\right) \\ &= O\left(\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + \beta_n^{-1}(1 - \alpha_n)\right) \\ &= O\left(\beta_n^{-2} + \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Der relative systematische Fehler ist damit gegeben durch

$$\frac{e_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} = \frac{\gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + O\left(\beta_n^{-2} + \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)}{\beta_n v_\gamma + O(1)}$$

für $n \rightarrow \infty$. Gilt nun $\beta_n^{-2} = o\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)$, so folgt

$$\frac{1}{\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)} \frac{e_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} = \frac{1}{\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)} \frac{\gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + O\left(\beta_n^{-2} + \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)}{\beta_n v_\gamma + O(1)}$$

$$= \frac{\gamma v_\gamma + O\left(\beta_n^{-3} \tilde{A}^{-1}\left(\frac{k_n}{n}\right) + \beta_n^{-1}\right)}{v_\gamma + O(\beta_n^{-1})} \rightarrow \gamma$$

für $n \rightarrow \infty$. Andererseits gilt

$$\frac{e_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} = \frac{O(\beta_n^{-2})}{\beta_n v_\gamma + O(1)} = O(\beta_n^{-3}),$$

falls $\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) = O(\beta_n^{-2})$.

5.10.2.2 Relativer systematischer Fehler im Fall (G2)

Im Abschnitt 5.10.1.2 wurden die Entwicklungen des tatsächlichen Expektils ξ_{α_n} bzw. des approximativen Expektils e_{α_n} für den Fall (G2) hergeleitet:

$$\xi_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma - \gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + o\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)$$

bzw.

$$e_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) + O\left(\beta_n(1 - \alpha_n) + \beta_n^{-1} + \beta_n \tilde{A}^3\left(\frac{k_n}{n}\right)\right) = \beta_n v_\gamma + o\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right).$$

Der relative systematische Fehler ist damit durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)} \frac{e_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} &= \frac{1}{\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)} \frac{\gamma v_\gamma \beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + o\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)}{\beta_n v_\gamma + O\left(\beta_n \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)} \\ &= \frac{\gamma v_\gamma + o(1)}{v_\gamma + O\left(\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)} \rightarrow \gamma \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ charakterisiert.

5.10.2.3 Relativer stochastischer Fehler im Fall (F1)

Wie in Abschnitt 5.10.1 gesehen, waren die Entwicklungen des approximativen Expektils e_{α_n} und des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ im Fall (F1) für

$$d_n := \frac{(c_n + \mathbb{E}(X))^2 a_n \beta_n}{b_n^3}, \quad D_n := \frac{(T_n + \hat{\mu}_n(X))^2 R_n \beta_n}{S_n^3} \quad \text{und} \quad z_n := k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n(1 - \alpha_n)}\right)$$

gegeben durch

$$e_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) \\ - 4\gamma(1 - \gamma) v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 - d_n \beta_n^{-1} + O(\beta_n^{-2})$$

bzw.

$$\hat{\xi}_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) - 2\gamma v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n) + 2\gamma(1 - \gamma) \mathbb{E}(X)(1 - \alpha_n) - 4\gamma(1 - \gamma) v_\gamma \beta_n (1 - \alpha_n)^2 \\ - \gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) - D_n \beta_n^{-1} + o_P(\beta_n z_n + \hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)).$$

Eine Entwicklung für den relativen stochastischen Schätzfehler ist folglich

$$\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} = \frac{-\gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) + (d_n - D_n) \beta_n^{-1}}{\beta_n v_\gamma + O(1)} \\ + o_P(z_n + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) \beta_n^{-1}).$$

Hierbei gilt (vgl. (5.10.2) und (5.10.29))

$$(d_n - D_n) \beta_n^{-1} = \frac{(c_n + \mathbb{E}(X))^2 a_n}{b_n^3} - \frac{(T_n + \hat{\mu}_n)^2 R_n}{S_n^3} \\ = \gamma^3 \mathbb{E}^2(X)(R_n - a_n) + \gamma^3(T_n^2 R_n - c_n^2 a_n) + 2\gamma^3 \mathbb{E}(X)(T_n R_n - c_n a_n) \\ + \frac{(\gamma^3 \mathbb{E}^2(X) + \gamma^3 c_n^2 + 2\gamma^3 \mathbb{E}(X) c_n) b_n^3 + c_n^2 + 2\mathbb{E}(X) c_n + \mathbb{E}^2(X)}{b_n^3} a_n \\ - \frac{(\gamma^3 \mathbb{E}^2(X) + \gamma^3 T_n^2 + 2\gamma^3 \mathbb{E}(X) T_n) S_n^3 + T_n^2 + 2\hat{\mu}_n T_n + \hat{\mu}_n^2}{S_n^3} R_n \\ = \gamma^3 \mathbb{E}^2(X)(R_n - a_n) + \gamma^3(T_n^2 R_n - c_n^2 a_n) + 2\gamma^3 \mathbb{E}(X)(T_n R_n - c_n a_n) \\ + O_P(\beta_n^{-2}) - \frac{\hat{\mu}_n^2 - \mathbb{E}^2(X) + 2T_n(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) + O_P(\beta_n^{-1})}{S_n^3} R_n \\ = \gamma^3 \mathbb{E}^2(X)(R_n - a_n) + \gamma^3(T_n^2 R_n - c_n^2 a_n) + 2\gamma^3 \mathbb{E}(X)(T_n R_n - c_n a_n) \\ + O_P(\beta_n^{-2} + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)) \beta_n^{-1}). \quad (5.10.35)$$

Nun ist

$$\frac{c_n}{T_n} = \frac{2v_\gamma \beta_n (\alpha_n - 1)}{2v_\gamma \beta_n (\alpha_n - 1) - \gamma v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + o_P(\beta_n z_n)} = \frac{1}{1 + Z \kappa_n + o_P(1)} (1 + o_P(1))$$

mit $Z := \gamma N_{1/\gamma} / 2$ und $\kappa_n := z_n / (1 - \alpha_n)$ stochastisch beschränkt für $n \rightarrow \infty$, wobei dies wie folgt zu beweisen ist: Für ein $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ seien $D > 0$ und $M > 2$ so gewählt, dass

$$P\left(Z < -\frac{1}{2D} - \delta\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\frac{2}{DM} \sup_{x \in \mathbb{R}} f_Z(x) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei f_Z die Dichte von Z bezeichne, gilt. Dies ist möglich, da $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_S/(4\gamma^2))$ normalverteilt ist (vgl. (2.2.6)) und f_Z somit beschränkt ist. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq m$

$$\begin{aligned} & P \left(\left| \frac{1}{1 + Z\kappa_n + o_P(1)} \right| \geq M \right) \\ &= P \left(Z\kappa_n \in \left[-1 - \frac{1}{M} + o_P(1), -1 + \frac{1}{M} + o_P(1) \right] \right) \\ &= P \left(\kappa_n < D, Z\kappa_n \in \left[-1 - \frac{1}{M} + o_P(1), -1 + \frac{1}{M} + o_P(1) \right] \right) \\ &\quad + P \left(\kappa_n \geq D, Z\kappa_n \in \left[-1 - \frac{1}{M} + o_P(1), -1 + \frac{1}{M} + o_P(1) \right] \right) \\ &\leq P \left(\kappa_n < D, Z \leq \frac{-1 - \frac{1}{M} + o_P(1)}{\kappa_n} \right) \\ &\quad + P \left(\kappa_n \geq D, Z \in \left[-\kappa_n^{-1} - \frac{1}{DM} + o_P(\kappa_n^{-1}), -\kappa_n^{-1} + \frac{1}{DM} + o_P(\kappa_n^{-1}) \right] \right) \\ &\leq P \left(Z < -\frac{1}{2D} - \delta \right) + \frac{2}{DM} \sup_{x \in \mathbb{R}} f_Z(x) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

gilt, was $c_n/T_n = O_P(1)$ zur Folge hat. Man beachte für die vorletzte Ungleichung, dass die beiden o_P -Terme im zweiten Summanden die gleiche Funktion beschreiben.

