

Analyse extremaler Abhängigkeiten bei Zeitreihen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Miran Knežević

Hamburg, 2020

Folgende Gutachter empfehlen die Annahme der Dissertation:

Prof. Dr. Holger Drees

Prof. Dr. Axel Bücher

Vorsitzender der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Jens Struckmeier

Tag der Disputation: 22. Oktober 2020

Danksagung

Ohne die Unterstützung bestimmter Menschen würde die vorliegende Dissertation in dieser Form nicht existieren, weshalb ich mich an dieser Stelle bei ebenjenen Menschen aus tiefsten Herzen bedanken möchte.

An erster Stelle möchte ich meinem Betreuer und Erstgutachter Prof. Dr. Holger Drees für die erstklassige Betreuung danken. Ich hatte riesiges Glück, dass ich mit Holger einen Betreuer an meiner Seite hatte, der bei spontanen Anfragen stets den „einen Moment“ für mich Zeit hatte - wohl wissend, dass dieser Moment auch über eine Stunde andauern kann. Dieser fachliche Rückhalt hat viele zermürbende Arbeitstage erleichtert und zugleich zahlreiche Diskussionen ermöglicht, die die Qualität dieser Dissertation maßgeblich bestimmt haben. Hierfür sowie für die tolle persönliche Betreuung danke ich Dir, Holger!

Meinem Zweitgutachter Prof. Dr. Axel Bücher möchte ich nicht nur für das Erstellen des Zweitgutachtens herzlich danken, sondern insbesondere für die Einladung ins Oberseminar der speziellen stochastischen Problemen an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf. Dies war eine Erfahrung, die ich nicht missen möchte.

Allen Mitarbeitern des Bereichs Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse der Universität Hamburg danke ich für ihre außerordentliche Hilfsbereitschaft. Hier stand mir wirklich jede Tür für fachliche wie auch private Gespräche weit offen. Dabei danke ich vor allem meinen Doktorgeschwistern für die grandiosen Erlebnisse, die wir sowohl innerhalb als auch außerhalb des Geomatikums hatten, aber auch für die vielen fachlich anregenden Gespräche. Hier sind namentlich zu nennen: Dr. Daniel Ebel, Florian Hildebrandt, Dr. Maria Mohr, Maximilian Fritz Steffen, Dr. Nick Kloodt, Rui Wu und Sebastian Neblung sowie meine ehemaligen Kommilitonen Arne Schulz und Tobias Moser.

Meinen größten Dank möchte ich meiner Familie und Freundin aussprechen. Ihr habt mir während der Promotion immer die Zuversicht und den Mut gegeben, dass mir diese gelingen wird. Euch in meinem Leben als moralische Stütze zu haben, macht mich unglaublich glücklich. Wenn ich auf die Vorbereitung für die Disputation zurückblicke, habt Ihr mir immens viel Kraft für den Endspurt meiner Promotion geschenkt. Hierfür danke ich Euch von ganzem Herzen! Hvala Mirni, Ano, Maki und Gonci.

Zusammenfassung

Ein wichtiger Aspekt für den Umgang mit extremen zeitabhängigen Zufallsereignissen ist die Kenntnis über deren Abhängigkeitsstruktur in den Extrembereichen. Die extremale Abhängigkeitsstruktur von strikt stationären regulär variierenden Zeitreihen kann durch den sogenannten Spektralprozess beschrieben werden. Davis et al. (2018) haben zwei Schätzer für die eindimensionalen Marginalverteilungen dieses Prozesses vorgeschlagen, welche hauptsächlich auf Beobachtungen beruhen, die eine hohe deterministische Schranke überschreiten, und deren asymptotisches Verhalten analysiert. Die Höhe dieser deterministischen Schranken ist von der eindimensionalen Marginalverteilung der zugrunde liegenden Zeitreihe abhängig, die in der Praxis üblicherweise unbekannt ist. Aus diesem Grund werden zufällige Schranken verwendet, die sich anhand der zugrunde liegenden Stichprobe bestimmen lassen wie beispielsweise Ordnungsstatistiken. Im zweiten Kapitel dieser Dissertation wurde gezeigt, dass das asymptotische Verhalten der beiden Schätzer sich nicht verändert, wenn zufällige Schranken anstelle von deterministischen Schranken verwendet werden. Dieser Zusammenhang wird insbesondere in einer Simulationsstudie bei endlichem Stichprobenumfang bestätigt, wobei die Versionen der beiden Schätzer, die zufällige Schranken verwenden, etwas besser abschneiden.

Im Hinblick auf die Konstruktion geeigneter Konfidenzbereiche für die Verteilungsfunktion der eindimensionalen Marginalverteilung des Spektralprozesses haben Davis et al. (2018) spezielle Bootstrap-Versionen dieser Schätzer herangezogen und deren Konsistenz bei Verwendung von deterministischen Schranken bewiesen. Im dritten Kapitel dieser Dissertation wurde nachgewiesen, dass ebenjene Bootstrap-Versionen der Schätzer, die zufällige Schranken verwenden, dasselbe asymptotische Verhalten aufweisen.

Im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit der zugrunde liegenden Zeitreihe ist der Spektralprozess wenig informativ. Das stochastische Verhalten der zweidimensionalen Marginalverteilungen in den Extrembereichen kann jedoch mit Hilfe eines speziellen Maßes, das aus einer Regularitätsannahme in diesen Extrembereichen hervorgeht, erfasst werden. Dieser Ansatz wurde in dieser Dissertation im Kontext von bivariaten strikt stationären Zeitreihen statistisch untersucht. Nach Konstruktion eines geeigneten Schätzers für das Grenzmaß konnte dessen asymptotische Normalität im sechsten Kapitel gezeigt werden.

Im Gegensatz zum Spektralprozess hält das Grenzmaß neben dem extremalen Abhängigkeitsverhalten insbesondere das stochastische Verhalten der eindimensionalen Marginalverteilungen jener zweidimensionalen Zufallsvektoren (auch Tailverhalten genannt) fest. Werden diese Zufallsvektoren zunächst mit Hilfe ihrer eindimensionalen Marginalverteilungen geeignet standardisiert, erfasst das zugehörige Grenzmaß das extremale Abhängigkeitsverhalten losgelöst vom Tailverhalten. Da in der Praxis die eindimensionalen Marginalverteilungen für gewöhnlich unbekannt sind,

wird eine empirische Variante dieser Marginalstandardisierung für die zugrunde liegenden Beobachtungen angewandt, die eine Rangtransformation darstellt. Dieses Vorgehen verursacht jedoch beim Schätzen des Grenzmaßes einen zusätzlichen Schätzfehler. Im siebten Kapitel dieser Dissertation wurde gezeigt, dass der Schätzer für das Grenzmaß angewandt auf die rangtransformierten Beobachtungen asymptotisch normal ist, wobei der Schätzfehler, der durch die Verwendung von rangtransformierten Beobachtungen entsteht, nur im Fall der asymptotischen Abhängigkeit in die Grenzverteilung eingeht.

Die Regularitätsannahme in den Extrembereichen der Verteilung der zweidimensionalen Zufallsvektoren ermöglicht insbesondere die Konstruktion von Schätzern für Überschreitungswahrscheinlichkeiten, in denen beide Koordinaten des Zufallsvektoren jeweils eine hohe Schranke überschreiten. Diese Schätzer setzen sich dann unter anderem aus Schätzern für die Verteilungsfunktionen der eindimensionalen Marginalverteilungen zusammen. Dabei ist die Schätzmethode im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit deutlich aufwendiger, da eine zusätzliche Parameterschätzung erforderlich ist. Im achten Kapitel wurde das asymptotische Verhalten der Schätzer für Überschreitungswahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens jener Schätzer, die für die Schätzung herangezogen werden, bestimmt.

Abstract

An important aspect for dealing with extreme events of stochastic processes is the knowledge of their dependence structure in extreme regions. The extremal dependence structure of strictly stationary regularly varying time series can be described by the so-called spectral tail process. Davis et al. (2018) have proposed two estimators for the one-dimensional marginal distributions of this process, which are mainly based on observations that exceed a high deterministic threshold, and analyzed their asymptotic behavior. However, in order to choose deterministic thresholds appropriately, knowledge about the one-dimensional marginal distribution of the underlying time series is needed. Since those marginal distributions are usually unknown in practice, versions of these estimators are applied which use random thresholds like intermediate order statistics. In the second chapter of this thesis, it is shown that the asymptotic behavior of the two estimators does not change if random thresholds are used instead of deterministic ones. This relationship is also corroborated in a simulation study, but the modified estimators which use random thresholds often perform a bit better for finite samples.

In order to construct suitable confidence regions for the distribution functions of the spectral tail process, Davis et al. (2018) proved the consistency of certain bootstrap versions of these two estimators using deterministic thresholds. In the third chapter of this thesis, it is shown that the bootstrap versions of the estimators that use random thresholds have the same asymptotic behavior.

In the case of asymptotic independence of the underlying time series, the spectral tail process is not informative at all. However, in extreme regions, the stochastic behavior of two-dimensional marginal distributions of the underlying time series can be captured by a certain measure that results from a regularity assumption in these extreme regions. This approach was investigated in this thesis in the framework of bivariate strictly stationary time series. After constructing a suitable estimator for the corresponding limit measure, its asymptotic normality is shown in the sixth chapter.

In contrast to the spectral process, the limit measure captures also the stochastic behavior of the one-dimensional marginal distributions of those two-dimensional random vectors in its extreme regions (also called tail behavior). If these random vectors are first appropriately standardized with the aid of their one-dimensional marginal distributions, then the corresponding limit measure captures the extremal dependence behavior without its tail behavior. Since one-dimensional marginal distributions are usually unknown in practice, an empirical version of this marginal standardization is used for the underlying observations. This procedure causes an additional estimation error. In the seventh chapter of this thesis, it is shown that the estimator of the limit measure applied to the empirically standardized observations is asymptotically normal,

whereby the estimation error, which arises from the use of empirically standardized observations, only occurs in the case of asymptotic dependence.

The assumption of regularity in extreme regions also enables the construction of estimators for probabilities of extreme events, where both coordinates of the two-dimensional random vectors exceed a high threshold. These estimators include also estimators for the distribution functions of the one-dimensional marginal distributions. In addition, in the case of asymptotic independence, the estimation method is more complex since an additional parameter estimation is needed. In the eighth chapter, the asymptotic behavior of the estimators for probabilities of extreme events is determined taking into account the possible asymptotic behavior of those estimators which are used in addition for the estimation.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	XI
Abkürzungsverzeichnis	XIII
Abbildungsverzeichnis	XIV
Einleitung	1
I. Peak-over-Threshold-Schätzer für Spektralprozesse	7
Aufbau von Teil I	9
1. Tail- und Spektralprozess	11
2. Modifizierte Forward- und Backward-Schätzer	19
2.1. Asymptotisches Verhalten der modifizierten Schätzer	22
2.1.1. Der praxisrelevante Fall: unbekanntes α	30
2.2. Beispiel: Stochastische Rekurrenzgleichungen	32
2.3. Beweise	38
2.3.1. Beweis von Proposition 2.1	38
2.3.2. Beweis von Addendum 2.2	67
2.3.3. Beweis von Theorem 2.4	67
2.3.4. Beweis von Lemma 2.5	73
2.3.5. Beweis von Lemma 2.7	74
2.3.6. Beweis von Theorem 2.8	77
3. Multiplier-Block-Bootstrap	89
3.1. Asymptotische Resultate	89
3.2. Konfidenzbereiche für $F^{(\Theta_t)}$	92
3.3. Beweise	93
3.3.1. Beweis von Proposition 3.1	93
3.3.2. Beweis von Theorem 3.2	94
3.3.3. Beweis von Theorem 3.3	111

4. Simulationen	115
4.1. Zeitreihenmodelle	115
4.1.1. GARCH(1,1)-Modell	116
4.1.2. Copula-Markov-Modell	117
4.2. Simulationsergebnisse	118
II. Bivariate Tail-Schätzung für Zeitreihen	125
Aufbau von Teil II	127
5. Reguläre Variation auf $(0, \infty)^d$	129
6. Schätzer für $\nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))$	137
6.1. Asymptotische Resultate	137
6.2. Der Spezialfall: $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}) = (X_0, X_h)$	140
6.2.1. SV-Modelle mit Gamma-Typ-verteilten Log-Volatilitäten	142
6.3. Beweise	146
6.3.1. Beweis von Proposition 6.1	147
6.3.2. Beweis von Theorem 6.2	157
6.3.3. Beweis von Theorem 6.4	158
7. Schätzer für $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$	163
7.1. Asymptotische Resultate im praxisrelevanten Fall	166
7.1.1. Asymptotische Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$	167
7.1.2. Asymptotische Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$	172
7.2. Der Spezialfall: $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) = (X_0^*, X_h^*)$	177
7.3. Beweise	179
7.3.1. Beweis von Lemma 7.1	180
7.3.2. Beweis von Lemma 7.3	181
7.3.3. Beweis von Proposition 7.4	182
7.3.4. Beweis von Lemma 7.5	188
7.3.5. Beweis von Theorem 7.7	190
7.3.6. Beweis von Proposition 7.9	198
7.3.7. Beweis von Lemma 7.10	209
7.3.8. Beweis von Theorem 7.11	214
8. Schätzer für Überschreitungswahrscheinlichkeiten von hohen Schranken	227
8.1. Asymptotisches Verhalten von $\hat{p}_n, \hat{\eta}_n$	230
8.2. Wahl von c_n	236
8.3. Der Spezialfall: $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}) = (X_0, X_h)$	237
8.3.1. Konfidenzbereiche für $p_n^{(h)}$ im SV-Modell	238
8.4. Beweis von Theorem 8.1	240

Anhang	259
A. Grundlegende Theorie und Bedingungen	259
A.1. Empirische Prozess von Cluster-Funktionalen	259
A.2. Voraussetzungen für Theorem 8.1	265
B. Tabellen zur Simulationsstudie aus Kapitel 4	267
C. Weitere Simulationsergebnisse aus Kapitel 4	268
Ausblick	279
Literaturverzeichnis	281
Vorveröffentlichungen	285
Eidesstattliche Versicherung	287

Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\bar{\mathbb{R}}$	Menge der reellen Zahlen einschließlich $-\infty$ und ∞
$\#A$	Mächtigkeit der Menge A
$\mathbb{B}(M)$	Borel- σ -Algebra der Menge M
$l^\infty(M)$	Menge aller gleichmäßig beschränkten Funktionen auf M , 260
$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion der Menge A
$\mathcal{L}(X)$	Verteilung der Zufallsgröße X
$\mathcal{L}(X \mid B)$	bedingte Verteilung der Zufallsgröße X unter dem Ereignis B
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
o, O	kleines und großes Landau-Symbol
o_P, O_P	kleines und großes stochastisches Landau-Symbol
\sim	asymptotisch äquivalent
\perp	asymptotisch unabhängig, 133
$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$	univariate strikt stationäre Zeitreihe
$(X_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$	marginaltransformierte Version von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, 177
$(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$	Tailprozess, 15
$(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$	Spektralprozess, 16
$(\Theta_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$	marginaltransformierte Version von $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, 177
$(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$	bivariate strikt stationäre Zeitreihe
$(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})_{t \in \mathbb{Z}}$	marginaltransformierte Version von $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$, 163
$(V_t^{(n,1)}, V_t^{(n,2)})_{t \in \mathbb{Z}}$	rangtransformierte Version von $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$, 166
$\tilde{Z}_n(\psi)$	standardisierte Tail-Array-Sum, 26 , 138 , 264
$F^{(\Theta_t)}, \bar{F}^{(\Theta_t)}$	Verteilungs- und Survivalfunktion von Θ_t
S_n	Quotient der zufälligen und deterministischen Schranke, 21

\tilde{S}_n	Anzahl der rangtransformierten Überschreitungen, 167
α	Index der regulären Variation, 11, 13, 15, 130
η	Koeffizient der Tail-Abhängigkeit, 164
μ	Grenzmaß der multivariaten regulären Variation, 13
ν	Grenzmaß der regulären Variation auf $(0, \infty)^d$, 129
ν_0	Grenzmaß der regulären Variation von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ auf $(0, \infty)^2$
ν_0^*	Grenzmaß der regulären Variation von $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auf $(0, \infty)^2$
$\nu_0^{(h)}$	Grenzmaß der regulären Variation von (X_0, X_h) auf $(0, \infty)^2$
$\nu_0^{(*,h)}$	Grenzmaß der regulären Variation von (X_0^*, X_h^*) auf $(0, \infty)^2$
p_n	Überschreitungswahrscheinlichkeit von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$, 230
$p_n^{(h)}$	Überschreitungswahrscheinlichkeit von (X_0, X_h) , 237
$\hat{\alpha}_n$	Schätzer für α , 30
$\hat{\eta}_n$	Schätzer für η , 229
$\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}$	modifizierter Forward-Schätzer, 21
$\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}$	modifizierter Backward-Schätzer bei bekannten α , 21
$\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(\hat{b}, \Theta_t)}$	modifizierter Backward-Schätzer bei unbekanntem α , 30
$\hat{F}_n^{*(f, \Theta_t)}$	Multiplier-Block-Bootstrap-Version von $\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}$, 91
$\hat{F}_n^{*(\hat{b}, \Theta_t)}$	Multiplier-Block-Bootstrap-Version von $\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(\hat{b}, \Theta_t)}$, 91
$\hat{\nu}_n$	Schätzer für ν_0 , 137
$\hat{\nu}_n^*$	Schätzer für ν_0^* , 165
$\hat{\nu}_n^{\text{tr}}$	Schätzer für ν_0^* , 166
$\hat{\nu}_n^{(h)}$	Schätzer für $\nu_0^{(h)}$, 141
$\hat{\nu}_n^{(\text{tr}, h)}$	Schätzer für $\nu_0^{(*, h)}$, 178
$\hat{p}_n, \hat{\eta}_n$	Schätzer für p_n , 230
$\hat{p}_n^{(h)}, \hat{\eta}_n^{(h)}$	Schätzer für $p_n^{(h)}$, 237

Abkürzungsverzeichnis

SFS	Survival-Forward-Schätzer, 115
SBS	Survival-Backward-Schätzer, 115
TQ	theoretisches Quantil
OS	Ordnungsstatistik
QQ-Plot	Quantile-Quantile-Plot
GARCH	generalized autoregressive conditional heteroscedasticity
nGARCH-Modell	GARCH-Modell mit standardnormalverteilten Residuen, 116
tGARCH-Modell	GARCH-Modell mit t -verteilten Residuen, 116
tCopula-Modell	Markov-Copula-Modell mit t -Copula, 117
gumCopula-Modell	Markov-Copula-Modell mit Gumbel-Hougaard-Copula, 117
SV-Modell	stochastisches Volatilitätsmodell

Abbildungsverzeichnis

4.1. nGARCH-Modell: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	119
4.2. nGARCH-Modell: Empirische Verteilungsfunktionen der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	121
4.3. nGARCH-Modell: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	122
4.4. tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	123
4.5. tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$: Vergleich der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	123
C.1. nGARCH-Modell: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	270
C.2. nGARCH-Modell: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	270
C.3. tGARCH-Modell: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	271
C.4. tGARCH-Modell: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	271
C.5. tGARCH-Modell: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	272
C.6. tGARCH-Modell: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	272
C.7. tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	273
C.8. tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	273
C.9. tCopula-Modell mit $\rho = 0,5$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	274
C.10. tCopula-Modell mit $\rho = 0,75$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	274
C.11. gumCopula-Modell mit $\theta = 1,2$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	275

C.12. gumCopula-Modell mit $\theta = 1, 5$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	275
C.13. gumCopula-Modell mit $\theta = 2$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	276
C.14. gumCopula-Modell mit $\theta = 2$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	276
C.15. gumCopula-Modell mit $\theta = 2$: QQ-Plot der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ bei Verwendung von OS versus TQ	277

Einleitung

In der Literatur zur Extremwerttheorie und -statistik ist die statistische Analyse des sogenannten *Tailverhaltens* von strikt stationären Zeitreihen bereits fest etabliert. Hierbei wird mit Hilfe von extremwerttheoretischen Methoden das stochastische Verhalten der eindimensionalen Marginalverteilungen in den Extrembereichen statistisch untersucht. In vielen Situationen ist es jedoch genauso wichtig, Abhängigkeiten zwischen extremen Beobachtungen zu verstehen. Besteht nämlich zwischen Exzedenten eine Abhängigkeit, so treten solche extremen Beobachtungen tendenziell gehäuft auf - in sogenannten *Clustern*. Diese Clusterbildung von extremen Ereignissen kann etwa an Finanzmärkten oder in der Hydrologie besonders problematisch sein. Beispielsweise stellen große Verluste von Finanzinvestitionen ein ernsthaftes Risiko dar, wenn diese innerhalb einer kurzen Zeitspanne auftreten. Ebenso können mehrere aufeinanderfolgende Tage mit starkem Niederschlag eher zu einem Erdbeben oder zu einer größeren Überschwemmung führen als ein einzelner Tag mit Starkregen, selbst wenn letzterer extremer ist. Trotz der praktischen Bedeutung sind deutlich weniger statistische Resultate über die Abhängigkeitsstruktur zwischen extremen Beobachtungen vorhanden als für die statistische Analyse des Tailverhaltens.

Um Abhängigkeitsstrukturen in extremen Regionen genau beschreiben zu können, führten Basrak und Segers (2009) den sogenannten *Tail- und Spektralprozess* für strikt stationäre Zeitreihen ein. Diese Prozesse existieren genau dann, wenn die endlich-dimensionalen Marginalverteilungen der zugrunde liegenden Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein bestimmtes reguläres Verhalten in den Extrembereichen aufweisen, welches als *reguläre Variation* bezeichnet wird. Der Tailprozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ einer zugrunde liegenden univariaten Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist dann definiert durch die schwachen Konvergenzen

$$\mathcal{L}(u^{-1}(X_s, \dots, X_t) \mid |X_0| > u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \mathcal{L}(Y_s, \dots, Y_t), \quad s \leq 0 \leq t,$$

wobei $\mathcal{L}(X)$ die Verteilung von X und $\mathcal{L}(X \mid B)$ die bedingte Verteilung von X gegeben das Ereignis B bezeichnet. Dieser Prozess beschreibt also, inwieweit eine extreme Beobachtung das stochastische Verhalten der vergangenen und künftigen Realisationen innerhalb der Extrembereiche beeinflusst. Dabei erfasst der Tailprozess sowohl das stochastische Verhalten der eindimensionalen Marginalverteilungen als auch das Abhängigkeitsverhalten in den Extrembereichen der zugrunde liegenden Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Wird der Tailprozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit Hilfe von $|Y_0|$ normiert, so ergibt sich der Spektralprozess $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}} := (Y_t/|Y_0|)_{t \in \mathbb{Z}}$, welcher einen Eindruck über das extremale Abhängigkeitsverhalten von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ liefert.

Davis et al. (2018) konstruierten zwei Schätzer für die Verteilungsfunktionen der eindimensionalen Marginalverteilungen des Spektralprozesses - die sogenannten *Forward-* und *Backward-*

Schätzer. (Dabei geht der ursprüngliche Ansatz zur Konstruktion ebenjener Schätzer auf die Arbeit von Drees et al. (2015) für Markov-Ketten zurück.) Beide Schätzer gehören zur Familie der *Peak-over-Threshold*-Schätzer. Das sind Schätzer, die hauptsächlich Beobachtungen berücksichtigen, die eine gewisse Schranke u_n überschreiten. Der Forward-Schätzer stellt eine empirische Version der zu schätzenden Verteilungsfunktion dar, während der Backward-Schätzer anhand der sogenannten *Time-Change-Formula* konstruiert wurde. Die Time-Change-Formula beschreibt dabei die spezielle Struktur der Verteilung des Spektralprozesses, mit deren Hilfe die Verteilungsfunktion von Θ_t als Grenzwert einer weiteren Folge aufgefasst werden kann.

Davis et al. (2018) haben unter geeigneten Annahmen gezeigt, dass beide Schätzer asymptotisch normal sind, wenn die deterministische Schranke u_n mit einer geeigneten Rate, die von der zugrunde liegenden eindimensionalen Marginalverteilung abhängt, ansteigt. Da üblicherweise Marginalverteilungen unbekannt sind, werden in der Praxis zufällige Schranken \hat{u}_n wie beispielsweise Ordnungsstatistiken (das sind der Größe nach sortierte Beobachtungen) verwendet, die asymptotisch äquivalent zu u_n sind, das heißt $\hat{u}_n/u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ in Wahrscheinlichkeit erfüllen. Beispielsweise wurden in den Simulationsstudien von Drees et al. (2015) und Davis et al. (2018) zum Performancevergleich der beiden Schätzer jeweils Ordnungsstatistiken als Schranken gewählt. Des Weiteren haben Davis et al. (2018) für die Konstruktion entsprechender Konfidenzbereiche sogenannte *Multiplier-Block-Bootstrap-Versionen* der Forward- und Backward-Schätzer herangezogen. Auch in diesem Zusammenhang wurde Konsistenz dieser Bootstrap-Versionen nur bei Verwendung von deterministischen Schranken nachgewiesen, während in den Simulationsstudien Ordnungsstatistiken als Schranken verwendet wurden. Dies zeigt, dass eine Lücke zwischen der mathematischen Analyse von Davis et al. (2018) und dem in der Praxis üblichen Verfahren zur Anwendung der Forward- und Backward-Schätzer existiert.

Im ersten Teil dieser Dissertation wird diese Lücke geschlossen. Während es plausibel ist, dass eine enge Beziehung zwischen der Verteilungen der unterschiedlichen Versionen der beiden Schätzer (bei Verwendung von deterministischen oder zufälligen Schranken) existiert, ist a priori nicht abzusehen, ob diese Versionen dieselbe Grenzverteilung besitzen. In einer vergleichbaren Situation haben Drees et al. (2004) das asymptotische Verhalten der Maximum-Likelihood-Schätzer für einen Skalenparameter und für den Extremwertindex in einem verallgemeinerten Pareto-Modell bei Verwendung von Ordnungsstatistik als Schranken untersucht. Diese Maximum-Likelihood-Schätzer wurden zuvor von Smith (1987) bei Verwendung deterministischer Schranken statistisch analysiert. Es hat sich herausgestellt, dass die Verwendung von Ordnungsstatistiken anstelle ebenjener deterministischen Schranken das asymptotische Verhalten des Schätzers des Extremwertindex nicht beeinflusst, die Grenzverteilungen des Schätzers für den Skalenparameter in beiden Ansätzen jedoch unterschiedlich sind.

Ein Sonderfall im Hinblick auf die statistische Analyse der extremalen Abhängigkeitsstruktur der Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist der Fall der asymptotischen Unabhängigkeit. Der zugehörige Spektralprozess $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist dann von trivialer Form, die zur Folge hat, dass Überschreitungen von extrem hohen Schranken u_n mit gegen 1 strebender Wahrscheinlichkeit vereinzelt auftreten. Für ein vertieftes Verständnis der Abhängigkeitsstruktur von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist es jedoch wichtig zu analysieren,

wie schnell die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Clustern von extremen Überschreitungen abnimmt. Ledford und Tawn (1996, 1997, 1998) haben diese Fragestellung durch die Konstruktion eines geeigneten Modells für unabhängig und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren erstmals untersucht.

Hierzu wird gefordert, dass die Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein weiteres reguläres Verhalten aufweist: Zu jedem $h \neq 0$ existiert ein nicht-entartetes Maß $\nu_0^{(h)}$ auf $((0, \infty)^2, \mathbb{B}((0, \infty)^2))$, so dass

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{u^{-1}(X_0, X_h) \in B\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} = \nu_0^{(h)}(B) < \infty \quad (1)$$

für alle Borelmengen $B \in \mathbb{B}((0, \infty)^2)$ gilt, die von $\{(x_1, x_2) \in [0, \infty)^2 \mid \min\{x_1, x_2\} = 0\}$ weg beschränkt sind und $\nu_0^{(h)}(\partial B) = 0$ erfüllen. Dabei heißt ein Maß entartet, wenn dessen gesamte Masse in einem Punkt konzentriert ist. Der Zufallsvektor (X_0, X_h) heißt dann *regulär variierend auf $(0, \infty)^2$* . Das Grenzmaß $\nu_0^{(h)}$ beschreibt das stochastische Verhalten von (X_0, X_h) in Extrembereichen, in denen beide Komponenten des Zufallsvektors (X_0, X_h) extrem sind. Im Gegensatz zum Spektralprozess $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist das Grenzmaß $\nu_0^{(h)}$ jedoch in der Lage, auch im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit mit steigender Schranke u abnehmende Abhängigkeiten zwischen Exzedenten über u , die h Zeitpunkte auseinander liegen, zu erfassen. Aus diesem Grund werden im zweiten Teil dieser Dissertation geeignete Schätzer für dieses Grenzmaß entwickelt und statistisch analysiert.

In einem anderen Ansatz haben Kulik und Soulier (2015) und Bilayi-Biakana et al. (2020) eine Verallgemeinerung der multivariaten regulären Variation betrachtet, die auch im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit die Definition eines nicht-trivialen Tailprozesses $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ für nichtnegative Lags erlaubt. Während dabei folglich die Prognose des zukünftigen Verhaltens der Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ nach einem bereits beobachteten extremen Wert im Vordergrund steht, fokussiert sich der durch das Modell von Ledford und Tawn motivierte Ansatz in Gleichung (1) auf die Analyse von gemeinsamen extremen Beobachtungen.

Allgemeiner kann auch eine bivariate strikt stationäre Zeitreihe $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ betrachtet werden, für die der Zufallsvektor $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß ν_0 ist. Ein Spezialfall ist dann $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)}) = (X_t, X_{t+h})$ mit Grenzmaß $\nu_0 = \nu_0^{(h)}$. Das Grenzmaß ν_0 erfasst neben dem extremalen Abhängigkeitsverhalten des Zufallsvektors $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ auch das stochastische Verhalten seiner eindimensionalen Randverteilungen in den Extrembereichen. Wie bei Copula-Modellen kann die extremale Abhängigkeitsstruktur von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ losgelöst von dem Tailverhalten untersucht werden. Zu diesem Zweck wird die Zeitreihe $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ mit Hilfe ihrer Marginalverteilungen transformiert:

$$(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)}) = \left(\frac{1}{1 - F_1(V_t^{(1)})}, \frac{1}{1 - F_2(V_t^{(2)})} \right), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

wobei F_i mit $i \in \{1, 2\}$ die Verteilungsfunktion von $V_t^{(i)}$ bezeichnet. Ist der bivariate Zufallsvektor $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ regulär variierend auf $(0, \infty)^2$, so unter schwachen Annahmen, die im Spezialfall $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}) = (X_0, X_h)$ trivialerweise erfüllt sind, auch $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$. Umgekehrt kann

der marginaltransformierte Zufallsvektor $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auch dann regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ sein, wenn dies auf $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ nicht zutrifft. Die Standardisierung der eindimensionalen Randverteilungen erweitert daher die betrachtete Modellklasse und ermöglicht so Anwendungen auf beispielsweise Umweltdaten, die in der Regel keine regulär variierenden Tails aufweisen. Aus der regulären Variation des marginaltransformierten Zufallsvektors $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auf $(0, \infty)^2$ lassen sich dann geeignete Schätzer für das entsprechende Grenzmaß konstruieren.

Im praxisrelevanten Fall, in dem F_1 und F_2 unbekannt sind, wird eine empirische Variante der Marginaltransformation in (2) verwendet, die auf den Rängen der zugrunde liegenden Stichprobe basiert. Dieses Vorgehen verursacht jedoch einen zusätzlichen Schätzfehler, der in den beiden Fällen asymptotischen Abhängigkeit und asymptotischen Unabhängigkeit unterschiedlich berücksichtigt werden muss. Des Weiteren beeinflusst diese Herangehensweise die statistische Analyse des Schätzers erheblich. Klassische Mischungsannahmen, die fordern, dass zeitlich weit auseinanderliegende Beobachtungen als nahezu unabhängig angesehen werden können, sind nämlich für rangtransformierte Daten nicht erfüllt, da die Ränge von der gesamten Stichprobe abhängen. Im zweiten Teil dieser Dissertation wird das asymptotische Verhalten der Schätzstatistik für die entsprechenden Grenzmaße jeweils basierend auf den originalen, marginaltransformierten und rangtransformierten Beobachtungen bestimmt.

Draisma et al. (2004) haben den Ansatz von Ledford und Tawn genutzt, um Schätzer für Überschreitungswahrscheinlichkeiten zu entwickeln, in denen beide Komponenten des Zufallsvektors $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ jeweils eine hohe Schranke überschreiten. Bei der stochastischen Modellierung dieser Schätzmethode wird der Umstand berücksichtigt, dass bei hoher Schrankenwahl für gewöhnlich nur wenige bis gar keine Beobachtungen diese Schranken überschreiten. Die zentrale Idee des Schätzverfahrens ist, das Regularitätsverhalten in den Extrembereichen der Verteilung von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ auszunutzen, um die jeweilige Schranken derart herabzusetzen, dass für die Schätzung zusätzliche Beobachtungen verwendet werden können. Hierfür werden Schätzer für die Marginalverteilungsfunktionen von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ sowie im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit ein Parameterschätzer für den sogenannten *Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit* benötigt. Draisma et al. (2004) haben bei Verwendung von unabhängig und identisch verteilten Beobachtungen gezeigt, dass die Schätzer für Überschreitungswahrscheinlichkeiten konsistent sind. Mit demselben Ansatz haben Drees und Müller (2008) einen weiteren Schätzer für jene Überschreitungswahrscheinlichkeiten konstruiert, der auf rangtransformierten Beobachtungen basiert, und dessen asymptotische Normalität nachgewiesen. Im zweiten Teil dieser Dissertation wird im Rahmen von bivariaten strikt stationären Zeitreihen das asymptotische Verhalten der entsprechenden Schätzer für Überschreitungswahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens jener Schätzer, die für die Schätzung herangezogen werden, bestimmt.

Die Arbeit ist in zwei Teile untergliedert. Im ersten Teil werden die Peak-over-Threshold-Schätzer von Davis et al. (2018) bei Verwendung von zufälligen Schranken statistisch untersucht. Im zweiten Teil wird eine bivariate Tail-Schätzung von strikt stationären Zeitreihen unternommen, um insbesondere den Fall der asymptotischen Unabhängigkeit statistisch bewerten zu können. Deren Aufbau wird jeweils mit Beginn der Teile präsentiert. Im Anhang ist neben ergänzen-

dem Material wie technischen Annahmen, Tabellen und Diagrammen auch grundlegende Theorie zu empirischen Prozessen von sogenannten *Cluster-Funktionalen* dargestellt, die die theoretische Grundlage für die Nachweise der nachfolgenden Grenzwertresultate bildet. Nach dem Anhang wird die Dissertation mit einem Ausblick zu einer möglichen Fortführung dieser Forschungsarbeit abgeschlossen.

Wenn im Folgenden nicht explizit genannt, sind Zufallsgrößen stets auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) definiert. Die Borel- σ -Algebra über einen topologischen Raum M ist mit $\mathbb{B}(M)$ gekennzeichnet. Für eine Teilmenge $B \subseteq M$ bezeichnet $\mathbf{1}_B$ die Indikatorfunktion von B und $B^c = M \setminus B$ die zugehörige Komplementmenge. Wenn eine oder beide σ -Algebren zu einer messbaren Abbildung nicht vorher genannt wurden, ist Messbarkeit bezüglich den entsprechenden Borel- σ -Algebren gemeint. Die Ziffer 0 bezeichnet neben der Zahl auch den Nullvektor für beliebige Dimensionen. Alle auftretenden Schätzer werden mit einem Dach $\hat{}$ gekennzeichnet.

Teil I.

Peak-over-Threshold-Schätzer für
Spektralprozesse

Aufbau von Teil I

Im ersten Kapitel wird das Konzept der regulären Variation für Funktionen, Zufallsvariablen und -vektoren sowie Zeitreihen eingeführt. Mit Hilfe dieses Begriffs werden die *Tail-* und *Spektralprozesse* von Basrak und Segers (2009) für strikt stationäre Zeitreihen hergeleitet und strukturelle Eigenschaften wie die *Time-Change-Formula* diskutiert.

Im zweiten Kapitel werden *modifizierte Forward-* und *Backward-Schätzer* für die Verteilungsfunktionen der eindimensionalen Marginalverteilungen des Spektralprozesses konstruiert, die zufällige Schranken verwenden. Dabei wird für die Konstruktion des modifizierten Backward-Schätzers zwischen den Fällen, in denen der Index der regulären Variation $\alpha \in (0, \infty)$ bekannt oder unbekannt ist, unterschieden. Wir werden sehen, dass unter geeigneten Annahmen die Grenzverteilung der Forward- und Backward-Schätzer sich nicht verändert, wenn zufällige Schranken anstelle von deterministischen Schranken verwendet werden. Jedoch erfordert die Verwendung von zufälligen Schranken etwas restriktivere Annahmen als diejenigen, die in Davis et al. (2018) verwendet werden. Diese restriktiveren Annahmen werden im Beispiel von Lösungen von stochastischen Rekurrenzgleichungen verifiziert. Die Beweise jener Resultate sind im letzten Abschnitt des Kapitels aufgeführt.