Nun folgt damit aus

$$T_n R_n - c_n a_n = T_n \left(R_n - \frac{c_n}{T_n} a_n \right) = O_P(1)(R_n - O_P(1)a_n) = O_P(R_n - a_n)$$

und

$$T_n^2 R_n - c_n^2 a_n = O_P(R_n - a_n)$$

für $n \rightarrow \infty$, was analog zu zeigen ist, wegen (5.10.35) die Eigenschaft

$$(d_n - D_n)\beta_n^{-1} = O_P(R_n - a_n + \beta_n^{-2} + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1}).$$

Ferner erhält man

$$R_n - a_n = \frac{1 - \hat{\gamma}_n}{2v_\gamma \hat{\gamma}_n^2} \frac{2\alpha_n - 1}{\beta_n} A_n - \frac{1 - \gamma}{2v_\gamma \gamma^2} \frac{2\alpha_n - 1}{\beta_n} = \left(\frac{1 - \hat{\gamma}_n}{\hat{\gamma}_n^2} - \frac{1 - \gamma}{\gamma^2} \right) \frac{2\alpha_n - 1}{2v_\gamma \beta_n}$$

$$\stackrel{(2.2.4)}{=} O_P(k_n^{-1/2}\beta_n^{-1}).$$

Daher ergibt sich

$$(d_n - D_n)\beta_n^{-1} = O_P(k_n^{-1/2}\beta_n^{-1} + \beta_n^{-2} + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1}) \stackrel{(5.10.33)}{=} o_P(\beta_n z_n + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)))$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} &= \frac{-\gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma} z_n + \gamma(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1}}{v_\gamma + o(1)} + o_P(z_n + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1}) \\ &= -\gamma^2 N_{1/\gamma} z_n + \frac{\gamma}{v_\gamma}(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} \\ &\quad + o_P(z_n + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1}). \end{aligned} \quad (5.10.36)$$

Für den Fall

$$i := \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n > 0$$

bedeutet dies

$$\frac{|\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)|}{\beta_n z_n} \leq \frac{1}{\inf_{k \geq n} \beta_k z_k} |\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X)| = (i^{-1} + o(1)) o_P(1) = o_P(1), \quad (5.10.37)$$

also

$$z_n^{-1} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} = -\gamma^2 N_{1/\gamma} + o_P(1), \quad (5.10.38)$$

d.h. wegen (2.2.6)

$$z_n^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\alpha_n} \\ e_{\alpha_n} \end{pmatrix} - 1 \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2).$$

Gilt andererseits

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n z_n = 0,$$

so bedarf es einer genaueren Auseinandersetzung mit der Konvergenzrate von $\hat{\mu}_n$ gegen den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$. Man betrachte dafür die in Abschnitt 4.1.1 diskutierten Schätzer \bar{X}_n und $\hat{T}r_n$ für den Erwartungswert.

Der Fall $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$

Nach Satz 4.1.3 gilt im Fall $\gamma \in (0, 1/2)$

$$\bar{X}_n = \mathbb{E}(X) + O_P(n^{-1/2}).$$

Dann ist z_n in (5.10.36) der dominierende Term, denn es gilt

$$\frac{n^{-1/2}\beta_n^{-1}}{z_n} = \sqrt{\frac{k_n}{n}} \frac{1}{\beta_n \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)} = o(1) \quad (5.10.39)$$

für $n \rightarrow \infty$. Daher folgt wieder (5.10.38).

In Satz 4.1.3 wurde ebenso gezeigt, dass das arithmetische Mittel \bar{X}_n unter den gegebenen Bedingungen im Fall $\gamma \in (1/2, 1)$ mit der Rate $F_X^{\leftarrow}(1-1/n)/n$ gegen den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ konvergiert, d.h.

$$\bar{X}_n = \mathbb{E}(X) + O_P\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n}\right).$$

In (5.10.36) sind also die Raten z_n und $F_X^{\leftarrow}(1-1/n)/(n\beta_n)$ miteinander zu vergleichen. Da $F_X^{\leftarrow}(1-\cdot) \in \mathcal{RV}_{-\gamma}$, folgt aus Satz 1.2.1 für ein geeignetes $b > 0$ mit $k_n^{-1} < b$

$$\left| \frac{F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)} - k_n^{-\gamma} \right| \leq \sup_{\lambda^{-1} \in (0, b]} \left| \frac{F_X^{\leftarrow}(1-\lambda/n)}{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)} - \lambda^{-\gamma} \right| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, d.h.

$$F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \sim k_n^{-\gamma} F_X^{\leftarrow}(1-1/n). \quad (5.10.40)$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n\beta_n} &= \frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n} \frac{(1-\alpha_n)^\gamma}{\left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)} = \frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{k_n^\gamma F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)} n^{\gamma-1} (1-\alpha_n)^\gamma \\ &\sim n^{\gamma-1} (1-\alpha_n)^\gamma. \end{aligned} \quad (5.10.41)$$

Bei vorgegebenem $\gamma \in (1/2, 1)$ und bekannter Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so gewählt, dass

$$n^{\gamma-1} (1-\alpha_n)^\gamma = o(z_n)$$

gilt. Unter diesen Umständen folgt für den relativen Schätzfehler abermals (5.10.38).

Gilt andererseits

$$z_n = o\left(n^{\gamma-1} (1-\alpha_n)^\gamma\right),$$

d.h.

$$z_n = o\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n\beta_n}\right), \quad (5.10.42)$$

dann stellt sich die Entwicklung des relativen Schätzfehlers wegen (5.10.36) und Satz 4.1.3 wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \frac{n\beta_n}{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} &= \frac{\gamma}{v_\gamma} \frac{n}{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)} (\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)) + o_P(1) \\ &= \frac{\gamma}{v_\gamma} Y + o_P(1), \end{aligned} \quad (5.10.43)$$

wobei Y gemäß Satz 4.1.3 und somit auch $\frac{\gamma}{v_\gamma} Y$ eine stabile Verteilung besitzt.

Der seltene Fall, in dem sowohl

$$z_n = O\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n\beta_n}\right),$$

als auch

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n\beta_n} = O(z_n)$$

gilt, wird in dieser Arbeit aus technischen Gründen ausgeklammert.

Der Fall $\hat{\mu}_n = \hat{T}r_n$

Nach Satz 4.1.6 gilt für alle $\gamma \in (1/2, 1)$

$$\hat{T}r_n = \mathbb{E}(X) + O_P\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\right).$$

Interessant ist die Untersuchung von $\hat{T}r_n$ nur dann, wenn im Fall $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$ der Term $(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1}$ in (5.10.36) der dominierende ist, d.h. wenn $\gamma \in (1/2, 1)$ und

$$z_n = O\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n\beta_n}\right)$$

bzw.

$$z_n = O(n^{\gamma-1}(1-\alpha_n)^\gamma)$$

gilt. Dann ist das entzerrte Mittel $\hat{T}r_n$ dem arithmetischen Mittel \bar{X}_n wegen (5.10.40) und

$$\frac{\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}{\frac{1}{n} F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)} = \sqrt{k_n} \frac{F_X^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)} \sim k_n^{\frac{1}{2}-\gamma} = o(1)$$

vorzuziehen. Nun ist der Term z_n in (5.10.36) abermals der dominierende, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sqrt{k_n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}{n\beta_n}}{z_n} &= \frac{k_n F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}{n \frac{\left(\frac{k_n}{n}\right)^\gamma F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}{(1-\alpha_n)^\gamma} \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)} = \left(\frac{k_n}{n}\right)^{1-\gamma} \frac{(1-\alpha_n)^\gamma}{\log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.10.44)$$

für $n \rightarrow \infty$. Es folgt (5.10.38). Die Wahl von $\hat{\mu}_n = \hat{T}r_n$ sichert demnach, dass der Fehleranteil, der durch die Schätzung des Erwartungswerts zustande kommt, asymptotisch vernachlässigbar ist.

Die Situation, dass sowohl

$$z_n = O\left(\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \beta_n^{-1}\right),$$

als auch

$$\frac{\sqrt{k_n}}{n} F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n) \beta_n^{-1} = O(z_n)$$

gilt, wird erneut aus oben genanntem Grund ausgelassen.

5.10.2.4 Relativer stochastischer Fehler im Fall (F2)

Die Entwicklungen des approximativen Expektils e_{α_n} und des Expektilschätzers $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ im Fall (F2) waren für

$$z_n := k_n^{-1/2} \log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)$$

gegeben durch

$$e_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) + O(\beta_n(1-\alpha_n) + \beta_n^{-1} + \beta_n z_n^3)$$

bzw.

$$\hat{\xi}_{\alpha_n} = \beta_n v_\gamma - \gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n + O_P(\beta_n z_n^3).$$

Somit ist eine Entwicklung des relativen Schätzfehlers gerade

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} &= \frac{-\gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma} \beta_n z_n - \gamma \mathbb{E}(X) + O_P(\beta_n(1-\alpha_n) + \beta_n^{-1} + \beta_n z_n^3)}{\beta_n v_\gamma + \gamma \mathbb{E}(X) + O(\beta_n(1-\alpha_n) + \beta_n^{-1} + \beta_n z_n^3)} \\ &= \frac{-\gamma^2 v_\gamma N_{1/\gamma} z_n + O_P(\beta_n^{-1} + z_n^3)}{v_\gamma + O_P(\beta_n^{-1})} = -\gamma^2 N_{1/\gamma} z_n + O_P(\beta_n^{-1} + z_n^3) \end{aligned}$$

$$= -\gamma^2 N_{1/\gamma} z_n + o_P(z_n). \quad (5.10.45)$$

Demnach folgt

$$z_n^{-1} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} = -\gamma^2 N_{1/\gamma} + o_P(1),$$

d.h. wegen (2.2.6)

$$z_n^{-1} \left(\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} - 1 \right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2).$$

5.10.2.5 Ratenvergleich des stochastischen und deterministischen relativen Fehlers

Es wurde in den Passagen zuvor gezeigt, dass in den meisten Fällen

$$\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} = \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} \frac{e_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} + \frac{e_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} = O_P \left(z_n + \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) \right)$$

gilt. Der stochastische Fehler dominiert den systematischen Fehler, denn aus (1.1.5), d.h.

$$\sqrt{k_n} \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right) = O(1),$$

folgt

$$\frac{\tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right)}{z_n} = \frac{\sqrt{k_n} \tilde{A} \left(\frac{k_n}{n} \right)}{\log \left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)} \right)} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Die Dominanz des stochastischen Fehlers ergibt sich auch dann, wenn im Fall $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$ der Term $(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} = O_P(F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)/(n\beta_n))$ in (5.10.36) der dominierende ist. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass schon z_n den systematischen Fehler dominiert.