Im dritten Kapitel werden *Multiplicier-Block-Bootstrap-Versionen* der modifizierten Forward- und Backward-Schätzer definiert. Wir werden nachweisen, dass diese dasselbe asymptotische Verhalten besitzen wie jene Versionen von Davis et al. (2018), die deterministische Schranken verwenden. In diesem Zusammenhang werden dann anhand der modifizierten Bootstrap-Versionen Konfidenzbereiche für die Verteilungsfunktion der eindimensionalen Marginalverteilungen des Spektralprozesses konstruiert. Auch in diesem Kapitel sind die Beweise jener Resultate im letzten Abschnitt angegeben.

Im vierten Kapitel wird in einer kleinen Simulationsstudie gezeigt, dass sich die unterschiedlichen Versionen der Forward- und Backward-Schätzer (bei Verwendung von deterministischen oder zufälligen Schranken) ähnlich verhalten, wenn der Stichprobenumfang endlich ist. Die Versionen, die zufällige Schranken verwenden, schneiden jedoch häufig etwas besser ab. In Anhang B sind Tabellen zu jener Simulationsstudie angegeben. Weitere Simulationsergebnisse, die im Wesentlichen die Effekte aus Kapitel 4 bestätigen, sind in Anhang C aufgeführt.

Ein Zusammenschnitt dieses Teils der Arbeit ist in Zusammenarbeit mit Holger Drees im Artikel „Peak-over-threshold estimations for spectral tail processes: random vs deterministic thresholds“ (Drees und Knežević, 2020) veröffentlicht.

Kapitel 1.

Tail- und Spektralprozess

In diesem Kapitel wird zunächst der Begriff der *regulären Variation* eingeführt. Mit Hilfe dieser Grundlage werden der *Tail-* und *Spektralprozess* von Basrak und Segers (2009) definiert und wichtige strukturelle Eigenschaften wie die sogenannte *Time-Change-Formula* festgehalten. Des Weiteren werden in diesem Zusammenhang auch Hilfsresultate hergeleitet, die für die nachfolgenden Kapitel benötigt werden.

Ausgangspunkt ist die regulären Variation reellwertiger Funktionen.

Definition 1.1. Sei $f : (x_0, x_1) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion mit $x_0, x_1 \in \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Die Abbildung f heißt dann

1. regulär variierend (in $x_1 = \infty$), falls ein $\varrho \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda u)}{f(u)} = \lambda^\varrho \quad \text{für alle } \lambda > 0, \quad \text{und}$$

2. regulär variierend in $x_1 \in \mathbb{R}$, falls ein $\varrho \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_1 - \lambda t)}{f(x_1 - t)} = \lambda^\varrho \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Der Parameter $\varrho \in \mathbb{R}$ wird *Index* oder *Exponent* der regulären Variation genannt. Im Fall $\varrho = 0$ heißt f *langsam regulär variierend*. \diamond

Regulär variierende Funktionen verhalten sich näherungsweise wie Potenzfunktionen: Nach Theorem 1.4.1 von Bingham et al. (1987) existiert für jede regulär variierende Funktion $f > 0$ mit Index $\varrho \in \mathbb{R}$ eine langsam variierende Funktion l , so dass

$$f(x) = x^\varrho l(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0, x_1)$$

gilt. Abhängig vom Vorzeichen des Indexes $\varrho \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \varrho < 0, \\ \infty, & \text{wenn } \varrho > 0. \end{cases}$$

Ferner erfüllen langsam variierende Funktionen l für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-\varepsilon} l(u) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} u^{\varepsilon} l(u) = \infty$$

(siehe Bingham et al., 1987, Proposition 1.3.6). Demzufolge gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-(\varrho+\varepsilon)} f(u) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-(\varrho-\varepsilon)} f(u) = \infty.$$

Nach Theorem 1.5.2 von Bingham et al. (1987) gilt die Konvergenz der regulären Variation im folgenden Sinn sogar gleichmäßig: Es gilt

$$\sup_{\lambda \in I} \left| \frac{f(\lambda u)}{f(u)} - \lambda^{\varrho} \right| \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$$

mit

$$I = \begin{cases} [a, b], & \text{falls } \varrho = 0, \\ (0, b], & \text{falls } \varrho > 0, \\ [a, \infty), & \text{falls } \varrho < 0 \end{cases}$$

für alle $b \geq a > 0$, wobei im Fall $\varrho > 0$ zusätzlich sichergestellt sein muss, dass f auf jedem Intervall $(0, c]$ mit $c > 0$ definiert und beschränkt ist. Weitere grundlegende Resultate über regulär variierende Funktionen lassen sich beispielsweise im Buch von Bingham et al. (1987) finden.

Sei nun X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F . Die zugehörige *verallgemeinerte Inverse* F^{\leftarrow} (auch *Quantilfunktion* genannt) ist definiert als

$$F^{\leftarrow}(t) := \begin{cases} \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq t\}, & \text{falls } t \in (0, 1], \\ \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = 0\}, & \text{falls } t = 0, \end{cases}$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ und $\sup \emptyset := -\infty$. Eine nach unten beschränkte Zufallsvariable X beziehungsweise ihre Verteilung $\mathcal{L}(X)$ heißt dann *regulär variierend*, wenn ihre Survivalfunktion $\bar{F} := 1 - F$ regulär variierend (in ∞) ist. In dieser Arbeit werden hauptsächlich regulär variierende Zufallsvariablen betrachten, die einen negativen Index ϱ besitzen. Nach Korollar 1.2.10 von de Haan und Ferreira (2006) gilt: Die Zufallsvariable X ist genau dann regulär variierend mit Index $\varrho < 0$, wenn ihre Quantilfunktion F^{\leftarrow} regulär variierend in 1 mit Index $-1/\varrho > 0$ ist. Wenn X nicht-negativ ist, gilt für alle $\beta_1 \in [0, |\varrho|)$ und alle $\beta_2 > |\varrho|$

$$E[X^{\beta_1}] < \infty \quad \text{und} \quad E[X^{\beta_2}] = \infty$$

(siehe bspw. Kulik und Soulier, 2020, Proposition 1.4.6).

Mit Hilfe der sogenannten *multivariaten regulären Variation* lässt sich ein Regularitätsverhalten für Zufallsvektoren (X_1, \dots, X_d) , $d \in \mathbb{N}$, formalisieren. Bezeichne im Folgenden ∂B den topologischen Rand einer Menge B und $cB := \{cx \mid x \in B\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Ferner nennen wir ein Maß μ auf $(M, \mathbb{B}(M))$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, nicht-entartet, falls $\mu(\{x\}^c) > 0$ für alle $x \in M$ gilt.

Definition 1.2. Ein \mathbb{R}^d -wertiger Zufallsvektor (X_1, \dots, X_d) beziehungsweise dessen Verteilung $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_d)$ heißt *multivariat regulär variierend*, falls ein nicht-entartetes Maß μ auf $(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathbb{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ existieren, so dass für eine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^d

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{(X_1, \dots, X_d) \in uB\}}{P\{\|(X_1, \dots, X_d)\| > u\}} = \mu(B) \quad (1.1)$$

für alle Borelmengen $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ gilt, die $\mu(\partial B) = 0$ und $\inf_{x \in B} \|x\| > 0$ erfüllen. \diamond

Die multivariate reguläre Variation ist nicht von der Wahl der Norm auf \mathbb{R}^d abhängig. Es lässt sich zeigen: Wenn die Konvergenz (1.1) für eine Norm auf \mathbb{R}^d gilt, so gilt diese für jede andere Norm auf \mathbb{R}^d . Die zugehörigen Grenzmaße unterscheiden sich für verschiedene Normen dann nur um einen konstanten positiven Faktor.

Das Grenzmaß der multivariaten regulären Variation μ erfasst das stochastische Verhalten des Zufallsvektors (X_1, \dots, X_d) in den Extrembereichen. Mit Hilfe der sogenannten *Homogenität* des Grenzmaßes μ wird der Zusammenhang zum Regularitätsverhalten aus Definition 1.1 deutlich. Aus der obigen Definition 1.2 ergibt sich $\mu(B_1) = 1$ für $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| > 1\}$. Bezeichne $q : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ die Normierungsfunktion aus (1.1), also

$$q(u) := P\{\|(X_1, \dots, X_d)\| > u\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ die (multiplikative) *Cauchy'sche Funktionalgleichung*

$$\mu(\lambda_1 \lambda_2 B_1) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{q(\lambda_1 \lambda_2 u)}{q(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{q(\lambda_1 \lambda_2 u)}{q(\lambda_2 u)} \frac{q(\lambda_2 u)}{q(u)} = \mu(\lambda_1 B_1) \mu(\lambda_2 B_1).$$

Nach Theorem 1.1.9 von Bingham et al. (1987) und der Ungleichung $\mu(\lambda_1 B) \geq \mu(\lambda_2 B)$, die für alle $\lambda_1 \leq \lambda_2$ gilt, existiert ein $\alpha \in (0, \infty)$, so dass $\mu(\lambda B_1) = \lambda^{-\alpha}$ für alle $\lambda > 0$ gilt. Demzufolge ist die Normierungsfunktion q regulär variierend mit Index $-\alpha < 0$. Daraus ergibt sich

$$\mu(\lambda B) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{(X_1, \dots, X_d) \in (\lambda u)B\}}{q(\lambda u)} \frac{q(\lambda u)}{q(u)} = \lambda^{-\alpha} \mu(B)$$

für alle μ -randlosen Borelmengen $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, die von 0 weg beschränkt sind. Ein Maß μ , das die Gleichung $\mu(\lambda B) = \lambda^{-\alpha} \mu(B)$ für alle $\lambda > 0$ erfüllt, heißt *homogen vom Grad $-\alpha$* . Wir bezeichnen dann $\alpha \in (0, \infty)$ als den *Index* des Grenzmaßes μ beziehungsweise der multivariaten regulären Variation von (X_1, \dots, X_d) . Die Survivalfunktion der Zufallsvariable X_i ist dann regulär variierend mit Index $-\alpha$, wenn $\mu(\mathbb{R}^{i-1} \times (1, \infty) \times \mathbb{R}^{d-i}) > 0$ gilt. Man beachte, dass die multivariate reguläre Variation im Fall $d = 1$ restriktiver ist als die reguläre Variation einer

Zufallsvariable im eigentlichen Sinn, das heißt, für die die zugehörige Survivalfunktion regulär variierend ist. Bei der multivariaten regulären Variation wird nämlich sowohl im positiven als auch im negativen Tail ein reguläres Verhalten gefordert.

Die Homogenität des Grenzmaßes μ liefert, dass sich das Grenzmaß nach Polartransformation als Produktmaß zweier Maße darstellen lässt: Für den multivariat regulär variierenden Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_d)$ gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P\left(\frac{\|X\|}{u} \in (r, \infty), \frac{X}{\|X\|} \in A \mid \|X\| > u\right) = r^{-\alpha} \Psi(A) \quad (1.2)$$

für alle $r > 0$ und alle $A \in \mathbb{B}(\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\})$, die $\Psi(\partial A) = 0$ erfüllen, wobei

$$\Psi(A) := \mu\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| > 1, \frac{x}{\|x\|} \in A\right\}$$

das sogenannte *Spektralmaß* von X bezeichnet. Das Spektralmaß Ψ ist wegen $\mu(B_1) = 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S^{d-1}, \mathbb{B}(S^{d-1}))$, wobei $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1, x/\|x\| = 1\}$. Dieses gibt die extremale Abhängigkeitsstruktur des Zufallsvektors X an. Ferner wird durch $\nu_\alpha((r, \infty)) := r^{-\alpha}$ ein eindeutiges Maß auf $((0, \infty), \mathbb{B}((0, \infty)))$ definiert, das einen Einblick über das stochastische Verhalten von $\|X\|$ gegeben $\|X\| > u$ für $u \rightarrow \infty$ liefert. Grob gesprochen, besagt also die obige Darstellung (1.2), dass sich das stochastische Verhalten des Zufallsvektors X in den Extrembereichen durch das Tail- und das extremale Abhängigkeitsverhalten des Zufallsvektors X getrennt beschreiben lässt.

Im Übrigen beschreibt nach dem Portmanteau-Theorem von Hult und Lindskog (2006, Theorem 2.4) die obige Konvergenz in Gleichung (1.1) die sogenannte \mathbb{M}_0 -Konvergenz der Maße $\mu_n := P\{u_n^{-1}(X_1, \dots, X_d) \in \cdot\}/q(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen das Grenzmaß μ , wobei u_n , $n \in \mathbb{N}$, eine beliebige Folge ist, die $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ erfüllt: Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f \, d\mu$$

für alle beschränkten und stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einer Umgebung um 0 verschwinden.

Im folgenden Theorem wird festgehalten, welche Borelmengen B die Bedingung aus Definition 1.2 in jedem Fall erfüllen. Bezeichne hierfür $\#A$ die Mächtigkeit einer Menge A .

Theorem 1.3. *Sei μ ein homogenes Maß auf $(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathbb{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$, das auf $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| > 1\}$ endlich ist. Für jede von 0 weg beschränkte Menge $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, die $\#(\partial B \cap \{rx \mid r > 0\}) = 1$ für alle $x \in \partial B$ erfüllt, gilt $\mu(\partial B) = 0$.*

Bemerkung 1.4. Es seien C_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, Mengen des Typs

$$C_i = C_i^{(1)} \times \dots \times C_i^{(d)}$$

mit $C_i^{(j)} = \{x_i^{(j)}\}$, $x_i^{(j)} > 0$, für mindestens ein $j \in \{1, \dots, d\}$ und $C_i^{(k)} = [x_i^{(k)}, \infty)$ für $x_i^{(k)} \geq 0$ sonst. Offensichtlich gilt dann $\#(C_i \cap \{rx \mid r > 0\}) = 1$ für alle $x \in C_i$. Wir werden in den nachfolgenden Kapitel häufig von 0 weg beschränkte Borelmengen B betrachten, deren topologischer Rand sich als Vereinigung von Mengen obigen Typs C_i zusammensetzt, das heißt $\partial B = \cup_{i=1}^m C_i$. Nach Theorem 1.3 und der Subadditivität des Grenzmaßes μ folgt dann

$$\mu(\partial B) \leq \sum_{i=1}^m \mu(C_i) = 0,$$

so dass ebene Mengen B die Konvergenz in (1.1) erfüllen. \diamond

Beweis von Theorem 1.3. Der topologische Rand einer von 0 weg beschränkte Menge B ist ebenfalls von 0 weg beschränkt. Folglich existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\partial B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| > c\}$. Die Existenz einer solchen Konstanten c zieht nach sich, dass für alle Konstanten $t > 1$ die Inklusion $t\partial B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| > c\}$ gilt. Aufgrund von $\#(\partial B \cap \{rx \mid r > 0\}) = 1$ für alle $x \in \partial B$ sind die Mengen $t_i\partial B$ und $t_j\partial B$ für ungleiche Konstanten $t_i \neq t_j$ disjunkt. Demzufolge gilt für alle $t_i \in (1, 2)$, $i \in \mathbb{N}$, mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \infty > \mu(\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| > 1\}) &= c^\alpha \mu(\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| > c\}) \\ &\geq c^\alpha \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} t_i \partial B\right) \\ &= c^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \mu(t_i \partial B) \\ &= c^\alpha \mu(\partial B) \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{-\alpha}, \end{aligned}$$

wobei $-\alpha$ den Grad der Homogenität von μ bezeichnet. Da $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^\alpha \geq \sum_{i=1}^{\infty} 2^\alpha = \infty$ gilt, kann ∂B keine Masse bezüglich μ haben. \square

Wir erweitern nun den Begriff der regulären Variation auf strikt stationäre Zeitreihen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, wobei wir im ersten Teil dieser Dissertation ausschließlich univariate Zeitreihe betrachten.

Definition 1.5. Eine strikt stationäre Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt regulär variierend mit Index $\alpha \in (0, \infty)$, falls ihre endlich-dimensionalen Randverteilungen multivariat regulär variierend mit Index α sind. \diamond

Tatsächlich sind eine Vielzahl von Zeitreihenmodelle unter geeigneten Annahmen regulär variierend wie beispielsweise Lösungen von stochastischen Rekurrenzgleichungen (siehe Beispiel 2.2).

Basrak und Segers (2009) haben gezeigt, dass eine strikt stationäre Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ genau dann regulär variierend ist, wenn ein sogenannter *Tailprozess von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$* existiert. Bezeichne im Folgenden $\mathcal{L}(X \mid B)$ die bedingte Verteilung von X unter dem Ereignis B .

Theorem und Definition 1.6. Eine strikt stationäre univariate Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist genau dann regulär variierend mit Index $\alpha \in (0, \infty)$, wenn ein Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $P\{|Y_0| > y\} = y^{-\alpha}$ für alle $y \geq 1$ existiert, so dass für alle $s \leq 0 \leq t$ die schwache Konvergenz

$$\mathcal{L}(u^{-1}(X_s, \dots, X_t) \mid |X_0| > u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \mathcal{L}(Y_s, \dots, Y_t)$$

gilt. Der Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt *Tailprozess von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$* . \diamond

Beweis. Siehe Beweis von Theorem 2.1 von Basrak und Segers (2009). \square

Der Tailprozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ beschreibt also das stochastische Verhalten der normierten strikt stationären Zeitreihe $(X_t/u)_{t \in \mathbb{Z}}$ unter der Bedingung $|X_0| > u$ für $u \rightarrow \infty$. Theorem 2.1 von Basrak und Segers (2009) liefert insbesondere, dass die Existenz des *Forward-Tailprozesses* $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Existenz des gesamten Tailprozesses $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sicherstellt. Mehr noch legen sich die Verteilungen des Forward-Tailprozesses $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ und Backward-Tailprozesses $(Y_{-t})_{t \in \mathbb{N}_0}$ wechselseitig eindeutig fest, wie wir im Nachfolgenden sehen werden. Mit Hilfe des Tailprozesses lassen sich auch andere wichtige Größen für die Bewertung der extremalen Abhängigkeitsstruktur von Zeitreihen ausdrücken, wie zum Beispiel der *tail dependence coefficient* von Sibuya (1960), der *extremal index* von Leadbetter (1983) und das *Extremogram* von Davis und Mikosch (2009).

Wird der Tailprozess mit Hilfe der Pareto-verteilte Zufallsvariablen $|Y_0|$ normiert, ergibt sich der sogenannte *Spektralprozess von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$* .

Theorem und Definition 1.7. Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ regulär variierend mit Tailprozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Der *Spektralprozess $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$* ist definiert durch

$$\Theta_t := \frac{Y_t}{|Y_0|}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Für alle $s \leq 0 \leq t$ gilt die schwache Konvergenz

$$\mathcal{L}\left(\frac{X_s}{|X_0|}, \dots, \frac{X_t}{|X_0|} \mid |X_0| > x\right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\Theta_s, \dots, \Theta_t).$$

\diamond

Beweis. Siehe Beweis von Korollar 3.2 von Basrak und Segers (2009). \square

Nach Theorem 3.1 von Basrak und Segers (2009) sind $|Y_0|$ und $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stochastisch unabhängig. Während die Zufallsvariable $|Y_0|$ die Größe der extremen Überschreitungen erfasst, beschreibt der Spektralprozess $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ unabhängig vom Tailverhalten von $|X_0|$ die serielle Abhängigkeitsstruktur der Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ in den Extrembereichen, wenn zum Zeitpunkt 0 eine betragsmäßig extreme Überschreitung vorliegt. Die Darstellung

$$Y_t = |Y_0| \Theta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

wird deshalb auch *Spektralzerlegung* oder *-darstellung* von $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ genannt. Man beachte jedoch, dass die Zufallsvariablen Θ_t , $t \neq 0$, im Allgemeinen reellwertig sind und nicht ausschließlich Werte in $S^0 := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$ annehmen.

Wegen der besonderen Rolle von $|X_0|$ wird der Spektralprozess $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ im Allgemeinen nicht wie die zugrunde liegenden Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ strikt stationär sein. Die strikte Stationarität von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ impliziert jedoch eine spezielle Struktur der Verteilung von $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Theorem 1.8. *Sei $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ der Spektralprozess einer Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Für alle $i, s, t \in \mathbb{Z}$, mit $s < 0 < t$, und alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^{t-s+1} \rightarrow \mathbb{R}$, die $f(y_s, \dots, y_t) = 0$ für $y_0 = 0$ erfüllen, gilt*

$$E[f(\Theta_{s-i}, \dots, \Theta_{t-i})] = E\left[f\left(\frac{\Theta_s}{|\Theta_i|}, \dots, \frac{\Theta_t}{|\Theta_i|}\right) |\Theta_i|^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_i \neq 0\}\right], \quad (1.3)$$

sofern die Erwartungswerte existieren.

Bemerkung 1.9. Die obige Gleichung (1.3) wird *Time-Change-Formula* genannt. Diese ist in Theorem 3.1 von Basrak und Segers (2009) für stetig und beschränkte Funktionen f formuliert, die $f(y_s, \dots, y_t) = 0$ für $y_0 = 0$ erfüllen. (In diesem Fall ist die Existenz der entsprechenden Erwartungswerte in (1.3) garantiert.) Aus der Time-Change-Formula lässt sich aber mit klassischen maßtheoretischen Argumenten bereits die Gleichheit

$$\mathcal{L}(\Theta_{s-i}, \dots, \Theta_{t-i})(B) = \int_{\Omega} \mathbb{1}\left\{\left(\frac{\Theta_s}{|\Theta_i|}, \dots, \frac{\Theta_t}{|\Theta_i|}\right) \in B\right\} |\Theta_i|^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_i \neq 0\} dP \quad (1.4)$$

für alle Borelmengen $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}_{s,t})$ folgern, wobei $\mathbb{R}_{s,t} := \mathbb{R}^{-s} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^t$ (vergleiche Janßen und Segers, 2014, Proposition 3.2). Mit anderen Worten: Wenn Q_i^α das Maß auf $(\mathbb{R}_{s,t}, \mathbb{B}(\mathbb{R}_{s,t}))$ bezeichnet, das die P -Dichte $|\Theta_i|^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_i \neq 0\}$ besitzt, bedeutet Gleichung (1.4) gerade, dass die Verteilung von $(\Theta_{s-i}, \dots, \Theta_{t-i})$ auf $(\mathbb{R}_{s,t}, \mathbb{B}(\mathbb{R}_{s,t}))$ mit dem Bildmaß von Q_i^α unter $(\Theta_s/|\Theta_i|, \dots, \Theta_t/|\Theta_i|)$ übereinstimmt. Damit folgt dann trivialerweise die Time-Change-Formula für alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^{t-s+1} \rightarrow \mathbb{R}$, die $f(y_s, \dots, y_t) = 0$ für $y_0 = 0$ erfüllen, sofern die entsprechenden Erwartungswerte existieren. \diamond

Beweis von Theorem 1.8. Siehe Beweis von Theorem 3.1 von Basrak und Segers (2009). \square

In den Arbeiten von Planinić und Soulier (2018) und Janßen (2019) wurde gezeigt, dass die Time-Change-Formula (1.3) gerade die Menge aller möglichen Tail- beziehungsweise Spektralprozesse charakterisiert. Wir werden im darauffolgenden Kapitel die Time-Change-Formula (1.3) dazu nutzen, den sogenannte *Backward-Schätzer* für die Verteilungsfunktion von Θ_t zu konstruieren.

Abschließend halten wir noch das folgende Hilfsresultat fest, das im nachfolgenden Kapitel zur Anwendung kommt.

Lemma 1.10. *Sei $X_0 \geq 0$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ für $\alpha \in (0, \infty)$ und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ erfüllt. Für jede stetige Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die $0 \leq g(x) \leq ax^\tau + b$ für gewisse $a, b \geq 0$, $\tau \in (0, \alpha)$ erfüllt, gilt*

$$E[g(u_n^{-1} X_0) \mid X_0 > u_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g(Y_0)], \quad (1.5)$$

wobei Y_0 eine Pareto-verteilte Zufallsvariable mit Index α ist.

Beweis. Aus der regulären Variation von X_0 mit Index α folgt die schwache Konvergenz

$$\mathcal{L}(u^{-1}X_0 \mid X_0 > u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \mathcal{L}(Y_0).$$

Des Weiteren gilt wegen Proposition 1.4.6 von Kulik und Soulier (2020) stets $E[g(Y_0)] \leq aE[Y_0^\tau] + b < \infty$ für alle $\tau \in (0, \alpha)$. Aufgrund des Continuous-Mapping-Theorems folgt dann

$$\mathcal{L}(g(u^{-1}X_0) \mid X_0 > u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \mathcal{L}(g(Y_0)).$$

Nun liefert die Potter-Schranke (Bingham et al., 1987, Theorem 1.5.6), dass zu jedem $\delta > 0$ und jedem $x^* > 0$ ein derart großes $N \in \mathbb{N}$ gewählt werden kann, so dass

$$\frac{P\{X_0 > xu_n\}}{P\{X_0 > u_n\}} \leq (1 + \delta)x^{-\alpha} \max\{x^{-\delta}, x^\delta\}$$

für alle $n \geq N$ und alle $x \in (x^*, \infty)$ gilt. Seien $\delta, \xi > 0$ derart klein gewählt, dass $\alpha - \delta > \tau(1 + \xi)$ gilt. In Verbindung mit $(x + y)^{1+\xi} \leq 2^{1+\xi}(x^{1+\xi} + y^{1+\xi})$ für alle $x, y \geq 0$ lassen sich für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ auch die bedingten Erwartungswerte

$$\begin{aligned} E[|g(u_n^{-1}X_0)|^{1+\xi} \mid X_0 > u_n] &\leq E[|a(u_n^{-1}X_0)^\tau + b|^{1+\xi} \mid X_0 > u_n] \\ &\leq (2a)^{1+\xi} E[(u_n^{-1}X_0)^{\tau(1+\xi)} \mid X_0 > u_n] + (2b)^{1+\xi} \\ &= (2a)^{1+\xi} \left(1 + \int_1^\infty \frac{P\{(u_n^{-1}X_0)^{\tau(1+\xi)} > x\}}{P\{X_0 > u_n\}} dx \right) + (2b)^{1+\xi} \\ &\leq (2a)^{1+\xi} \left(1 + (1 + \delta) \int_1^\infty x^{-(\alpha-\delta)/(\tau(1+\xi))} dx \right) + (2b)^{1+\xi} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

$n \geq N$, beschränken. Folglich gilt $\sup_{n \geq N} E[|g(u_n^{-1}X_0)|^{1+\xi} \mid X_0 > u_n] < \infty$ für ein $\xi > 0$. Nach Billingsley (1995, Seite 218) ist demnach die Familie $\{Z_n\}_{n \geq N}$ mit $\mathcal{L}(Z_n) = \mathcal{L}(g(u_n^{-1}X_0) \mid X_0 > u_n)$ gleichgradig integrierbar. Ferner existieren gemäß dem Darstellungssatz von Skorokhod Versionen von Z_n , $n \geq N$, und Y_0 , so dass die Konvergenz $Z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(Y_0)$ fast sicher gilt. Anhand dieser Versionen lässt sich mit Anwendung des zum Theorem 16.14 gehörigen Korollars von Billingsley (1995) die Konvergenz

$$E[g(u_n^{-1}X_0) \mid X_0 > u_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g(Y_0)]$$

folgern. □

Kapitel 2.

Modifizierte Forward- und Backward-Schätzer

In diesem Kapitel werden die von Drees et al. (2015) eingeführten *Forward-* und *Backward-Schätzer* für die Verteilungsfunktionen der eindimensionalen Randverteilungen des Spektralprozesses $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heuristisch motiviert. Für eine praxistaugliche Anwendung modifizieren wir beide Schätzer dahingehend um, dass anstelle von deterministischen Schranken nun zufällige Schranken verwendet werden. Dieses Vorgehen wird durch den Nachweis der asymptotischen Normalität der modifizierten Schätzer statistisch gerechtfertigt.

Bezeichne $F^{(\Theta_t)}$ die Verteilungsfunktion von Θ_t , $t \in \mathbb{Z}$, und $X_{1-\tilde{t}}, \dots, X_{n+\tilde{t}}$ eine Stichprobe der Länge $n + 2\tilde{t}$ mit $n, \tilde{t} \in \mathbb{N}$. Der Parameter $\tilde{t} \in \mathbb{N}$ ist im Folgenden fest gewählt und steht für den maximalen zeitlichen Lag, an dem wir interessiert sind. Das heißt, wir betrachten fortan ausschließlich Lags $t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}$. Wenn $x \in \mathbb{R}$ eine Stetigkeitsstelle der Verteilungsfunktion von Θ_t ist, folgt aus Theorem 1.7

$$F^{(\Theta_t)}(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_t}{|X_0|} \leq x \mid |X_0| > u\right).$$

Diese Konvergenz motiviert für hinreichend große u_n die Approximation

$$F^{(\Theta_t)}(x) \approx P\left(\frac{X_t}{|X_0|} \leq x \mid |X_0| > u_n\right). \quad (2.1)$$

Wird nun die bedingte Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite von (2.1) durch ihr empirisches Gegenstück ersetzt, ergibt sich der *Forward-Schätzer* für $F^{(\Theta_t)}(x)$:

$$\hat{F}_n^{(f, \Theta_t)}(x) := \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_{i+t}/|X_i| \leq x, |X_i| > u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{|X_i| > u_n\}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Der Backward-Schätzer für $F^{(\Theta_t)}(x)$ wird mit Hilfe der Time-Change-Formula aus Theorem 1.8 hergeleitet. Durch Anwendung ebenjenes Theorems für $f(\vartheta) := \mathbf{1}\{\vartheta \leq x\} - \mathbf{1}\{x \geq 0\}$ mit $(s, h, i) = (0, 0, -t)$ folgt in Kombination mit Theorem 1.7

$$F^{(\Theta_t)}(x) = \begin{cases} 1 - E[|\Theta_{-t}|^\alpha \mathbf{1}\{\Theta_0/|\Theta_{-t}| > x\}], & \text{wenn } x \geq 0, \\ E[|\Theta_{-t}|^\alpha \mathbf{1}\{\Theta_0/|\Theta_{-t}| \leq x\}], & \text{wenn } x < 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \lim_{u \rightarrow \infty} E[|X_{-t}/X_0|^\alpha \mathbb{1}\{X_0/|X_{-t}| > x\} \mid |X_0| > u], & \text{wenn } x \geq 0, \\ \lim_{u \rightarrow \infty} E[|X_{-t}/X_0|^\alpha \mathbb{1}\{X_0/|X_{-t}| \leq x\} \mid |X_0| > u], & \text{wenn } x < 0, \end{cases}$$

sofern x eine Stetigkeitsstelle von $F^{(\Theta_t)}$ ist (vergleiche Davis et al., 2018, Lemma 2.1). Hierbei bezeichnet $\alpha \in (0, \infty)$ den Index der regulären Variation von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Dies liefert für hinreichend große u_n die Approximation

$$F^{(\Theta_t)}(x) \approx \begin{cases} 1 - E[|X_{-t}/X_0|^\alpha \mathbb{1}\{X_0/|X_{-t}| > x\} \mid |X_0| > u_n], & \text{wenn } x \geq 0, \\ E[|X_{-t}/X_0|^\alpha \mathbb{1}\{X_0/|X_{-t}| \leq x\} \mid |X_0| > u_n], & \text{wenn } x < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ersetzt man nun die bedingten Erwartungswerte auf der rechten Seite von (2.3) ebenfalls durch ihre empirischen Gegenstücke, ergibt sich der *Backward-Schätzer* für $F^{(\Theta_t)}(x)$:

$$\hat{F}_n^{(b, \Theta_t)}(x) := \begin{cases} 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |X_{i-t}/X_i|^\alpha \mathbb{1}\{X_i/|X_{i-t}| > x, |X_i| > u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{|X_i| > u_n\}}, & \text{wenn } x \geq 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^n |X_{i-t}/X_i|^\alpha \mathbb{1}\{X_i/|X_{i-t}| \leq x, |X_i| > u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{|X_i| > u_n\}}, & \text{wenn } x < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Drees et al. (2015) und Davis et al. (2018) haben gezeigt, dass unter geeigneten Annahmen der Prozess bestehend aus dem Forward- und Backward-Schätzer in (2.2) und (2.4) asymptotisch normal ist, wenn geeignete deterministische Schranken u_n , $n \in \mathbb{N}$, verwendet werden. Typischerweise liefert der Backward-Schätzer genauere Schätzwerte für $F^{(\Theta_t)}(x)$ als der Forward-Schätzer, sofern $|x|$ nicht zu klein ist. Drees et al. (2015) haben in diesem Zusammenhang in Bemerkung 4.3 nachgewiesen, dass die asymptotische Varianz des Backward-Schätzers für $|x| \geq 1$ stets kleiner ist, wenn α bekannt ist, der Tailprozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ markov'sch und die Schranke u_n als ein Quantil der Form $F_{|X|}^{\leftarrow}(1 - t_n)$ gewählt wird, wobei $F_{|X|}^{\leftarrow}$ die Quantilfunktion von $|X_0|$ und t_n , $n \in \mathbb{N}$, eine geeignete Folge mit $t_n \downarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ bezeichnen. Bei beiden Schätzern bestimmt jedoch die konkrete Wahl der Schranke u_n , die von der Marginalverteilungsfunktion abhängt, die Güte der Schätzung. Hier gilt es zwei entgegengesetzte Mechanismen zu beachten:

- Die Approximationen in (2.1) und (2.3) sind umso zuverlässiger, je größer die Schranke u_n gewählt wird.
- Der stochastische Anteil des Schätzfehlers wird umso geringer, je kleiner die Schranke u_n gewählt wird.

Für den Forward- und Backward-Schätzer heißt das, dass mit steigender Schranke u_n der systematische Schätzfehler abnimmt, während der zufällige Anteil des Schätzfehlers zunimmt, und vice versa. Optimalerweise wird deshalb die Schranke u_n in einem dazwischen liegenden Bereich gewählt, in dem die Summe des systematischen und zufälligen Schätzfehlers minimal ist.

Nun ist üblicherweise die Marginalverteilungsfunktion der zugrunde liegenden strikt stationären Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ unbekannt. Aus diesem Grund werden in der Praxis zufällige Schranken \hat{u}_n wie beispielsweise Ordnungsstatistiken verwendet, die asymptotisch äquivalent zu u_n sind,

das heißt

$$S_n := \frac{\hat{u}_n}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{in Wahrscheinlichkeit}} 1 \quad (2.5)$$

erfüllen. Wir bezeichnen diese *modifizierten Forward- und Backward-Schätzer* mit

$$\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x) := \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_{i+t}/X_i \leq x, X_i > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und

$$\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(x) := \begin{cases} 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{X_{i-t}}{X_i} \right|^\alpha \mathbb{1}\{X_i/|X_{i-t}| > x, |X_i| > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{|X_i| > \hat{u}_n\}}, & \text{wenn } x \geq 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{X_{i-t}}{X_i} \right|^\alpha \mathbb{1}\{X_i/|X_{i-t}| \leq x, |X_i| > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{|X_i| > \hat{u}_n\}}, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, ist a priori nicht ersichtlich, inwieweit die Verwendung von zufälligen Schranken das asymptotische Verhalten dieser beiden Schätzer beeinflusst. So verändert sich beispielsweise die Grenzverteilung des Maximum-Likelihood-Schätzers für einen Skalenparameter in einem verallgemeinerten Pareto-Modell bei Verwendung von zufälligen Schranken, während die Grenzverteilung des Maximum-Likelihood-Schätzers für den Extremwertindex dieselbe bleibt (siehe Smith, 1987; Drees et al., 2004).

Wir bestimmen im Nachfolgenden das gemeinsame asymptotische Verhalten des modifizierten Forward- und Backward-Schätzers. Um die Präsentation möglichst übersichtlich zu halten, nehmen wir an, dass ausschließlich nicht-negative Beobachtungen $X_{1-\hat{i}}, \dots, X_{n+\hat{i}}$ vorliegen. In diesem Kontext werden die beiden Schätzer nur für nicht-negative Argumente $x \geq 0$ angewandt. Die zugehörigen modifizierten Forward- und Backward-Schätzer für die Survivalfunktion $\bar{F}^{(\Theta_t)}(x) := 1 - F^{(\Theta_t)}(x)$ bezeichnen wir mit

$$\hat{\bar{F}}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x) := 1 - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_{i+t}/X_i > x, X_i > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}$$

und

$$\hat{\bar{F}}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(x) := 1 - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \mathbb{1}\{X_i/|X_{i-t}| > x, X_i > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}.$$

Des Weiteren ist der obige modifizierte Backward-Schätzer für den Fall ausgelegt, in dem der Index der regulären Variation $\alpha \in (0, \infty)$ bekannt ist. Ist dies jedoch nicht der Fall, so gibt es unterschiedliche Konzepte, mit denen dann gearbeitet werden kann. Eine Möglichkeit ist beispielsweise, den unbekannt Parameter α im Backward-Schätzer durch einen geeigneten Schätzer $\hat{\alpha}_n$ zu ersetzen. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 2.1.1 genauer diskutiert.

2.1. Asymptotisches Verhalten der modifizierten Schätzer

Als technische Grundlage für die Analyse des asymptotischen Verhaltens der modifizierten Forward- und Backward-Schätzer ist die Arbeit von Drees und Rootzén (2010) prädestiniert. (Ein Zusammenschritt jener Grenzwertresultate, die im Folgenden verwendet werden, ist in Anhang A angegeben.) Folgt man nämlich dem Ansatz von Davis et al. (2018), so lassen sich die modifizierten Forward- und Backward-Schätzer mittels spezieller empirischer Prozesse darstellen, sogenannten (verallgemeinerten) standardisierten *Tail-Array-Sums*. Hierbei muss jedoch nun der Umstand berücksichtigt werden, dass zufällige Schranken \hat{u}_n , $n \in \mathbb{N}$, für die Schätzung herangezogen werden.

Diese Prozesse werden durch die folgenden Funktionen induziert. Definiere für $x, y, s \in [0, \infty)$ die Abbildungen $\phi_{1,s}, \phi_{2,x,s}^t, \phi_{3,y,s}^t : [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \rightarrow [0, \infty)$ mit den Abbildungsvorschriften

$$\phi_{1,s}(z) := \mathbb{1}\{z_0 > s\}, \quad (2.6)$$

$$\phi_{2,x,s}^t(z) := \mathbb{1}\left\{\frac{z_t}{z_0} > x, z_0 > s\right\}, \quad (2.7)$$

$$\phi_{3,y,s}^t(z) := \left(\frac{z_{-t}}{z_0}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{z_0}{z_{-t}} > y, z_{-t} > 0, z_0 > s\right\}, \quad (2.8)$$

wobei $z = (z_{-\tilde{t}}, \dots, z_{\tilde{t}}) \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1}$. Der Funktionswert $\phi_{3,y,s}^t(z)$ ist wegen des multiplikativen Faktors $(z_{-t}/z_0)^\alpha$ für Argumente $z \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1}$ mit $z_{-t} = 0$ stets gleich 0. Damit ist die Einschränkung $z_{-t} > 0$ innerhalb der Indikatorfunktion von $\phi_{3,y,s}^t$ redundant. Wir werden deshalb, wenn es die Übersichtlichkeit in gewissen Rechnungen erfordert, diese Einschränkung nicht mit auffassen. Ferner werden die Parameter x und y für die Argumente stehen, an denen die Verteilungsfunktion $F^{(\Theta_t)}$ ausgewertet wird, wohingegen mit Hilfe des Parameters s die zufällige Schrankenwahl berücksichtigt wird.

Nach Gleichung (2.5) gilt für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$: Für jedes $\delta \in (0, 1)$ kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass die Zufallsvariable S_n mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ im Intervall $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ liegt. Sei im Folgenden $\varepsilon \in (0, 1)$ fest gewählt. Definiere dann

$$X_{n,i} := u_n^{-1}(X_{i-\tilde{t}}, \dots, X_{i+\tilde{t}}) \mathbb{1}\{X_i > (1 - \varepsilon)u_n\}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.9)$$

Der Term $X_{n,i}$ beschreibt also entweder den Nullvektor oder den durch u_n normierten Zufallsvektor $(X_{i-\tilde{t}}, \dots, X_{i+\tilde{t}})$, sofern die Zufallsvariable X_i die herabgesetzte Schranke $(1 - \varepsilon)u_n$ übersteigt. Demnach gilt für alle $x, y \in [0, \infty)$

$$\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_{i+\tilde{t}}/X_i > x, X_i > S_n u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}} = \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i})} \quad (2.10)$$

und

$$\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) = \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{3,y,S_n}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i})} \quad (2.11)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

Neben den oben angeführten Funktionen $\phi_{1,s}$, $\phi_{2,x,s}^t$ und $\phi_{3,y,s}^t$ wird für den Fall, in dem der Index der regulären Variation α unbekannt ist, eine weitere Klasse von Funktionen benötigt. Diese Klasse hängt von der Wahl des Schätzers $\hat{\alpha}_n$ für α ab. Für den im späteren Verlauf von uns gewählten Schätzer für α benötigen wir die Funktionen $\phi_{0,s} : [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\phi_{0,s}(z) := \log^+ \left(\frac{z_0}{s} \right) = \log \left(\frac{z_0}{s} \right) \mathbf{1}\{z_0 > s\} \quad (2.12)$$

für $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Die genaue Herleitung dieser Funktionenklasse wird dann an entsprechender Stelle in Abschnitt 2.1.1 erbracht.

Im Nachfolgenden werden nun sämtliche Voraussetzungen festgehalten, die zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der modifizierten Forward- und Backward-Schätzer verwendet werden.

Voraussetzungen

Um Konsistenz der modifizierten Forward- und Backward-Schätzer gewährleisten zu können, muss die Folge der Schranken u_n derart gegen unendlich streben, dass zum einen

$$v_n := P\{X_0 > u_n\}$$

gegen 0 konvergiert und zum anderen die erwartete Anzahl an Exzedenten über u_n , also nv_n , gegen unendlich strebt. Darüber hinaus müssen wir sicherstellen, dass die Beobachtungen, welche zeitlich hinreichend weit voneinander entfernt sind, sich nahezu stochastisch unabhängig verhalten. Die Stärke der zeitlichen Abhängigkeit zwischen den Zufallsvektoren $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ wird mit Hilfe des β -Mischungskoeffizienten (auch als der *Koeffizient der absoluten Regularität* bezeichnet)

$$\beta_{n,k} := \sup_{1 \leq l \leq n-k-1} E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^n} |P(B | \mathcal{B}_{n,1}^l) - P(B)| \right]$$

ausgedrückt, wobei $\mathcal{B}_{n,i}^j$ die σ -Algebra $\sigma((X_{n,l})_{i \leq l \leq j})$ bezeichnet.

Um diese Überlegungen in unser Setting mit aufzunehmen, fordern wir nun, dass zwei Folgen $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n, r_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und ein $x_0 \geq 0$ existieren, so dass zu demselben $\varepsilon \in (0, 1)$ wie in (2.9) die folgenden Voraussetzungen gelten:

(A(x_0)) Die Verteilungsfunktionen $F^{(\Theta_t)}$, $t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}$, sind stetig auf $[x_0, \infty)$.

(B) Für $n \rightarrow \infty$ gilt $l_n = o(r_n)$, $r_n = o((nv_n)^{1/2})$, $r_n v_n \rightarrow 0$ und $\beta_{n,l_n} n/r_n \rightarrow 0$.

(C) Für alle $k \in \{0, \dots, r_n\}$ existieren Konstanten

$$s_n(k) \geq P(X_k > (1 - \varepsilon)u_n \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n),$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} s_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} s_\infty(k) < \infty$ mit $s_\infty(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(k)$ erfüllen.

(C') Für alle $k \in \{0, \dots, r_n\}$ existieren Konstanten

$$s'_n(k) \geq E \left[\max \left\{ \log \left(\frac{X_0}{(1-\varepsilon)u_n} \right), \mathbb{1}\{X_0 > (1-\varepsilon)u_n\} \right\} \right. \\ \left. \times \max \left\{ \log \left(\frac{X_k}{(1-\varepsilon)u_n} \right), \mathbb{1}\{X_k > (1-\varepsilon)u_n\} \right\} \middle| X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right], \quad (2.13)$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} s'_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} s'_\infty(k) < \infty$ mit $s'_\infty(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(k)$ erfüllen. Darüber hinaus existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\sum_{k=1}^{r_n} \left(E \left[\left(\log^+ \left(\frac{X_0}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_k}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^{1+\delta} \middle| X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right] \right)^{1/(1+\delta)} = O(1) \quad (2.14)$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei im Folgenden $\log^+(x) := \log(x) \mathbb{1}\{x > 1\}$.

(D) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{X_{n,i} \neq 0\} \right)^{2+\delta} \right] = O(r_n v_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

◇

Die beiden Folgen $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind die Grundelemente der sogenannten „big blocks, small blocks“-Technik. Dazu werden die Zufallsvektoren $X_{n,i}$, $1 \leq i \leq n$, zunächst in große Blöcke der Länge r_n eingeteilt. Die kleinen Blöcke stellen dann die letzten l_n Zufallsvektoren eines jeden großen Blocks dar. Diese werden dazu verwendet, um die großen Blöcke in den Beweisen voneinander zu separieren. In Verbindung mit entsprechenden Mischungsannahmen verhalten sich diese Blöcke dann nahezu stochastisch unabhängig.

Mit Hilfe der Time-Change-Formel lässt sich zeigen, dass Voraussetzung (A(x_0)) insbesondere die Stetigkeit von $F^{(\Theta_t)}$ auf $(0, x_0^{-1}]$ sicherstellt. Demzufolge ist unter (A(x_0)) die Verteilungsfunktion $F^{(\Theta_t)}$ stetig auf $(0, \infty)$, wenn $x_0 \leq 1$ gilt. Ferner kann ohne Voraussetzung (A(x_0)) im Allgemeinen keine gleichmäßige Konvergenz der Schätzer erwartet werden.

Aus $r_n v_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ in Voraussetzung (B), folgt die Konvergenz $v_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Demzufolge sind die Ereignisse, die von 0 verschiedenen Werte von $X_{n,i}$ betrachten, seltene Ereignisse. Darüber hinaus ist die Wahrscheinlichkeit für einen großen Block von 0 verschieden zu sein kleiner oder gleich $r_n v_n$, so dass diese Wahrscheinlichkeit ebenfalls gegen 0 strebt für $n \rightarrow \infty$.

Häufig fällt der β -Mischungskoeffizient für konkrete Zeitreihenmodelle geometrisch (exponentiell) ab, das heißt $\beta_{n,k} = O(\eta^k)$ für ein $\eta \in (0, 1)$. Unter schwachen Annahmen sind das beispielsweise rekurrente Markov-Ketten (siehe Doukhan, 1994, Abschnitt 2.4). Wählt man dann $l_n = O(\log n)$, so folgt Voraussetzung (B) für eine geeignete Folge r_n , wenn $(\log^2 n)/n = o(v_n)$ und $v_n = o(1/(\log n))$ gelten.

Offensichtlich folgt aus Voraussetzung (C') insbesondere Voraussetzung (C). Für den Nachweis von Voraussetzung (C') bietet sich die folgende Herangehensweise an. Bezeichne der Übersicht-

lichkeit halber $u_{n,\varepsilon} := (1 - \varepsilon)u_n$ die herabgesetzte Schranke. Die rechte Seite von (2.13) in Voraussetzung (C') ist durch

$$\begin{aligned} & E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \log^+ \left(\frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} \right) \mid X_0 > u_{n,\varepsilon} \right] + E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \mathbb{1}\{X_k > u_{n,\varepsilon}\} \mid X_0 > u_{n,\varepsilon} \right] \\ & + E \left[\log^+ \left(\frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} \right) \mathbb{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\} \mid X_0 > u_{n,\varepsilon} \right] + P(X_k > u_{n,\varepsilon} \mid X_0 > u_{n,\varepsilon}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

nach oben beschränkt. Mit dem Satz von Fubini ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} & E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \log^+ \left(\frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} \right) \right] \\ & = \int_{(1,\infty)^2} \log^+(s) \log^+(t) \mathcal{L} \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}, \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} \right) (d(s, t)) \\ & = \int_{(1,\infty)^2} \left(\int_1^s \frac{1}{u} du \right) \left(\int_1^t \frac{1}{v} dv \right) \mathcal{L} \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}, \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} \right) (d(s, t)) \\ & = \int_1^\infty \int_1^\infty \int_{(1,\infty)^2} \frac{1}{uv} \mathbb{1}_{(1,s)}(u) \mathbb{1}_{(1,t)}(v) \mathcal{L} \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}, \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} \right) (d(s, t)) du dv \\ & = \int_1^\infty \frac{1}{v} \int_1^\infty \frac{1}{u} P \left\{ \frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} > u, \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} > v \right\} du dv. \end{aligned}$$

Mit ähnlicher Rechnung folgt insbesondere

$$E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \mathbb{1}\{X_k > u_{n,\varepsilon}\} \right] = \int_1^\infty \frac{1}{v} P \left\{ \frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} > v, \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} > 1 \right\} dv.$$

Demnach lässt sich die obige Summe in (2.15) schreiben als

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}} \left[P \left\{ \min\{X_k, X_0\} > u_{n,\varepsilon} \right\} + \int_1^\infty \frac{1}{v} \int_1^\infty \frac{1}{u} P \left\{ \frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} > u, \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} > v \right\} du dv \right. \\ & \left. + \int_1^\infty \frac{1}{v} \left(P \left\{ \frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} > v, \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} > 1 \right\} + P \left\{ \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} > v, \frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} > 1 \right\} \right) dv \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Auf ähnliche Weise lässt sich die linke Seite von (2.14) durch

$$\sum_{k=1}^{r_n} \left(\frac{(1 + \delta)^2}{P\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{(\log(u) \log(v))^\delta}{uv} P \left\{ \frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} > u, \frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} > v \right\} du dv \right) \quad (2.17)$$

nach oben abschätzen (siehe Davis et al., 2018). In Drees (2000, 2003) sind Techniken herausgearbeitet, mit denen sich Wahrscheinlichkeiten wie ebenjene in (2.16) und (2.17) für Zeitreihenmodellen wie Lösungen von stochastischen Rekurrenzgleichungen oder linearen Zeitreihen mit heavy-tailed Innovationen nach oben abschätzen lassen. Mit Hilfe dieser Techniken wurde beispielsweise Bedingung (C) unter schwachen Annahmen für Lösungen von stochastischen Rekurrenzgleichungen in Beispiel A.3 von Drees et al. (2015) nachgewiesen.

In der Regel ist es schwierig, Voraussetzung (D) direkt nachzuprüfen. Diese Voraussetzung kann durch die folgende restriktivere aber oft leichter zu überprüfenden Bedingung ersetzt werden:

(E) Für alle $j, k \in \{0, \dots, r_n\}$ mit $j \leq k$ existieren Konstanten

$$\tilde{s}_n(j, k) \geq P(X_j > (1 - \varepsilon)u_n, X_k > (1 - \varepsilon)u_n \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n),$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k \leq r_n} \tilde{s}_n(j, k) = \sum_{1 \leq j \leq k < \infty} \tilde{s}_\infty(j, k) < \infty$ mit $\tilde{s}_\infty(j, k) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n(j, k)$ erfüllen.

Offensichtlich impliziert Bedingung (E) insbesondere Voraussetzung (C). Ein Nachweis dieses Zusammenhangs zwischen den Voraussetzungen (C), (D) und (E) ist im Abschnitt 2.3 (Lemma 2.9) erbracht. Des Weiteren werden wir in Abschnitt 2.2 sehen, dass Voraussetzung (C') und (E) unter schwachen Zusatzannahmen für Lösungen von stochastischen Rekurrenzgleichungen erfüllt sind.

Seien nun

$$\begin{aligned} \Phi_{1,\varepsilon} &:= \{\phi_{1,s} \mid s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]\}, \\ \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t &:= \{\phi_{2,x,s}^t \mid s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \text{ und } x \in [x_0, \infty)\} \quad \text{und} \\ \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t &:= \{\phi_{3,y,s}^t \mid s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \text{ und } y \in [y_0, \infty)\}. \end{aligned}$$

Die (verallgemeinerten) *standardisierten Tail-Array-Sums* $\tilde{Z}_n(\psi)$ aus Drees und Rootzén (2010) sind in diesem Kontext dann definiert als

$$\tilde{Z}_n(\psi) := (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\psi(X_{n,i}) - E[\psi(X_{n,i})]) \quad (2.18)$$

mit

$$\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0} := \Phi_{1,\varepsilon} \cup \bigcup_{t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}} (\Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t \cup \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t). \quad (2.19)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2.10) und (2.11) folgen also

$$\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x) = \frac{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{2,x,S_n}^t) + nE[\phi_{2,x,s}^t(X_{n,1})]_{s=S_n}}{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) + nE[\phi_{1,s}(X_{n,1})]_{s=S_n}}$$

und

$$\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) = \frac{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{3,y,S_n}^t) + nE[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,1})]_{s=S_n}}{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) + nE[\phi_{1,s}(X_{n,1})]_{s=S_n}}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

In der nachfolgenden Proposition wird unter den vorangegangenen Voraussetzungen die asymptotische Normalität der Prozesse der standardisierten Tail-Array-Sums $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}}$ festgehalten. Des Weiteren greifen wir auch die Funktionenklasse auf, in der α durch einen geeigneten

Schätzer, der im Abschnitt 2.1.1 eingeführt wird, ersetzt wird:

$$\Phi_{0,\varepsilon} := \{\phi_{0,s} \mid s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]\}.$$

Sei dann

$$\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0 := \Phi_{0,\varepsilon} \cup \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}. \quad (2.20)$$

Proposition 2.1. *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe, die regulär variierend mit Index $\alpha \in (0, \infty)$ ist. Ferner bezeichne $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ den zugehörigen Tailprozess. Falls die Voraussetzungen (A(x_0)), (B), (C) und (D) für ein $x_0 \geq 0$ und ein $\varepsilon \in (0, 1)$ erfüllt sind, folgt für alle $y_0 \in [x_0, \infty) \cap (0, \infty)$ die schwache Konvergenz in $l^\infty(\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0})$ von $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}}$, $n \in \mathbb{N}$, gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}}$ mit Kovarianzstruktur*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z(\psi_1), Z(\psi_2)) &= (1 - \varepsilon)^{-\alpha} \left(E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)] + E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)] \right) \right) \\ &= (1 - \varepsilon)^{-\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

für $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}$, wobei

$$\bar{Y}_k := (Y_{k-\tilde{t}}, \dots, Y_{k+\tilde{t}}) \mathbf{1}\{Y_k > 1\}.$$

Gilt überdies Voraussetzung (C'), so folgt die obige Aussage insbesondere für die Folge der Prozesse der standardisierten Tail-Array-Sums $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$.

Addendum 2.2. *Der technische Parameter $\varepsilon \in (0, 1)$ verschwindet in Gleichung (2.21), wenn $\psi_i(z_{-\tilde{t}}, \dots, z_{\tilde{t}}) = 0$ für $z_0 \leq 1$ mit $i \in \{1, 2\}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z(\psi_1), Z(\psi_2)) &= E[\psi_1(\bar{Y}_0)\psi_2(\bar{Y}_0)] + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\psi_1(\bar{Y}_0)\psi_2(\bar{Y}_k)] + E[\psi_1(\bar{Y}_k)\psi_2(\bar{Y}_0)] \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[\psi_1(\bar{Y}_0)\psi_2(\bar{Y}_k)]. \end{aligned}$$

Dies ist immer dann der Fall, wenn der Indexparameter $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ der Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0$ größer oder gleich 1 ist.

Unter den obigen Voraussetzungen kann das (gemeinsame) asymptotische Verhalten des Forward- und Backward-Schätzer von $F^{(\Theta_t)}$ nachgewiesen werden. Um sicherzustellen, dass deren Bias asymptotisch vernachlässigbar ist, werden zwei zusätzliche Bedingungen gefordert: Für alle $t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}$ und alle Folgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, die $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ erfüllen,

gelten

$$\sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| P \left(\frac{X_t}{X_0} > x \mid X_0 > s_n u_n \right) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) \right| = o((nv_n)^{-1/2}), \quad (2.22)$$

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbf{1}\{X_0/X_{-t} > y\} \mid X_0 > s_n u_n \right] - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) \right| = o((nv_n)^{-1/2}) \quad (2.23)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung 2.3. 1. Tatsächlich konvergieren die linken Seiten von (2.22) und (2.23) unter Voraussetzung (A(x_0)) in jedem Fall gegen 0. Nach Theorem 1.7 gilt nämlich wegen (A(x_0)) die punktweise Konvergenz

$$P \left(\frac{X_t}{X_0} > x \mid X_0 > s_n u_n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) \quad \text{für alle } x \in [x_0, \infty).$$

Nun lässt sich leicht zeigen, dass wegen Voraussetzung (A(x_0)) und der Monotonie der obigen bedingte Wahrscheinlichkeit in $x \in [x_0, \infty)$ die obige Konvergenz gleichmäßig für $x \in [x_0, \infty)$ gilt, das heißt, die linke Seite von (2.22) gegen 0 konvergiert. Ferner gilt nach Lemma 2.1 von Davis et al. (2018) beziehungsweise durch Anwendung der Time-Change-Formel

$$\bar{F}^{(\Theta_t)}(y) = E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}] = E[f_y(\Theta_{-t})]$$

für $f_y : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $f_y(x) = x^\alpha \mathbf{1}\{1/x > y\}$. Offensichtlich ist f_y eine beschränkte Funktion, die nur im Punkt y unstetig ist. Wegen (A(x_0)) hat diese Unstetigkeitsstelle keine Masse bezüglich $\mathcal{L}(\Theta_{-t})$, so dass nach Theorem 1.7 die punktweise Konvergenz

$$E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbf{1}\{X_0/X_{-t} > y\} \mid X_0 > s_n u_n \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) \quad \text{für alle } y \in [y_0, \infty)$$

gilt. Da der obige bedingte Erwartungswert ebenfalls monoton fallend in $y \in [y_0, \infty)$ ist, lässt sich in Verbindung mit (A(x_0)) zeigen, dass die linke Seite von (2.23) gegen 0 konvergiert. Demnach wird durch die Bias-Bedingungen (2.22) und (2.23) also lediglich festgelegt, dass die linken Seiten von (2.22) und (2.23) schneller gegen 0 konvergieren als $(nv_n)^{-1/2}$ für $n \rightarrow \infty$. Dies tritt beispielsweise dann ein, wenn die Schranke $(1 - \varepsilon)u_n$ hinreichend schnell gegen unendlich strebt.

2. Anstatt das obige Folgenkriterium für $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (2.22) und (2.23) zu fordern, kann auch schlicht Gleichmäßigkeit in der Komponente $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ verlangt werden, das bedeutet dann exemplarisch für die Bias-Bedingung (2.22):

$$\sup_{s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]} \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| P \left(\frac{X_t}{X_0} \leq x \mid X_0 > s u_n \right) - F^{(\Theta_t)}(x) \right| = o((nv_n)^{-1/2}). \quad (2.24)$$

Die Gleichmäßigkeit in der s -Komponente weist hierbei eine deutlich schwächer Charakte-

istik als die Gleichmäßigkeit in der Komponente $x \in [x_0, \infty)$ auf. Dies hat zwei Gründe:

- a) Der Parameter $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ geht lediglich über die Bedingung „ $X_0 > su_n$ “ einher. Der Grenzwert $F^{(\Theta_t)}(x)$ ist also unabhängig von s . Demnach wird die durch s erzeugte Fluktuation in (2.24) vollständig durch $P(X_t/X_0 \leq x \mid X_0 > su_n)$ verursacht.
- b) Aus Voraussetzung (A(x_0)) folgt

$$D(u) := \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| P \left(\frac{X_t}{X_0} \leq x \mid X_0 > u \right) - F^{(\Theta_t)}(x) \right| \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0.$$

Diese gleichmäßige Konvergenz kann auch als Konvergenz der Funktion $D : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zu ihrem rechten Grenzwert aufgefasst werden. Demnach gilt insbesondere

$$D^*(u) := \sup_{v \in [u, \infty)} D(v) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0.$$

Folglich ergibt sich die obige Konvergenz in (2.24) bereits durch die Anforderung

$$D^*((1 - \varepsilon)u_n) = o((nv_n)^{-1/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Unter der Zuhilfenahme von Lemma 2.1 von Davis et al. (2018) ergibt sich diese Besonderheit auch für die Bias-Bedingung (2.23). Wir werden dieser Erkenntnisse ungeachtet mit den Bedingungen (2.22) und (2.23) arbeiten. \diamond

Bevor wir nun das Grenzverhalten der modifizierten Forward- und Backward-Schätzer konkret bestimmen, halten wir noch fest, dass aufgrund der regulären Variation des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]} \left| \frac{v_n}{P\{X_0 > su_n\}} - s^\alpha \right| = 0 \quad (2.25)$$

erfüllt ist (siehe Bingham et al., 1987, Theorem 1.5.2).

Theorem 2.4. *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe, die regulär variierend mit Index $\alpha \in (0, \infty)$ ist. Falls die Voraussetzungen (2.5), (A(x_0)), (B), (C), (D), (2.22) und (2.23) für ein $x_0 \geq 0$ und $y_0 \in [x_0, \infty) \cap (0, \infty)$ erfüllt sind, folgt die schwache Konvergenz*

$$(nv_n)^{1/2} \begin{pmatrix} (\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x_t) - F^{(\Theta_t)}(x_t))_{x_t \in [x_0, \infty)} \\ (\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y_t) - F^{(\Theta_t)}(y_t))_{y_t \in [y_0, \infty)} \end{pmatrix}_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (Z(\phi_{2, x_t, 1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x_t)Z(\phi_{1, 1}))_{x_t \in [x_0, \infty)} \\ (Z(\phi_{3, y_t, 1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y_t)Z(\phi_{1, 1}))_{y_t \in [y_0, \infty)} \end{pmatrix}_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}},$$

wobei $(Z(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}}$ der zentrierte Gaußprozess aus Proposition 2.1 ist. Die explizite Kovarianzstruktur des Grenzprozesses ist in Gleichung (2.68) und den nachfolgenden gegeben.

Üblicherweise werden die deterministischen Schranken u_n , $n \in \mathbb{N}$, mit Hilfe der Quantilfunktion von X_0 dargestellt, wie beispielsweise $u_n = F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)$, wobei k_n , $n \in \mathbb{N}$, eine sogenannte *intermediäre Folge* ist, das heißt, für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$k_n \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad k_n/n \rightarrow 0.$$

Mit dieser Wahl von u_n stellt dann die Ordnungsstatistik $X_{n-k_n:n}$, das ist die $(k_n + 1)$ -größte Beobachtung der Stichprobe X_1, \dots, X_n , eine zufällige Schranke dar, die ein konsistenter Schätzer ebendieser theoretischen Quantile $F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)$ ist.

Lemma 2.5. *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe, die regulär variierend mit Index $\alpha \in (0, \infty)$ ist. Unter den Voraussetzungen (B) und (C) gilt, dann*

$$\frac{X_{n-k_n:n}}{F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Demnach ist es asymptotisch gerechtfertigt, Ordnungsstatistiken als Schranken für den Forward- und Backward-Schätzer zu verwenden.

2.1.1. Der praxisrelevante Fall: unbekanntes α

Wir studieren nun den praxisrelevanteren Fall, in dem der Index der regulären Variation α unbekannt ist. Bislang hängt der Backward-Schätzer $\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}$ vom wahren Parameter α ab, so dass für die Situation, in der α unbekannt ist, eine Modifikation des Backward-Schätzers notwendig ist. Drees et al. (2015) schlagen dazu zwei unterschiedliche Herangehensweisen vor:

1. Der Index α wird separat geschätzt, wie beispielsweise durch den Hill-Schätzer

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^n \log(X_i/\hat{u}_n) \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}.$$

Der Schätzer $\hat{\alpha}_n$ wird dann für α in den Backward-Schätzer eingesetzt, das heißt, wir betrachten

$$\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(\hat{b}, \Theta_t)}(x) := 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i}\right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\{X_i/X_{i-t} > x, X_i > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}, \quad x \in [x_0, \infty).$$

2. Die zugrunde liegende Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ wird gemäß Lemma 2.1 von Drees et al. (2015) derart transformiert, dass die transformierte Zeitreihe regulär variierend mit Index $\alpha = 1$ ist:

$$X_t^* := \frac{1}{1 - F(X_t)}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Diese Transformation hängt von der Survivalfunktion \bar{F} ab, welche ebenfalls üblicherweise

unbekannt ist. Diese kann beispielsweise durch

$$\hat{F}_n(x) = 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i \leq x\}$$

geschätzt werden. Die transformierten Zufallsvariablen lautet dann

$$\hat{X}_t^* = \frac{1}{\hat{F}_n(X_t)}.$$

Wir beschränken uns fortan auf die erste Herangehensweise. Tatsächlich führen die konzeptionellen Unterschiede beider Herangehensweisen im Allgemeinen auch zu unterschiedlichen Ergebnissen. Darüber hinaus unterscheiden sich beide Herangehensweisen in ihrer Anwendbarkeit. Beispielsweise kann die transformierte Zeitreihe $(X_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ regulär variierend sein, während die ursprüngliche Zeitreihe es nicht ist, womit diese per se keinen Tail- beziehungsweise Spektralprozess besitzt. Demzufolge ist der Anwendungsbereich der zweiten Herangehensweise ein größerer. Jedoch stellt ebendiese Herangehensweise im Vorfeld auch eine technisch aufwendigere und anspruchsvollere Herausforderung dar, wenn die Survivalfunktion \bar{F} unbekannt ist. Dies liegt unter anderem daran, dass die Mischungseigenschaft in Voraussetzung (B) für die transformierten Stichproben $\hat{X}_1^*, \dots, \hat{X}_n^*$ im Allgemeinen nicht gegeben ist. Jener zweiter Ansatz wird im zweiten Teil dieser Dissertation aufgegriffen, um das extremale Abhängigkeitsverhalten von Zufallspaaren im Rahmen von bivariaten strikt stationären Zeitreihen zu untersuchen (siehe Kapitel 7).

Ziel ist es nun, auch für den modifizierten Backward-Schätzer $\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(\hat{b}, \Theta_t)}$ die asymptotische Normalität zu überprüfen. Dazu wird Bedingung (C') benötigt. Des Weiteren benötigen wir, dass der Bias des Hill-Schätzers $\hat{\alpha}_n$ asymptotisch vernachlässigbar ist. Dazu fordern wir für alle Folgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, die $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ erfüllen, dass

$$\left| E[\log(X_0/(s_n u_n)) \mid X_0 > s_n u_n] - 1/\alpha \right| = o((n v_n)^{-1/2}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

gilt.

Bemerkung 2.6. Die linke Seite von (2.26) konvergiert in jedem Fall gegen 0. Durch Anwendung von Lemma 1.10 für $g = \log^+$ folgt nämlich

$$E[\log(X_0/(s_n u_n)) \mid X_0 > s_n u_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[\log(Y_0)].$$

Ferner gilt für die Pareto-verteilte Zufallsvariable Y_0

$$E[\log(Y_0)] = \int_1^\infty \log(y) \alpha y^{-(\alpha+1)} dy = \left[-\frac{1}{\alpha} y^{-\alpha} (\alpha \log(y) + 1) \right]_1^\infty = \frac{1}{\alpha}.$$

◇

Mit Hilfe der Bias-Bedingungen kann das asymptotische Verhalten des Hill-Schätzers spezifiziert werden.

Lemma 2.7. *Wenn die Voraussetzungen (2.5), (A(x₀)), (B), (C'), (D) und (2.26) erfüllt sind, gilt*

$$(nv_n)^{1/2}(\hat{\alpha}_n - \alpha) = S_n^\alpha \left(\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n}) + o_P(1) \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

und damit die schwache Konvergenz

$$(nv_n)^{1/2}(\hat{\alpha}_n - \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha Z(\phi_{1,1}) - \alpha^2 Z(\phi_{0,1}),$$

wobei Z derselbe zentrierte Gaußprozess wie in Theorem 2.4 ist.

Theorem 2.8. *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe, die regulär variierend mit Index $\alpha \in (0, \infty)$ ist. Falls die Voraussetzungen (2.5), (A(x₀)), (B), (C'), (D), (2.22), (2.23) und (2.26) für ein $x_0 \geq 0$ und $y_0 \in [x_0, \infty) \cap (0, \infty)$ erfüllt sind, folgt die schwache Konvergenz*

$$(nv_n)^{1/2} \left(\begin{array}{c} (\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x_t) - F^{(\Theta_t)}(x_t))_{x_t \in [x_0, \infty)} \\ (\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y_t) - F^{(\Theta_t)}(y_t))_{y_t \in [y_0, \infty)} \end{array} \right)_{|t| \in \{1, \dots, \bar{t}\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c} (Z(\phi_{2,x_t,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x_t)Z(\phi_{1,1}))_{x_t \in [x_0, \infty)} \\ (Z(\phi_{3,y_t,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y_t)Z(\phi_{1,1}) + Z_{\alpha,t}(y_t))_{y_t \in [y_0, \infty)} \end{array} \right)_{|t| \in \{1, \dots, \bar{t}\}}$$

mit

$$Z_{\alpha,t}(y_t) := (\alpha^2 Z(\phi_{0,1}) - \alpha Z(\phi_{1,1})) E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y_t\}],$$

wobei Z derselbe zentrierte Gaußprozess wie in Theorem 2.4 ist. Die explizite Kovarianzstruktur des Grenzprozesses ist in Gleichung (2.95) und den nachfolgenden gegeben.

Bei einem direkten Vergleich von Theorem 3.2 von Davis et al. (2018) und obigen Theorem 2.8 fällt auf, dass die asymptotische Verteilung sowohl des Forward-Schätzers als auch des Backward-Schätzers unverändert bleibt, wenn anstelle der deterministischen Schranken u_n zufällige Schrankehöhen \hat{u}_n verwendet werden, die $\hat{u}_n/u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ in Wahrscheinlichkeit erfüllen. In Verbindung mit Lemma 2.5 ist es also retrospektiv gerechtfertigt, dass in den Simulationsstudien von Drees et al. (2015) und Davis et al. (2018) Ordnungsstatistiken $X_{n-k_n:n}$ als zufällige Schranke für $u_n = F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)$ verwendet wurden.

2.2. Beispiel: Stochastische Rekurrenzgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir für unabhängig und identisch verteilte $[0, \infty)^2$ -wertige Zufallsvektoren (C_t, D_t) , $t \in \mathbb{Z}$, die stochastische Rekurrenzgleichung

$$X_t = C_t X_{t-1} + D_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.27)$$

Nach Korollar 2.2 von Basrak et al. (2002) existiert eine strikt stationäre Lösung $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ dieser Rekurrenzgleichung, wenn $E[\log(C_1)] < 0$ und $E[\log^+(D_1)] < \infty$ gilt. Wir nehmen zusätzlich

noch an, dass die Verteilung von C_1 nicht auf einem Gitter konzentriert ist und ein $\alpha > 0$ existiert, so dass $E[C_1^\alpha] = 1$, $E[C_1^\alpha \log^+(C_1)] < \infty$ und $E[D_1^\alpha] < \infty$ gilt. Nach Bemerkung 2.5 und Korollar 2.6 von Basrak et al. (2002) ist dann die stationäre Lösung $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ regulär variierend mit Index α . Der zugehörigen Tailprozess wird wie gewohnt mit $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ bezeichnet.

Drees et al. (2015) haben gezeigt, dass Voraussetzung (B) bei geeigneter Wahl von r_n gültig ist, wenn $\log^2(n)/n = o(v_n)$ und $v_n = o(1/\log(n))$ für $n \rightarrow \infty$ gelten, genauso wie die Gültigkeit von Voraussetzung (C). Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass insbesondere Voraussetzung (C') und Bedingung (E), die gerade Voraussetzung (D) impliziert, erfüllt sind. Für den Nachweis von (C') wird die schwache Zusatzbedingung $r_n v_n^{1/(1+\delta)} = O(1)$ für ein $\delta > 0$ angenommen. Tatsächlich kann Ungleichung (2.13) aus Voraussetzung (C') durch Anwendung von Resultaten für allgemeine Markov-Ketten nachgewiesen werden, wenn zusätzlich angenommen wird, dass die Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ aperiodisch und irreduzibel ist (siehe Drees und Knežević, 2020). Nach Buraczewski et al. (2016, Proposition 2.2.1 und Lemma 2.2.2) folgt die Irreduzibilität und Aperiodizität der Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ bereits unter der schwachen Annahme, dass (C_1, D_1) absolut stetig sind. Deswegen ungeachtet werden wir den Nachweis von (2.13) mittels direkter Rechnungen durchführen, die keine zusätzlichen Annahmen voraussetzen.

Sei $\Pi_{i,j} := \prod_{l=i}^j C_l$ und $V_{i,j} := \sum_{l=i}^j \Pi_{l+1,j} D_l$ für $i, j \in \mathbb{Z}$. Dann folgt durch Iteration der Gleichung (2.27) die Darstellung

$$X_k = \Pi_{j+1,k} X_j + V_{j+1,k}.$$

Bezeichne der Übersichtlichkeit halber $v_{n,\varepsilon} := P\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}$ mit $u_{n,\varepsilon} = (1 - \varepsilon)u_n$.