5.10.3 Beweis von Satz 4.2.1

Beweis. In den Abschnitten 5.10.2.1 und 5.10.2.2 wurde gezeigt, dass der systematische Anteil des relativen Schätzfehlers, d.h. der zweite Summand der Darstellung

$$\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} = \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} \frac{e_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} + \frac{e_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}},$$

in den meisten Fällen von der Ordnung $O\left(\tilde{A}(k_n/n)\right)$ ist. Lediglich im Fall $\tilde{A}(k_n/n) = O(\beta_n^{-3})$ ist der systematische Fehler von anderer Ordnung, nämlich $O(\beta_n^{-3})$. Es folgt

$$\frac{e_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} = 1 + O\left(\tilde{A}(k_n/n) + \beta_n^{-3}\right). \quad (5.10.46)$$

Gemäß (5.10.36) gilt im Fall (K1) wegen (5.10.37) bzw. $(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} = o(z_n)$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} &= -\gamma^2 N_{1/\gamma} z_n + \frac{\gamma}{v_\gamma} (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} + o_P(z_n + (\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1}) \\ &= -\gamma^2 N_{1/\gamma} z_n + o_P(z_n) \end{aligned}$$

für eine Zufallsvariable $N_{1/\gamma} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_S^2/\gamma^4)$. Im Fall (K3) gilt nach (5.10.45) ebenfalls

$$\frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} = -\gamma^2 N_{1/\gamma} z_n + o_P(z_n).$$

Unter der Bedingung (K) dominiert der stochastische Fehler den systematischen Fehler, denn es gilt

$$\frac{\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)}{z_n} = \frac{\sqrt{k_n} \tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right)}{\log\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)} = O\left(\log^{-1}\left(\frac{k_n}{n(1-\alpha_n)}\right)\right) = o(1)$$

bzw. nach Voraussetzung (5.10.33)

$$\frac{\beta_n^{-3}}{z_n} \longrightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Insgesamt folgt unter (K1) oder (K3)

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} &\stackrel{(5.10.46)}{=} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} + O_P\left(\tilde{A}\left(\frac{k_n}{n}\right) + \beta_n^{-3}\right) \\ &= -\gamma^2 N_{1/\gamma} z_n + o_P(z_n), \end{aligned}$$

d.h.

$$z_n^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\alpha_n} \\ e_{\alpha_n} \end{pmatrix} - 1 \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2).$$

Ist $\hat{\gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$, der Hill-Schätzer, so folgt mit Satz 2.2.3 die Gleichheit $\sigma_S^2 = \gamma^2 r(1, 1)$.

Nach (5.10.40) gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{F_X^{\leftarrow}(1 - 1/n)}{n\beta_n} \sim n^{\gamma-1}(1 - \alpha_n)^\gamma.$$

Zusammen mit (5.10.43) ergibt sich unter (K2)

$$\frac{n^{1-\gamma}}{(1 - \alpha_n)^\gamma} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} = \frac{\gamma}{v_\gamma} Y + o_P(1),$$

wobei Y gemäß Satz 4.1.3 und somit auch $\frac{\gamma}{v_\gamma}Y$ eine stabile Verteilung besitzt. Unter (K) ist, wie zuvor nachgewiesen, der relative stochastische Fehler der dominierende Term, was

$$\frac{n^{1-\gamma}}{(1-\alpha_n)^\gamma} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} \stackrel{(5.10.46)}{=} \frac{n^{1-\gamma}}{(1-\alpha_n)^\gamma} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - e_{\alpha_n}}{e_{\alpha_n}} + o_P(1) = \frac{\gamma}{v_\gamma}Y + o_P(1)$$

zur Folge hat, d.h.

$$\frac{n^{1-\gamma}}{(1-\alpha_n)^\gamma} \frac{\hat{\xi}_{\alpha_n} - \xi_{\alpha_n}}{\xi_{\alpha_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\gamma}{v_\gamma}Y.$$

Dies war zu zeigen. □

5.11 Beweis von Korollar 4.2.2

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass unter (i) bzw. (ii) die Bedingung $(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} = o(z_n)$ erfüllt ist. Dann folgt die Behauptung direkt aus (K1) und Satz 4.2.1. Sei zunächst $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$. Ist $\gamma \in (0, 1/2)$, so gilt nach Satz 4.1.3

$$(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} = O(n^{-1/2}\beta_n^{-1}) \stackrel{(5.10.39)}{=} o(z_n).$$

Gilt dagegen $\gamma \in (1/2, 1)$, so folgt mit Satz 4.1.3 und $n^{\gamma-1}(1-\alpha_n)^\gamma = o(z_n)$

$$(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} = O\left(\frac{F_X^{\leftarrow}(1-1/n)}{n\beta_n}\right) \stackrel{(5.10.41)}{=} O(n^{\gamma-1}(1-\alpha_n)^\gamma) = o(z_n).$$

Ist $\hat{\mu}_n = \hat{T}r_n$, so gilt schließlich für unabhängige Beobachtungen und $\gamma \in (1/2, 1)$ nach Satz 4.1.6

$$(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}(X))\beta_n^{-1} = O\left(\frac{\sqrt{k_n}F_X^{\leftarrow}(1-k_n/n)}{n\beta_n}\right) \stackrel{(5.10.44)}{=} o(z_n).$$

□

Anhang A

Anhang zu Kapitel 4

In diesem Abschnitt werden Abbildungen und sonstige Bemerkungen zu Kapitel 4 angehängt.

A.1 Pareto- und positive Student-t-Verteilung

$$p_{1/3}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

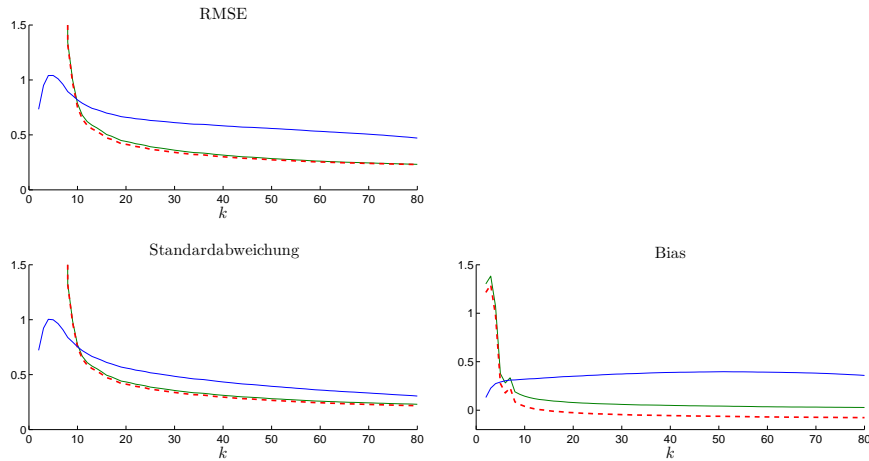


Abbildung A.1 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 100$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/3}$.

$$p_{1/3}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

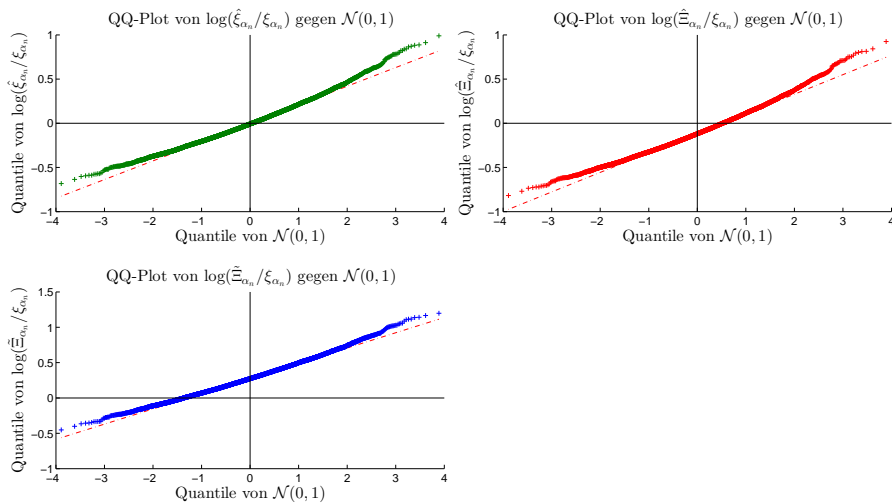


Abbildung A.2 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 100$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/3}$.