Wir halten nun einige nützliche Ungleichungen fest. Die Potter-Schranken (Bingham et al., 1987, Theorem 1.5.6) liefern: Zu jedem $\delta > 0$ und $x^* > 0$ kann $n \in \mathbb{N}$ derart groß gewählt werden, so dass

$$\frac{P\{X_0 > xu_n\}}{P\{X_0 > u_n\}} \leq (1 + \delta)x^{-\alpha} \max\{x^{-\delta}, x^\delta\} \quad (2.28)$$

für alle $x \in (x^*, \infty)$ gilt. Da C_1 keine Konstante beschreibt, gilt nach der Jensenschen Ungleichung $\varrho := E[C_1^\xi] < (E[C_1^\alpha])^{\xi/\alpha} = 1$ für alle $\xi \in (0, \alpha)$. Ferner ergibt sich nach Lemma 1.10, dass jede stetige Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die $0 \leq g(x) \leq ax^\tau + b$ für gewisse $a, b \geq 0$, $\tau \in (0, \alpha)$ erfüllt, insbesondere

$$E\left[g\left(\frac{X_0}{cu_n}\right) \mathbf{1}\{X_0 > cu_n\}\right] \leq 2E[g(Y_0)]P\{X_0 > cu_n\} \quad (2.29)$$

für $c > 0$ und ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Folglich gilt nach der verallgemeinerten Markov-Ungleichung und der stochastischen Unabhängigkeit der C_l ,

$$P\left\{\Pi_{j+1,k} > \frac{u_{n,\varepsilon}}{2t}\right\} \leq E[\Pi_{j+1,k}^\xi] \left(\frac{2t}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi = \varrho^{k-j} \left(\frac{2t}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \quad \text{für } t > 0. \quad (2.30)$$

Aus der Potter-Schranke (2.28) und $V_{1,k} \leq X_k$ folgt für hinreichend kleine $\delta > 0$

$$P\{V_{1,k} > u_{n,\varepsilon}/2\} \leq P\{X_k > u_{n,\varepsilon}/2\} \leq (1 + \delta)2^{\alpha+\delta} v_{n,\varepsilon} \leq 2^{1+\alpha} v_{n,\varepsilon}. \quad (2.31)$$

Aus Ungleichung (2.29) folgt

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}/2\}\right] &\leq 2E[(Y_0/2)^\xi]P\{X_0 > u_{n,\varepsilon}/2\} \\
&\leq (1 + \delta)2^{1+\alpha+\delta-\xi}v_{n,\varepsilon}E[Y_0^\xi] \\
&\leq 2^{1+\alpha}v_{n,\varepsilon}E[Y_0^\xi]
\end{aligned} \tag{2.32}$$

für hinreichend kleine $\delta \in (0, \xi)$. Des Weiteren existiert nach Beispiel A.3 von Drees et al. (2015) eine Konstante $c > 0$, so dass

$$P\{\min\{X_0, X_k\} > u\} \leq cP\{X_0 > u\}(P\{X_0 > u\} + \varrho^k), \tag{2.33}$$

$$P\{\Pi_{1,k}X_0 > u/2, X_0 > u\} \leq 2^{\xi+1}\varrho^k E[Y_0^\xi]P\{X_0 > u\} \tag{2.34}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und hinreichend große u gilt.

Nachweis von Bedingung (E): Aus der stochastischen Unabhängigkeit von $(V_{j+1,k}\Pi_{j+1,k})$ und (X_0, X_j) , (2.30), (2.31) und (2.33) folgt

$$\begin{aligned}
&P\{\min\{X_0, X_j, X_k\} > u_{n,\varepsilon}\} \\
&\leq P\{\min\{X_0, X_j\} > u_{n,\varepsilon}, V_{j+1,k} > u_{n,\varepsilon}/2\} + P\{\min\{X_0, X_j\} > u_{n,\varepsilon}, \Pi_{j+1,k}X_j > u_{n,\varepsilon}/2\} \\
&= P\{\min\{X_0, X_j\} > u_{n,\varepsilon}\}P\{V_{j+1,k} > u_{n,\varepsilon}/2\} \\
&\quad + \int_{(u_{n,\varepsilon}, \infty)^2} P\left\{\Pi_{j+1,k} > \frac{u_{n,\varepsilon}}{2t}\right\} \mathcal{L}(X_0, X_j)(d(s, t)) \\
&\leq c2^{1+\alpha}v_{n,\varepsilon}^2(v_{n,\varepsilon} + \varrho^j) + \varrho^{k-j}2^\xi E\left[\left(\frac{X_j}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathbf{1}\{\min\{X_0, X_j\} > u_{n,\varepsilon}\}\right].
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichungen $X_j^\xi \leq 2^\xi((\Pi_{1,j}X_0)^\xi + V_{1,j}^\xi)$, $V_{1,j} \leq X_j$ und der stochastischen Unabhängigkeit von $(V_{1,j}\Pi_{1,j})$ und X_0 ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\frac{X_j}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathbf{1}\{\min\{X_0, X_j\} > u_{n,\varepsilon}\}\right] \\
&\leq 2^\xi E\left[\left(\frac{\Pi_{1,j}X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\} + \left(\frac{V_{1,j}}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}, V_{1,j} > u_{n,\varepsilon}/2\}\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{V_{1,j}}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}, V_{1,j} \leq u_{n,\varepsilon}/2, \Pi_{1,j}X_0 > u_{n,\varepsilon}/2\}\right] \\
&\leq 2^\xi \left(\varrho^j E\left[\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}/2\}\right] + v_{n,\varepsilon} E\left[\left(\frac{X_j}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathbf{1}\{X_j > u_{n,\varepsilon}/2\}\right] \right. \\
&\quad \left. + 2^{-\xi} P\{X_0 > u_{n,\varepsilon}, \Pi_{1,j}X_0 > u_{n,\varepsilon}\} \right) \\
&\leq 2^\xi ((\varrho^j + v_{n,\varepsilon})2^{1+\alpha}v_{n,\varepsilon}E[Y_0^\xi] + 2\varrho^j v_{n,\varepsilon}E[Y_0^\xi]),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Ungleichungen (2.32) und (2.34) angewandt wurden. Demzufolge

gilt

$$\begin{aligned} P\{\min\{X_0, X_j, X_k\} > u_{n,\varepsilon}\} \\ &\leq c2^{1+\alpha}v_{n,\varepsilon}^2(v_{n,\varepsilon} + \varrho^j) + \varrho^{k-j}2^{2\xi}((\varrho^j + v_{n,\varepsilon})2^{1+\alpha}v_{n,\varepsilon}E[Y_0^\xi] + 2\varrho^jv_{n,\varepsilon}E[Y_0^\xi]) \\ &\leq c2^{1+\alpha}v_{n,\varepsilon}^2(v_{n,\varepsilon} + \varrho^j) + \varrho^{k-j}2^{2\xi+1}E[Y_0^\xi]v_{n,\varepsilon}((2^\alpha + 1)\varrho^j + 2^\alpha v_{n,\varepsilon}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$P(\min\{X_j, X_k\} > u_{n,\varepsilon} \mid X_0 > u_{n,\varepsilon}) \leq C(v_{n,\varepsilon}^2 + v_{n,\varepsilon}(\varrho^j + \varrho^{k-j}) + \varrho^k) =: \tilde{s}_n(j, k)$$

für ein hinreichend großes $C > 0$. Nun gilt für alle $k \geq j \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n(j, k) = C\varrho^k =: \tilde{s}_\infty(j, k),$$

so dass wegen $r_n v_{n,\varepsilon} \rightarrow \infty$ die Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k \leq r_n} \tilde{s}_n(j, k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C \left(\frac{r_n(r_n + 1)}{2} v_{n,\varepsilon}^2 + v_{n,\varepsilon} \sum_{j=1}^{r_n} (r_n - j + 1) \varrho^j + v_{n,\varepsilon} \sum_{l=0}^{r_n-1} \varrho^l (r_n - l) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{r_n} k \varrho^k \right) \\ &= C \sum_{k=1}^{\infty} k \varrho^k \\ &= \sum_{1 \leq j \leq k < \infty} \tilde{s}_\infty(j, k) < \infty \end{aligned}$$

folgt. Demnach ist Bedingung (E) erfüllt.

Nachweis von Voraussetzung (C'): Mit Hilfe der Ungleichung $\log^+(a+b) \leq \log^+(2a) + \log^+(2b)$ für alle $a, b \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \max \left\{ \log^+ \left(\frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} \right), \mathbf{1}\{X_k > u_{n,\varepsilon}\} \right\} \right] \\ \leq E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \max \left\{ \log^+ \left(\frac{\Pi_{1,k} X_0}{u_{n,\varepsilon}/2} \right), \mathbf{1}\{\Pi_{1,k} X_0 > u_{n,\varepsilon}/2\} \right\} \right] \\ + E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \max \left\{ \log^+ \left(\frac{V_{1,k}}{u_{n,\varepsilon}/2} \right), \mathbf{1}\{V_{1,k} > u_{n,\varepsilon}/2\} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von $(V_{1,k}, \Pi_{1,k})$ und X_0 , $V_{1,k} \leq X_k$, (2.29) und (2.30) lässt sich der zweite Summand obiger Gleichung (2.35) wie folgt nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \max \left\{ \log^+ \left(\frac{V_{1,k}}{u_{n,\varepsilon}/2} \right), \mathbf{1}\{V_{1,k} > u_{n,\varepsilon}/2\} \right\} \right] \\ \leq E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \right] \left(E \left[\log^+ \left(\frac{V_{1,k}}{u_{n,\varepsilon}/2} \right) \right] + P\{X_k > u_{n,\varepsilon}/2\} \right) \\ \leq 2^{\alpha+3} E[\log(Y_0)] (E[\log(Y_0)] + 1) v_{n,\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Derweil gilt wegen $\log^+(a) = \log^+(a^b)/b \leq a^b \mathbf{1}\{a > 1\}/b$ für alle $a, b > 0$, der Unabhängigkeit von X_0 und $\Pi_{1,k}$ sowie (2.29)

$$\begin{aligned} E\left[\log^+\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)\log^+\left(\frac{\Pi_{1,k}X_0}{u_{n,\varepsilon}/2}\right)\right] &\leq \frac{1}{\beta\xi}E\left[\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\beta\left(\frac{\Pi_{1,k}X_0}{u_{n,\varepsilon}/2}\right)^\xi\mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}\right] \\ &= \frac{1}{\beta\xi}E\left[\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)^{\beta+\xi}\mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}\right]E[(2\Pi_{1,k})^\xi] \\ &\leq \frac{2^{\xi+1}}{\beta\xi}E[Y_0^{\beta+\xi}]\varrho^k v_{n,\varepsilon} \end{aligned}$$

für alle $\beta \in (\alpha - \xi)$ und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. In Kombination mit Ungleichung (2.30) folgt dann mit derselben Argumentation

$$\begin{aligned} E\left[\log^+\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)\mathbf{1}\{\Pi_{1,k}X_0 > u_{n,\varepsilon}/2\}\right] &= \int_0^\infty \log^+\left(\frac{x}{u_{n,\varepsilon}}\right)P\left\{\Pi_{1,k} > \frac{u_{n,\varepsilon}}{2x}\right\}\mathcal{L}(X_0)(dx) \\ &\leq 2^\xi \rho^k \int_0^\infty \log^+\left(\frac{x}{u_{n,\varepsilon}}\right)\left(\frac{x}{u_{n,\varepsilon}}\right)^\xi \mathcal{L}(X_0)(dx) \\ &\leq \frac{2^\xi}{\beta} \rho^k E\left[\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)^{\beta+\xi}\mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}\right] \\ &\leq \frac{2^{\xi+1}}{\beta} E[Y_0^{\beta+\xi}]\varrho^k v_{n,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Demzufolge ist der erste Summand der rechten Seite von (2.30) nach oben durch

$$(1 + \xi^{-1})\beta^{-1}2^{\xi+1}E[Y_0^{\beta+\xi}]\varrho^k v_{n,\varepsilon}$$

beschränkt. Demnach gilt also

$$\begin{aligned} E\left[\log^+\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right)\max\left\{\log^+\left(\frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}}\right), \mathbf{1}\{X_k > u_{n,\varepsilon}\}\right\}\right] \\ \leq (1 + \xi^{-1})\beta^{-1}2^{\xi+1}E[Y_0^{\beta+\xi}]\varrho^k v_{n,\varepsilon} + 2^{\alpha+3}E[\log(Y_0)](E[\log(Y_0)] + 1)v_{n,\varepsilon}^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Mit den obigen Argumenten ergibt sich auf analoge Weise

$$\begin{aligned} E\left[\mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}\max\left\{\log^+\left(\frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}}\right), \mathbf{1}\{X_k > u_{n,\varepsilon}\}\right\}\right] \\ \leq (1 + \xi^{-1})2^{\xi+1}E[Y_0^\xi]\varrho^k v_{n,\varepsilon} + 2^{\alpha+2}(E[\log(Y_0)] + 1)v_{n,\varepsilon}^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$.

Aus den vorangegangenen Gleichungen (2.36) und (2.37) folgt also, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} E\left[\max\left\{\log^+\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}}\right), \mathbf{1}\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}\right\}\max\left\{\log^+\left(\frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}}\right), \mathbf{1}\{X_k > u_{n,\varepsilon}\}\right\} \mid X_0 > u_{n,\varepsilon}\right] \\ \leq C(\varrho^k + v_{n,\varepsilon}) \\ =: s'_n(k) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(k) &= C \varrho^k =: s'_\infty(k) \quad \text{und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} s'_n(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C r_n v_{n,\varepsilon} + C \sum_{k=1}^{r_n} \rho^k = C \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k < \infty, \end{aligned}$$

so dass Bedingung (2.13) erfüllt ist.

Mit Hilfe der bisher verwendeten Abschätzungen für \log^+ , den Ungleichungen $V_{1,k} \leq X_k$, (2.27) und der stochastischen Unabhängigkeit von X_0 und $(\Pi_{1,k}, V_{1,k})$ ergibt sich wegen $(a+b)^{1+\delta} \leq 2^{1+\delta}(a^{1+\delta} + b^{1+\delta})$ für $a, b \geq 0$ und $\delta > 0$

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\log^+ \left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right) \log^+ \left(\frac{X_k}{u_{n,\varepsilon}} \right) \right)^{1+\delta} \right] \\ & \leq \left(\frac{1+\delta}{\beta} \right)^{1+\delta} E \left[\left(\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right)^{\beta/(1+\delta)} \mathbf{1}_{\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}} \left(\log^+ \left(\frac{\Pi_{1,k} X_0}{u_{n,\varepsilon}/2} \right) + \log^+ \left(\frac{V_{1,k}}{u_{n,\varepsilon}/2} \right) \right) \right)^{1+\delta} \right] \\ & \leq \left(\frac{(1+\delta)^2}{\beta \xi} \right)^{1+\delta} E \left[\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right)^\beta \mathbf{1}_{\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}} \left(\left(\frac{\Pi_{1,k} X_0}{u_{n,\varepsilon}/2} \right)^{\xi/(1+\delta)} + \left(\frac{V_{1,k}}{u_{n,\varepsilon}/2} \right)^{\xi/(1+\delta)} \right)^{1+\delta} \right] \\ & \leq \left(\frac{2(1+\delta)^2}{\beta \xi} \right)^{1+\delta} \left(E \left[\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right)^\beta \left(\frac{\Pi_{1,k} X_0}{u_{n,\varepsilon}/2} \right)^\xi \mathbf{1}_{\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}} \right] \right. \\ & \quad \left. + E \left[\left(\frac{X_0}{u_{n,\varepsilon}} \right)^\beta \mathbf{1}_{\{X_0 > u_{n,\varepsilon}\}} \right] E \left[\left(\frac{V_{1,k}}{u_{n,\varepsilon}/2} \right)^\xi \mathbf{1}_{\{V_{1,k} > u_{n,\varepsilon}/2\}} \right] \right) \\ & \leq \left(\frac{2(1+\delta)^2}{\beta \xi} \right)^{1+\delta} \left(2^{\xi+1} E[Y_0^{\beta+\xi}] \varrho^k v_{n,\varepsilon} + 2^{\alpha+3} E[Y_0^\beta] E[Y_0^\xi] v_{n,\varepsilon}^2 \right) \\ & \leq \tilde{C} (\varrho^k v_{n,\varepsilon} + v_{n,\varepsilon}^2) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$, wobei $\tilde{C} > 0$ eine geeignete Konstante ist. Unter der Annahme $r_n v_n^{1/(1+\delta)} = O(1)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{r_n} \left(E \left[\left(\log^+ \left(\frac{X_0}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_k}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^{1+\delta} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right] \right)^{1/(1+\delta)} \\ & \leq \tilde{C}^{1/(1+\delta)} \sum_{k=1}^{r_n} (\varrho^k + v_{n,\varepsilon})^{1/(1+\delta)} \\ & \leq (2\tilde{C})^{1/(1+\delta)} \left(r_n v_{n,\varepsilon}^{1/(1+\delta)} + \sum_{k=1}^{r_n} \rho^{k/(1+\delta)} \right) \\ & = O(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

so dass Bedingung (2.14) und damit Voraussetzung (C') erfüllt ist. \diamond

2.3. Beweise

Im diesem Unterkapitel werden sämtliche Resultate aus Abschnitt 2.1 nachgewiesen. Zunächst wird jedoch der behauptete Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen (C), (D) und (E) nachgewiesen.

Lemma 2.9. *Aus Bedingung (E) folgen die Voraussetzungen (C) und (D).*

Beweis. Aus der strikten Stationarität und regulären Variation von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sowie Bedingung (E) resultiert

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{X_{n,i} \neq 0\} \right)^3 \right] &= \sum_{i,j,k=1}^{r_n} P\{\min\{X_i, X_j, X_k\} > (1-\varepsilon)u_n\} \\
&\leq r_n v_n + 6r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) P\{\min\{X_0, X_j, X_k\} > (1-\varepsilon)u_n\} \\
&\leq r_n v_n + 6r_n v_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \sum_{j=1}^k P(\min\{X_j, X_k\} > (1-\varepsilon)u_n \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n) \\
&\leq r_n v_n + 6r_n v_n \sum_{1 \leq j \leq k \leq r_n-1} s_n(j, k) \\
&= O(r_n v_n), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

□

2.3.1. Beweis von Proposition 2.1

Für den Nachweis von Proposition 2.1 wird zunächst eine Semimetrik auf $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ definiert, die die Funktionenklasse $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ totalbeschränkt.

Lemma und Definition 2.10. Die Abbildung $\rho_\Phi : \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0 \times \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0 \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\rho_\Phi(\psi_1, \psi_2) := \begin{cases} \rho_0(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{0, \varepsilon}, \\ \rho_1(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{1, \varepsilon}, \\ \rho_2(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{2, x_0, \varepsilon}^t \text{ (für ein } t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}), \\ \rho_3(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{3, y_0, \varepsilon}^t \text{ (für ein } t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}), \\ \max\{2, \log(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\} & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2.38}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\rho_0(\phi_{0,s}, \phi_{0,\tilde{s}}) &:= |\log(s) - \log(\tilde{s})|, \\
\rho_1(\phi_{1,s}, \phi_{1,\tilde{s}}) &:= (1-\varepsilon)^\alpha |s^{-\alpha} - \tilde{s}^{-\alpha}|, \\
\rho_2(\phi_{2,x,s}^t, \phi_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t) &:= |F^{(\Theta_t)}(x) - F^{(\Theta_t)}(\tilde{x})| + (1-\varepsilon)^\alpha |s^{-\alpha} - \tilde{s}^{-\alpha}|, \\
\rho_3(\phi_{3,y,s}^t, \phi_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^t) &:= |F^{(\Theta_{-t})}(1/y) - F^{(\Theta_{-t})}(1/\tilde{y})| + (1-\varepsilon)^\alpha |s^{-\alpha} - \tilde{s}^{-\alpha}|
\end{aligned}$$

für $x, \tilde{x} \in [x_0, \infty)$, $y, \tilde{y} \in [y_0, \infty)$ und $s, \tilde{s} \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, definiert eine Semimetrik auf $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$, die die Funktionenklasse $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ totalbeschränkt. \diamond

Beweis. 1. *Nachweis, dass ρ_ϕ eine Semimetrik definiert:* Die Abbildung ρ_0 beschreibt im Wesentlichen eine transformierte Betragsmetrik: Die Indizes der Funktionen $\phi_{0,s}$ und $\phi_{0,\tilde{s}}$ werden mittels des Logarithmus transformiert und dann mit Hilfe der Betragsmetrik verrechnet. Dasselbe gilt für die Abbildung ρ_1 , wobei hier mit Hilfe der Potenzfunktion $s \mapsto s^{-\alpha}$ die jeweiligen Indizes der Funktionen $\phi_{1,s}$ und $\phi_{1,\tilde{s}}$ monoton transformiert werden. Folglich beschreiben ρ_0 und ρ_1 Metriken auf $\Phi_{0,\varepsilon}$ und $\Phi_{1,\varepsilon}$.

Die Abbildungen ρ_2 und ρ_3 setzen sich jeweils additiv aus zwei Termen zusammen. Der zweite Summand stimmt in beiden Abbildungen überein und besitzt dieselbe Struktur wie die Metrik ρ_1 , so dass dieser Term die Metrik-Eigenschaften erfüllt. Für den ersten Summanden werden die Indizes x und \tilde{x} beziehungsweise y und \tilde{y} im Wesentlichen mit Hilfe der Verteilungsfunktion $F^{(\Theta_t)}$ beziehungsweise $F^{(\Theta_{-\tilde{t}})}$ monoton transformiert und dann mit Hilfe der Betragsmetrik ausgewertet. Bis auf Definitheit bleiben die Metrik-Eigenschaften der Betragsmetrik für ρ_2 und ρ_3 erhalten. Folglich sind ρ_2 und ρ_3 Semimetriken auf den jeweiligen Definitionsbereichen.

Nun nimmt ρ_Φ auf dem sonstigen Teil des Definitionsbereichs stets den Wert $\max\{2, \log(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\}$ an, so dass auf diesem Teil des Definitionsbereichs die Symmetrie und die Dreiecksungleichungseigenschaft trivialerweise erfüllt ist. Folglich muss nur noch für je zwei Abbildungen in $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ die Dreiecksungleichung überprüft werden.

- Sei $\psi_1, \psi_2 \in C$ für $C \in \{\Phi_{0,\varepsilon}, \Phi_{1,\varepsilon}, \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t, \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t \mid t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}\}$. Wenn $\psi_3 \in C$ gilt, dann ist die Dreiecksungleichung

$$\rho(\psi_1, \psi_2) \leq \rho(\psi_1, \psi_3) + \rho(\psi_3, \psi_2)$$

eine direkte Folgerung aus der entsprechenden Semimetrik ρ_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Andererseits folgt für $\psi_3 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0 \setminus C$, dass die rechte Seite der Dreiecksungleichung gleich $2 \max\{2, \log(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\}$ ist, womit die Dreiecksungleichung in dieser Situation ebenfalls gültig ist. Man beachte, dass $\rho(\psi_1, \psi_2) \leq \max\{2, \log(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\}$ für alle $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ gilt.

- Sei $\psi_1 \in C$ und $\psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0 \setminus C$. Dann ist $\rho(\psi_1, \psi_3) = \max\{2, \log(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\}$ oder $\rho(\psi_3, \psi_2) = \max\{2, \log(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\}$, so dass die Dreiecksungleichung stets erfüllt ist.

Demzufolge definiert ρ_Φ ein Semimetrik auf $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$.

2. *Nachweis der Totalbeschränktheit von $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ bezüglich ρ_ϕ :* Offensichtlich ist die Funktionenklasse $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ genau dann totalbeschränkt bezüglich der Semimetrik ρ_Φ , wenn $\Phi_{0,\varepsilon}$, $\Phi_{1,\varepsilon}$, $\Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t$ und $\Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t$ totalbeschränkt bezüglich ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 und ρ_3 sind. Daraus ergibt sich dann trivialerweise auch die Totalbeschränktheit von $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}$ bezüglich $\rho_\Phi|_{\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}}$.

Definiere $f_0, f_1 : [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_0(s) = \log(s) \quad \text{und} \quad f_1(s) = \left(\frac{s}{1-\varepsilon}\right)^{-\alpha}.$$

Da die Differentiale $f'_0(s) = 1/s$ und $f'_1(s) = -\alpha(1-\varepsilon)^{-\alpha}s^{-(\alpha+1)}$ sowohl beschränkt als auch von 0 weg beschränkt sind, sind die Abbildungen $\rho_0^*, \rho_1^* : [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\rho_0^*(s, \tilde{s}) = |f_0(s) - f_0(\tilde{s})| \quad \text{und} \quad \rho_1^*(s, \tilde{s}) = |f_1(s) - f_1(\tilde{s})|$$

Metriken auf $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, die äquivalent zur Betragsmetrik auf $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ sind. Das bedeutet, die von ρ_0^* und ρ_1^* erzeugten Topologien entsprechen gerade der kanonischen Topologie. Kompakte Mengen wie die Indexmenge $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ sind stets totalbeschränkt bezüglich der kanonischen Topologie, womit wegen der Identitäten

$$\rho_0(\phi_{0,s}, \phi_{0,\tilde{s}}) = \rho_0^*(s, \tilde{s}) \quad \text{und} \quad \rho_1(\phi_{1,s}, \phi_{1,\tilde{s}}) = \rho_1^*(s, \tilde{s})$$

die Funktionenklassen $\Phi_{0,\varepsilon}$ und $\Phi_{1,\varepsilon}$ totalbeschränkt bezüglich ρ_0 und ρ_1 sind.

Als Nächstes weisen wir die totale Beschränktheit des $\Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t$ bezüglich ρ_2 nach. Der erste Summand der Semimetrik ρ_2 ist stets kleiner oder gleich 1 (wie auch der zweite Summand). Hinzu kommt, dass nach Voraussetzung (A(x_0)) die Verteilungsfunktion $F^{(\Theta_t)}$ stetig auf $[x_0, \infty)$ ist. Demzufolge können für

$$m = \lceil 1/\delta \rceil$$

geeignete $x_1, \dots, x_m \in [x_0, \infty)$ gewählt werden, so dass

$$\begin{aligned} F^{(\Theta_t)}(x_{i+1}) - F^{(\Theta_t)}(x_i) &< \delta/2 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m-1\} \text{ und} \\ 1 - F^{(\Theta_t)}(x_m) &< \delta/2 \end{aligned}$$

gilt. Für den zweiten Summanden können, wie im Fall $\Phi_{1,\varepsilon}$ nachgewiesen, geeignete s_1, \dots, s_n gewählt werden, so dass

$$f(s_j) - f(s_{j+1}) < \delta/2$$

für alle $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt, wobei $s_0 := 1-\varepsilon$, $s_n := 1+\varepsilon$ und

$$n := \left\lceil \frac{1}{\delta} \left(1 - \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{-\alpha} \right) \right\rceil.$$

Demzufolge überdecken die Teilmengen

$$A_{i,j} := \left\{ \psi \in \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t \mid \rho_2(\psi, \phi_{2,x_i,s_j}^t) < \delta \right\},$$

$i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, die Funktionenklasse $\Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t$ vollständig. Mit völlig analoger Argumentation erhält man die totale Beschränktheit von $\Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t$ bezüglich ρ_3 , weshalb wir hier auf die explizite Ausführung verzichten. Hier gilt es lediglich zu beachten, dass $F^{(\Theta_t)}$ stetig auf $(0, 1/y_0]$ ist. Mit Anwendung der Time-Change-Formula aus Theorem 1.8 für $(i, s, t) = (-t, 0, 0)$

folgt nämlich

$$F^{(\Theta_t)}(1/x) = E[\mathbb{1}\{\Theta_t \leq 1/x\}] = E[\Theta_{-t} \mathbb{1}\{1/\Theta_{-t} \leq 1/x\}] = \int_x^\infty \vartheta F^{(\Theta_{-t})}(d\vartheta).$$

Nach Voraussetzung [\(A\(x₀\)\)](#) ist damit $F^{(\Theta_t)}$ stetig auf $(0, 1/x_0]$ für alle $|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}$. \square

Beweis von Proposition 6.1. Wir zeigen im Folgenden anhand des Theorems [A.2](#) (Drees und Rootzén, 2010, Korollar 3.6 und 3.9), dass für $\Phi \in \{\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}, \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0\}$ die Folge der Prozesse

$$\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi) := \left(\frac{v_n}{v_{n,\varepsilon}}\right)^{1/2} \tilde{Z}_n(\psi), \quad \psi \in \Phi,$$

schwach gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z_\varepsilon(\psi))_{\psi \in \Phi}$ konvergiert, wobei

$$v_{n,\varepsilon} := P\{X_{n,1} \neq 0\} = P\{X_0 > (1-\varepsilon)u_n\}.$$

In Kombination mit der Konvergenz $v_n/v_{n,\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1-\varepsilon)^\alpha$, die sich aus der regulären Variation von X_0 ergibt, folgt dann die schwache Konvergenz

$$(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z(\psi))_{\psi \in \Phi},$$

wobei $Z(\psi) := (1-\varepsilon)^{-\alpha/2} Z_\varepsilon(\psi)$. Die zugehörige Kovarianzstruktur des Grenzprozesses $(Z(\psi))_{\psi \in \Phi}$ lässt sich dann mit Hilfe der Gleichung

$$\text{Cov}(Z(\psi_1), Z(\psi_2)) = (1-\varepsilon)^{-\alpha} \text{Cov}(Z_\varepsilon(\psi_1), Z_\varepsilon(\psi_2)), \quad \psi_1, \psi_2 \in \Phi,$$

bestimmen.

Der Beweis ist in Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen und asymptotische Gleichstetigkeit von $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi}$ unterteilt. Nach Theorem 2.1 von Kosorok (2008) folgt dann die schwache Prozesskonvergenz.

Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen

Um mit Hilfe des Theorems [A.2](#) die schwache Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}}$ und $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}$ zu folgern, verifizieren wir die Bedingungen [\(C1\)](#), [\(C2\)](#) und [\(C3\)](#) aus Anhang [A.1](#).

Nachweis von (C1) und (C2) [unter (A(x₀)), (B), (C) (bzw. (D)) und (C')]: Die (minimale) Einhüllende einer Funktionenklasse \mathcal{F} ist definiert als $f_{\max} = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f|$. Die Funktionenklassen $\Phi_{0,\varepsilon}$, $\Phi_{1,\varepsilon}$, $\Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t$ und $\Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t$ besitzen die Einhüllenden

$$\begin{aligned} \phi_{0,1-\varepsilon}(z) &= \log\left(\frac{z_0}{1-\varepsilon}\right) \mathbb{1}\{z_0 > 1-\varepsilon\}, \\ \phi_{1,1-\varepsilon}(z) &= \mathbb{1}\{z_0 > 1-\varepsilon\}, \\ \phi_{2,x_0,1-\varepsilon}^t(z) &= \mathbb{1}\left\{\frac{z_t}{z_0} > x_0, z_0 > 1-\varepsilon\right\} \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\phi_{3,y_0,1-\varepsilon}^t(z) = \left(\frac{z_{-t}}{z_0}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{z_0}{z_{-t}} > y_0, z_{-t} > 0, z_0 > 1 - \varepsilon\right\},$$

wobei $z = (z_{-\tilde{t}}, \dots, z_{\tilde{t}}) \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1}$. Wegen der Definition von $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}$ in (2.19) ist also die Abbildung $\psi_{\max} : [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\psi_{\max}(z) = \max\left\{\mathbb{1}\{z_0 > 1 - \varepsilon\}, \max_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}} \left(\frac{z_{-t}}{z_0}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{z_0}{z_{-t}} > y_0, z_{-t} > 0, z_0 > 1 - \varepsilon\right\}\right\}$$

die Einhüllende von $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}$. Diese Funktion ist offensichtlich messbar und wegen der Abschätzung

$$\psi_{\max} \leq \max\{1, y_0^{-\alpha}\} < \infty$$

insbesondere beschränkt. Ferner gilt nach Voraussetzung (D) und der regulären Variation von X_0 , die $v_n/v_{n,\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^\alpha$ liefert,

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{X_{n,i} \neq 0\}\right)^{2+\delta}\right] = O(r_n v_{n,\varepsilon}), \quad n \rightarrow \infty,$$

für ein $\delta > 0$, so dass Bedingung (A.2) aus Theorem A.2 für $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}$ ist. Tatsächlich kann die Momenten-Bedingung (A.2) auch mit Hilfe von Voraussetzung (C) anhand einer einfachen Rechnung nachgewiesen werden.

Die restlichen Bedingungen in Theorem A.2, um Bedingung (C1) und (C2) für die Funktionenklasse $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}$ zu folgern, sind wegen Voraussetzung (B) in unserem Kontext bereits gegeben, so dass Bedingung (C1) und (C2) erfüllt sind. Im Übrigen sind nach Theorem A.2 dann auch die Bedingungen (D1), (D2) und (D2') für $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}$ erfüllt.

Die Funktionenklasse $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0 = \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0} \cup \Phi_{0,\varepsilon}$ besitzt als minimale Einhüllende die Abbildung $\phi_{\max} : [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\begin{aligned} \phi_{\max}(z) &= \max\{\phi_{0,1-\varepsilon}(z), \psi_{\max}(z)\} \\ &= \max\left\{\max\left\{1, \log\left(\frac{z_0}{1-\varepsilon}\right)\right\} \mathbb{1}\{z_0 > 1 - \varepsilon\}, \right. \\ &\quad \left. \max_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}} \left(\frac{z_{-t}}{z_0}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{z_0}{z_{-t}} > y_0, z_{-t} > 0, z_0 > 1 - \varepsilon\right\}\right\}, \end{aligned}$$

die ebenfalls messbar ist. Diese lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \phi_{\max}(z) &\leq \max\left\{1, \log\left(\frac{z_0}{1-\varepsilon}\right)\right\} \mathbb{1}\{z_0 > 1 - \varepsilon\}, \\ &\quad + \max_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}} \left(\frac{z_{-t}}{z_0}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{z_0}{z_{-t}} > y_0, z_{-t} > 0, z_0 > 1 - \varepsilon\right\} \\ &\leq \log^+\left(\frac{z_0}{1-\varepsilon}\right) + (1 + y_0^{-\alpha}) \mathbb{1}\{z_0 > 1 - \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ für $a, b \geq 0$ folgt dann

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{\max}(X_{n,i}) \right)^2 \right] \leq E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^2 \right] \quad (2.39)$$

$$+ 2(1 + y_0^{-\alpha})^2 E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{X_{n,i} \neq 0\} \right)^2 \right].$$

Der zweite Summand der rechten Seite von (2.39) ist wegen Voraussetzung (D) nicht von größerer Ordnung als $nv_{n,\varepsilon}$. Für den ersten Summanden gilt nach Voraussetzung (C')

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r_n-1} \sum_{j=1}^{r_n-1} E \left[\log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_j}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right]$$

$$\leq r_n v_{n,\varepsilon} \sum_{k=0}^{r_n-1} E \left[\log^+ \left(\frac{X_k}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_0}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right]$$

$$\leq r_n v_{n,\varepsilon} \sum_{k=0}^{r_n-1} s'_n(k)$$

$$= O(r_n v_{n,\varepsilon}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Folglich gilt

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{\max}(X_{n,i}) \right)^2 \right] = O(r_n v_{n,\varepsilon}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Nach Addendum A.3 folgen schließlich die Bedingungen (C1) und (C2) für die Funktionenklassen $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0$, wenn die Bedingungen (D1) und (D2') erfüllt sind. Der Nachweis von (D1) und (D2') wird im Abschnitt zum Nachweis der asymptotischen Gleichstetigkeit von $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ erbracht.

Nachweis von (C3) [unter (A(x₀)), (B), (C) und (C')]: Mit Hilfe der Tatsache, dass für alle Funktionen $\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0$ die Gleichheit

$$\psi(z) \mathbb{1}\{z_0 > 1 - \varepsilon\} = \psi(z)$$

erfüllt ist, kann unter Verwendung der strikten Stationarität von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ die folgende Identität für alle $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0$ gefolgert werden:

$$\frac{1}{r_n v_{n,\varepsilon}} \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^{r_n} \psi_1(X_{n,i}), \sum_{j=1}^{r_n} \psi_2(X_{n,j}) \right) \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{r_n v_{n,\varepsilon}} \left(\sum_{i=1}^{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} E[\psi_1(X_{n,i}) \psi_2(X_{n,j})] - r_n^2 E[\psi_1(X_{n,0})] E[\psi_2(X_{n,0})] \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) \left(E[\psi_1(X_{n,0})\psi_2(X_{n,k}) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n] \right. \\
&\quad \left. + E[\psi_1(X_{n,k})\psi_2(X_{n,0}) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n] \right) \\
&\quad + E[\psi_1(X_{n,0})\psi_2(X_{n,0}) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n] \\
&\quad - r_n v_{n,\varepsilon} E[\psi_1(X_{n,0}) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n] E[\psi_2(X_{n,0}) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n].
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Wir bestimmen nun das Grenzverhalten der einzelnen Summanden der rechte Seite von (2.42). Für Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}$ ist der letzte Summand stets von nicht höherer Ordnung als $r_n v_{n,\varepsilon}$, da $0 \leq \psi \leq \max\{1, y_0^{-\alpha}\}$ und damit insbesondere

$$0 \leq E[\psi(X_{n,0}) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n] \leq \max\{1, y_0^{-\alpha}\}$$

gilt. Für die anderen Summanden der rechten Seite von (2.42) ist es erforderlich, das Grenzverhalten der bedingten Verteilung von $X_{n,k}$ gegeben $X_0 > (1-\varepsilon)u_n$ zu bestimmen. Nach der Definition des Tailprozesses $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gilt die schwache Konvergenz

$$\mathcal{L}(X_{n,k} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}((1-\varepsilon)\bar{Y}_k), \tag{2.43}$$

wobei

$$\bar{Y}_k := (Y_{k-\bar{t}}, \dots, Y_{k+\bar{t}}) \mathbf{1}\{Y_k > 1\}.$$

Besitzen nun die Unstetigkeitsstellen der Funktionen in $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ keine Masse bezüglich der Grenzmaße $\mathcal{L}((1-\varepsilon)\bar{Y}_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, kann unter Anwendung des Continuous-Mapping-Theorems die schwache Konvergenz

$$\mathcal{L}(\psi(X_{n,k}) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\psi((1-\varepsilon)\bar{Y}_k)) \tag{2.44}$$

für alle $\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gefolgert werden. Sei dazu $s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ beliebig gewählt. Die Funktionenklasse $\Phi_{0,\varepsilon}$ enthält offensichtlich nur stetige Funktionen. Die Funktion $\phi_{1,s} \in \Phi_{1,\varepsilon}$ besitzt die Unstetigkeitsstellen

$$B_1(s) := \left\{ (z_{-\bar{t}}, \dots, z_{\bar{t}}) \in [0, \infty)^{2\bar{t}+1} \mid z_0 = s \right\}.$$

Unter Anwendung der Spektralzerlegung $Y_k = Y_0 \Theta_k$ resultiert für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Identität

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}((1-\varepsilon)\bar{Y}_k)(B_1(s)) &= P\{(1-\varepsilon)Y_k \mathbf{1}\{Y_k > 1\} = s\} \\
&= \int_{[0, \infty)} P\left\{ Y_0 \vartheta_k \mathbf{1}\{Y_0 \vartheta_k > 1\} = \frac{s}{1-\varepsilon} \right\} \mathcal{L}(\Theta_k)(d\vartheta_k) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da Y_0 eine Pareto-verteilte Zufallsvariable ist. Demnach besitzen alle Funktionen in $\Phi_{1,\varepsilon}$ und $\Phi_{0,\varepsilon}$

keine Masse bezüglich der Grenzmaße $\mathcal{L}((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Des Weiteren umfasst die Menge

$$B_2(s, x) := \left\{ z = (z_{-\tilde{t}}, \dots, z_{\tilde{t}}) \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \mid \frac{z_t}{z_0} = x, z_0 > s \text{ oder } \frac{z_t}{z_0} \geq x, z_0 = s \right\}$$

beziehungsweise

$$B_3(s, y) := \left\{ z = (z_{-\tilde{t}}, \dots, z_{\tilde{t}}) \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \mid \frac{z_0}{z_{-t}} = y, z_0 > s \text{ oder } \frac{z_0}{z_{-t}} \geq y, z_0 = s \right\}$$

alle Unstetigkeitsstellen der Funktion $\phi_{2,x,s}^t \in \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t$ beziehungsweise $\phi_{3,y,s}^t \in \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t$, da die Funktion $z \mapsto (z_{-t}/z_0)^\alpha$ stetig auf $[0, \infty)^{\tilde{t}} \times (0, \infty) \times [0, \infty)^{\tilde{t}}$ ist und demnach lediglich die Indikatorfunktion von $\phi_{2,x,s}^t$ dessen Unstetigkeitsstellen vorgibt. Auch diese Unstetigkeitsstellen $B_2(s, x)$ und $B_3(s, y)$ besitzen bezüglich der Maße $\mathcal{L}((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, keine Masse. Dies lässt sich anhand folgender Rechnung erkennen:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)(B_2(s, x)) \\ &= P \left\{ \frac{Y_{k+t}}{Y_k} \mathbb{1}\{Y_k > 1\} = x, Y_k \mathbb{1}\{Y_k > 1\} > \frac{s}{1 - \varepsilon} \right. \\ & \quad \left. \text{oder } \frac{Y_{k+t}}{Y_k} \mathbb{1}\{Y_k > 1\} \geq x, Y_k \mathbb{1}\{Y_k > 1\} = \frac{s}{1 - \varepsilon} \right\} \\ &\leq P \left\{ \frac{Y_{k+t}}{Y_k} \mathbb{1}\{Y_k > 1\} = x, Y_k \mathbb{1}\{Y_k > 1\} > \frac{s}{1 - \varepsilon} \right\} + P \left\{ Y_k \mathbb{1}\{Y_k > 1\} = \frac{s}{1 - \varepsilon} \right\} \\ &\leq P \left\{ \frac{Y_{k+t}}{Y_k} = x, Y_k > 1 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P\{X_0 > u_n\}} P \left\{ \frac{X_{k+t}}{X_k} = x, X_k > u_n, X_0 > u_n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P\{X_0 > u_n\}} P \left\{ \frac{X_t}{X_0} = x, X_0 > u_n, X_{-k} > u_n \right\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{X_t}{X_0} = x \mid X_0 > u_n \right) \\ &\leq P\{\Theta_t = x\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei der dritte Schritt aus der vorangegangenen Erkenntnis $\mathcal{L}(\bar{Y}_k)(B_1(s/(1 - \varepsilon))) = 0$ und der letzte Schritt wegen Voraussetzung $(A(x_0))$ folgt. Mit ähnlicher Argumentation ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)(B_3(s, y)) \\ &= P \left\{ \frac{Y_k}{Y_{k-t}} \mathbb{1}\{Y_k > 1\} = y, Y_k \mathbb{1}\{Y_k > 1\} > \frac{s}{1 - \varepsilon} \right. \\ & \quad \left. \text{oder } \frac{Y_k}{Y_{k-t}} \mathbb{1}\{Y_k > 1\} \geq y, Y_k \mathbb{1}\{Y_k > 1\} = \frac{s}{1 - \varepsilon} \right\} \\ &\leq P \left\{ \frac{Y_k}{Y_{k-t}} \mathbb{1}\{Y_k > 1\} = y, Y_k \mathbb{1}\{Y_k > 1\} > \frac{s}{1 - \varepsilon} \right\} + P \left\{ Y_k \mathbb{1}\{Y_k > 1\} = \frac{s}{1 - \varepsilon} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq P \left\{ \frac{Y_k}{Y_{k-t}} = y, Y_k > 1 \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit analog zur vorangegangenen Rechnung gezeigt werden kann. Demzufolge ist die schwache Konvergenz in (2.44) erfüllt.

Die reguläre Variation von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ garantiert nach Theorem 1.6 die schwache Konvergenz

$$\mathcal{L}(u_n^{-1}(X_j, \dots, X_k) \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)\mathcal{L}(Y_j, \dots, Y_k)$$

für alle $j, k \in \mathbb{Z}$. Sei zu je zwei Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ eine Abbildung $g_{\psi_1, \psi_2} : [0, \infty)^{k+2\bar{t}+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_{\psi_1, \psi_2}(z_{-\bar{t}}, \dots, z_{k+\bar{t}}) = \psi_1((z_{-\bar{t}}, \dots, z_{\bar{t}})\mathbb{1}\{z_0 > 1 - \varepsilon\})\psi_2((z_{k-\bar{t}}, \dots, z_{k+\bar{t}})\mathbb{1}\{z_k > 1 - \varepsilon\})$$

definiert. Seien $(s, x, y), (\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{y}) \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [x_0, \infty) \times [y_0, \infty)$ zwei Tripel, die die entsprechenden Parameter der Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ bezeichnen. Die Unstetigkeitsstellen von g_{ψ_1, ψ_2} sind dann in jeden Fall eine Teilmenge von

$$\begin{aligned} A := &\left\{ (z_{-\bar{t}}, \dots, z_{k+\bar{t}}) \in [0, \infty)^{k+2\bar{t}+1} \mid (z_{-\bar{t}}, \dots, z_{\bar{t}}) \in B_1(s) \cup B_2(s, x) \cup B_3(s, y) \right\} \\ &\cup \left\{ (z_{-\bar{t}}, \dots, z_{k+\bar{t}}) \in [0, \infty)^{k+2\bar{t}+1} \mid (z_{k-\bar{t}}, \dots, z_{k+\bar{t}}) \in B_1(\tilde{s}) \cup B_2(\tilde{s}, \tilde{x}) \cup B_3(\tilde{s}, \tilde{y}) \right\}, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((1 - \varepsilon)(Y_{-\bar{t}}, \dots, Y_{k+\bar{t}}))(A) &\leq \mathcal{L}(\bar{Y}_0)(B_1(s) \cup B_2(s, x) \cup B_3(s, y)) \\ &\quad + \mathcal{L}(\bar{Y}_k)(B_1(\tilde{s}) \cup B_2(\tilde{s}, \tilde{x}) \cup B_3(\tilde{s}, \tilde{y})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Demzufolge erhalten wir durch erneuter Anwendung des Continuous-Mapping-Theorems die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi_1(X_{n,0})\psi_2(X_{n,k}) \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n) &= \mathcal{L}(g_{\psi_1, \psi_2}(u_n^{-1}(X_{-\bar{t}}, \dots, X_{k+\bar{t}})) \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(g_{\psi_1, \psi_2}((1 - \varepsilon)(Y_{-\bar{t}}, \dots, Y_{k+\bar{t}}))) \\ &= \mathcal{L}(\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)) \end{aligned}$$

für alle $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Ferner folgt aus Voraussetzung (C') für ein $\delta > 0$ die Beschränktheit von

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E \left[|\psi_1(X_{n,0})\psi_2(X_{n,k})|^{1+\delta} \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n \right] < \infty$$

für alle $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Korollar zu Theorem 25.12 von Billingsley (1995) ergibt sich schließlich die Konvergenz der einzelnen Summanden auf der rechten Seite von (2.42).

Unter Voraussetzung (C) gilt für $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) E[\psi_1(X_{n,0})\psi_2(X_{n,k}) \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n] \\ & \leq \max\{1, y_0^{-2\alpha}\} P(X_k > (1 - \varepsilon)u_n \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n) \\ & \leq \max\{1, y_0^{-2\alpha}\} s_n(k) \end{aligned}$$

und für $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ gilt unter Voraussetzung (C')

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) E[\psi_1(X_{n,0})\psi_2(X_{n,k}) \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n] \\ & \leq \max\{1, y_0^{-2\alpha}\} E \left[\max \left\{ \log \left(\frac{X_0}{(1 - \varepsilon)u_n} \right), \mathbb{1}\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\} \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \max \left\{ \log \left(\frac{X_k}{(1 - \varepsilon)u_n} \right), \mathbb{1}\{X_k > (1 - \varepsilon)u_n\} \right\} \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n \right] \\ & \leq \max\{1, y_0^{-2\alpha}\} s'_n(k), \end{aligned}$$

so dass mit Hilfe des Satzes von Pratt (1960) die Konvergenz der rechte Seite von (2.42) gegen den Term

$$\begin{aligned} & E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)] \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)] + E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)] \right) \end{aligned}$$

für beide Funktionenklassen $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}$ und $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ gewährleistet ist. Demzufolge ist Bedingung (C3) erfüllt. Des Weiteren folgt aus der strikten Stationarität

$$\begin{aligned} E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\psi_1(X_{n,k})\psi_2(X_{n,0}) \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n,\varepsilon}^{-1} E[\psi_1(X_{n,k})\psi_2(X_{n,0})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n,\varepsilon}^{-1} E[\psi_1(X_{n,0})\psi_2(X_{n,-k})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\psi_1(X_{n,0})\psi_2(X_{n,-k}) \mid X_0 > (1 - \varepsilon)] \\ &= E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_{-k})], \end{aligned}$$

so dass nach Theorem A.2 (beziehungsweise Theorem 2.3 von Drees und Rootzén (2010)) die endlich-dimensionalen Randverteilungen des Prozesses $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}}$ beziehungsweise $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}$ schwach gegen die endlich-dimensionalen Randverteilungen eines Gaußprozesses $(Z_\varepsilon(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}}$ beziehungsweise $(Z_\varepsilon(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}$ mit Kovarianzen

$$\begin{aligned} & Cov(Z_\varepsilon(\psi_1), Z_\varepsilon(\psi_2)) \\ & = E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)] \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)] + E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)] \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[\psi_1((1-\varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1-\varepsilon)\bar{Y}_k)]$$

konvergiert.

Asymptotische Gleichstetigkeit

Hier weisen wir die asymptotische (stochastische) Gleichstetigkeit des Prozesses $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ bezüglich der Semimetrik ρ_{Φ} aus (2.38) nach. Zu diesem Zweck definieren wir für beliebige Funktionenklassen $\mathcal{H} \subseteq \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0$ und $\delta > 0$

$$D_n(\mathcal{H}, \delta) := \sup_{\substack{\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}, \\ \rho_{\Phi}(\psi_1, \psi_2) < \delta}} \left| \tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi_1) - \tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi_2) \right|.$$

Bezeichne des Weiteren $P^*(A) = \{P(B) \mid A \subseteq B, B \in \mathcal{A}\}$ die äußere Wahrscheinlichkeit einer Menge $A \subseteq \Omega$. Dann ist $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ asymptotisch gleichstetig bezüglich ρ_{Φ} , falls zu beliebigen $\tilde{\varepsilon}, \eta > 0$ ein $\delta > 0$ derart gewählt werden kann, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P^* \{D_n(\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0, \delta) > \tilde{\varepsilon}\} < \eta \quad (2.45)$$

gilt.

Da die Semimetrik ρ_{Φ} durch die Zahl $\max\{2, \log(\frac{1+\tilde{\varepsilon}}{1-\tilde{\varepsilon}})\}$ beschränkt wird, kann die Wahl von $\delta > 0$ a priori durch diese Schranke beschränkt werden. Für solche $\delta \in (0, \max\{2, \log(\frac{1+\tilde{\varepsilon}}{1-\tilde{\varepsilon}})\}]$ gilt dann

$$D_n(\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0, \delta) = \max \left\{ D_n(\Phi_{0,\varepsilon}, \delta), D_n(\Phi_{1,\varepsilon}, \delta), \max_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}} D_n(\Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t, \delta), \max_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}} D_n(\Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t, \delta) \right\}.$$

Mit Blick auf die Subadditivität von P^* heißt das, dass der Prozess $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ genau dann asymptotisch gleichstetig ist, wenn $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi}$ für alle $\Phi \in \{\Phi_{0,\varepsilon}, \Phi_{1,\varepsilon}, \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t, \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t \mid t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}\}$ asymptotisch gleichstetig ist. Daraus ergibt sich dann trivialerweise auch, dass $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ asymptotisch gleichstetig bezüglich $\rho_{\Phi}|_{\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ ist.

Wir verifizieren im Folgenden dazu die Bedingungen (D1), (D2'), (D3), (D5) und (D6) aus Anhang A.1 beziehungsweise Drees und Rootzén (2010).

Nachweis von (D1) und (D2') [unter (A(x₀)), (B), (C) und (C')]: Im Beweis zur schwachen Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen der Prozesse $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ und $(\tilde{Z}_{n,\varepsilon}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ hatten wir mittels Anwendung von Theorem A.2 gezeigt, dass neben den Bedingungen (C1) und (C2) insbesondere die Bedingungen (D1), (D2) und (D2') für $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}$ erfüllt sind. Diese Bedingungen sind dann trivialerweise auch für $\Phi_{1,\varepsilon}$, $\Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t$ und $\Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t$, $|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}$, erfüllt.

Wir folgern nun (D1) und (D2') für die Funktionenklasse $\Phi_{0,\varepsilon}$. Dies liefert dann, dass (D1) und (D2') insbesondere für $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0$ erfüllt ist. Offensichtlich gilt wegen Voraussetzung (C') für

alle $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{0,s}(X_{n,i}) \right] &= \sum_{i=1}^{r_n} E \left[\log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right] \\ &= r_n v_{n,\varepsilon} E \left[\log^+ \left(\frac{X_0}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right] \\ &\leq r_n v_{n,\varepsilon} s'_n(0) < \infty. \end{aligned}$$

Da die minimale Einhüllende $\phi_{0,1-\varepsilon}$ von $\Phi_{0,\varepsilon}$ endlich ist, ist Bedingung (D1) für $\Phi_{0,\varepsilon}$ erfüllt.

Um Bedingung (D2') nachzuweisen, halten wir zunächst fest, dass mittels der Markov-Ungleichung und Gleichung (2.40)

$$\begin{aligned} P \left\{ \sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) > \tilde{\varepsilon}(n v_{n,\varepsilon})^{1/2} \right\} &\leq \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2 n v_{n,\varepsilon}} E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^2 \right] \\ &= O \left(\frac{r_n v_{n,\varepsilon}}{n v_{n,\varepsilon}} \right) \\ &= O \left(\frac{r_n}{n} \right), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

folgt. Ferner existiert nach Voraussetzung (C') ein $\delta > 0$, so dass

$$\sum_{k=1}^{r_n} E \left[\left(\log^+ \left(\frac{X_0}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_k}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^{1+\delta} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right]^{1/(1+\delta)} = O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

In Kombination mit der Hölder-Ungleichung und Voraussetzung (B) ergibt sich für alle $\tilde{\varepsilon} > 0$

$$\begin{aligned} &E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^2 \mathbf{1} \left\{ \sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) > \tilde{\varepsilon}(n v_{n,\varepsilon})^{1/2} \right\} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} E \left[\log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_j}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \mathbf{1} \left\{ \sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) > \tilde{\varepsilon}(n v_{n,\varepsilon})^{1/2} \right\} \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} \left(E \left[\left(\log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_j}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^{1+\delta} \right]^{1/(1+\delta)} \right. \\ &\quad \times P \left\{ \sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) > \tilde{\varepsilon}(n v_{n,\varepsilon})^{1/2} \right\}^{\delta/(1+\delta)} \Big) \\ &\leq 2r_n \sum_{k=1}^{r_n} \left(E \left[\left(\log^+ \left(\frac{X_0}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_k}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^{1+\delta} \right]^{1/(1+\delta)} \right. \\ &\quad \times P \left\{ \sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) > \tilde{\varepsilon}(n v_{n,\varepsilon})^{1/2} \right\}^{\delta/(1+\delta)} \Big) \\ &\leq 2r_n v_{n,\varepsilon}^{1/(1+\delta)} \sum_{k=1}^{r_n} \left(E \left[\left(\log^+ \left(\frac{X_0}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \log^+ \left(\frac{X_k}{(1-\varepsilon)u_n} \right) \right)^{1+\delta} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right]^{1/(1+\delta)} \right. \\ &\quad \times P \left\{ \sum_{i=1}^{r_n} \log^+ \left(\frac{X_i}{(1-\varepsilon)u_n} \right) > \tilde{\varepsilon}(n v_{n,\varepsilon})^{1/2} \right\}^{\delta/(1+\delta)} \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O\left(r_n v_{n,\varepsilon}^{1/(1+\delta)} \left(\frac{r_n}{n}\right)^{\delta/(1+\delta)}\right) \\
&= O\left(r_n v_{n,\varepsilon} \left(\frac{r_n}{n v_{n,\varepsilon}}\right)^{\delta/(1+\delta)}\right) \\
&= o(r_n v_{n,\varepsilon}), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Demzufolge ist insbesondere Bedingung (D2') für $\Phi_{0,\varepsilon}$ erfüllt.

Nachweis von (D6) [unter (C') und (D)]: Sei hierzu $[0, \infty)_{\cup} := \cup_{l \in \mathbb{N}} [0, \infty)^{l(2\bar{t}+1)}$ die Menge aller Vektoren mit nicht-negativen Einträgen und beliebiger Länge. Diese Menge versehen wir mit \mathcal{A}_{\cup} , jener σ -Algebra, die von dem Mengensystem $\cup_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{B}([0, \infty)^{l(2\bar{t}+1)})$ erzeugt wird. Für die Bedingung (D6) benötigen wir die Überdeckungszahlen der Funktionenklassen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &:= \left\{ f_{0,s} \mid s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \right\}, \\
\mathcal{F}_1 &:= \left\{ f_{1,s} \mid s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \right\}, \\
\mathcal{F}_2^t &:= \left\{ f_{2,x,s}^t \mid x \in [x_0, \infty), s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \right\}, \\
\mathcal{F}_3^t &:= \left\{ f_{3,y,s}^t \mid y \in [y_0, \infty), s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \right\}
\end{aligned}$$

hinsichtlich einer im Nachfolgenden definierten zufälligen Semimetrik d_n , wobei die Ausdrücke $f_{0,s}, f_{1,s}, f_{2,x,s}^t, f_{3,y,s}^t : [0, \infty)_{\cup} \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen mit der Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned}
f_{0,s}(z) &= \sum_{i=1}^l \phi_{0,s}(z_i), & f_{1,s}(z) &= \sum_{i=1}^l \phi_{1,s}(z_i), & f_{2,x,s}^t(z) &= \sum_{i=1}^l \phi_{2,x,s}^t(z_i), \\
f_{3,y,s}^t(z) &= \sum_{i=1}^l \phi_{3,y,s}^t(z_i)
\end{aligned}$$

für $z = (z_1, \dots, z_l) \in [0, \infty)^{l(2\bar{t}+1)}$ und $l \in \mathbb{N}$ sind. Die Räume $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2^t$ und \mathcal{F}_3^t beinhalten also beliebig lange Summen, wobei deren Summanden Funktionen in $\Phi_{0,\varepsilon}, \Phi_{1,\varepsilon}, \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t$ und $\Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t$ sind. Die zufällige Semimetrik d_n auf $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2^t$ und \mathcal{F}_3^t wird wie folgt definiert:

$$d_n(f, g) := \left(\frac{1}{n v_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} \left(f(T_{n,j}^*) - g(T_{n,j}^*) \right)^2 \right)^{1/2}$$

für $f, g \in \mathcal{F}_i$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, wobei $T_{n,j}^* := (X_{n,i}^*)_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq j r_n}$ unabhängige Kopien der Blöcke $T_{n,j} = (X_{n,i})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq j r_n}$ bezeichnen und $m_n := \lfloor n/r_n \rfloor := \max\{j \in \mathbb{N}_0 \mid j \leq n/r_n\}$. Die Semimetrik d_n beschreibt gerade die L_2 -Semimetrik hinsichtlich des diskreten Maßes

$$\bar{Q}_n := \frac{1}{n v_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} \varepsilon_{T_{n,j}^*},$$

wobei $\varepsilon_{T_{n,j}^*}$ das Dirac-Maß im (zufälligen) Punkt $T_{n,j}^*$ bezeichnet. Bezeichne des Weiteren für ein

Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathcal{X}, \mathbb{B}(\mathcal{X}))$ und eine messbare Abbildung $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\|_{Q,r} := \left(\int_{\mathcal{X}} |f|^r dQ \right)^{1/r}$$

die L_r -Norm von f hinsichtlich Q , falls das Integral endlich ist.

Die Funktionenklasse $\Phi_{1,\varepsilon}$ ist linear geordnet. Das bedeutet, dass zu je zwei Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{1,\varepsilon}$

$$\psi_1 \leq \psi_2 \quad \text{oder} \quad \psi_2 \leq \psi_1$$

gilt. Diese lineare Ordnung bleibt trivialerweise auch für die Funktionen $f_{1,s} \in \mathcal{F}_1$ bestehen. Nun überträgt sich diese Struktur auch auf die Klasse der zugehörigen Subgraphen,

$$M_{f_{1,s}} = \left\{ (\lambda, z) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \cup \left| \lambda < f_{1,s}(z) \right. \right\},$$

dabei erfolgt die Ordnung für diese hinsichtlich Inklusion: Für alle $\tilde{s} \leq s$ gilt

$$M_{f_{1,s}} \subseteq M_{f_{1,\tilde{s}}}.$$

Nach Beispiel 2.6.1 von van der Vaart und Wellner (1996) stellen solche Mengensysteme stets VC-Klassen mit VC-Index 2 dar.

Zur Erinnerung: Ein Mengensystem \mathcal{M} von Teilmengen in \mathcal{X} heißt VC-Klasse, falls

$$V(\mathcal{M}) := \inf \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \max_{A \in \mathcal{X}, \#A=n} \#\{C \cap A \mid C \in \mathcal{M}\} < 2^n \right\}$$

endlich ist. In dem Fall bezeichnet $V(\mathcal{M})$ den VC-Index von \mathcal{M} . Man sagt dann für eine n -elementige Teilmenge $A \subset \mathcal{X}$, mit der Eigenschaft $\#\{C \cap A \mid C \in \mathcal{M}\} < 2^n$, dass diese von \mathcal{M} nicht zerschlagen wird.

Die Funktionenklasse $\Phi_{0,\varepsilon}$ ist ebenfalls linear geordnet, so dass mit der obigen Erkenntnis die Funktionenklasse \mathcal{F}_0 auch eine VC-Klasse mit VC-Index 2 ist. Nach Theorem A.1 (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 2.6.7) beziehungsweise Gleichung (A.1) gilt deswegen

$$\begin{aligned} N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i, d_n) &\leq K_i \left(\frac{\varepsilon_0}{\|f_{i,1-\varepsilon}\|_{\bar{Q}_n,2}} \right)^{-2} \\ &= K_i \varepsilon_0^{-2} \int_{[0,\infty)^{r_n(2i+1)}} f_{i,1-\varepsilon}^2 d\bar{Q}_n \\ &= K_i \varepsilon_0^{-2} \frac{1}{n v_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} f_{i,1-\varepsilon}^2(T_{n,j}^*) \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $i \in \{0,1\}$ und hinreichend große Konstanten $K_0, K_1 > 0$. Sei nun a_n , $n \in \mathbb{N}$, eine beliebige Folge, die gegen unendlich strebt. Ferner gilt nach Voraussetzung (D) und Gleichung (2.40)

$$E[f_{i,1-\varepsilon}^2(T_{n,1}^*)] = O(r_n v_{n,\varepsilon}), \quad i \in \{1,2\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

In Kombination mit der Markov-Ungleichung folgt also

$$\begin{aligned}
P\left\{\sum_{j=1}^{m_n} f_{i,1-\varepsilon}^2(T_{n,j}^*) > a_n n v_{n,\varepsilon}\right\} &\leq \frac{1}{a_n n v_{n,\varepsilon}} E\left[\sum_{j=1}^{m_n} f_{i,1-\varepsilon}^2(T_{n,j}^*)\right] \\
&= \frac{m_n}{a_n n v_{n,\varepsilon}} E[f_{i,1-\varepsilon}^2(T_{n,1}^*)] \\
&= O\left(\frac{m_n r_n v_{n,\varepsilon}}{a_n n v_{n,\varepsilon}}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{a_n}\right) \\
&= o(1), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Für jedes $\tilde{\delta} \in (0, 1)$ kann also $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass

$$N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i, d_n) \leq a_n K_i \varepsilon_0^{-2} \quad (2.46)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tilde{\delta}$ gilt. Tatsächlich kann Theorem A.2 für die Funktionenklassen \mathcal{F}_0 und \mathcal{F}_1 auch dann angewandt werden, wenn Bedingung (D6) durch die Bedingung ersetzt wird, dass für alle Folgen δ_n , $n \in \mathbb{N}$, mit $\delta_n \downarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $\tau > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P^* \left\{ \int_0^{\delta_n} (\log(N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i, d_n)))^{1/2} d\varepsilon_0 > \tau \right\} = 0, \quad i \in \{0, 1\}, \quad (2.47)$$

gilt (vergleiche van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 2.11.1). Wird nun beispielsweise $a_n = \delta_n^{-1}$ gewählt, dann gilt

$$\int_0^{\delta_n} \log(a_n K_i \varepsilon_0^{-2}) d\varepsilon_0 = \left[\varepsilon_0 \left(\log(a_n K_i \varepsilon_0^{-2}) + 2 \right) \right]_0^{\delta_n} = \delta_n \left(\log(K_i \delta_n^{-3}) + 2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Demzufolge ist wegen (2.46) Bedingung (2.47) erfüllt.

Die Funktionenklassen $\Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t$ und $\Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t$ sind nicht linear geordnet, so dass auch für die Klassen \mathcal{F}_2^t und \mathcal{F}_3^t keine lineare Ordnung vorliegen kann. Es lässt sich aber zeigen, dass die Funktionenklassen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2^{(r,t)} &:= \left\{ f_{2,x,s}^{(r,t)} \mid x \in [x_0, \infty), s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \right\}, \\
\mathcal{F}_3^{(r,t)} &:= \left\{ f_{3,y,s}^{(r,t)} \mid y \in [y_0, \infty), s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \right\},
\end{aligned}$$

mit den Abbildungen $f_{2,x,s}^{(r,t)}, f_{3,y,s}^{(r,t)} : [0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_{2,x,s}^{(r,t)}(z) = \sum_{i=1}^r \phi_{2,x,s}^t(z_i), \quad f_{3,y,s}^{(r,t)}(z) = \sum_{i=1}^r \phi_{3,y,s}^t(z_i),$$

für alle $r \in \mathbb{N}$ VC-Klassen darstellen. Wir orientieren uns hierzu an Drees (2015), in dem die Bedingung (D6) in einem strukturell ähnlichem Sachverhalten nachgewiesen wird. Dazu bezeichnen

wir die Menge, auf der $\phi_{2,x,s}^t$ gleich 1 ist, mit

$$V_{2,x,s}^t := \left\{ (x_{-\tilde{t}}, \dots, x_{\tilde{t}}) \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \mid \frac{x_t}{x_0} > x, x_0 > s \right\},$$

und die Menge, auf der $\phi_{3,y,s}^t$ von 0 verschieden ist, mit

$$V_{3,y,s}^t := \left\{ (x_{-\tilde{t}}, \dots, x_{\tilde{t}}) \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \mid \frac{x_0}{x_{-t}} > y, x_{-t} > 0, x_0 > s \right\}.$$

Damit lassen sich die Funktionen $f_{2,x,s}^{(r,t)}$ und $f_{3,y,s}^{(r,t)}$ schreiben als

$$f_{2,x,s}^{(r,t)}(z) = \sum_{i=1}^r \mathbf{1}\{z_i \in V_{2,x,s}^t\} \quad \text{und} \quad f_{3,y,s}^{(r,t)}(z) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{z_{i,-t}}{z_{i,0}} \right)^\alpha \mathbf{1}\{z_i \in V_{3,y,s}^t\},$$

wobei die Elemente $z_i \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1}$ stets in der Darstellung $z_i = (z_{i,-\tilde{t}}, \dots, z_{i,\tilde{t}})$ interpretiert werden. Die Subgraphen von $f_{2,x,s}^{(r,t)}$ und $f_{3,y,s}^{(r,t)}$ sind dann die Mengen

$$\begin{aligned} M_{2,x,s}^{(r,t)} &:= \left\{ (\lambda, z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)} \mid \lambda < f_{2,x,s}^{(r,t)}(z_1, \dots, z_r) \right\} \\ &= \bigcup_{j=0}^r (-\infty, j) \times \left\{ (z_1, \dots, z_r) \in [0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)} \mid f_{2,x,s}^{(r,t)}(z_1, \dots, z_r) = j \right\}, \end{aligned}$$

und

$$M_{3,y,s}^{(r,t)} := \left\{ (\lambda, z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)} \mid \lambda < f_{3,y,s}^{(r,t)}(z_1, \dots, z_r) \right\}.$$

Sei nun $A = \{(\lambda^{(l)}, x_1^{(l)}, \dots, x_r^{(l)}) \mid 1 \leq l \leq m\} \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)}$ eine beliebige Menge, bestehende aus m Punkten. Enthält nun die symmetrische Differenz $V_{2,x,s}^t \Delta V_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t$ keinen dieser Punkte $x_i^{(l)}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq l \leq m$, dann gilt die Identität

$$f_{2,x,s}^{(r,t)}(x_1^{(l)}, \dots, x_r^{(l)}) = f_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^{(r,t)}(x_1^{(l)}, \dots, x_r^{(l)})$$

für alle $1 \leq l \leq m$, womit sich die Gleichheit

$$M_{2,x,s}^{(r,t)} \cap A = M_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^{(r,t)} \cap A$$

ergibt. Analoges gilt auch für den Fall, dass $x_i^{(l)} \notin V_{3,y,s}^t \Delta V_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^t$ für alle $1 \leq i \leq r$, $1 \leq l \leq m$ gilt. Das bedeutet, dass dann für alle $1 \leq l \leq m$ die Identität

$$f_{3,y,s}^{(r,t)}(x_1^{(l)}, \dots, x_r^{(l)}) = f_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^{(r,t)}(x_1^{(l)}, \dots, x_r^{(l)})$$

erfüllt ist. Folglich gilt auch die Gleichheit

$$M_{3,y,s}^{(r,t)} \cap A = M_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^{(r,t)} \cap A.$$

Wir überprüfen nun für welche Indizes $(x, s), (\tilde{x}, \tilde{s}) \in [x_0, \infty) \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ und $(y, s), (\tilde{y}, \tilde{s}) \in [y_0, \infty) \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ die Einschränkung $x_i^{(l)} \notin V_{2,x,s}^t \Delta V_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t$ und $x_i^{(l)} \notin V_{3,y,s}^t \Delta V_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^t$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq l \leq m$, erfüllt ist. Dazu betrachten wir für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq l \leq m$ die Geraden

$$\left\{ \left(\frac{x_{i,t}^{(l)}}{x_{i,0}^{(l)}}, s \right) \mid s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ (x, x_{i,0}^{(l)}) \mid x \in [x_0, \infty) \right\}$$

in $[0, \infty)^2$. Diese Geraden zerlegen die Indexmenge $[x_0, \infty) \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ in höchstens $(mr + 1)^2$ Rechteckmengen. Wenn nun zwei Punkte $(x, s), (\tilde{x}, \tilde{s}) \in [x_0, \infty) \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ in derselben Rechteckmenge liegen, das heißt für gewisse $(l, i), (k, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, r\}$ gilt

$$\begin{aligned} (x, s) \in \left[\frac{x_{i,t}^{(l)}}{x_{i,0}^{(l)}}, \frac{x_{j,t}^{(k)}}{x_{j,0}^{(k)}} \right) \times \left[x_{i,0}^{(l)}, x_{j,0}^{(k)} \right) &\iff (\tilde{x}, \tilde{s}) \in \left[\frac{x_{i,t}^{(l)}}{x_{i,0}^{(l)}}, \frac{x_{j,t}^{(k)}}{x_{j,0}^{(k)}} \right) \times \left[x_{i,0}^{(l)}, x_{j,0}^{(k)} \right), \\ (x, s) \in \left[x_0, \frac{x_{j,t}^{(k)}}{x_{j,0}^{(k)}} \right) \times \left[1 - \varepsilon, x_{j,0}^{(k)} \right) &\iff (\tilde{x}, \tilde{s}) \in \left[x_0, \frac{x_{j,t}^{(k)}}{x_{j,0}^{(k)}} \right) \times \left[1 - \varepsilon, x_{j,0}^{(k)} \right) \end{aligned}$$

oder

$$(x, s) \in \left[\frac{x_{i,t}^{(l)}}{x_{i,0}^{(l)}}, \infty \right) \times \left[x_{i,0}^{(l)}, 1 + \varepsilon \right) \iff (\tilde{x}, \tilde{s}) \in \left[\frac{x_{i,t}^{(l)}}{x_{i,0}^{(l)}}, \infty \right) \times \left[x_{i,0}^{(l)}, 1 + \varepsilon \right),$$

dann enthält die symmetrische Differenz $V_{2,x,s}^t \Delta V_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t$ offensichtlich keinen der Punkte $x_i^{(l)}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq l \leq m$. Demzufolge wird in jeder dieser Rechteckmengen R die Identität

$$M_{2,x,s}^{(r,t)} \cap A = M_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^{(r,t)} \cap A$$

für alle $(x, s), (\tilde{x}, \tilde{s}) \in R$ erfüllt. Folglich bilden die Subgraphen $(M_{2,x,s}^{(r,t)})_{x \geq x_0, s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]}$ höchstens $(mr + 1)^2$ verschiedene Teilmengen von A , so dass A nicht von $(M_{2,x,s}^{(r,t)})_{x \geq x_0, s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]}$ zerschlagen werden kann, wenn

$$(mr + 1)^2 < 2^m$$

gilt. Analog erhalten wir, dass A nicht von $(M_{3,y,s}^{(r,t)})_{y \geq y_0, s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]}$ zerschlagen werden kann, wenn ebendiese Ungleichung gilt.

Um nun zu einem festen $r \in \mathbb{N}$ ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ derart zu wählen, dass die obigen Ungleichung gilt, schätzen wir die Anzahl der Rechteckmengen durch

$$(mr + 1)^2 \leq (2mr)^2 = 4m^2 r^2$$

ab. Es gilt die Äquivalenz

$$4m^2 r^2 < 2^m \iff \frac{1}{\log(2)} (2 \log(m) + \log(4r^2)) < m. \quad (2.48)$$

Sei $m > 4 \log(r)$ und $r \in \mathbb{N}$ derart groß, so dass $2 \log(4 \log(r)) / \log(2) < \log(r)$ gilt. Dann gilt einerseits

$$m - \frac{2}{\log(2)} \log(m) > 4 \log(r) - \frac{2}{\log(2)} \log(4 \log(r)) > 3 \log(r)$$

und andererseits für hinreichend großes $r \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\log(2)} \log(4r^2) = 2 \left(1 + \frac{\log(r)}{\log(2)} \right) < 3 \log(r).$$

Demzufolge zerschlägt weder das Mengensystem $(M_{2,x,s}^{(r,t)})_{x \geq x_0, s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}$ noch $(M_{3,y,s}^{(r,t)})_{y \geq y_0, s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}$ eine m -elementige Menge $A \in \mathbb{R} \times [0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)}$, wenn die Ungleichung

$$m > 4 \log(r)$$

gilt.

Folglich stellen die beiden Mengensysteme $(M_{2,x,s}^{(r,t)})_{x \geq x_0, s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}$ und $(M_{3,y,s}^{(r,t)})_{y \geq y_0, s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}$ VC-Klassen von Menge dar, so dass per Definition die ursprünglichen Funktionenklassen $\mathcal{F}_2^{(r,t)}$ und $\mathcal{F}_3^{(r,t)}$ VC-Klassen sind. Die zugehörigen VC-Indizes $V(\mathcal{F}_2^{(r,t)})$ und $V(\mathcal{F}_3^{(r,t)})$ nehmen dann höchstens den Wert $4 \log(r)$ an.