$$p_{1/2}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

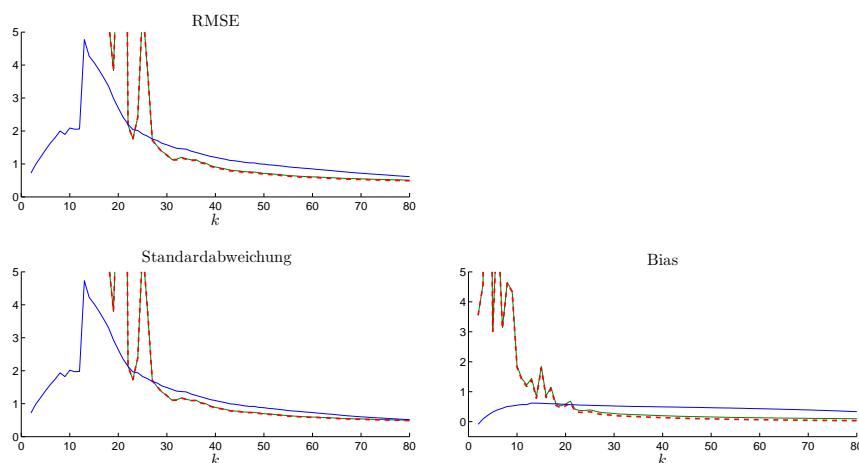


Abbildung A.3 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 100$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/2}$.

$$p_{1/2}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

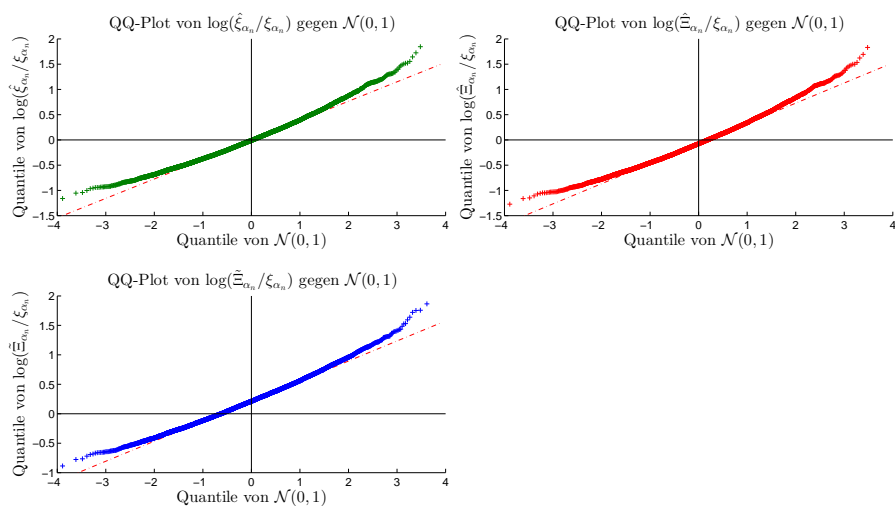


Abbildung A.4 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 100$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/2}$.

$$p_{1/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

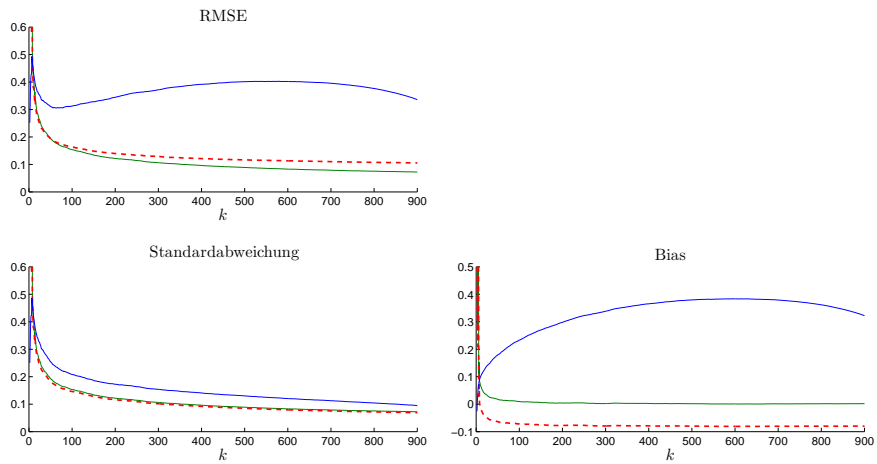


Abbildung A.5 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/3}$.

$$p_{1/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

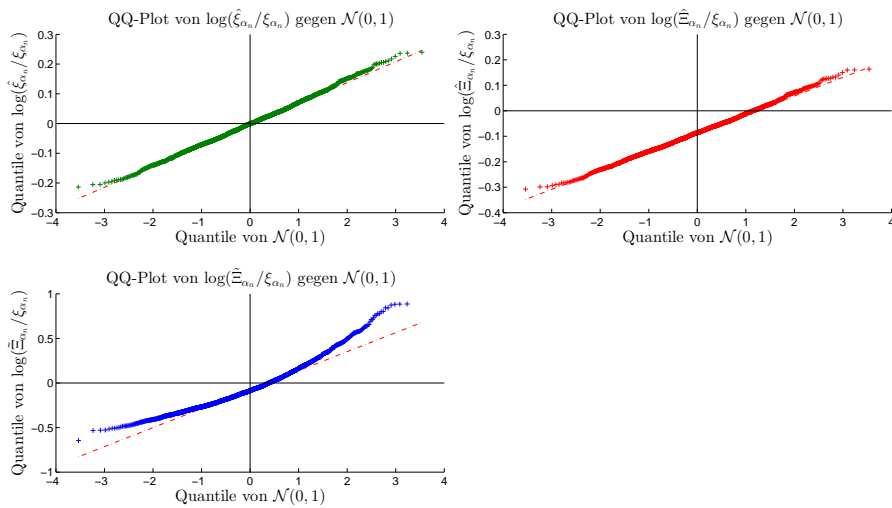


Abbildung A.6 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/3}$.

$$p_{1/2}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

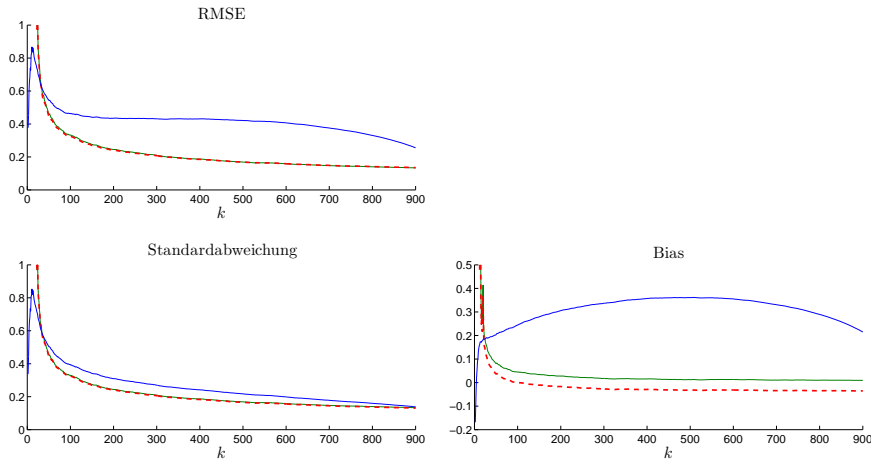


Abbildung A.7 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/2}$.

$$p_{1/2}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

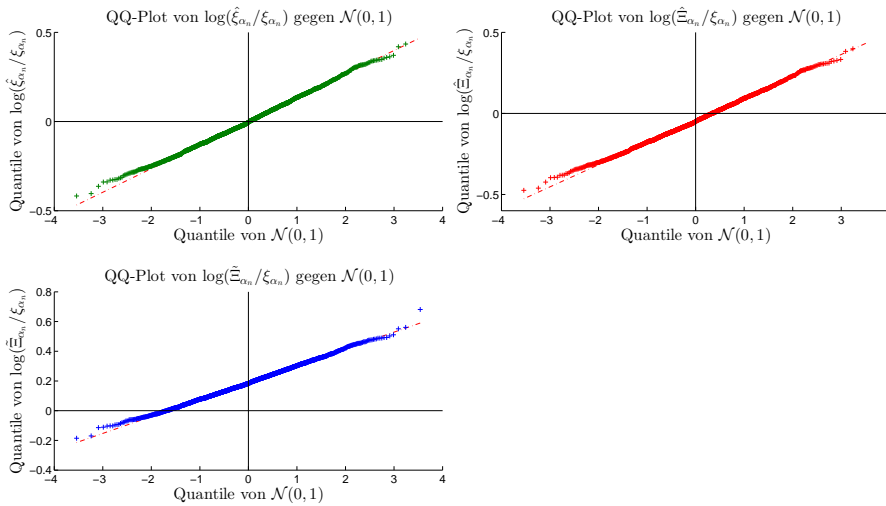


Abbildung A.8 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{1/2}$.