Bezeichne für $z \in [0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)}$

$$H_2^{(r,t)}(z) := f_{2,x_0,1-\varepsilon}^{(r,t)}(z) = \sum_{i=1}^r \mathbb{1} \left\{ \frac{z_{i,t}}{z_{i,0}} > x_0, z_{i,0} > 1 - \varepsilon \right\} \quad \text{und}$$

$$H_3^{(r,t)}(z) := f_{3,y_0,1-\varepsilon}^{(r,t)}(z) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{z_{i,-t}}{z_{i,0}} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{z_{i,0}}{z_{i,-t}} > y_0, z_{i,0} > 1 - \varepsilon \right\}$$

die minimalen Einhüllenden der Funktionenklassen $\mathcal{F}_2^{(r,t)}$ und $\mathcal{F}_3^{(r,t)}$. Nach Theorem A.1 sind die Überdeckungszahlen der Funktionenklassen $\mathcal{F}_2^{(r,t)}$ und $\mathcal{F}_3^{(r,t)}$ für hinreichend großes $r \in \mathbb{N}$ beschränken durch

$$\begin{aligned} N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i^{(r,t)}, L_2(Q)) &\leq K_i V(\mathcal{F}_i^{(r,t)}) (16e)^{V(\mathcal{F}_i^{(r,t)})} \left(\frac{\varepsilon_0}{\|H_i^{(r,t)}\|_{Q,2}} \right)^{-2(V(\mathcal{F}_i^{(r,t)})-1)} \\ &\leq K_i^* r^{16} \left(\frac{\varepsilon_0}{\|H_i^{(r,t)}\|_{Q,2}} \right)^{-C \log(r)} \end{aligned} \quad (2.49)$$

für alle $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, alle Wahrscheinlichkeitsmaße Q auf $[0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)}$, die $\int_{[0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)}} (H_i^{(r,t)})^2 dQ > 0$ erfüllen, $i \in \{2, 3\}$, und geeignete Konstanten $K_1, K_2, K_2^*, K_3^*, C > 0$. Im letzten Schritt der obigen Ungleichungskette wurde unter anderem die Abschätzung $\log(r)(16e)^{4 \log(r)} \leq r^{16}$, die aus $16e < e^4$ folgt, ausgenutzt.

Sei nun $H_1^{(r_n)} : [0, \infty)^{r_n(2\tilde{t}+1)} \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Abbildung mit der Abbildungsvorschrift

$$H_1^{(r_n)}(z) = \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{z_{i,0} > 1 - \varepsilon\}.$$

und

$$N_r := \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\left\{H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \leq r\right\},$$

eine Zufallsvariable, wobei $T_{n,j}^*$ unabhängige Kopien von $T_{n,j} = (X_{n,i})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$ seien. Die Zufallsvariable N_r gibt die Anzahl von großen Blöcken mit höchstens r Einträgen wieder, die von 0 verschiedenen sind. Wir betrachten nun all die Indizes $i \in I_j \subseteq \{(j-1)r_n+1, \dots, jr_n\}$, für die der Zufallsvektor $X_{n,i}^*$ von 0 verschieden ist, in dem Fall also

$$X_i^* > (1 - \varepsilon)u_n$$

gilt. Besitzt ein Block $T_{n,j}^*$ genau r Vektoren, die von 0 verschieden sind ($H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) = r$), dann reduzieren wir den Block auf genau diese Vektoren, das heißt, wir betrachten den Block $(X_{n,i}^*)_{i \in I_j}$ mit der Länge r . Für den Fall, dass $H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) < r$ gilt, füllen wir den Block $(X_{n,i}^*)_{i \in I_j}$ mit Nullvektoren auf, bis dieser Block die Länge r besitzt, das heißt, wir wählen $\tilde{T}_{n,j}^* := (X_{n,i_1}^*, \dots, X_{n,i_r}^*)$ mit $\{i_1, \dots, i_{H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*)}\} = I_j$ und $X_{n,i_l}^* = 0$ für alle $l \in \{H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) + 1, \dots, r\}$.

Sei schließlich

$$Q_{n,r} := \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \leq r\} \varepsilon_{\tilde{T}_{n,j}^*}$$

ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)}, \mathbb{B}([0, \infty)^{r(2\tilde{t}+1)}))$, wobei wir das Ereignis $\{N_r = 0\}$ außer Acht lassen, da dieses mit einer gegen 1 konvergierenden Wahrscheinlichkeit nicht eintritt: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P\{N_r = 0\} &\leq P\{H_1^{(r_n)}(T_{n,1}^*) > r\} \\ &\leq P\{\mathbb{1}\{X_i^* > 1 - \varepsilon\} > r/r_n \text{ für mind. ein } i \in \{1, \dots, r_n\}\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{r_n} P\{\mathbb{1}\{X_i^* > 1 - \varepsilon\} > r/r_n\} \\ &\leq r_n v_{n,\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Da das Integral

$$\int_{[0, \infty)_{\cup}} \left(H_i^{(r,t)}\right)^2 dQ_{n,r} = \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{m_n} \left(H_i^{(r,t)}(\tilde{T}_{n,j}^*)\right)^2 \mathbb{1}\{H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \leq r\},$$

$i \in \{2, 3\}$, mit einer gegen 1 konvergierenden Wahrscheinlichkeit positiv ist, kann es für Theorem A.1 verwendet werden.

Bedingung (D6) bezieht sich auf Überdeckungszahlen hinsichtlich der zufälligen Semimetrik d_n . Die Distanz zweier Funktionen $g_i^{(r_n)}, \tilde{g}_i^{(r_n)} \in \mathcal{F}_i^{(r_n,t)}$, $i \in \{2, 3\}$, hinsichtlich d_n kann wie folgt

abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
d_n^2(g_i^{(r_n)}, \tilde{g}_i^{(r_n)}) &= \frac{1}{nv_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} \left(g_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) - \tilde{g}_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \\
&= \frac{N_r}{nv_{n,\varepsilon}} \int_{[0,\infty)^{r(2\bar{i}+1)}} \left(g_i^{(r)} - \tilde{g}_i^{(r)} \right)^2 dQ_{n,r} \\
&\quad + \frac{1}{nv_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} \left(g_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) - \tilde{g}_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1}\{H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > r\} \\
&\leq \frac{N_r}{nv_{n,\varepsilon}} \int_{[0,\infty)^{r(2\bar{i}+1)}} \left(g_i^{(r)} - \tilde{g}_i^{(r)} \right)^2 dQ_{n,r} \\
&\quad + \frac{1}{nv_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} \left(H_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1}\{H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > r\}
\end{aligned}$$

für alle $r_n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt dann auch die Schranke

$$d_n^2(g_i^{(r_n)}, \tilde{g}_i^{(r_n)}) \leq \frac{NR_{n,i,\varepsilon_0}}{nv_{n,\varepsilon}} \int_{[0,\infty)^{R_{n,i,\varepsilon_0}(2\bar{i}+1)}} \left(g_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0})} - \tilde{g}_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0})} \right)^2 dQ_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}} + \frac{\varepsilon_0^2}{2}$$

für

$$R_{n,i,\varepsilon_0} := \min \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{nv_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} \left(H_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1}\{H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > r\} \leq \frac{\varepsilon_0^2}{2} \right\}.$$

Gilt nun

$$\int_{[0,\infty)^{R_{n,i,\varepsilon_0}(2\bar{i}+1)}} \left(g_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0})} - \tilde{g}_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0})} \right)^2 dQ_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}} \leq \frac{nv_{n,\varepsilon}}{2NR_{n,i,\varepsilon_0}} \varepsilon_0^2 =: \varepsilon_1^2,$$

so folgt

$$d_n^2(g_i^{(r_n)}, \tilde{g}_i^{(r_n)}) \leq \varepsilon_0^2.$$

Mit anderen Worten, wenn zwei Funktionen $f_{i,x,s}^{(R_{n,i,\varepsilon_0},t)}$ und $f_{i,\tilde{x},\tilde{s}}^{(R_{n,i,\varepsilon_0},t)}$ in einem ε_1 -Ball in $\mathcal{F}_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0},t)}$ hinsichtlich $L_2(Q_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}})$ enthalten sind, dann liegen die Funktionen $\phi_{i,x,s}^t$ und $\phi_{i,\tilde{x},\tilde{s}}^t$ in dem entsprechenden ε_0 -Ball in $\mathcal{F}_i^{(r_n,t)}$ hinsichtlich der zufälligen L_2 -Distanz d_n . Für die Überdeckungsanzahl bedeutet das, dann

$$N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i^{(r_n,t)}, d_n) \leq N(\varepsilon_1, \mathcal{F}_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0},t)}, L_2(Q_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}})). \quad (2.50)$$

Nun bezieht sich die zufällige Semimetrik d_n auf Blöcke der Länge r_n , so dass die Identität

$$N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i^t, d_n) = N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i^{(r_n,t)}, d_n)$$

gilt. Demzufolge sind die Überdeckungsanzahl mit Radius ε_0 von \mathcal{F}_2^t und \mathcal{F}_3^t hinsichtlich d_n ebenfalls durch die rechte Seite von (2.50) beschränkt. Diese Schranke kann mit Hilfe der Ungleichung

(2.49) sowie der Tatsache, dass

$$\begin{aligned}
\left\| H_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0}, t)} \right\|_{Q_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}}, 2}^2 &= \int_{[0,\infty)^{R_{n,i,\varepsilon_0}(2\bar{t}+1)}} \left(H_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0}, t)} \right)^2 dQ_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}} \\
&= \frac{1}{N_{R_{n,i,\varepsilon_0}}} \sum_{j=1}^{m_n} \left(H_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0}, t)}(\tilde{T}_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1} \left\{ H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \leq R_{n,i,\varepsilon_0} \right\} \\
&\leq \max\{1, y_0^{-2\alpha}\} \frac{R_{n,i,\varepsilon_0}^2}{N_{R_{n,i,\varepsilon_0}}} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{1} \{ H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > 0 \}
\end{aligned}$$

gilt, weiter abgeschätzt werden: Es gilt

$$\begin{aligned}
&(K_i^* R_{n,i,\varepsilon_0}^{16})^{-1} N \left(\varepsilon_1, \mathcal{F}_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0}, t)}, L_2(Q_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}}) \right) \\
&\leq \left(\varepsilon_1 \left(\int_{[0,\infty)^{R_{n,i,\varepsilon_0}(2\bar{t}+1)}} \left(H_i^{(R_{n,i,\varepsilon_0}, t)} \right)^2 dQ_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}} \right)^{-1/2} \right)^{-C \log(R_{n,i,\varepsilon_0})} \\
&\leq \left(\frac{nv_{n,\varepsilon} \varepsilon_0^2}{2 \max\{1, y_0^{-2\alpha}\} R_{n,i,\varepsilon_0}^2 \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{1} \{ H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > 0 \}} \right)^{-\frac{1}{2} C \log(R_{n,i,\varepsilon_0})} \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon_0}{2 \max\{1, y_0^{-\alpha}\} R_{n,i,\varepsilon_0}} \left(\frac{1}{2nv_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{1} \{ T_{n,j}^* \neq 0 \} \right)^{-1/2} \right)^{-C \log(R_{n,i,\varepsilon_0})}.
\end{aligned}$$

Die Summe innerhalb der Wurzelfunktion,

$$\frac{1}{2nv_{n,\varepsilon}} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{1} \{ T_{n,j}^* \neq 0 \},$$

ist mit einer gegen 1 konvergierenden Wahrscheinlichkeit kleiner als 1. Es gilt nämlich mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung

$$\begin{aligned}
P \left\{ \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{1} \{ T_{n,j}^* \neq 0 \} \geq 2nv_{n,\varepsilon} \right\} &\leq P \left\{ \sum_{j=1}^{m_n} (\mathbf{1} \{ T_{n,j}^* \neq 0 \} - P \{ T_{n,j}^* \neq 0 \}) \geq 2nv_{n,\varepsilon} - m_n r_n v_{n,\varepsilon} \right\} \\
&\leq P \left\{ \sum_{j=1}^{m_n} (\mathbf{1} \{ T_{n,j}^* \neq 0 \} - P \{ T_{n,j}^* \neq 0 \}) \geq nv_{n,\varepsilon} \right\} \\
&\leq \frac{m_n \text{Var}(\mathbf{1} \{ T_{n,1}^* \neq 0 \})}{(nv_{n,\varepsilon})^2} \\
&\leq \frac{m_n P \{ T_{n,1}^* \neq 0 \}}{(nv_{n,\varepsilon})^2} \\
&\leq \frac{m_n r_n}{n^2 v_{n,\varepsilon}} \\
&\leq \frac{1}{nv_{n,\varepsilon}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

da $P\{T_{n,1}^* \neq 0\} \leq r_n v_{n,\varepsilon}$ gilt. Demzufolge ergibt sich mit der Ungleichung (2.50) und den vorangegangenen Erkenntnissen die Schranke

$$N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i^{(r_n,t)}, d_n) \leq K_i^* R_{n,i,\varepsilon_0}^{16} \left(\frac{\varepsilon_0}{2 \max\{1, y_0^{-\alpha}\} R_{n,i,\varepsilon_0}} \right)^{-C \log(R_{n,i,\varepsilon_0})} \quad (2.51)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit, die gegen 1 konvergiert.

Wir zeigen nun, dass die Zufallsvariable R_{n,i,ε_0} nicht zu schnell anwächst, wenn ε_0 gegen 0 strebt. Nach Bedingung (D) können zu $\delta > 0$ Konstanten $M, \tau > 0$ derart gewählt werden, dass für jedes beliebige $\eta > 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & P \left\{ \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(H_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1} \left\{ H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > M \varepsilon_0^{-(2+\tau)/\delta} \right\} > \frac{\varepsilon_0^2}{2} \text{ für ein } 0 < \varepsilon_0 \leq 1 \right\} \\ &= P \left\{ \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(H_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1} \left\{ H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > M 2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} > \frac{2^{-2(l+1)}}{2} \text{ für ein } l \in \mathbb{N}_0 \right\} \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} P \left\{ \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(H_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1} \left\{ H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > M 2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} > \frac{2^{-2(l+1)}}{2} \right\} \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{2l+3} E \left[\frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(H_i^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1} \left\{ H_1^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > M 2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} \right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+3}}{nv_n} m_n E \left[\left(H_i^{(r_n)}(T_{n,1}^*) \right)^2 \mathbf{1} \left\{ H_1^{(r_n)}(T_{n,1}^*) > M 2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} \right] \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+3}}{nv_n} m_n \left(E \left[\left(H_i^{(r_n)}(T_{n,1}^*) \right)^{2(1+\delta/2)} \right] \right)^{2/(2+\delta)} \left(P \left\{ H_1^{(r_n)}(T_{n,1}^*) > M 2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} \right)^{\delta/(2+\delta)} \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+3}}{nv_n} m_n \left(E \left[\left(H_i^{(r_n)}(T_{n,1}^*) \right)^{2+\delta} \right] \right)^{2/(2+\delta)} \\ &\quad \times \left(E \left[\left(H_i^{(r_n)}(T_{n,1}^*) \right)^{2+\delta} \right] / \left(M 2^{l(2+\tau)/\delta} \right)^{2+\delta} \right)^{\delta/(2+\delta)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+3}}{nv_n} m_n \max\{1, y_0^{-(2+\delta)\alpha}\} E \left[\left(H_1^{(r_n)}(T_{n,1}^*) \right)^{2+\delta} \right] \left(M 2^{l(2+\tau)/\delta} \right)^{-\delta} \\ &\leq \tilde{C} M^{-\delta} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\tau} \\ &< \eta \end{aligned} \quad (2.52)$$

gilt, wobei für die Ungleichungskette sowohl die Hölder'sche Ungleichung als auch die allgemeine Markov-Ungleichung angewandt wurden. Der Term \tilde{C} in der obigen Rechnung repräsentiert dabei eine geeignete positive Konstante. Schlussendlich ist $R_{n,i,\varepsilon_0} \leq M \varepsilon_0^{-(2+\tau)/\delta}$ für alle $i \in \{2, 3\}$ und alle $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - 2\eta$ erfüllt. Mit Hilfe dieser Erkenntnis kann nun Bedingung (D6) für die beiden Fälle $i \in \{2, 3\}$ nachgeprüft werden.

Nach Ungleichung (2.51) gilt für $i \in \{2, 3\}$ und hinreichend kleines $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ die folgende Schranke:

$$\begin{aligned} \log N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i^{(r,t)}, d_n) &\leq \log \left(K_i^* R_{n,i,\varepsilon_0}^{16} \left(\frac{\varepsilon_0}{2 \max\{1, y_0^{-\alpha}\} R_{n,i,\varepsilon_0}} \right)^{-C \log(R_{n,i,\varepsilon_0})} \right) \\ &\leq \log \left(K_i^* \left(M \varepsilon_0^{-(2+\tau)/\delta} \right)^{16} \left(\frac{\varepsilon_0}{2 \max\{1, y_0^{-\alpha}\} M \varepsilon_0^{(2+\tau)/\delta}} \right)^{-C \log(M \varepsilon_0^{-(2+\tau)/\delta})} \right) \\ &\leq \log \left(K_4 \varepsilon_0^{K_5 \log \varepsilon_0} \right) \\ &\leq K_6 \log^2(\varepsilon_0) \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \eta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$, wobei $K_4, K_5, K_6 > 0$ geeignete Konstanten sind. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \left(\log N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i^{(r,t)}, d_n) \right)^{1/2} d\varepsilon_0 &\leq K_6^{1/2} \int_0^\xi |\log(\varepsilon_0)| d\varepsilon_0 \\ &= K_6^{1/2} \left[\varepsilon_0 (\log(\varepsilon_0) - 1) \right]_0^\xi \\ &\xrightarrow{\xi \downarrow 0} 0 \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \eta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Demzufolge ergibt sich für $i \in \{2, 3\}$ mit $\eta \rightarrow 0$

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P^* \left\{ \int_0^\xi \left(\log(N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_i^{(r,t)}, d_n)) \right)^{1/2} d\varepsilon_0 > \tau \right\} = 0$$

für alle $\tau > 0$, so dass Bedingung (D6) auch für die Funktionenklassen $\mathcal{F}_2^{(r,t)}$ und $\mathcal{F}_3^{(r,t)}$ gilt.

Nachweis von (D5) [unter (A(x₀))]: Jede Funktion in $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ ist eindeutig durch ihre Parameter $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, $x \in [x_0, \infty)$ oder $y \in [y_0, \infty)$ festgelegt. Demnach konvergiert eine Folge von Funktionen in $\Phi \in \{\Phi_{0,\varepsilon}, \Phi_{1,\varepsilon}, \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t, \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t \mid |t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}\}$, wenn die entsprechenden Parameter konvergieren. Beispielsweise folgt für $x_n \rightarrow x$ und $s_n \rightarrow s$ die Konvergenz

$$\rho(\phi_{2,x_n,s_n}^t, \phi_{2,x,s}^t) = |F^{(\Theta_t)}(x_n) - F^{(\Theta_t)}(x)| + (1 - \varepsilon)^\alpha |s_n^{-\alpha} - s^{-\alpha}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Demzufolge ist

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbb{Q}} := \{ \phi_{0,s}, \phi_{1,s}, \phi_{2,x,s}^t, \phi_{2,y,s}^t \mid s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \cap \mathbb{Q}, \\ x \in [x_0, \infty) \cap \mathbb{Q}, y \in [y_0, \infty) \cap \mathbb{Q}, |t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\} \} \end{aligned}$$

eine abzählbare und dichte Teilmenge von $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ hinsichtlich der von ρ_{Φ} erzeugten Topologie, so dass $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ separabel ist. Damit erhält man auch für die Funktionenklasse

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \bigcup_{t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}} (\mathcal{F}_2^t \cup \mathcal{F}_3^t)$$

eine abzählbare und dichte Teilmenge \mathcal{G} , indem man die Indexmengen der Funktionenklasse \mathcal{F} auf deren rationalen Anteil einschränkt. Die entsprechende Semimetrik ist dann die Abbildung $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{F}}(f_{0,s}, f_{0,s^*}) &= \rho(\phi_{0,s}, \phi_{0,s^*}), & \rho_{\mathcal{F}}(f_{1,s}, f_{1,s^*}) &= \rho(\phi_{1,s}, \phi_{1,s^*}), \\ \rho_{\mathcal{F}}(f_{2,x,s}^t, f_{2,x^*,s^*}^t) &= \rho(\phi_{2,x,s}^t, \phi_{2,x^*,s^*}^t), & \rho_{\mathcal{F}}(f_{3,y,s}^t, f_{3,y^*,s^*}^t) &= \rho(\phi_{3,y,s}^t, \phi_{3,y^*,s^*}^t) \end{aligned}$$

und $\rho_{\mathcal{F}}(f, g) = \max\{2, \log(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\}$ für alle anderen Funktionen $f, g \in \mathcal{F}$.

Nun ist die Abbildung

$$L(f, g) = \sum_{j=1}^{\lfloor m_n/2 \rfloor} e_j(f(T_{n,j}^*) - g(T_{n,j}^*))^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $(e_i)_{1 \leq i \leq \lfloor m_n/2 \rfloor} \in \{-1, 0, 1\}^{\lfloor m_n/2 \rfloor}$ und $k \in \{1, 2\}$ messbar. Mit Hilfe der Tatsache, dass das Supremum von abzählbar viele messbaren Abbildungen messbar ist, folgt die Messbarkeit von

$$\sup_{f, g \in \mathcal{F}} L(f, g) = \sup_{f, g \in \mathcal{G}} L(f, g),$$

womit Bedingung (D5) erfüllt ist.

Nachweis von (D3) [unter (A(x₀)), (C), (C')]: Bedingung (D3) lautet in unserem Kontext

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\psi_1, \psi_2 \in \Phi_i, \\ \rho_i(\psi_1, \psi_2) \leq \delta}} \frac{1}{r_n v_n} E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} (\psi_1(X_{n,i}) - \psi_2(X_{n,i})) \right)^2 \right] = 0, \quad (2.53)$$

wobei

$$\Phi_i := \begin{cases} \Phi_{i,\varepsilon}, & \text{falls } i \in \{0, 1\}, \\ \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t, & \text{falls } i = 2, \\ \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t, & \text{falls } i = 3. \end{cases}$$

Wir weisen nun die obige Grenzaussage für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ nach. Dabei ist die Herangehensweise in allen vier Fällen dieselbe. Wir zerlegen zunächst den auftretenden Erwartungswert in Gleichung (2.53) additiv, um diesen im Anschluss für alle vier Fälle $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ separat abzuschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} (\psi_1(X_{n,i}) - \psi_2(X_{n,i})) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} E[(\psi_1(X_{n,i}) - \psi_2(X_{n,i}))(\psi_1(X_{n,j}) - \psi_2(X_{n,j}))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) E[(\psi_1(X_{n,k}) - \psi_2(X_{n,k}))(\psi_1(X_{n,0}) - \psi_2(X_{n,0}))] \\
&\quad + r_n E[(\psi_1(X_{n,0}) - \psi_2(X_{n,0}))^2] \\
&= S_{r_n,n}^{(i)}(\psi_1, \psi_2),
\end{aligned}$$

wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
S_{m,n}^{(i)}(\psi_1, \psi_2) &:= 2r_n \sum_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) E[(\psi_1(X_{n,k}) - \psi_2(X_{n,k}))(\psi_1(X_{n,0}) - \psi_2(X_{n,0}))] \\
&\quad + r_n E[(\psi_1(X_{n,0}) - \psi_2(X_{n,0}))^2].
\end{aligned}$$

Wir nehmen für die Fällen $i \in \{0, 1\}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\tilde{s} < s$ für $s, \tilde{s} \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ gilt. Beginnend mit $i = 0$ möchten wir zunächst den Ausdruck $S_{r_n,n}^{(0)}(\phi_{0,\tilde{s}}, \phi_{0,s})$ nach oben beschränken, indem wir die einzelnen Summanden nach oben abschätzen. Dafür werden zwei unterschiedliche Abschätzungen gewählt. Einerseits gilt

$$\begin{aligned}
&E[(\phi_{0,\tilde{s}}(X_{n,k}) - \phi_{0,s}(X_{n,k}))(\phi_{0,\tilde{s}}(X_{n,0}) - \phi_{0,s}(X_{n,0}))] \\
&= E\left[\left(\log\left(\frac{X_k}{\tilde{s}u_n}\right)\mathbf{1}\left\{\frac{X_k}{u_n} \in (\tilde{s}, s]\right\} + (\log(s) - \log(\tilde{s}))\mathbf{1}\{X_k > su_n\}\right)\right. \\
&\quad \left.\times \left(\log\left(\frac{X_0}{\tilde{s}u_n}\right)\mathbf{1}\left\{\frac{X_0}{u_n} \in (\tilde{s}, s]\right\} + (\log(s) - \log(\tilde{s}))\mathbf{1}\{X_0 > su_n\}\right)\right] \\
&\leq 4(\log(s) - \log(\tilde{s}))^2 E[\mathbf{1}\{X_k > su_n\}\mathbf{1}\{X_0 > \tilde{s}u_n\}] \\
&\leq 4(\log(s) - \log(\tilde{s}))^2 v_{n,\varepsilon},
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Ungleichung $\log(X_k/(su_n))\mathbf{1}\{X_k/u_n \in (\tilde{s}, s]\} \leq \log(s) - \log(\tilde{s})$ angewandt wurde. Andererseits kann unter der Zuhilfenahme von Voraussetzung (C') die Abschätzung

$$\begin{aligned}
E[(\phi_{0,\tilde{s}}(X_{n,k}) - \phi_{0,s}(X_{n,k}))(\phi_{0,\tilde{s}}(X_{n,0}) - \phi_{0,s}(X_{n,0}))] &\leq E[\phi_{0,\tilde{s}}(X_{n,k})\phi_{0,\tilde{s}}(X_{n,0})] \\
&\leq s'_n(k)v_{n,\varepsilon}
\end{aligned}$$

gefolgt werden. Mit Hilfe diesen beiden Abschätzungen kann das Grenzwverhalten in (2.53) bestimmt werden. Für jedes feste $M > 0$ und $\rho_0(\phi_{0,s}, \phi_{0,\tilde{s}}) < \delta$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n v_{n,\varepsilon}} S_{M,n}^{(0)}(\phi_{0,\tilde{s}}, \phi_{0,s}) \leq 8M(\log(s) - \log(\tilde{s}))^2 < 8M\delta^2. \quad (2.54)$$

Für die restlichen Summanden ergibt sich mit Hilfe der zweiten Abschätzung

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n v_{n,\varepsilon}} \left(S_{r_n,n}^{(0)}(\phi_{0,\tilde{s}}, \phi_{0,s}) - S_{M,n}^{(0)}(\phi_{0,\tilde{s}}, \phi_{0,s})\right) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=M}^{r_n-1} s'_n(k) \\
&= 2 \sum_{k=M}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(k) < \infty.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der obigen Beschränktheit kann demzufolge der Grenzwert der Differenz $\tilde{S}_{r_n,n}^{(0)} - \tilde{S}_{M,n}^{(0)}$ beliebig klein gewählt werden, indem man M hinreichend groß wählt. Andererseits wird nach (2.54) die Summe $\tilde{S}_{M,n}^{(0)}$ beliebig klein für $\delta \rightarrow 0$. Folglich ist das Grenzverhalten in (2.53) für $i = 0$ erfüllt.

Wir betrachten nun den Fall $i = 1$. Anhand der expliziten Darstellung der Funktionen $\phi_{1,s}$ und $\phi_{1,\tilde{s}}$ kann der Erwartungswert in (2.53) wie folgt nach oben abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} S_{r_n,n}^{(1)}(\phi_{1,s}, \phi_{1,s^*}) &= 2r_n v_{n,\varepsilon} \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) P\left(\frac{X_k}{u_n} \in (s^*, s], \frac{X_0}{u_n} \in (s^*, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) \\ &\quad + r_n v_{n,\varepsilon} P\left(\frac{X_0}{u_n} \in (s^*, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) \\ &\leq 2r_n v_{n,\varepsilon} \tilde{S}_{r_n,n}^{(1)}, \end{aligned}$$

wobei für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\tilde{S}_{m,n}^{(1)} := \sum_{k=0}^{m-1} P\left(\frac{X_k}{u_n} \in (s^*, s], \frac{X_0}{u_n} \in (s^*, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right).$$

Werden von der obigen Summe $\tilde{S}_{r_n,n}^{(1)}$ nur die ersten M Summanden aufsummiert, wobei $M > 0$ fest gewählt sei, kann diese Summe wie folgt beschränkt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{M,n}^{(1)} &\leq MP \left(\frac{X_0}{u_n} \in (s^*, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} M \left(F^{(Y_0)}\left(\frac{s}{1-\varepsilon}\right) - F^{(Y_0)}\left(\frac{s^*}{1-\varepsilon}\right)\right) < M\delta, \end{aligned} \quad (2.55)$$

da Y_0 Pareto-verteilt ist. Der Grenzwert der restlichen Summanden kann aufgrund von Voraussetzung (C) beschränkt werden durch

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{S}_{r_n,n}^{(1)} - \tilde{S}_{M,n}^{(1)}\right) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=M}^{r_n-1} P\left(\frac{X_k}{u_n} \in (s^*, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=M}^{r_n-1} s_n(k) \\ &= \sum_{k=M}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(k) < \infty. \end{aligned}$$

Das Grenzverhalten in (2.53) für $i = 1$ folgt dann mit analogem Vorgehen wie für den Fall $i = 0$.

Mit genau derselben Herangehensweise und Argumentation folgern wir nun für $i \in \{2, 3\}$ die Gleichung (2.53). Sei hierfür ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\tilde{x} < x$.

Für den Fall $\tilde{s} < s$ ist die Differenz der Funktionen innerhalb der Erwartungswerte von

$S_{r,n}^{(2)}(\phi_{2,x,s}^t, \phi_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t)$ gleich

$$\phi_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t(X_{n,k}) - \phi_{2,x,s}^t(X_{n,k}) = \mathbf{1} \left\{ \frac{X_{k+t}}{X_k} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_k}{u_n} > \tilde{s} \text{ oder } \frac{X_{k+t}}{X_k} > \tilde{x}, \frac{X_k}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \right\} \quad (2.56)$$

für alle $k \in \{0, \dots, r_n - 1\}$. Andererseits kann für den Fall $\tilde{s} \geq s$ der Betrag dieser Differenz wie folgt abgeschätzt werden:

$$\left| \phi_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t(X_{n,k}) - \phi_{2,x,s}^t(X_{n,k}) \right| \leq \mathbf{1} \left\{ \frac{X_{k+t}}{X_k} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_k}{u_n} > \tilde{s} \text{ oder } \frac{X_{k+t}}{X_k} > \tilde{x}, \frac{X_k}{u_n} \in (s, \tilde{s}] \right\}$$

für alle $k \in \{0, \dots, r_n - 1\}$. Die obigen zwei Indikatorfunktionen unterscheiden sich nur um das Intervall, in denen X_k/u_n liegt, das heißt entweder im Intervall $(\tilde{s}, s]$ für den Fall $\tilde{s} < s$ oder in $(s, \tilde{s}]$ für den Fall $\tilde{s} \geq s$. Wir führen an dieser Stelle sämtliche Rechnungen nur für den Fall $\tilde{s} < s$ durch, da die Umformungen im Fall $\tilde{s} \geq s$ vollständig analog verlaufen.

Mit Hilfe der Identität (2.56) ergibt sich

$$\begin{aligned} & S_{r,n}^{(2)}(\phi_{2,x,s}^t, \phi_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t) \\ &= 2r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) P \left(\left\{ \frac{X_{k+t}}{X_k} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_k}{u_n} > \tilde{s} \text{ oder } \frac{X_{k+t}}{X_k} > \tilde{x}, \frac{X_k}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \right\} \right. \\ & \quad \left. \cap \left\{ \frac{X_t}{X_0} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_0}{u_n} > \tilde{s} \text{ oder } \frac{X_t}{X_0} > \tilde{x}, \frac{X_0}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \right\} \right) \\ & \quad + r_n P \left\{ \frac{X_t}{X_0} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_0}{u_n} > \tilde{s} \text{ oder } \frac{X_t}{X_0} > \tilde{x}, \frac{X_0}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \right\} \\ & \leq 2r_n v_{n,\varepsilon} \tilde{S}_{r,n}^{(2)}, \end{aligned}$$

wobei für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{m,n}^{(2)} &:= \sum_{k=0}^{m-1} \left(P \left(\frac{X_{k+t}}{X_k} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_k}{u_n} > \tilde{s}, \frac{X_t}{X_0} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_0}{u_n} > \tilde{s} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right) \right. \\ & \quad + P \left(\frac{X_{k+t}}{X_k} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_k}{u_n} > \tilde{s}, \frac{X_t}{X_0} > \tilde{x}, \frac{X_0}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right) \\ & \quad + P \left(\frac{X_{k+t}}{X_k} > \tilde{x}, \frac{X_k}{u_n} \in (\tilde{s}, s], \frac{X_t}{X_0} \in (\tilde{x}, x], \frac{X_0}{u_n} > \tilde{s} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right) \\ & \quad \left. + P \left(\frac{X_{k+t}}{X_k} > \tilde{x}, \frac{X_k}{u_n} \in (\tilde{s}, s], \frac{X_t}{X_0} > \tilde{x}, \frac{X_0}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right) \right). \end{aligned}$$

Werden nur die ersten M Summanden der obige Summen $\tilde{S}_{r,n}^{(2)}$ aufsummiert werden, wobei $M > 0$ fest gewählt sei, dann kann aufgrund Voraussetzung (A(x0)) das folgende Grenzverhalten gefolgert werden:

$$\tilde{S}_{M,n}^{(2)} \leq 2M \left(P \left(\frac{X_t}{X_0} \in (\tilde{x}, x] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right) + P \left(\frac{X_0}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right) \right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2M \left((F^{(\Theta_t)}(x) - F^{(\Theta_t)}(\tilde{x})) + \left(F^{(Y_0)}\left(\frac{s}{1-\varepsilon}\right) - F^{(Y_0)}\left(\frac{\tilde{s}}{1-\varepsilon}\right) \right) \right) < 2M\delta \quad (2.57)$$

für alle $s > \tilde{s}$. Für die Summe der restlichen Summanden kann wegen Voraussetzung (C) deren Grenzwert beschränkt werden durch

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{S}_{r_n, n}^{(2)} - \tilde{S}_{M, n}^{(2)} \right) &\leq 4 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=M}^{r_n-1} P \left(\frac{X_k}{u_n} > \tilde{s} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right) \\ &\leq 4 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=M}^{r_n-1} s_n(k) \\ &= 4 \sum_{k=M}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(k) < \infty. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Die rechte Seite von (2.58) kann nun beliebig klein gewählt werden, indem man M hinreichend groß wählt. Mit hinreichend kleiner Wahl von δ , kann die rechte Seite von (2.57) ebenfalls beliebig klein gewählt werden, so dass Gleichung (2.53) auch für $i = 2$ erfüllt ist.

Folglich bleibt noch das Grenzverhalten für $i = 3$ nachzuweisen. Sei dafür ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{y} < y$ und $s, \tilde{s} \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ beliebig gewählt.

Für den Fall $\tilde{s} < s$ ergibt sich für die Differenz

$$\begin{aligned} &\phi_{3, \tilde{y}, \tilde{s}}^t(X_{n,k}) - \phi_{3, y, s}^t(X_{n,k}) \\ &= \left(\frac{X_{k-t}}{X_k} \right)^\alpha \mathbf{1} \left\{ \frac{X_k}{X_{k-t}} \in (\tilde{y}, y], \frac{X_{k-t}}{u_n} > 0, \frac{X_k}{u_n} > \tilde{s} \text{ oder } \frac{X_k}{X_{k-t}} > \tilde{y}, \frac{X_{k-t}}{u_n} > 0, \frac{X_k}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

für alle $k \in \{0, \dots, r_n - 1\}$. Für den Fall $\tilde{s} \geq s$ kann wiederum der Betrag dieser Differenz wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} &\left| \phi_{3, \tilde{y}, \tilde{s}}^t(X_{n,k}) - \phi_{3, y, s}^t(X_{n,k}) \right| \\ &\leq \left(\frac{X_{k-t}}{X_k} \right)^\alpha \mathbf{1} \left\{ \frac{X_k}{X_{k-t}} \in (\tilde{y}, y], \frac{X_{k-t}}{u_n} > 0, \frac{X_k}{u_n} > \tilde{s} \text{ oder } \frac{X_k}{X_{k-t}} > y, \frac{X_{k-t}}{u_n} > 0, \frac{X_k}{u_n} \in (s, \tilde{s}] \right\} \end{aligned}$$

für alle $k \in \{0, \dots, r_n - 1\}$. Nun ergibt sich ein ähnlicher Zusammenhang wie im Fall $i = 2$. Es fällt nämlich auf, dass die obigen beiden Indikatorfunktionen sich lediglich um das Intervall, in denen X_k/u_n liegt, unterscheiden, das heißt um die Intervalle $(\tilde{s}, s]$ und $(s, \tilde{s}]$. Da sämtliche Rechnungen für die beiden Fälle $\tilde{s} < s$ und $\tilde{s} \geq s$ analog verlaufen, führen wir diese Rechnung lediglich für den Fall $\tilde{s} < s$ durch. Bevor wir fortfahren, legen wir der Übersichtlichkeit halber folgende Bezeichnungen fest:

$$\begin{aligned} A_{k,n} &:= \left\{ \frac{X_k}{X_{k-t}} \in (\tilde{y}, y], \frac{X_{k-t}}{u_n} > 0, \frac{X_k}{u_n} > \tilde{s} \right\}, \\ B_{k,n} &:= \left\{ \frac{X_k}{X_{k-t}} > \tilde{y}, \frac{X_{k-t}}{u_n} > 0, \frac{X_k}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \right\} \end{aligned}$$

für alle $k \in \{0, \dots, r_n - 1\}$.