$$T_{1/10}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

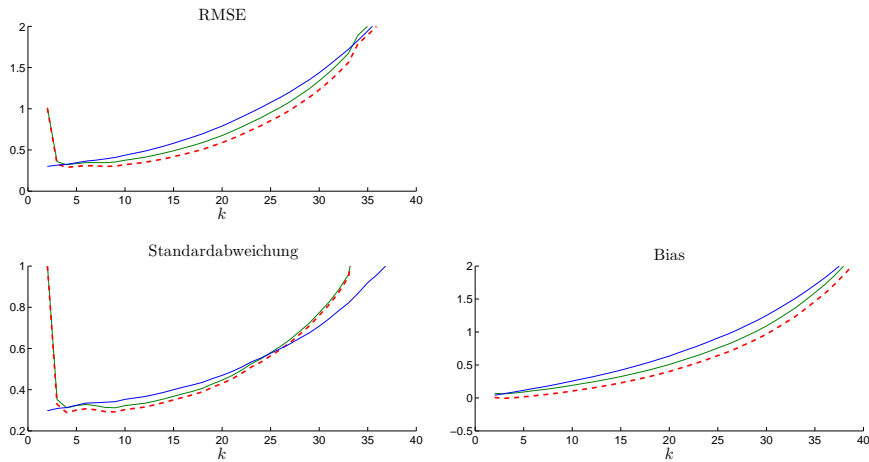


Abbildung A.9 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 100$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{1/10}$.

$$T_{1/10}, n = 100, \alpha_n = 0.995$$

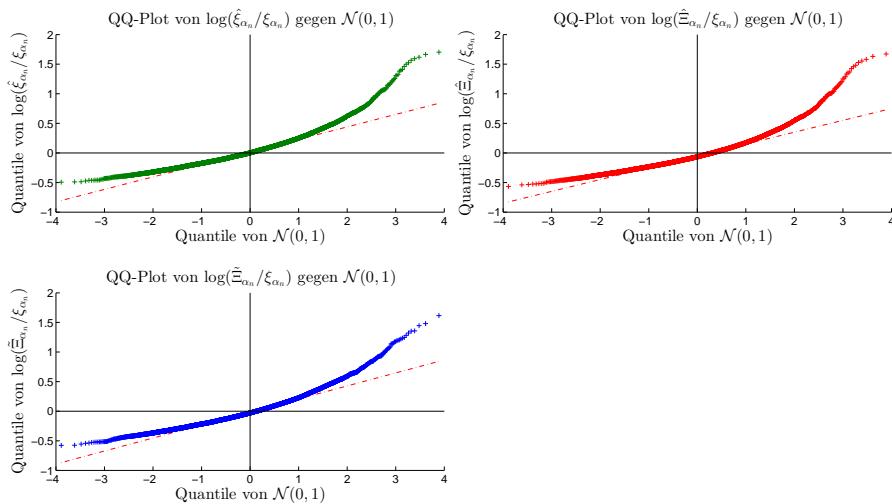


Abbildung A.10 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 100$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{1/10}$.

$$T_{1/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

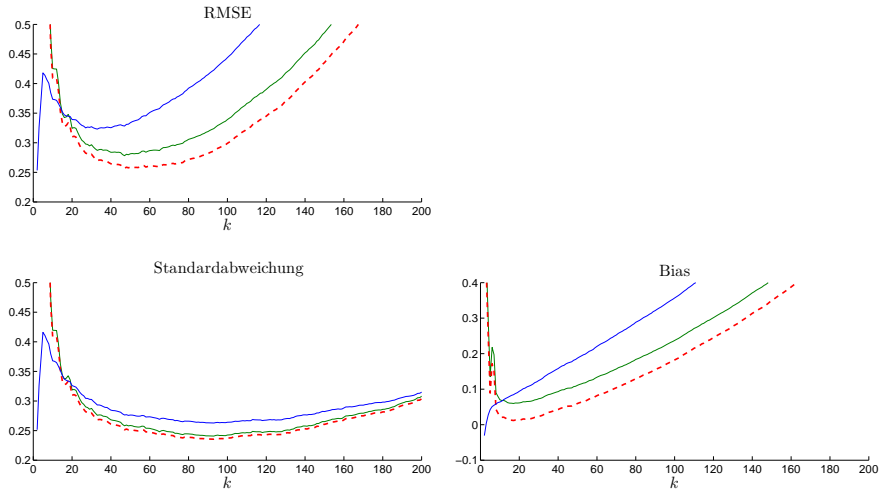


Abbildung A.11 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{1/3}$.

$$T_{1/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

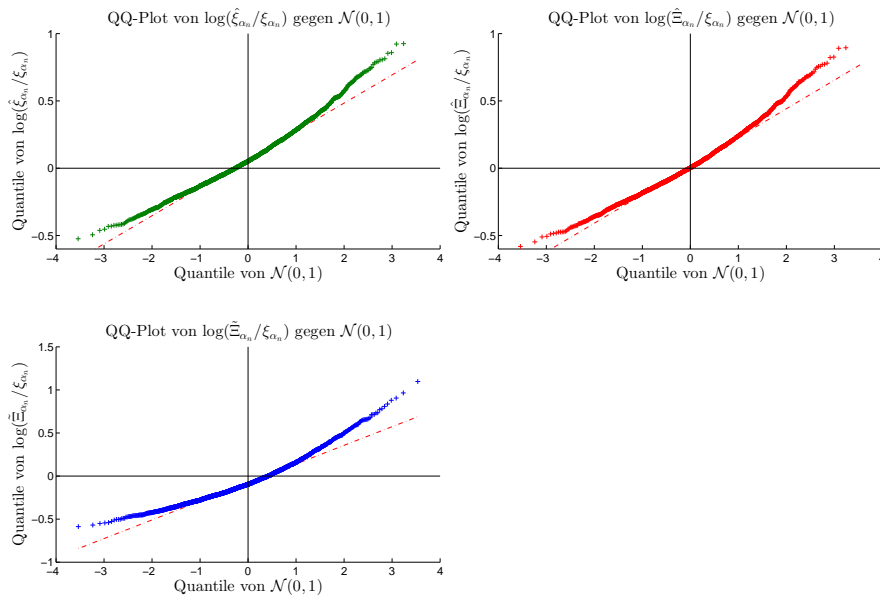


Abbildung A.12 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{1/3}$.

$$T_{1/2}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

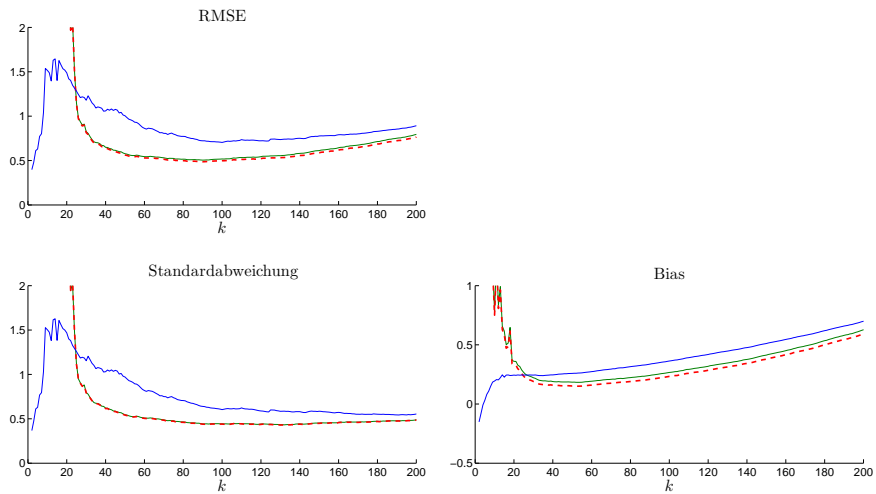


Abbildung A.13 – RMSE, Standardabweichung und Bias der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{1/2}$.

$$T_{1/2}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

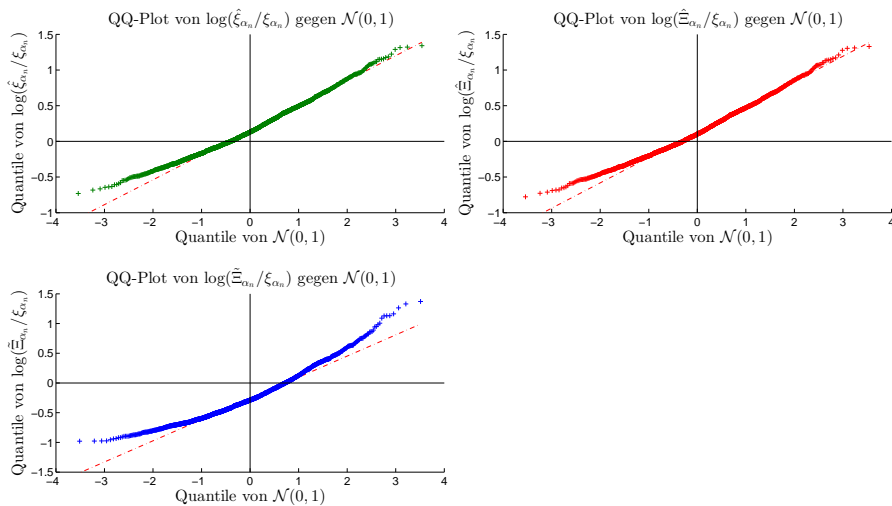


Abbildung A.14 – QQ-Plots von $\log(\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (grün), $\log(\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (rot) und $\log(\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n})$ (blau) gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ für das RMSE minimierende k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{1/2}$.