Die additive Zerlegung $S_{r_n,n}^{(3)}(\phi_{3,y,s}^t, \phi_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^t)$ kann nun mit Hilfe der obigen Darstellung (2.59) weiter abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} & S_{r_n,n}^{(3)}(\phi_{3,y,s}^t, \phi_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^t) \\ & \leq \frac{2}{y_0^{2\alpha}} r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) P((A_{k,n} \cup B_{k,n}) \cap (A_{0,n} \cup B_{0,n})) + \frac{1}{y_0^{2\alpha}} r_n P(A_{0,n} \cup B_{0,n}) \\ & \leq \frac{2}{y_0^{2\alpha}} r_n v_{n,\varepsilon} \tilde{S}_{r_n,n}^{(3)}, \end{aligned}$$

wobei für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{m,n}^{(3)} := & \sum_{k=0}^{m-1} \left[P\left(A_{k,n} \cap A_{0,n} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) + P\left(A_{k,n} \cap B_{0,n} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) \right. \\ & \left. + P\left(B_{k,n} \cap A_{0,n} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) + P\left(B_{k,n} \cap B_{0,n} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) \right]. \end{aligned}$$

Die ersten M Summanden der Summe $\tilde{S}_{r_n,n}^{(3)}$ lassen sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{M,n}^{(3)} & \leq 2M \left(P\left(\frac{X_0}{X_{-t}} \in (\tilde{y}, y] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) + P\left(\frac{X_0}{u_n} \in (\tilde{s}, s] \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) \right) \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2M \left((F^{(\Theta-t)}(1/\tilde{y}) - F^{(\Theta-t)}(1/y)) + \left(F^{(Y_0)}\left(\frac{s}{1-\varepsilon}\right) - F^{(Y_0)}\left(\frac{\tilde{s}}{1-\varepsilon}\right) \right) \right) \quad (2.60) \\ & < 2M\delta, \end{aligned}$$

wobei der Grenzwert wegen Voraussetzung (A(x_0)) existiert. Der Grenzwert der restlichen Summanden von $\tilde{S}_{r_n,n}^{(3)}$ kann wegen Voraussetzung (C) beschränkt werden durch

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{S}_{r_n,n}^{(3)} - \tilde{S}_{M,n}^{(3)} \right) & \leq 4 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=M}^{r_n-1} P\left(\frac{X_0}{u_n} > \tilde{s} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n\right) \\ & \leq 4 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=M}^{r_n-1} s_n(k) \\ & = 4 \sum_{k=M}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(k) < \infty. \end{aligned}$$

Mit analoger Argumentation wie für den Fall $i = 0$ ergibt sich für $i = 3$ die Gleichung (2.53).

Insgesamt ergibt sich also die Konvergenz in Gleichung (2.53) für die vier Fälle $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, so dass nach Theorem A.2 die Prozesse $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{0,\varepsilon}}$, $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{1,\varepsilon}}$, $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t}$ und $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t}$ asymptotisch gleichstetig bezüglich ρ_Φ sind. Mit der asymptotischen Gleichstetigkeit dieser einzelnen Prozesse geht nun mit der vorangegangenen Diskussion auch die asymptotische Gleichstetigkeit des gesamten Prozesses $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}}$ beziehungsweise $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ einher. \square

2.3.2. Beweis von Addendum 2.2

Da Y_0 Pareto-verteilt ist, gilt für alle $x \in [1, \infty)$

$$P((1 - \varepsilon)Y_0 > x \mid (1 - \varepsilon)Y_0 > 1) = \frac{P\{(1 - \varepsilon)Y_0 > x\}}{P\{(1 - \varepsilon)Y_0 > 1\}} = \left(\frac{x/(1 - \varepsilon)}{1/(1 - \varepsilon)}\right)^{-\alpha} = x^{-\alpha} = P\{Y_0 > x\}.$$

Demnach gilt $\mathcal{L}(Y_0) = \mathcal{L}((1 - \varepsilon)Y_0 \mid \{(1 - \varepsilon)Y_0 > 1\})$. In Kombination mit der Spektralzerlegung $Y_k = Y_0\Theta_k$, $k \in \mathbb{N}$, der Tatsache, dass Y_0 und Θ_k , $k \in \mathbb{Z}$, stochastisch unabhängig sind, und $\psi_i(z_{-\tilde{t}}, \dots, z_{\tilde{t}}) = 0$ für $z_0 \leq 1$ und $i \in \{1, 2\}$ gilt, folgt wegen $\Theta_0 = 1$

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon)^{-\alpha} E[\psi_1((1 - \varepsilon)\bar{Y}_0)\psi_2((1 - \varepsilon)\bar{Y}_k)] \\ &= (1 - \varepsilon)^{-\alpha} E\left[\psi_1\left((1 - \varepsilon)Y_0(\Theta_t)_{|t| \leq \tilde{t}}\right)\psi_2\left((1 - \varepsilon)Y_0(\Theta_{k+t})_{|t| \leq \tilde{t}}\right)\right] \\ &= (1 - \varepsilon)^{-\alpha} P\{(1 - \varepsilon)Y_0 > 1\} \\ &\quad \times E\left[\psi_1\left((1 - \varepsilon)Y_0(\Theta_t)_{|t| \leq \tilde{t}}\right)\psi_2\left((1 - \varepsilon)Y_0(\Theta_{k+t})_{|t| \leq \tilde{t}}\right) \mid (1 - \varepsilon)Y_0 > 1\right] \\ &= E\left[\psi_1\left(Y_0(\Theta_t)_{|t| \leq \tilde{t}}\right)\psi_2\left(Y_0(\Theta_{k+t})_{|t| \leq \tilde{t}}\right)\right] \\ &= E[\psi_1(\bar{Y}_0)\psi_2(\bar{Y}_k)]. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die behauptete Darstellung der Kovarianzen des Grenzprozesses $(Z(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}$. \square

2.3.3. Beweis von Theorem 2.4

Wir definieren zunächst der Übersichtlichkeit halber

$$\hat{F}_{n, u_n, s}^{(f, \Theta_t)}(x) := \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{2, x, s}^t(X_{n, i})}{\sum_{i=1}^n \phi_{1, s}(X_{n, i})} \quad \text{und} \quad \hat{F}_{n, u_n, s}^{(b, \Theta_t)}(y) := \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{3, y, s}^t(X_{n, i})}{\sum_{i=1}^n \phi_{1, s}(X_{n, i})}.$$

Ferner gilt nach Annahme (2.5) die stochastische Konvergenz

$$S_n = \frac{\hat{u}_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Folglich kann zu jedem $\tau > 0$ ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ derart gewählt werden, dass der Quotient S_n mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ in dem Intervall $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ liegt. Demnach erfüllen die modifizierten Schätzer die Gleichheiten

$$\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x) = \hat{F}_{n, u_n, S_n}^{(f, \Theta_t)}(x) \quad \text{und} \quad \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y) = \hat{F}_{n, u_n, S_n}^{(b, \Theta_t)}(y).$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

Ferner ergibt sich aus Bemerkung 2.3 wegen Voraussetzung (A(x_0))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]} \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| P\left(\frac{X_t}{X_0} > x \mid X_0 > su_n\right) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) \right| = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]} \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y \right\} \mid X_0 > su_n \right] - \bar{F}(x) \right| = 0.$$

In Kombination mit (2.25) und Proposition 6.1 folgt daraus die schwache Konvergenz der stochastischen Prozesse

$$\begin{aligned} V_n(s, x) &:= (nv_n)^{1/2} \left((1 - \hat{F}_{n, u_n, s}^{(f, \Theta_t)}(x)) - P \left(\frac{X_t}{X_0} > x \mid X_0 > su_n \right) \right) \\ &= (nv_n)^{1/2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \phi_{2,x,s}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^n \phi_{1,s}(X_{n,i})} - \frac{1}{P\{X_0 > su_n\}} P \left\{ \frac{X_t}{X_0} > x, X_0 > su_n \right\} \right) \\ &= (nv_n)^{1/2} \left(\frac{nE[\phi_{2,x,s}^t(X_{n,0})] + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{2,x,s}^t)}{nP\{X_0 > su_n\} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})} - \frac{1}{P\{X_0 > su_n\}} E[\phi_{2,x,s}^t(X_{n,0})] \right) \\ &= \frac{(nv_n)^{1/2} nE[\phi_{2,x,s}^t(X_{n,0})] + nv_n \tilde{Z}_n(\phi_{2,x,s}^t)}{nP\{X_0 > su_n\} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})} \\ &\quad - \frac{(nv_n)^{1/2} E[\phi_{2,x,s}^t(X_{n,0})]}{P\{X_0 > su_n\}} \\ &= \frac{nv_n \tilde{Z}_n(\phi_{2,x,s}^t) - nv_n P \left\{ \frac{X_t}{X_0} > x, \frac{X_0}{u_n} > s \right\} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})}{nP\{X_0 > su_n\} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})} \\ &= \frac{v_n \tilde{Z}_n(\phi_{2,x,s}^t) - v_n P \left(\frac{X_t}{X_0} > x \mid X_0 > su_n \right) \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})}{P\{X_0 > su_n\} + \frac{1}{(nP\{X_0 > su_n\})^{1/2}} \left(\frac{v_n}{P\{X_0 > su_n\}} \right)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} s^\alpha \left(Z(\phi_{2,x,s}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) Z(\phi_{1,s}) \right). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Aus denselben Gründen ergibt sich des Weiteren die schwache Prozesskonvergenz

$$\begin{aligned} &(nv_n)^{1/2} \left((1 - \hat{F}_{n, u_n, s}^{(b, \Theta_t)}(y)) - E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y \right\} \mid X_0 > su_n \right] \right) \\ &= (nv_n)^{1/2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \phi_{3,y,s}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^n \phi_{1,s}(X_{n,i})} - \frac{1}{P\{X_0 > su_n\}} E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, \frac{X_0}{u_n} > s \right\} \right] \right) \\ &= (nv_n)^{1/2} \left(\frac{nE[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0})] + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{3,y,s}^t)}{nP\{X_0 > su_n\} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})} - \frac{1}{P\{X_0 > su_n\}} E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0})] \right) \\ &= \frac{(nv_n)^{1/2} nE[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0})] + nv_n \tilde{Z}_n(\phi_{3,y,s}^t)}{nP\{X_0 > su_n\} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})} \\ &\quad - \frac{(nv_n)^{1/2} E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0})]}{P\{X_0 > su_n\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{nv_n}{nP\{X_0 > su_n\}} \tilde{Z}_n(\phi_{3,y,s}^t) - \frac{nv_n}{nP\{X_0 > su_n\}^2} E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, \frac{X_0}{u_n} > s \right\} \right] \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})}{1 + \frac{(nv_n)^{1/2}}{nP\{X_0 > su_n\}} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})} \\
&= \frac{\frac{v_n}{P\{X_0 > su_n\}} \tilde{Z}_n(\phi_{3,y,s}^t) - \frac{v_n}{P\{X_0 > su_n\}} E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y \right\} \mid X_0 > su_n \right] \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})}{1 + \frac{1}{(nP\{X_0 > su_n\})^{1/2}} \left(\frac{v_n}{P\{X_0 > su_n\}} \right)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s})} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} s^\alpha \left(Z(\phi_{3,y,s}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) Z(\phi_{1,s}) \right). \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Anhand der schwachen Konvergenzen in (2.61) und (2.62) lässt sich nun auch die asymptotische Normalität der Schätzer $\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}$ und $\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}$ folgern. Dazu definieren wir der Übersicht halber

$$V(s, x) := s^\alpha \left(Z(\phi_{2,x,s}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) Z(\phi_{1,s}) \right)$$

für $(s, x) \in T := [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [x_0, \infty)$ und schreiben

$$V_n = (V_n(s, x))_{(s,x) \in T} \quad \text{sowie} \quad V = (V(s, x))_{(s,x) \in T}.$$

Nach dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) gilt wegen (2.5) und (2.61) die schwache Konvergenz

$$(V_n, S_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (V, 1). \tag{2.63}$$

Nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4) existieren demnach Versionen von (V_n, S_n) , $n \in \mathbb{N}$, und $(V, 1)$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$, so dass die obige Konvergenz (2.63) \tilde{P} -fast sicher gilt. Der Einfachheit halber unterscheiden wir an dieser Stelle die Bezeichnungen für die unterschiedlichen Versionen und Wahrscheinlichkeitsräume nicht. Die Konvergenz

$$(V_n(S_n, x))_{x \in [x_0, \infty)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (V(1, x))_{x \in [x_0, \infty)} \tag{2.64}$$

ist genau dann für die Skorokhod-Versionen erfüllt, wenn

$$\sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| V_n(S_n, x) - V(1, x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher} \tag{2.65}$$

gilt. Für jedes $\tau > 0$ kann ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ derart gewählt werden, so dass die folgende Abschätzung mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| V_n(S_n, x) - V(1, x) \right| \\
&\leq \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| V_n(S_n, x) - V(S_n, x) \right| + \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| V(S_n, x) - V(1, x) \right| \\
&\leq \sup_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon], x \in [x_0, \infty)} \left| V_n(s, x) - V(s, x) \right| + \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| V(S_n, x) - V(1, x) \right|. \tag{2.66}
\end{aligned}$$

Der erste Summand der rechten Seite von (2.66) ist wegen der fast sicheren Konvergenz $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V$ asymptotisch vernachlässigbar.

Der zweite Summand der rechten Seite von (2.66) konvergiert ebenfalls fast sicher gegen 0, wie folgende Argumentation zeigt. Die Grenzprozesse $(Z(\phi_{1,s}))_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}$ und $(Z(\phi_{2,x,s}))_{(s,x) \in T}$ sind nach Theorem 2.1 von Kosorok (2008) straff. Demzufolge ist der Prozess V ebenfalls straff, da dieser sich additiv aus ebendiesen Prozessen und einer stetigen Funktionen zusammensetzt. Ferner beschränkt die Semimetrik $\tilde{\rho}_2 : T \times T \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\tilde{\rho}_2((s, x), (\tilde{s}, \tilde{x})) := \rho_2(\phi_{2,x,s}^t, \phi_{2,\tilde{x},\tilde{s}}^t), \quad (s, x), (\tilde{s}, \tilde{x}) \in T,$$

die Indexmenge T total, da $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ totalbeschränkt bezüglich ρ_Φ aus (2.38) ist. Aufgrund der fast sicheren Konvergenz $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V$ ist nach Theorem 2.1 von Kosorok (2008) der Prozess V_n asymptotisch gleichstetig hinsichtlich der Semimetrik $\tilde{\rho}_2$. Nach Theorem 7.19 von Kosorok (2008) ist das äquivalent dazu, dass fast alle Pfade von V gleichmäßig stetig bezüglich $\tilde{\rho}_2$ sind, das heißt

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{s, \tilde{s} \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon], x, \tilde{x} \in [x_0, \infty), \\ \tilde{\rho}_2((s,x), (\tilde{s}, \tilde{x})) < \delta}} \left| V(s, x) - V(\tilde{s}, \tilde{x}) \right| = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Für jede konvergente Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ wird die gleichmäßige Konvergenz

$$\tilde{\rho}_2((s_n, x), (1, x)) = (1 - \varepsilon)^\alpha |s_n^{-\alpha} - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für alle $x \in [x_0, \infty)$ erzielt. Daraus ergibt sich also die fast sichere Konvergenz

$$\sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| V(S_n, x) - V(1, x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

womit der zweite Summand ebenfalls fast sicher gegen 0 konvergiert. Folglich ist die schwache Konvergenz (2.64) belegt.

Aus der fast sicheren Konvergenz (2.65) und Bias-Bedingung (2.22) folgt dann

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| (nv_n)^{1/2} \left(\hat{F}_{n, u_n, S_n}^{(f, \Theta_t)}(x) - F^{(\Theta_t)}(x) \right) - V(1, x) \right| \\ & \leq \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| V_n(S_n, x) - V(1, x) \right| \\ & \quad + (nv_n)^{1/2} \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| P \left(\frac{X_t}{X_0} \leq x \mid X_0 > su_n \right) \Big|_{s=S_n} - F^{(\Theta_t)}(x) \right| \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \text{fast sicher.} \end{aligned}$$

Die Konvergenz des zweiten Prozesses in der Behauptung folgt mit analoger Argumentation, wobei hier Bias-Bedingung (2.23) verwendet werden muss. Wir verzichten an dieser Stelle auf die explizite Ausführung.

Kovarianzstruktur der Grenzprozesse

Wir bestimmen zunächst mit Hilfe des Addendums 2.2 diejenigen Varianzen und Kovarianzen von $(Z(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}}$, die in den entsprechende Kovarianzen der beiden Grenzprozesse

$$\begin{aligned} Z_{f,t}(x) &:= Z(\phi_{2,x,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x)Z(\phi_{1,1}), \quad x \in [x_0, \infty), \quad \text{und} \\ Z_{b,t}(y) &:= Z(\phi_{3,y,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y)Z(\phi_{1,1}), \quad y \in [y_0, \infty), \end{aligned}$$

auftreten. Mit Hilfe der Gleichung $P\{Y_0 > 1\} = 1$, der Spektralzerlegung $Y_k = Y_0\Theta_k$, $k \in \mathbb{Z}$, und der Gleichung $\bar{F}^{(\Theta_t)}(y_t) = E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y_t\}]$, die aus Lemma 2.1 von Davis et al. (2018) folgt, ergibt sich dann für $x, \tilde{x} \in [x_0, \infty)$, $y, \tilde{y} \in [y_0, \infty)$ und $t_1, t_2 \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}$

$$\text{Var}(Z(\phi_{1,1})) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\}, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z(\phi_{1,1}), Z(\phi_{2,x,1}^t)) &= \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\{\Theta_t > x, Y_0\Theta_k > 1\} \right. \\ &\quad \left. + P\left\{\frac{\Theta_{k+t}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1\right\} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z(\phi_{1,1}), Z(\phi_{3,y,1}^t)) &= \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t}} > y, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\ &\quad \left. + E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y, Y_0\Theta_k > 1\}] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z(\phi_{2,x,1}^{t_1}), Z(\phi_{2,\tilde{x},1}^{t_2})) &= P\{\Theta_{t_1} > x, \Theta_{t_2} > \tilde{x}\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\left\{\Theta_{t_1} > x, \frac{\Theta_{k+t_2}}{\Theta_k} > \tilde{x}, Y_0\Theta_k > 1\right\} \right. \\ &\quad \left. + P\left\{\Theta_{t_2} > \tilde{x}, \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1\right\} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z(\phi_{2,x,1}^{t_1}), Z(\phi_{3,y,1}^{t_2})) &= E[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t_2} > y, \Theta_{t_1} > x\}] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > y, \Theta_{t_1} > x, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\ &\quad \left. + E\left[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{1}{\Theta_{-t_2}} > y, \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z(\phi_{3,y,1}^{t_1}), Z(\phi_{3,\tilde{y},1}^{t_2})) &= E[(\Theta_{-t_1}\Theta_{-t_2})^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t_1} > y, 1/\Theta_{-t_2} > \tilde{y}\}] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}\Theta_{-t_1}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > \tilde{y}, \frac{1}{\Theta_{-t_1}} > y, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\ &\quad \left. + E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}\Theta_{-t_2}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_1}} > y, \frac{1}{\Theta_{-t_2}} > \tilde{y}, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& Cov(Z_{f,t_1}(x), Z_{f,t_2}(\tilde{x})) \\
&= Cov(Z(\phi_{2,x,1}^{t_1}), Z(\phi_{2,\tilde{x},1}^{t_2})) - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{x})Cov(Z(\phi_{2,x,1}^{t_1}), Z(\phi_{1,1})) \\
&\quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x)Cov(Z(\phi_{1,1}), Z(\phi_{2,\tilde{x},1}^{t_2})) + \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x)\bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{x})Var(Z(\phi_{1,1})) \\
&= P\{\Theta_{t_1} > x, \Theta_{t_2} > \tilde{x}\} - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x)\bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{x})\left(1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\}\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\left\{\Theta_{t_1} > x, \frac{\Theta_{k+t_2}}{\Theta_k} > \tilde{x}, Y_0\Theta_k > 1\right\} + P\left\{\Theta_{t_2} > \tilde{x}, \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right), \\
&\quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x)\sum_{k=1}^{\infty} \left(P\{\Theta_{t_2} > \tilde{x}, Y_0\Theta_k > 1\} + P\left\{\frac{\Theta_{k+t_2}}{\Theta_k} > \tilde{x}, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right) \\
&\quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{x})\sum_{k=1}^{\infty} \left(P\{\Theta_{t_1} > x, Y_0\Theta_k > 1\} + P\left\{\frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right),
\end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
& Cov(Z_{b,t_1}(y), Z_{b,t_2}(\tilde{y})) \\
&= Cov(Z(\phi_{3,y,1}^{t_1}), Z(\phi_{3,\tilde{y},1}^{t_2})) - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{y})Cov(Z(\phi_{3,y,1}^{t_1}), Z(\phi_{1,1})) \\
&\quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y)Cov(Z(\phi_{1,1}), Z(\phi_{3,\tilde{y},1}^{t_2})) + \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y)\bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{y})Var(Z(\phi_{1,1})) \\
&= E[(\Theta_{-t_1}\Theta_{-t_2})^\alpha \mathbf{1}\{\Theta_{-t_1}^{-1} > y, \Theta_{-t_2}^{-1} > \tilde{y}\}] - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y)\bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{y})\left(1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\}\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k}\Theta_{-t_1}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > \tilde{y}, \frac{1}{\Theta_{-t_1}} > y, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
&\quad \quad \left. + E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k}\Theta_{-t_2}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_1}} > y, \frac{1}{\Theta_{-t_2}} > \tilde{y}, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right) \\
&\quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{y})\sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_1}} > y, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
&\quad \quad \left. + E[\Theta_{-t_1}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t_1} > y, Y_0\Theta_k > 1\}] \right) \\
&\quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y)\sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > \tilde{y}, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
&\quad \quad \left. + E[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t_2} > y, Y_0\Theta_k > 1\}] \right),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& Cov(Z_{f,t_1}(x), Z_{b,t_2}(y)) \\
&= Cov(Z(\phi_{2,x,1}^{t_1}), Z(\phi_{3,y,1}^{t_2})) - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(y)Cov(Z(\phi_{2,x,1}^{t_1}), Z(\phi_{1,1})) \\
&\quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x)Cov(Z(\phi_{1,1}), Z(\phi_{3,y,1}^{t_2})) + \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x)\bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(y)Var(Z(\phi_{1,1})) \\
&= E[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbf{1}\{\Theta_{-t_2}^{-1} > y, \Theta_{t_1} > x\}] - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x)\bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(y)\left(1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E \left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > y, \Theta_{t_1} > x, Y_0 \Theta_k > 1 \right\} \right] \right. \\
& \quad \left. + E \left[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{\Theta_{-t_2}} > y, \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0 \Theta_k > 1 \right\} \right] \right) \\
& - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(y) \sum_{k=1}^{\infty} \left(P \{ \Theta_{t_1} > x, Y_0 \Theta_k > 1 \} + P \left\{ \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0 \Theta_k > 1 \right\} \right) \\
& - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \left(E \left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > y, Y_0 \Theta_k > 1 \right\} \right] \right. \\
& \quad \left. + E \left[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbb{1} \left\{ \Theta_{-t_2}^{-1} > y, Y_0 \Theta_k > 1 \right\} \right] \right)
\end{aligned}$$

□

2.3.4. Beweis von Lemma 2.5

Aufgrund der strikten Stationarität von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und Voraussetzung (C) gilt

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1} \{ X_{n,i} \neq 0 \} \right)^2 \right] &= \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} P \{ \min \{ X_k, X_0 \} > (1 - \varepsilon) u_n \} \\
&= r_n v_n + 2 \sum_{k=1}^{r_n-1} (r_n - k) P \{ \min \{ X_k, X_0 \} > (1 - \varepsilon) u_n \} \\
&= r_n v_n + 2 r_n v_n \sum_{k=1}^{r_n} \left(1 - \frac{k}{r_n} \right) P (X_k > (1 - \varepsilon) u_n \mid X_0 > (1 - \varepsilon) u_n) \\
&\leq 2 r_n v_n \sum_{k=0}^{r_n} s_n(k) \\
&= O(r_n v_n), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Bei Durchsicht des Beweises von Proposition 2.1 zur schwachen Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(\tilde{Z}_n(\phi_{1,s}))_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}$ fällt auf, dass diese bereits aus Voraussetzung (B), (C) und der obigen Ordnung (2.69) folgt. Tatsächlich folgt unter diesen Bedingungen sogar die schwache Konvergenz des Prozesses $(\tilde{Z}_n(\phi_{1,s}))_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}$.

Sei $\delta \in (0, \varepsilon)$ beliebig gewählt und $a_\delta^+ \in (0, 1 - (1 + \delta)^{-\alpha})$ und $a_\delta^- \in (0, (1 - \delta)^{-\alpha} - 1)$. Dann folgt aus der regulären Variation der Quantilfunktion F^{\leftarrow}

$$\begin{aligned}
\frac{(1 + \delta) F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}{F^{\leftarrow}(1 - (1 - a_\delta^+) k_n/n)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + \delta) (1 - a_\delta^+)^{1/\alpha} > 1, \\
\frac{(1 - \delta) F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)}{F^{\leftarrow}(1 - (1 + a_\delta^-) k_n/n)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 - \delta) (1 + a_\delta^-)^{1/\alpha} < 1.
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(1 + \delta) F^{\leftarrow}(1 - k_n/n) &> F^{\leftarrow}(1 - (1 - a_\delta^+) k_n/n), \\
(1 - \delta) F^{\leftarrow}(1 - k_n/n) &< F^{\leftarrow}(1 - (1 + a_\delta^-) k_n/n),
\end{aligned}$$

so dass

$$\bar{F}((1 + \delta)F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)) < (1 - a_\delta^+)k_n/n, \quad (2.70)$$

$$\bar{F}((1 - \delta)F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)) > (1 + a_\delta^-)k_n/n \quad (2.71)$$

gilt. Nach Theorem 1.5.12 von Bingham et al. (1987) gilt wegen der regulären Variation von \bar{F} die Entwicklung $v_n = \bar{F}(F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)) = k_n/n + R_n$, wobei $R_n = o(k_n/n)$. Mit Hilfe von (2.70) und (2.71) folgt damit

$$\begin{aligned} & P \left\{ \frac{X_{n-k_n:n}}{F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} > 1 + \delta \right\} \\ &= P \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i > (1 + \delta)F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\} > k_n \right\} \\ &= P \left\{ \tilde{Z}_n(\phi_{1,1+\delta}) > (nv_n)^{-1/2}(k_n - nP\{X_0 > (1 + \delta)F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)\}) \right\} \\ &\leq P \left\{ \tilde{Z}_n(\phi_{1,1+\delta}) > (k_n + nR_n)^{-1/2}(k_n - n(1 - a_\delta^+)k_n/n) \right\} \\ &= P \left\{ \tilde{Z}_n(\phi_{1,1+\delta}) > (k_n + nR_n)^{-1/2}k_n a_\delta^+ \right\} \\ &= P \left\{ \tilde{Z}_n(\phi_{1,1+\delta}) > a_\delta^+ k_n^{1/2} (1 + nR_n/k_n)^{-1/2} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise ergibt sich

$$P \left\{ \frac{X_{n-k_n:n}}{F^{\leftarrow}(1 - k_n/n)} > 1 - \delta \right\} \geq P \left\{ \tilde{Z}_n(\phi_{1,1-\delta}) > -a_\delta^- k_n^{1/2} (1 + nR_n/k_n)^{-1/2} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Die Behauptung folgt dann für $\delta \downarrow 0$. □

2.3.5. Beweis von Lemma 2.7

Bevor wir den Beweis von Lemma 2.7 durchführen, halten wir das folgenden Hilfsresultat fest, welches insbesondere für den Nachweise von Theorem 2.8 herangezogen wird.

Proposition 2.11. *Es seien die Voraussetzungen aus Proposition 2.1. Wenn (2.5) gilt, folgt die schwache Konvergenz*

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n}), \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}), (\tilde{Z}_n(\phi_{2,x_t}^t))_{x_t \in [x_0, \infty)}, (\tilde{Z}_n(\phi_{3,y_t}^t))_{y_t \in [y_0, \infty)} \right)_{|t| \in \{1, \dots, \bar{t}\}} \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(Z(\phi_{0,1}), Z(\phi_{1,1}), (Z_n(\phi_{2,x_t}^t))_{x_t \in [x_0, \infty)}, (Z_n(\phi_{3,y_t}^t))_{y_t \in [x_0, \infty)} \right)_{|t| \in \{1, \dots, \bar{t}\}}. \quad (2.72) \end{aligned}$$

Beweis. Nach Proposition 2.1, Gleichung (2.5) und dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) gilt die schwache Konvergenz

$$\left((\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}, S_n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left((Z(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}, 1 \right). \quad (2.73)$$

Nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theo-

rem 1.10.4) existieren Versionen von $((\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}, S_n)$, $n \in \mathbb{N}$, und $((Z(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}, 1)$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$, so dass die obige Konvergenz (2.73) fast sicher gilt. Der Einfachheit halber unterscheiden wir an dieser Stelle die Bezeichnungen für die unterschiedlichen Versionen und Wahrscheinlichkeitsräume nicht.

Ferner hatten wir in Proposition 2.1 gesehen, dass die Folge der Prozess der Tail-Array-Sums $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}$ asymptotisch gleichstetig bezüglich der Semimetrik ρ_Φ aus (2.38) ist, welche die Funktionenklasse $\Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0$ totalbeschränkt. Nach Theorem 7.19 von Kosorok (2008) sind dann alle Pfade des Grenzprozesses $(Z(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}$ fast sicher gleichmäßig stetig bezüglich ρ_Φ , das heißt

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{\psi_1, \psi_2 \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0, \\ \rho_\Phi(\psi_1, \psi_2) < \delta}} |Z(\psi_1) - Z(\psi_2)| = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Nun gilt für alle Folgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$

$$\begin{aligned} \rho_\Phi(\phi_{0, s_n}, \phi_{0, 1}) &= |\log(s_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \rho_\Phi(\phi_{1, s_n}, \phi_{1, 1}) &= (1 - \varepsilon)^\alpha |s_n^{-\alpha} - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \sup_{x \in [x_0, \infty)} \rho_\Phi(\phi_{2, x, s_n}^t, \phi_{2, x, 1}^t) &= (1 - \varepsilon)^\alpha |s_n^{-\alpha} - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \sup_{y \in [y_0, \infty)} \rho_\Phi(\phi_{3, y, s_n}^t, \phi_{3, y, 1}^t) &= (1 - \varepsilon)^\alpha |s_n^{-\alpha} - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

so dass die fast sichere Konvergenz

$$\begin{aligned} |Z(\phi_{0, s_n}) - Z(\phi_{0, 1})| + |Z(\phi_{1, s_n}) - Z(\phi_{1, 1})| + \sup_{x \in [x_0, \infty)} |Z(\phi_{2, x, s_n}^t) - Z(\phi_{2, x, 1}^t)| \\ + \sup_{y \in [y_0, \infty)} |Z(\phi_{3, y, s_n}^t) - Z(\phi_{3, y, 1}^t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.74) \end{aligned}$$

gilt.

Wir zeigen nun, dass für die entsprechenden Skorokhod-Versionen die Konvergenz in (2.72) fast sicher gilt. Dies ist dann der Fall, wenn die folgende fast sichere Konvergenz gilt:

$$\begin{aligned} A := |\tilde{Z}_n(\phi_{0, s_n}) - Z(\phi_{0, 1})| + |\tilde{Z}_n(\phi_{1, s_n}) - Z(\phi_{1, 1})| + \sup_{x \in [x_0, \infty)} |\tilde{Z}_n(\phi_{2, x, s_n}^t) - Z(\phi_{2, x, 1}^t)| \\ + \sup_{y \in [y_0, \infty)} |\tilde{Z}_n(\phi_{3, y, s_n}^t) - Z(\phi_{3, y, 1}^t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Aus (2.73) folgt: Zu jedem $\delta \in (0, 1)$ kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass $S_n \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt. Demnach gilt für hinreichende große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A \leq |\tilde{Z}_n(\phi_{0, s_n}) - Z(\phi_{0, s_n})| + |Z(\phi_{0, s_n}) - Z(\phi_{0, 1})| \\ + |\tilde{Z}_n(\phi_{1, s_n}) - Z(\phi_{1, s_n})| + |Z(\phi_{1, s_n}) - Z(\phi_{1, 1})| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{x \in [x_0, \infty)} |\tilde{Z}_n(\phi_{2,x,S_n}^t) - Z(\phi_{2,x,S_n}^t)| + \sup_{x \in [x_0, \infty)} |Z(\phi_{2,x,S_n}^t) - Z(\phi_{2,x,1}^t)| \\
& + \sup_{y \in [y_0, \infty)} |\tilde{Z}_n(\phi_{3,y,S_n}^t) - Z(\phi_{3,y,S_n}^t)| + \sup_{y \in [y_0, \infty)} |Z(\phi_{3,y,S_n}^t) - Z(\phi_{3,y,1}^t)| \\
\leq & \sup_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]} |\tilde{Z}_n(\phi_{0,s}) - Z(\phi_{0,s})| + \sup_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]} |\tilde{Z}_n(\phi_{1,s}) - Z(\phi_{1,s})| \tag{2.75} \\
& + \sup_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]} \sup_{x \in [x_0, \infty)} |\tilde{Z}_n(\phi_{2,x,s}^t) - Z(\phi_{2,x,s}^t)| + \sup_{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]} \sup_{y \in [y_0, \infty)} |\tilde{Z}_n(\phi_{3,y,s}^t) - Z(\phi_{3,y,s}^t)| \\
& + |Z(\phi_{0,S_n}) - Z(\phi_{0,1})| + |Z(\phi_{1,S_n}) - Z(\phi_{1,1})| + \sup_{x \in [x_0, \infty)} |Z(\phi_{2,x,S_n}^t) - Z(\phi_{2,x,1}^t)| \\
& + \sup_{y \in [y_0, \infty)} |Z(\phi_{3,y,S_n}^t) - Z(\phi_{3,y,1}^t)|
\end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$. Die ersten vier Summanden der rechten Seite von (2.75) konvergieren wegen (2.73) fast sicher gegen 0. Die letzten vier Summanden der rechten Seite von (2.75) konvergieren nach (2.74) ebenfalls fast sicher gegen 0. Demzufolge gilt die Konvergenz in (2.72) fast sicher, so dass die Behauptung folgt. \square

Beweis von Lemma 2.7. Nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4) existieren Versionen von $((\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}, S_n)$, $n \in \mathbb{N}$, und $((Z(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}, 1)$, so dass die Konvergenz in (2.72) fast sicher gilt. Der Einfachheit halber unterscheiden wir an dieser Stelle die Bezeichnungen für die unterschiedlichen Versionen und Wahrscheinlichkeitsräume nicht.