$p_\gamma, n = 1000, \alpha_n = 0.9977, S = 10$

		TRMSE (k_n)		
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
2/3	92.8348	0.2244 (900)	0.2213 (900)	0.1789 (900)
3/4	219.3003	0.3001 (900)	0.2982 (900)	0.3164 (864)

Tabelle A.1 – Wahre Expektile und Monte-Carlo Ergebnisse der relativen Expektilschätzer für den TRMSE und die k_n 's (in Klammern), die den jeweiligen TRMSE minimieren, für die Pareto-Verteilung p_γ mit $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$.

$T_\gamma, n = 1000, \alpha_n = 0.9977, S = 10$

		TRMSE (k_n)		
γ	ξ_{α_n}	$\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$	$\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$
2/3	76.6188	1.0059 (143)	0.9990 (134)	0.5271 (4)
3/4	167.9593	1.5685 (178)	1.5676 (178)	0.6195 (4)

Tabelle A.2 – Wahre Expektile und Monte-Carlo Ergebnisse der relativen Expektilschätzer für den TRMSE und die k_n 's (in Klammern), die den jeweiligen TRMSE minimieren, für die positive Student-t-Verteilung T_γ mit $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$.

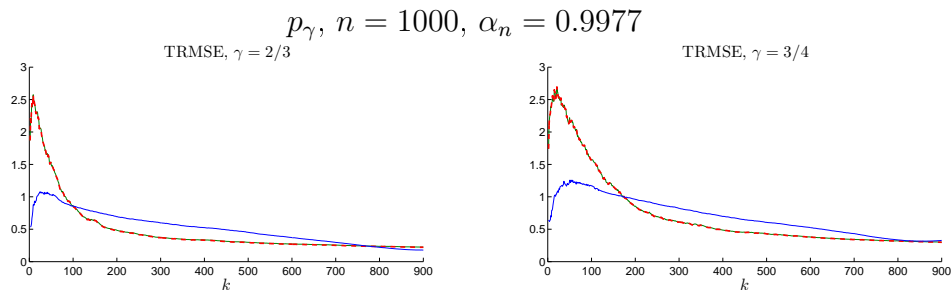


Abbildung A.15 – TRMSE der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilungen $p_{2/3}$ (links) und $p_{3/4}$ (rechts).

$$p_{2/3}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

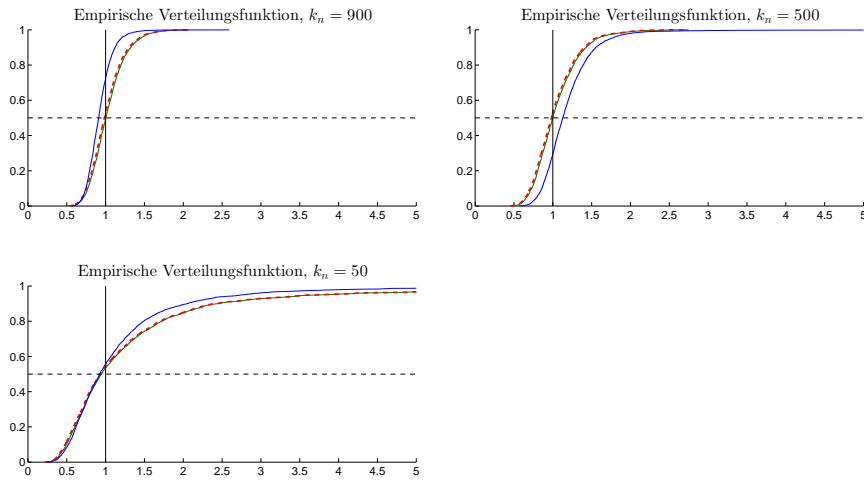


Abbildung A.16 – Empirische Verteilungsfunktionen von $\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für verschiedene k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{2/3}$.

$$p_{3/4}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

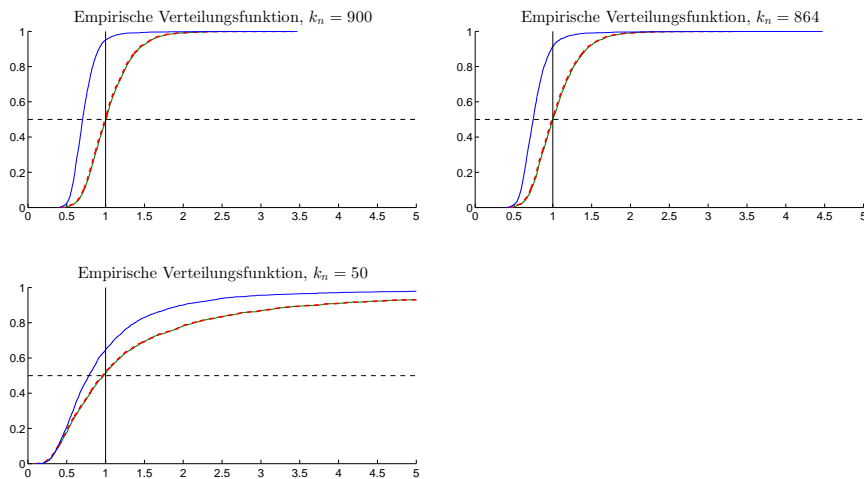


Abbildung A.17 – Empirische Verteilungsfunktionen von $\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für verschiedene k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der Pareto-Verteilung $p_{3/4}$.

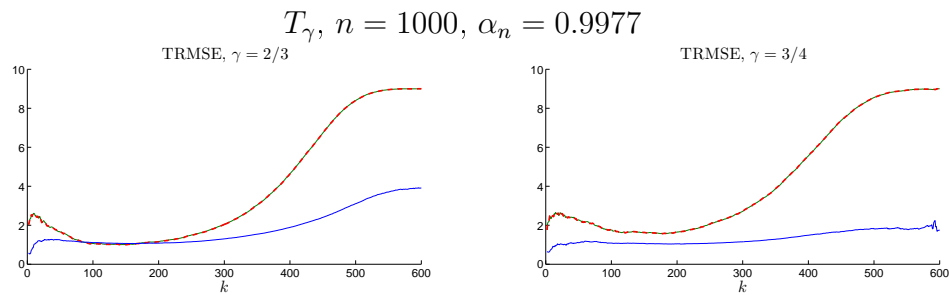


Abbildung A.18 – TRMSE der normierten Expektilschätzer $\hat{\xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}(k)/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilungen $T_{2/3}$ (links) und $T_{3/4}$ (rechts).

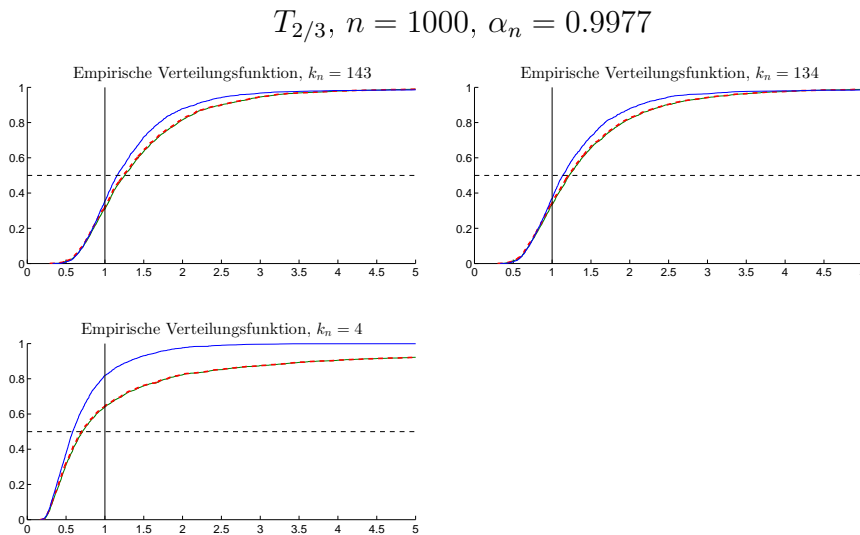


Abbildung A.19 – Empirische Verteilungsfunktionen von $\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für verschiedene k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{2/3}$.

$$T_{3/4}, n = 1000, \alpha_n = 0.9977$$

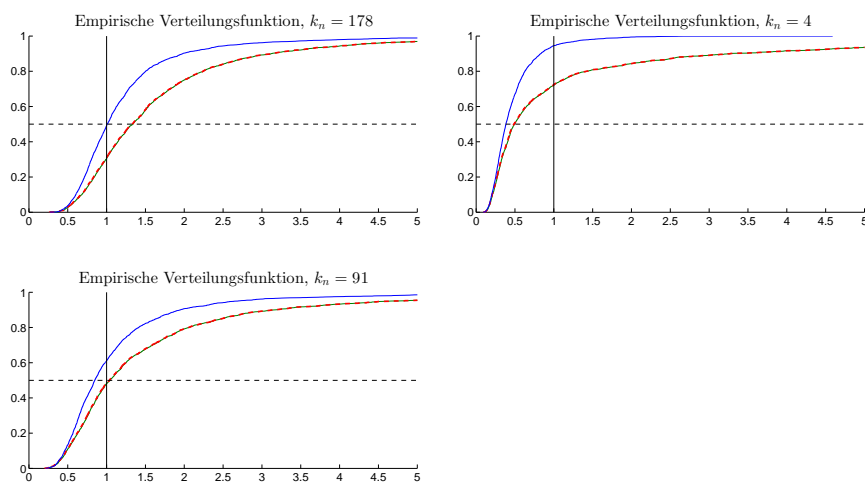


Abbildung A.20 – Empirische Verteilungsfunktionen von $\hat{\xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (grüne Linie), $\hat{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (gestrichelte rote Linie) und $\tilde{\Xi}_{\alpha_n}/\xi_{\alpha_n}$ (blaue Linie) für verschiedene k_n und $n = 1000$ Beobachtungen der positiven Student-t-Verteilung $T_{3/4}$.

Ausblick

Dynamische Risikomaße

Bislang wurden Risikomaße betrachtet, die zu einem gewissen Zeitpunkt ausgewertet werden. Üblicherweise gewinnt man mit der Zeit immer mehr Informationen, die in die Risikomessung möglichst mit einfließen sollten. Man geht also dazu über, die Risikomaße von der Zeit abhängig zu machen.

Für die endliche Indexmenge $T := \{0, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{M}_t(\mathbb{R})$, $t \in T$, der Raum der \mathcal{F}_t -messbaren reellwertigen Funktionen. Die Familie $(\rho_t)_{t \in T}$ von Abbildungen

$$\rho_t: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\mathbb{R})$$

heißt dynamisches Risikomaß, falls ρ_t für jedes $t \in T$ gewisse Monotonie- und Translationsinvarianzeigenschaften erfüllt (vgl. [KW12, Def. 2.15, Seiten 56 f.]). Es gibt dynamische Risikomaße, die nur vom Tail der Verteilung (Extrembereich der Verteilung) abhängen. Beispiele sind der dynamische Value at Risk (dVaR) [KW12, Def. 2.17, Theorem 2.6, Seiten 57 f.] und der dynamische Expected Shortfall (dES) [KW12, Def. 2.18, Theorem 2.7, Seite 59 f.].

Es ist zu beachten, dass die Neubewertung des Risikos in einem gewissen Sinne zeitkonsistent geschehen sollte. Das bedeutet vereinfacht gesagt, dass wenn ein Risiko X zu einem zukünftigen Zeitpunkt größer bewertet wird als ein Risiko Y , dass dies auch in der Zwischenzeit der Fall sein sollte. Eine exakte Definition der Zeitkonsistenz findet man in [ADE⁺07]. Kriele und Wolf [KW12, Bsp. 2.8, Theorem 2.9, Seiten 62 f.] zeigten, dass der dES im Gegensatz zum dVaR tatsächlich zeitkonsistent ist.

Mögliche Fragestellungen

Da man im Zeitverlauf auf immer mehr Informationen zurückgreifen kann, basieren die verschiedenen Risikomaße ρ_t , $t \in T$, im Regelfall nicht auf der gleichen Anzahl an Beobachtungen. Daher

kann nicht davon ausgegangen werden, dass sich das in Kapitel 3 beschriebene Verfahren mittels empirischer Schätzer ohne Modifikation zeitkonsistent übertragen lässt. Eine Fragestellung ist, ob das einfache Ignorieren neu hinzukommender Daten zur Zeitkonsistenz führt. Denkbar ist auch, sich einem schwächeren Begriff der Zeitkonsistenz zu bedienen, wonach die Bedingung nur noch mit großer Wahrscheinlichkeit erfüllt sein muss. Eine wichtige Frage ist dann, inwiefern das Schätzverfahren angepasst werden müsste, damit zumindest die schwache Zeitkonsistenz resultiert.

Tabellenverzeichnis

4.1	Zusammenstellung der möglichen Konvergenzraten und Grenzverteilungen des relativen stochastischen Fehlers	39
4.2	Zusammenstellung der Kombinationsmöglichkeiten von $\hat{\mu}_n$ und k_n	42
4.3	RMSE und Bias für die Fréchet-Verteilung	54
4.4	RMSE und Bias für die Pareto-Verteilung	54
4.5	RMSE und Bias für die Student-t-Verteilung	55
4.6	TRMSE für die Fréchet-Verteilung	58
4.7	RMSE und Bias für die Fréchet-Verteilung für $\gamma \in \{2/3, 3/4\}$	58
4.8	Parameterkonstellationen der GARCH(1,1)-Zeitreihe	75
4.9	Approximiertes Expektil und empirische Standardabweichung für die GARCH(1,1)-Zeitreihe	76
4.10	RMSE und Bias der GARCH(1,1)-Zeitreihe	76
4.11	Approximiertes Expektil und empirische Standardabweichung für die MA(1)-Zeitreihe	80
4.12	RMSE und Bias der MA(1)-Zeitreihe	81
A.1	TRMSE für die Pareto-Verteilung	161
A.2	TRMSE für die positive Student-t-Verteilung	161

Abbildungsverzeichnis

4.4.1	RMSE Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$ mit $n = 100$	60
4.4.2	QQ-Plot Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$ mit $n = 100$	60
4.4.3	RMSE Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$ mit $n = 1000$	61
4.4.4	QQ-Plot Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$ mit $n = 1000$	61
4.4.5	RMSE Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/3}$ mit $n = 100$	62
4.4.6	QQ-Plot Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/3}$ mit $n = 100$	62
4.4.7	RMSE Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/3}$ mit $n = 1000$	63
4.4.8	QQ-Plot Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/3}$ mit $n = 1000$	63
4.4.9	RMSE Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$ mit $n = 100$	64
4.4.10	QQ-Plot Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$ mit $n = 100$	64
4.4.11	RMSE Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$ mit $n = 1000$	65
4.4.12	QQ-Plot Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$ mit $n = 1000$	65
4.4.13	RMSE Pareto-Verteilung $p_{1/10}$ mit $n = 100$	66
4.4.14	QQ-Plot Pareto-Verteilung $p_{1/10}$ mit $n = 100$	66
4.4.15	RMSE Pareto-Verteilung $p_{1/10}$ mit $n = 1000$	67
4.4.16	QQ-Plot Pareto-Verteilung $p_{1/10}$ mit $n = 1000$	67
4.4.17	RMSE positive Student-t-Verteilung $T_{1/10}$ mit $n = 1000$	68
4.4.18	QQ-Plot positive Student-t-Verteilung $T_{1/10}$ mit $n = 1000$	68
4.4.19	Vergleich von $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\xi}_{\alpha_n}^{\hat{T}r_n}$ unter der Pareto-Verteilung	69
4.4.20	QQ-Plot Gegenüberstellung für die Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/10}$ mit $n = 1000$	69
4.4.21	Gegenüberstellung von $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ unter der Fréchet-Verteilung	70
4.4.22	Gegenüberstellung von $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ unter der Pareto-Verteilung	70
4.4.23	Gegenüberstellung von $\hat{\xi}_{\alpha_n}$ und $\hat{\Xi}_{\alpha_n}$ unter der positiven Student-t-Verteilung	71
4.4.24	TRMSE für die Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$ mit $n = 1000$	71
4.4.25	Empirische Verteilungsfunktion unter der Fréchet-Verteilung $\Phi_{2/3}$ mit $n = 1000$	72
4.4.26	Empirische Verteilungsfunktion unter der Fréchet-Verteilung $\Phi_{3/4}$ mit $n = 1000$	72

4.4.27	RMSE Fréchet-Verteilung $\Phi_{2/3}$ und $\Phi_{3/4}$ mit $n = 1000$	73
4.4.28	QQ-Plot Fréchet-Verteilung $\Phi_{2/3}$ mit $n = 1000$	73
4.4.29	QQ-Plot Fréchet-Verteilung $\Phi_{3/4}$ mit $n = 1000$	74
4.4.30	GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0, 1)$ -Innovationen, $\gamma = 1/10$ und $n = 1000$	77
4.4.31	QQ-Plot GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0, 1)$ -Innovationen, $\gamma = 1/10$ und $n = 1000$	77
4.4.32	GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0, 1)$ -Innovationen, $\gamma = 1/3$ und $n = 1000$	78
4.4.33	QQ-Plot GARCH(1,1) mit $\mathcal{N}(0, 1)$ -Innovationen, $\gamma = 1/3$ und $n = 1000$	78
4.4.34	MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/10}$ -Innovationen für $n = 1000$	82
4.4.35	QQ-Plot MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/10}$ -Innovationen für $n = 1000$	82
4.4.36	MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/3}$ -Innovationen für $n = 1000$	83
4.4.37	QQ-Plot MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/3}$ -Innovationen für $n = 1000$	83
4.4.38	MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/2}$ -Innovationen für $n = 1000$	84
4.4.39	QQ-Plot MA(1)-Zeitreihe mit $p_{1/2}$ -Innovationen für $n = 1000$	84
A.1	RMSE Pareto-Verteilung $p_{1/3}$ mit $n = 100$	154
A.2	QQ-Plot Pareto-Verteilung $p_{1/3}$ mit $n = 100$	154
A.3	RMSE Pareto-Verteilung $p_{1/3}$ mit $n = 100$	155
A.4	QQ-Plot Pareto-Verteilung $p_{1/2}$ mit $n = 100$	155
A.5	RMSE Pareto-Verteilung $p_{1/3}$ mit $n = 1000$	156
A.6	QQ-Plot Pareto-Verteilung $p_{1/3}$ mit $n = 1000$	156
A.7	RMSE Pareto-Verteilung $p_{1/2}$ mit $n = 1000$	157
A.8	QQ-Plot Pareto-Verteilung $p_{1/2}$ mit $n = 1000$	157
A.9	RMSE positive Student-t-Verteilung $T_{1/10}$ mit $n = 100$	158
A.10	QQ-Plot positive Student-t-Verteilung $T_{1/10}$ mit $n = 100$	158
A.11	RMSE positive Student-t-Verteilung $T_{1/3}$ mit $n = 1000$	159
A.12	QQ-Plot positive Student-t-Verteilung $T_{1/3}$ mit $n = 1000$	159
A.13	RMSE positive Student-t-Verteilung $T_{1/2}$ mit $n = 1000$	160
A.14	QQ-Plot positive Student-t-Verteilung $T_{1/2}$ mit $n = 1000$	160
A.15	TRMSE für die Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$ mit $n = 1000$	161
A.16	Empirische Verteilungsfunktion unter der Pareto-Verteilung $p_{2/3}$ mit $n = 1000$	162
A.17	Empirische Verteilungsfunktion unter der Pareto-Verteilung $p_{3/4}$ mit $n = 1000$	162
A.18	TRMSE für die Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/2}$ mit $n = 1000$	163
A.19	Empirische Verteilungsfunktion unter der positiven Student-t-Verteilung $T_{2/3}$ mit $n = 1000$	163

A.20 Empirische Verteilungsfunktion unter der positiven Student-t-Verteilung $T_{3/4}$
mit $n = 1000$ 164

Literaturverzeichnis

- [ADE⁺07] ARTZNER, Philippe ; DELBEAN, Freddy ; EBER, Jean-Marc ; HEATH, David ; KU, Hyejin: Coherent Multiperiod Risk Adjusted Values and Bellman's Principle. In: *Annals of Operations Research* 152 (2007), March, Nr. 1, S. 5–22
- [ADEH99] ARTZNER, P. ; DELBEAN, F. ; EBER, J.M. ; HEATH, D.: Coherent measures of risk. In: *Math. Financ.* 9 (1999), S. 203–228
- [Adl90] ADLER, Robert J.: *An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes*. Bd. 12. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes-Monograph Series, 1990
- [BDM02] BASRAK, Bojan ; DAVIS, Richard A. ; MIKOSCH, Thomas: Regular variation of GARCH processes. In: *Stochastic Processes and their Applications* 99 (2002), S. 95–115
- [BGT89] BINGHAM, N.H. ; GOLDIE, C.M. ; TEUGELS, J.L.: *Regular Variation*. Cambridge University Press, 1989 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications Nr. 1)
- [BKMG14] BELLINI, F. ; KLAR, B. ; MÜLLER, A. ; GIANIN, E. R.: Generalized quantiles as risk measures. In: *Insurance: Mathematics and Economics* (2014)
- [CHM86] CSÖRGÖ, Sandor ; HORVATH, Lajos ; MASON, Davis M.: What Portion of The Sample Makes a Partial Sum Asymptotic Stable or Normal? In: *Probab. Th. Rel. Fields* 72 (1986), S. 1–16
- [CT07] CAI, Jun ; TAN, Ken S.: Optimal Retention for a Stop-Loss Reinsurance under the VaR and CTE Risk Measures. In: *Astin Bulletin* 37 (2007), S. 93–112
- [DFH04] DREES, Holger ; FERREIRA, Ana ; HAAN, Laurens de: On Maximum Likelihood Estimation of the Extreme Value Index. In: *The Annals of Applied Probability* 14 (2004), Nr. 3, S. 1179–1201

- [DGS18] DAOUIA, Abdelaati ; GIRARD, Stéphane ; STUPFLER, Gilles: Estimation of Tail Risk based on Extreme Expectiles. In: *J. R. Statist. Soc. B* 80 (2018), Nr. 2, S. 263–292
- [DH95] DAVIS, Richard A. ; HSING, Tailen: Point Process and Partial Sum Convergence for Weakly Dependent Random Variables with Infinite Variance. In: *The Annals of Probability* 23 (1995), Nr. 2, S. 879–917
- [DHF06] DE HAAN, Laurens ; FERREIRA, Ana: *Extreme value theory: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2006
- [DM98] DATTA, Somnath ; MCCORMICK, William P.: Inference for the tail parameters of a linear process with heavy tail innovations. In: *Ann. Inst. Statist. Math.* 50 (1998), Nr. 2, S. 337–359
- [Dou94] DOUKHAN, Paul: *Mixing: Properties and Examples*. Springer-Verlag New York, 1994
- [Dre98a] DREES, Holger: A general class of estimators of the extreme value index. In: *Journal of Statistical Planning and Inference* 66 (1998), S. 95–112
- [Dre98b] DREES, Holger: On Smooth Statistical Tail Functionals. In: *Scandinavian Journal of Statistics* 25 (1998), S. 187–210
- [Dre00] DREES, Holger: Weighted approximations of tail processes for β -mixing random variables. In: *The Annals of Applied Probability* 10 (2000), Nr. 4, S. 1274–1301
- [Dre03] DREES, Holger: Extreme quantile estimation for dependent data, with applications to finance. In: *Bernoulli* 9 (2003), Nr. 1, S. 617–657
- [Gil89] GILL, R. D.: Non- and Semi-parametric Maximum Likelihood Estimators and the von Mises Method (Part 1). 16 (1989), Nr. 2, S. 97–128
- [HKS87] HAHN, M.G. ; KUELBS, J. ; SAMUR, J.D.: Asymptotic Normality of Trimmed Sums of Φ -mixing Random Variables. In: *The Annals of Probability* 15 (1987), Nr. 4, S. 1395–1418
- [Hog18] HOGA, Yannick: Extreme Conditional Tail Moment Estimation under Serial Dependence. In: *Journal of Financial Econometrics* (2018), S. 1–29

- [KW12] KRIELE, Marcus ; WOLF, Jochen: *Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen*. Springer, 2012
- [LPS08] LAMBERT, N.S. ; PENNOCK, D.M. ; SHOHAM, Y.: Eliciting Properties of Probability Distributions. In: *Proceedings of the 9th ACM Conference on Electronic Commerce Chicago Illinois (2008)*, July 8-12, S. 749–752, 757. – extended abstract
- [MGG14] METHNI, J. e. ; GARDES, L. ; GIRARD, S.: Non-parametric Estimation of Extreme Risk Measures from Conditional Heavy-tailed Distributions. In: *Scandinavian Journal of Statistics (2014)*
- [NP87] NEWEY, W. ; POWELL, J.: Asymmetric least squares estimation and testing. In: *Econometrica* 55 (1987), S. 819–847
- [Roo95] ROOTZÉN, Holger: The tail empirical process for stationary sequences. In: *Preprint, Chalmers University Gothenburg. Available at www.math.chalmers.se/Stat/Research/Preprints/ms95-hr.ps* (1995)
- [RU00] ROCKAFELLAR, R. T. ; URYASEV, Stanislav: Optimization of conditional value-at-risk. In: *The Journal of Risk* 2 (2000), Nr. 3, S. 21–41
- [SW86] SHORACK, G. ; WELLNER, J.: *Empirical Processes with Applications to Statistics*. Wiley, 1986
- [Vaa98] VAART, A.W. van d.: *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, 1998
- [Val05] VALDEZ, E. A.: Tail conditional variance for elliptically contoured distributions. In: *Belg. Actuar. Bull.* 5 (2005), S. 26–36