Definiere der Übersicht halber für $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$

$$\alpha_{n,s} := \frac{1}{E[\log(X_0/(su_n)) \mid X_0 > su_n]} \quad \text{und} \quad \hat{\alpha}_{n,s} := \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{1,s}(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^n \phi_{0,s}(X_{n,i})}.$$

Mit Hilfe der Definitionen in (2.6), (2.12) und (2.18) folgt

$$\sum_{i=1}^n \phi_{1,s}(X_{n,i}) = nP\{X_0 > su_n\} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s}), \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \phi_{0,s}(X_{n,i}) &= nE[\log(X_0/(su_n)) \mathbb{1}\{X_0 > su_n\}] + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,s}) \\
&= n \frac{P\{X_0 > su_n\}}{\alpha_{n,s}} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,s}). \tag{2.77}
\end{aligned}$$

In Verbindung mit (2.25) und Bemerkung 2.6 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{n,s_n} - \alpha_{n,s_n} &= \frac{nP\{X_0 > s_n u_n\} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n})}{n \frac{P\{X_0 > s_n u_n\}}{\alpha_{n,s_n}} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})} - \alpha_{n,s_n} \\
&= \frac{\alpha_{n,s_n} (nP\{X_0 > s_n u_n\} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n}))}{nP\{X_0 > s_n u_n\} + \alpha_{n,s_n} (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})} - \alpha_{n,s_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (nv_n)^{1/2} \frac{\alpha_{n,s_n} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n}) - \alpha_{n,s_n}^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})}{nP\{X_0 > s_n u_n\} + \alpha_{n,s_n} (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})} \\
&= (nv_n)^{-1/2} \frac{\alpha_{n,s_n} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n}) - \alpha_{n,s_n}^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})}{\frac{P\{X_0 > s_n u_n\}}{v_n} + \alpha_{n,s_n} (nv_n)^{-1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})} \\
&= (nv_n)^{-1/2} \frac{v_n}{P\{X_0 > s_n u_n\}} \frac{\alpha_{n,s_n} \tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n}) - \alpha_{n,s_n}^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})}{1 + \alpha_{n,s_n} \frac{v_n}{P\{X_0 > s_n u_n\}} (nv_n)^{-1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})} \\
&= (nv_n)^{-1/2} s_n^\alpha \left(\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n}) - \alpha^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n}) \right) \left(1 + o_P(1) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
&|S_n^\alpha(\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n}) - \alpha^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n})) - (\alpha Z(\phi_{1,1}) - \alpha^2 Z(\phi_{0,1}))| \\
&\leq \alpha |S_n^\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n}) - Z(\phi_{1,1})| + \alpha^2 |S_n^\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n}) - Z(\phi_{0,1})| \\
&\leq \alpha S_n^\alpha |\tilde{Z}_n(\phi_{1,s_n}) - Z(\phi_{1,1})| + |Z(\phi_{1,1})| |S_n^{-\alpha} - 1| + \alpha^2 S_n^\alpha |\tilde{Z}_n(\phi_{0,s_n}) - Z(\phi_{0,1})| \\
&\quad + |Z(\phi_{0,1})| |S_n^{-\alpha} - 1| \quad (2.79)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite von (2.79) konvergiert wegen Proposition 2.11 und Gleichung (2.5) fast sicher gegen 0. In Kombination mit der Entwicklung in (2.78) folgt also

$$|(nv_n)^{1/2}(\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha_{n,S_n}) - (\alpha Z(\phi_{1,1}) - \alpha^2 Z(\phi_{0,1}))| = o_P(1).$$

Nun liefert liefert die Bias-Bedingung (2.26)

$$\begin{aligned}
(nv_n)^{1/2}(\hat{\alpha}_n - \alpha) &= (nv_n)^{1/2}(\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha_{n,S_n}) + (nv_n)^{1/2}(\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha) \\
&= (nv_n)^{1/2}(\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha_{n,S_n}) + o(1),
\end{aligned}$$

so dass wegen $\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_{n,S_n}$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichende große $n \in \mathbb{N}$ die Behauptung folgt. \square

2.3.6. Beweis von Theorem 2.8

Seien $z \in (0, y_0^{-1}]$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \infty)$, mit $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Nach Lemma 2.7 kann für jedes $\delta \in (0, 1)$ ein $n \in \mathbb{N}$ derart groß gewählt werden, so dass der Hill-Schätzer $\hat{\alpha}_n$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ in dem Intervall (α_1, α_2) liegt. Eine Taylorentwicklung der Funktionen $t \mapsto z^t$ im Punkt α liefert die Darstellung

$$z^{\hat{\alpha}_n} - z^\alpha = z^\alpha \log(z)(\hat{\alpha}_n - \alpha) + \frac{1}{2} z^{\alpha + \lambda(\hat{\alpha}_n - \alpha)} \log^2(z)(\hat{\alpha}_n - \alpha)^2,$$

wobei λ eine geeignete Zufallsvariable mit Werten in $(0, 1)$ sei, die in Abhängigkeit von z und $\hat{\alpha}_n$ zu wählen ist. Man beachte, dass der Term $z^{\tilde{\alpha}} \log^2(z)$ beschränkt für alle $\tilde{\alpha} \in (\alpha_1, \alpha_2)$ und alle

$z \in (0, y_0^{-1}]$ ist. Aus Lemma 2.7 ist insbesondere

$$\hat{\alpha}_n - \alpha = (nv_n)^{-1/2} S_n^\alpha (\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n}) + o_P(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

bekannt. Sei nun $z = X_{i-t}/X_i$ gewählt. Mit Hilfe der vorangegangenen Identitäten ergibt sich für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ auf dem Ereignis $\{X_{i-t}/X_i \in (0, y_0^{-1}]\}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| (nv_n)^{-1/2} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) S_n^\alpha (\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n}) + o_P(1)) \right. \\ & \quad \left. - \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} - \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\alpha + \lambda(\hat{\alpha}_n - \alpha)} \log^2 \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_n - \alpha)^2 \\ &\leq C (\hat{\alpha}_n - \alpha)^2, \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist, die lediglich von α , y_0 und ε abhängt. Mit Hilfe dieser Schranke und Lemma 2.7 folgt

$$\begin{aligned} & (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} - \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\ &= \frac{\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n})}{nv_n} S_n^\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\ & \quad + o_P \left((nv_n)^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \{ X_i > S_n u_n \} \right) \\ &= \frac{\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n})}{nv_n} S_n^\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \quad (2.80) \\ & \quad + o_P(1) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei die letzte Gleichung aus der schwachen Konvergenz von $\tilde{Z}_n(\phi_{1,1-\varepsilon})$ folgt.

Es lässt sich nun mit Hilfe derselben Techniken wie im Beweis zu Proposition 2.1 zeigen, dass die Folge der stochastischen Prozesse

$$\begin{aligned} & \left((nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > s u_n \right\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - E \left[\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > s u_n \right\} \right] \right) \right)_{\substack{s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon], \\ y \in [y_0, \infty)}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

$n \in \mathbb{N}$, schwach gegen einen zentrierten Gauß-Prozess konvergiert. Darüber hinaus kann ähnlich wie im Beweis zu Theorem 2.4 gezeigt werden, dass dieser Gauß-Prozess gleichmäßig stetig hinsichtlich der Semimetrik $\tilde{\rho}_3 : [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [y_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\tilde{\rho}_3((s, y), (\tilde{s}, \tilde{y})) = \rho_3(\phi_{3,y,s}^t, \phi_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^t)$$

ist. Anhand dieser gleichmäßigen Stetigkeit lässt sich die schwache Konvergenz des obigen stochastischen Prozesses mit $s = S_n$ folgern. Tatsächlich wird für den weiteren Beweis lediglich die Konsistenz dieser stochastischen Prozesse benötigt.

Mit der obigen asymptotischen Normalität und der gleichmäßigen $\tilde{\rho}_3$ -Stetigkeit des Grenzprozesses erhalten wir

$$\begin{aligned} & (nv_n)^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\ &= \frac{P\{X_0 > (1-\varepsilon)u_n\}}{v_n} E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, X_0 > su_n \right\} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right] \Big|_{s=S_n} \\ & \quad + o_P(1) \end{aligned} \tag{2.82}$$

gleichmäßig in $y \in [y_0, \infty)$. Der bedingte Erwartungswert

$$D_n(s, y) := E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, X_0 > su_n \right\} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right]$$

ist monoton fallend in $s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Sei $\zeta > 0$ beliebig. Dann gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(1+\zeta, y) \leq D_n(s, y)|_{s=S_n} \leq D_n(1-\zeta, y)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit $1-\delta$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in [y_0, \infty)} |D_n(s, y)|_{s=S_n} - D_n(1, y)| \\ & \leq \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left(|D_n(1-\zeta, y) - D_n(1, y)| + |D_n(1, y) - D_n(1+\zeta, y)| \right) \\ & = \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left(\left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, \frac{X_0}{u_n} \in (1-\zeta, 1] \right\} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right] \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, \frac{X_0}{u_n} \in (1, 1+\zeta] \right\} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right] \right| \right) \\ & = \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y_0, \frac{X_0}{u_n} \in (1-\zeta, 1] \right\} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right] \right| \tag{2.83} \\ & \quad + \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y_0, \frac{X_0}{u_n} \in (1, 1+\zeta] \right\} \mid X_0 > (1-\varepsilon)u_n \right] \right| \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1-\delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Lässt man ζ gegen 0 streben, so konvergiert die rechte Seite der obigen Gleichung (2.83) gegen 0. Folglich gilt die stochastische Konvergenz

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} |D_n(s, y)|_{s=S_n} - D_n(1, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.84}$$

Ferner folgt aus der stochastischen Unabhängigkeit von Y_0 und Θ_{-t} und der Tatsache, dass Y_0

Pareto-verteilt ist,

$$\begin{aligned} E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y, Y_0 > (1 - \varepsilon)^{-1}\}] \\ &= P\{Y_0 > (1 - \varepsilon)^{-1}\} E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}] \\ &= (1 - \varepsilon)^\alpha E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}]. \end{aligned}$$

Nun ist die Abbildung

$$y \mapsto E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}] = \int_0^{1/y} \vartheta^\alpha \log(\vartheta) \mathcal{L}(\Theta_{-t})(d\vartheta)$$

wegen Voraussetzung $(A(x_0))$, die die Stetigkeit von $F^{(\Theta_{-t})}$ auf $(0, 1/y_0]$ impliziert, stetig auf $[y_0, \infty)$. Mit dem Ansatz von Bemerkung 2.3 lässt sich dann leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y \right\} \mid X_0 > u_n \right] \right. \\ \left. - E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

gilt. In Verbindung mit der Gleichheit

$$D_n(1, y) = \frac{v_n}{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}} E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y \right\} \mid X_0 > u_n \right]$$

und der regulären Variation von X_0 , die $v_n/P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^\alpha$ liefert, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [y_0, \infty)} & \left| D_n(1, y) - (1 - \varepsilon)^\alpha E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \\ & \leq \frac{v_n}{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}} \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y \right\} \mid X_0 > u_n \right] \right. \\ & \quad \left. - E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \\ & \quad + \left| E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \left| \frac{v_n}{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}} - (1 - \varepsilon)^\alpha \right| \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

In Kombination mit (2.84) folgt demnach die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [y_0, \infty)} & \left| D_n(s, y)|_{s=S_n} - (1 - \varepsilon)^\alpha E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \\ & \leq \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| D_n(s, y)|_{s=S_n} - D_n(1, y) \right| \\ & \quad + \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| D_n(1, y) - (1 - \varepsilon)^\alpha E [\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Aus der regulären Variation von X_0 und den Gleichungen (2.82) und (2.85) folgt also die stochastische Konvergenz

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} - E \left[\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1} \{1/\Theta_{-t} > y\} \right] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.86)$$

Durch Anwendung der Time-Change-Formula (1.3) für die Indizes $(i, s, t) = (-t, 0, 0)$ und die Funktion $f(x) = -\log(x) \mathbf{1}\{x > y\}$ erhält man die Gleichheit

$$\begin{aligned} -E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}] &= E[f(\Theta_t)] \\ &= E[f(1/\Theta_{-t}) \Theta_{-t}^\alpha] \\ &= E[\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Aus (2.5), (2.80), (2.86), (2.87), Proposition 2.11 (aus Abschnitt 2.3.5) und dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) folgt somit die schwache Konvergenz der stochastischen Prozesse

$$\begin{aligned} &(nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} - E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,i}) | s=S_n] \right) \\ &= (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} - \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} + \tilde{Z}_n(\phi_{3,y,S_n}^t) \\ &= (\alpha \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n})) S_n^\alpha \\ &\quad \times (nv_n)^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} + \tilde{Z}_n(\phi_{3,y,S_n}^t) + o_P(1) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z(\phi_{3,y,1}^t) - (\alpha Z(\phi_{1,1}) - \alpha^2 Z(\phi_{0,1})) E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Nun gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned} &(nv_n)^{1/2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i > S_n u_n\}} - E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0}) | X_0 > su_n] |_{s=S_n} \right) \\ &= (nv_n)^{1/2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}}{nP\{X_0 > su_n\} |_{s=S_n} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})} - \frac{E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0})] |_{s=S_n}}{P\{X_0 > su_n\} |_{s=S_n}} \right) \\ &= (nv_n)^{1/2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} - E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,i})] |_{s=S_n} \right)}{nP\{X_0 > su_n\} |_{s=S_n} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) \frac{E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0})] |_{s=S_n}}{P\{X_0 > su_n\} |_{s=S_n}}}{nP\{X_0 > su_n\} |_{s=S_n} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} - E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,i})] \Big|_{s=S_n} \right)}{\frac{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}}{v_n} + (nv_n)^{-1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})} \\
&\quad - \frac{\tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) \frac{E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0})] |_{s=S_n}}{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}}}{\frac{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}}{v_n} + (nv_n)^{-1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})} \\
&= \left(\frac{(nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} - E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,i})] \Big|_{s=S_n} \right)}{1 + (nv_n)^{-1/2} \frac{v_n}{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\frac{v_n}{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0}) | X_0 > s u_n] |_{s=S_n}}{1 + (nv_n)^{-1/2} \frac{v_n}{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})} \right) \frac{v_n}{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}}. \tag{2.89}
\end{aligned}$$

Aus (2.5) und (2.25) ergibt sich die stochastische Konvergenz

$$\frac{v_n}{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \tag{2.90}$$

In Verbindung mit Proposition 2.11 und Voraussetzung (B), die $nv_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ liefert, konvergiert der Nenner innerhalb der Klammer der rechten Seite von (2.89) in Wahrscheinlichkeit gegen 1:

$$1 + (nv_n)^{-1/2} \frac{v_n}{P\{X_0 > s u_n\} |_{s=S_n}} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Der bedingte Erwartungswert $C_n(s, y) := E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0}) | X_0 > (1 - \varepsilon)u_n]$ ist monoton fallend in $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Für ein beliebiges $\zeta > 0$ gilt also

$$C_n(1 + \zeta, y) \leq C_n(s, y) |_{s=S_n} \leq C_n(1 - \zeta, y)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\sup_{y \in [y_0, \infty)} |C_n(s, y) |_{s=S_n} - C_n(1, y)| \\
&\leq \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left(|C_n(1 - \zeta, y) - C_n(1, y)| + |C_n(1, y) - C_n(1 + \zeta, y)| \right) \\
&= \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left(\left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, \frac{X_0}{u_n} \in (1 - \zeta, 1] \right\} \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n \right] \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, \frac{X_0}{u_n} \in (1, 1 + \zeta] \right\} \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n \right] \right| \right) \\
&= \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y_0, \frac{X_0}{u_n} \in (1 - \zeta, 1] \right\} \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n \right] \right| \\
&\quad + \left| E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y_0, \frac{X_0}{u_n} \in (1, 1 + \zeta] \right\} \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n \right] \right| \tag{2.91}
\end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Die rechte Seite von (2.91) konvergiert für $\zeta \downarrow 0$ gegen 0. Folglich gilt die stochastische Konvergenz

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} |C_n(s, y)|_{s=S_n} - C_n(1, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.92)$$

Aus Bemerkung 2.6, der regulären Variation von X_0 und $\sup_{y \in [y_0, \infty)} \phi_{3, y, 1}^t \leq y_0^{-\alpha}$ folgt die gleichmäßige Konvergenz

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in [y_0, \infty)} |C_n(1, y) - (1 - \varepsilon)^\alpha E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}]| \\ &= \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| \frac{v_n}{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}} E\left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{X_0}{X_{-t}} > y\right\} \mid X_0 > u_n\right] \right. \\ & \quad \left. - (1 - \varepsilon)^\alpha E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \\ &\leq \left(\frac{v_n}{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}} - (1 - \varepsilon)^\alpha \right) \sup_{y \in [y_0, \infty)} E\left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{X_0}{X_{-t}} > y\right\} \mid X_0 > u_n\right] \\ & \quad + (1 - \varepsilon)^\alpha \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| E\left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{X_0}{X_{-t}} > y\right\} \mid X_0 > u_n\right] - E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \\ &\leq \left(\frac{v_n}{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}} - (1 - \varepsilon)^\alpha \right) y_0^\alpha \\ & \quad + (1 - \varepsilon)^\alpha \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| E\left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0}\right)^\alpha \mathbf{1}\left\{\frac{X_0}{X_{-t}} > y\right\} \mid X_0 > u_n\right] - E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.93)$$

In Kombination mit der Dreiecksungleichung folgt also die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in [y_0, \infty)} |C_n(s, y)|_{s=S_n} - (1 - \varepsilon)^\alpha E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}]| \\ &\leq \sup_{y \in [y_0, \infty)} |C_n(s, y)|_{s=S_n} - C_n(1, y)| + \sup_{y \in [y_0, \infty)} |C_n(1, y) - (1 - \varepsilon)^\alpha E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}]| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Aus (2.90), (2.92) und (2.93) ergibt sich also die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in [y_0, \infty)} |E[\phi_{3, y, s}^t(X_{n, 0})]|_{s=S_n} - E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}]| \\ &= \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| \frac{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}}{P\{X_0 > su_n\}} C_n(s, y)|_{s=S_n} - E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \\ &\leq \left| \frac{v_n}{P\{X_0 > su_n\}} \frac{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}}{v_n} - (1 - \varepsilon)^{-\alpha} \right| \sup_{y \in [y_0, \infty)} C_n(s, y)|_{s=S_n} \\ & \quad + (1 - \varepsilon)^{-\alpha} \sup_{y \in [y_0, \infty)} |C_n(s, y)|_{s=S_n} - (1 - \varepsilon)^\alpha E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}]| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (2.88) und Proposition 2.11 folgt somit aus (2.89) die schwache Konvergenz der stochastischen Prozesse

$$(nv_n)^{1/2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1} \{X_i > S_n u_n\}} - E[\phi_{3,y,s}^t(X_{n,0}) \mid X_0 > su_n]_{|s=S_n} \right) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z(\phi_{3,y,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) Z(\phi_{1,1}) + (\alpha^2 Z(\phi_{0,1}) - \alpha Z(\phi_{1,1})) E[\log(\Theta_t) \mathbf{1} \{\Theta_t > y\}].$$

Nach Bias-Bedingung (2.23) gilt damit auch die schwache Konvergenz der stochastischen Prozesse

$$(nv_n)^{1/2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1} \{X_i > S_n u_n\}} - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) \right) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z(\phi_{3,y,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) Z(\phi_{1,1}) + (\alpha^2 Z(\phi_{0,1}) - \alpha Z(\phi_{1,1})) E[\log(\Theta_t) \mathbf{1} \{\Theta_t > y\}].$$

Kovarianzstruktur des Grenzprozesses

Bezeichne für $x \in [x_0, \infty)$, $y \in [y_0, \infty)$ und $t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} Z_{f,t}(x) &:= Z(\phi_{2,x,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) Z(\phi_{1,1}), \\ Z_{b,t}(y) &:= Z(\phi_{3,y,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) Z(\phi_{1,1}), \\ Z_{\alpha,t}(y) &:= (\alpha^2 Z(\phi_{0,1}) - \alpha Z(\phi_{1,1})) E[\log(\Theta_t) \mathbf{1} \{\Theta_t > y\}], \quad \text{und} \\ Z_{\hat{b},t}(y) &:= Z_{b,t}(y) + Z_{\alpha,t}(y) \\ &= Z(\phi_{3,y,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) Z(\phi_{1,1}) + (\alpha^2 Z(\phi_{0,1}) - \alpha Z(\phi_{1,1})) E[\log(\Theta_t) \mathbf{1} \{\Theta_t > y\}]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Addendums 2.2 gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z(\phi_{0,1})) &= 2\alpha^{-2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E[\log(Y_0) \log^+(Y_0 \Theta_k)], \\ \text{Cov}(Z(\phi_{1,1}), Z(\phi_{0,1})) &= \alpha^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (E[\log(Y_0) \mathbf{1} \{Y_0 \Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0 \Theta_k)]), \\ \text{Cov}(Z(\phi_{0,1}), Z(\phi_{2,x,1}^t)) &= \alpha^{-1} \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log^+(Y_0 \Theta_k) \mathbf{1} \{\Theta_t > x, Y_0 \Theta_k > 1\}] \right. \\ &\quad \left. + E \left[\log(Y_0) \mathbf{1} \left\{ \frac{\Theta_{k+t}}{\Theta_k} > x, Y_0 \Theta_k > 1 \right\} \right] \right), \\ \text{Cov}(Z(\phi_{0,1}), Z(\phi_{3,y,1}^t)) &= \alpha^{-1} E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbf{1} \{\Theta_{-t} < y^{-1}\}] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\Theta_{-t}^\alpha \log^+(Y_0 \Theta_k) \mathbf{1} \{\Theta_{-t} < y^{-1}, Y_0 \Theta_k > 1\}] \right. \\ &\quad \left. + E \left[\left(\frac{\Theta_{k-t}}{\Theta_k} \right)^\alpha \log(Y_0) \mathbf{1} \left\{ \frac{\Theta_{k-t}}{\Theta_k} < y^{-1}, Y_0 \Theta_k > 1 \right\} \right] \right), \end{aligned}$$

wobei hierfür die Gleichheiten

$$E[\log(Y_0)] = \alpha^{-1} \quad \text{und} \quad E[\log^2(Y_0)] = 2\alpha^{-2}$$

ausgenutzt wurden. Demzufolge gilt mit den Gleichungen in (2.67) für $x, \tilde{x} \in [x_0, \infty)$, $y, \tilde{y} \in [y_0, \infty)$ und $t_1, t_2 \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} & Cov(Z_{\alpha, t_1}(y), Z_{\alpha, t_2}(\tilde{y})) \\ &= E[\log(\Theta_{t_1})\mathbf{1}\{\Theta_{t_1} > y\}]E[\log(\Theta_{t_2})\mathbf{1}\{\Theta_{t_2} > \tilde{y}\}] \\ & \quad \times \left(\alpha^4 Var(Z(\phi_{0,1})) - 2\alpha^3 Cov(Z(\phi_{0,1}), Z(\phi_{1,1})) + \alpha^2 Var(Z(\phi_{1,1})) \right) \\ &= E[\log(\Theta_{t_1})\mathbf{1}\{\Theta_{t_1} > y\}]E[\log(\Theta_{t_2})\mathbf{1}\{\Theta_{t_2} > \tilde{y}\}] \\ & \quad \times \left(2\alpha^2 + 2\alpha^4 \sum_{k=1}^{\infty} E[\log(Y_0) \log^+(Y_0\Theta_k)] \right. \\ & \quad \quad - 2\alpha^2 - 2\alpha^3 \sum_{k=1}^{\infty} (E[\log(Y_0)\mathbf{1}\{Y_0\Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0\Theta_k)]) \\ & \quad \quad \left. + \alpha^2 + 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\} \right) \\ &= 2\alpha^2 E[\log(\Theta_{t_1})\mathbf{1}\{\Theta_{t_1} > y\}]E[\log(\Theta_{t_2})\mathbf{1}\{\Theta_{t_2} > \tilde{y}\}] \\ & \quad \times \left(\frac{1}{2} + \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} E[\log(Y_0) \log^+(Y_0\Theta_k)] - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (E[\log(Y_0)\mathbf{1}\{Y_0\Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0\Theta_k)]) \right. \\ & \quad \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Cov(Z_{f, t_1}(x), Z_{\alpha, t_2}(y)) \\ &= E[\log(\Theta_{t_2})\mathbf{1}\{\Theta_{t_2} > y\}] \left(\alpha^2 Cov(Z(\phi_{2,x,1}^{t_1}), Z(\phi_{0,1})) - \alpha Cov(Z(\phi_{2,x,1}^{t_1}), Z(\phi_{1,1})) \right. \\ & \quad \left. - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) (\alpha^2 Cov(Z(\phi_{0,1}), Z(\phi_{1,1})) - \alpha Var(Z(\phi_{1,1}))) \right) \\ &= E[\log(\Theta_{t_2})\mathbf{1}\{\Theta_{t_2} > y\}] \left(\alpha \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) + \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log^+(Y_0\Theta_k)\mathbf{1}\{\Theta_{t_1} > x, Y_0\Theta_k > 1\}] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + E\left[\log(Y_0)\mathbf{1}\left\{ \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1 \right\} \right] \right) \right. \\ & \quad - \alpha \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\{\Theta_{t_1} > x, Y_0\Theta_k > 1\} + P\left\{ \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1 \right\} \right) \\ & \quad \left. - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) \left(\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} (E[\log(Y_0)\mathbf{1}\{Y_0\Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0\Theta_k)]) - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\} \right) \right) \\ &= E[\log(\Theta_{t_2})\mathbf{1}\{\Theta_{t_2} > y\}] \left(\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log^+(Y_0\Theta_k)\mathbf{1}\{\Theta_{t_1} > x, Y_0\Theta_k > 1\}] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + E\left[\log(Y_0)\mathbf{1}\left\{ \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1 \right\} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\{\Theta_{t_1} > x, Y_0 \Theta_k > 1\} + P\left\{\frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0 \Theta_k > 1\right\} \right) \\
& - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) \left(\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log(Y_0) \mathbb{1}\{Y_0 \Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0 \Theta_k)] \right) - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0 \Theta_k > 1\} \right),
\end{aligned}$$

$$Cov(Z_{b,t_1}(y), Z_{\alpha,t_2}(\tilde{y}))$$

$$\begin{aligned}
& = E[\log(\Theta_{t_2}) \mathbb{1}\{\Theta_{t_2} > \tilde{y}\}] \left(\alpha^2 Cov(Z(\phi_{3,y}^{t_1}), Z(\phi_{0,1})) - \alpha Cov(Z(\phi_{3,y}^{t_1}), Z(\phi_{1,1})) \right. \\
& \quad \left. - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y) (\alpha^2 Cov(Z(\phi_{0,1}), Z(\phi_{1,1})) - \alpha Var(Z(\phi_{1,1}))) \right) \\
& = E[\log(\Theta_{t_2}) \mathbb{1}\{\Theta_{t_2} > \tilde{y}\}] \left(\alpha E[\Theta_{-t_1}^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_{-t_1} < y^{-1}\}] \right. \\
& \quad + \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\Theta_{-t_1}^\alpha \log^+(Y_0 \Theta_k) \mathbb{1}\{\Theta_{-t_1} < y^{-1}, Y_0 \Theta_k > 1\}] \right. \\
& \quad \left. + E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k}\right)^\alpha \log(Y_0) \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k} < y^{-1}, Y_0 \Theta_k > 1\right\}\right] \right) \\
& \quad - \alpha \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_1}} > y, Y_0 \Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
& \quad \left. + E[\Theta_{-t_1}^\alpha \mathbb{1}\{1/\Theta_{-t_1} > y, Y_0 \Theta_k > 1\}] \right) \\
& \quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y) \left(\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log(Y_0) \mathbb{1}\{Y_0 \Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0 \Theta_k)] \right) - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0 \Theta_k > 1\} \right).
\end{aligned}$$

Die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses ist dann von folgender Form:

$$Cov(Z_{f,t_1}(x), Z_{\hat{b},t_2}(y))$$

$$\begin{aligned}
& = Cov(Z_{f,t_1}(x), Z_{b,t_2}(y)) + Cov(Z_{f,t_1}(x), Z_{\alpha,t_2}(y)) \\
& = E[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_{-t_2}^{-1} > y, \Theta_{t_1} > x\}] - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(y) \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0 \Theta_k > 1\} \right) \quad (2.95) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > y, \Theta_{t_1} > x, Y_0 \Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
& \quad \left. + E\left[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{1}{\Theta_{-t_2}} > y, \frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0 \Theta_k > 1\right\}\right] \right) \\
& - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(y) \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\{\Theta_t > x, Y_0 \Theta_k > 1\} + P\left\{\frac{\Theta_{k+t}}{\Theta_k} > x, Y_0 \Theta_k > 1\right\} \right) \\
& - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t}} > y, Y_0 \Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
& \quad \left. + E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_{-t}^{-1} > y, Y_0 \Theta_k > 1\}] \right) \\
& + E[\log(\Theta_{t_2}) \mathbb{1}\{\Theta_{t_2} > y\}] \left(\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log^+(Y_0 \Theta_k) \mathbb{1}\{\Theta_{t_1} > x, Y_0 \Theta_k > 1\}] \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E\left[\log(Y_0)\mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \\
& - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\{\Theta_{t_1} > x, Y_0\Theta_k > 1\} + P\left\{\frac{\Theta_{k+t_1}}{\Theta_k} > x, Y_0\Theta_k > 1\right\} \right) \\
& - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(x) \left(\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log(Y_0)\mathbb{1}\{Y_0\Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0\Theta_k)] \right) - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\} \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& Cov(Z_{\hat{b},t_1}(y), Z_{\hat{b},t_2}(\tilde{y})) \\
& = Cov(Z_{b,t_1}(y), Z_{b,t_2}(\tilde{y})) + Cov(Z_{b,t_1}(y), Z_{\alpha,t_2}(\tilde{y})) + Cov(Z_{\alpha,t_1}(y), Z_{b,t_2}(\tilde{y})) \\
& \quad + Cov(Z_{\alpha,t_1}(y), Z_{\alpha,t_2}(\tilde{y})) \\
& = E[(\Theta_{-t_1}\Theta_{-t_2})^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_{-t_1}^{-1} > y, \Theta_{-t_2}^{-1} > \tilde{y}\}] - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y)\bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{y}) \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\} \right) \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k}\Theta_{-t_1}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > \tilde{y}, \frac{1}{\Theta_{-t_1}} > y, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
& \quad \quad \left. + E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k}\Theta_{-t_2}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_1}} > y, \frac{1}{\Theta_{-t_2}} > \tilde{y}, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right) \\
& \quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{y}) \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_1}} > y, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
& \quad \quad \left. + E[\Theta_{-t_1}^\alpha \mathbb{1}\{1/\Theta_{-t_1} > y, Y_0\Theta_k > 1\}] \right) \\
& \quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y) \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > \tilde{y}, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
& \quad \quad \left. + E[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbb{1}\{1/\Theta_{-t_2} > \tilde{y}, Y_0\Theta_k > 1\}] \right) \\
& \quad + E[\log(\Theta_{t_2})\mathbb{1}\{\Theta_{t_2} > \tilde{y}\}] \left(\alpha E[\Theta_{-t_1}^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_{-t_1} < y^{-1}\}] \right. \\
& \quad \quad \left. + \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\Theta_{-t_1}^\alpha \log^+(Y_0\Theta_k)\mathbb{1}\{\Theta_{-t_1} < y^{-1}, Y_0\Theta_k > 1\}] \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k}\right)^\alpha \log(Y_0)\mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k} < y^{-1}, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right) \right) \\
& \quad - \alpha \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_1}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_1}} > y, Y_0\Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
& \quad \quad \left. + E[\Theta_{-t_1}^\alpha \mathbb{1}\{1/\Theta_{-t_1} > y, Y_0\Theta_k > 1\}] \right) \\
& \quad - \bar{F}^{(\Theta_{t_1})}(y) \left(\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log(Y_0)\mathbb{1}\{Y_0\Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0\Theta_k)] \right) - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0\Theta_k > 1\} \right) \\
& \quad + E[\log(\Theta_{t_1})\mathbb{1}\{\Theta_{t_1} > y\}] \left(\alpha E[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_{-t_2} < \tilde{y}^{-1}\}] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\Theta_{-t_2}^\alpha \log^+(Y_0 \Theta_k) \mathbb{1}\{\Theta_{-t_2} < \tilde{y}^{-1}, Y_0 \Theta_k > 1\}] \right. \\
& \quad \left. + E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k}\right)^\alpha \log(Y_0) \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k} < \tilde{y}^{-1}, Y_0 \Theta_k > 1\right\}\right]\right) \\
& - \alpha \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{y}) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left[\left(\frac{\Theta_{k-t_2}}{\Theta_k}\right)^\alpha \mathbb{1}\left\{\frac{\Theta_k}{\Theta_{k-t_2}} > \tilde{y}, Y_0 \Theta_k > 1\right\}\right] \right. \\
& \quad \left. + E[\Theta_{-t_2}^\alpha \mathbb{1}\{1/\Theta_{-t_2} > \tilde{y}, Y_0 \Theta_k > 1\}] \right) \\
& - \bar{F}^{(\Theta_{t_2})}(\tilde{y}) \left(\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E[\log(Y_0) \mathbb{1}\{Y_0 \Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0 \Theta_k)] \right) - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0 \Theta_k > 1\} \right) \\
& + 2\alpha^2 E[\log(\Theta_{t_1}) \mathbb{1}\{\Theta_{t_1} > y\}] E[\log(\Theta_{t_2}) \mathbb{1}\{\Theta_{t_2} > \tilde{y}\}] \\
& \times \left(\frac{1}{2} + \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} E[\log(Y_0) \log^+(Y_0 \Theta_k)] - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (E[\log(Y_0) \mathbb{1}\{Y_0 \Theta_k > 1\}] + E[\log^+(Y_0 \Theta_k)]) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_0 \Theta_k > 1\} \right),
\end{aligned}$$

wobei die Kovarianz $Cov(Z_{f,t_1}(x), Z_{f,t_2}(\tilde{x}))$ in Gleichung (2.68) angegeben ist. \square

Kapitel 3.

Multiplier-Block-Bootstrap

In Theorem 2.8 haben wir festgestellt, dass die modifizierten Forward- und Backward-Schätzer für $F^{(\Theta_i)}$ asymptotisch normal sind. Insbesondere ergab sich, dass sich deren asymptotisches Verhalten nicht von den originalen Forward- und Backward-Schätzern von Davis et al. (2018) unterscheidet. Das Verwenden stochastischer Schranken \hat{u}_n an Stelle von deterministischen Schranken u_n spielt also asymptotisch betrachtet keine Rolle, sofern $\hat{u}_n/u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ in Wahrscheinlichkeit gilt. Mit Blick auf die Konstruktion von geeigneten Konfidenzintervallen stellt man jedoch fest, dass die Grenzverteilungen in dem Sinn zu komplex sind, als dass diese die gesamte serielle Abhängigkeitsstruktur beinhalten. Die entsprechenden asymptotischen Varianzen und Kovarianzen jener Schätzer setzen sich nämlich aus Reihen von unbekanntem Größen zusammen, die wiederum von $\mathcal{L}(\Theta_h)$ abhängen und über alle Zeitlags $h \in \mathbb{Z}$ eingehen (siehe Kovarianzstruktur in (2.95)). Diese unbekanntem Größen müssten dann ebenfalls geschätzt werden. Doch ist dieses Unterfangen wenig vielversprechend und statistisch kaum zu rechtfertigen, da Theorem 2.8 die gemeinsame Konvergenz der Schätzer nur bis zu einem maximalen Lag $\tilde{t} \in \mathbb{N}$ liefert. Davis et al. (2018) schlagen deshalb für die Konstruktion von Konfidenzintervallen zwei Bootstrap-Verfahren vor - den sogenannten *stationären Bootstrap* verwendet in Davis et al. (2012) und den *Multiplier-Block-Bootstrap* beschrieben in Drees (2015). Letzterer weist in allen Simulationsbeispielen von Davis et al. (2018) eine bessere Performance auf, so dass wir uns auf diesen beschränken.

In diesem Kapitel zeigen wir, dass die entsprechende Multiplier-Block-Bootstrap-Versionen der Forward- und Backward-Schätzer erweitert um zufällige Schranken \hat{u}_n ebenfalls asymptotisch normal sind. Des Weiteren sind diese Versionen bedingt auf den zugrunde liegenden Beobachtungen konsistent hinsichtlich der Bounded-Lipschitz-Metrik.

3.1. Asymptotische Resultate

Für Tail-Array-Sums ist der *Multiplier-Block-Bootstrap-Prozess* $Z_{n,\xi}$ definiert als

$$Z_{n,\xi}(\psi) := (nv_n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} (\psi(X_{n,i}) - E[\psi(X_{n,i})]), \quad \psi \in \Phi,$$

mit $m_n = \lfloor n/r_n \rfloor := \max\{j \in \mathbb{N}_0 \mid j \leq n/r_n\}$ und $I_j = \{(j-1)r_n + 1, \dots, jr_n\}$, wobei $\xi_j, j \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[\xi_j] = 0$ und $Var(\xi_j) = 1$ sind, die unabhängig von $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}}$ sind. Aus der schwachen Konvergenz von $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon, x_0, y_0}^0}$ kann

mit Hilfe der Resultate in Drees (2015) auch die schwache Konvergenz von $(Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ gefolgert werden. Wir erweitern an dieser Stelle der Vollständigkeit halber die Funktionenklasse $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0$ um jene Funktionen, die ebenfalls für die schwache Konvergenz in Theorem 2.8 benötigt werden (siehe Gleichung (2.81)). Sei für $y, s \in [0, \infty)$ und $t \in T := \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}$ die Abbildung $\phi_{4,y,s}^t : [0, \infty)^{2\tilde{t}+1} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\phi_{4,y,s}^t(z) := \left(\frac{z-t}{z_0}\right)^\alpha \log\left(\frac{z-t}{z_0}\right) \mathbb{1}\left\{\frac{z_0}{z-t} > y, z_{-t} > 0, z_0 > s\right\}$$

definiert, wobei $z = (z_{-\tilde{t}}, \dots, z_{\tilde{t}}) \in [0, \infty)^{2\tilde{t}+1}$. Wir definieren dann

$$\Phi_{4,y_0,\varepsilon}^t := \{\phi_{4,y,s}^t \mid s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \text{ und } y \in [y_0, \infty)\}$$

und

$$\Phi^* := \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0 \cup \left(\bigcup_{t \in T} \Phi_{4,y_0,\varepsilon}^t\right),$$

wobei $\Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0$ in Gleichung (2.20) (in Verbund mit (2.19)) definiert ist. Bezeichne im Folgenden E_ξ die bedingte Erwartung gegeben $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$, das heißt dann beispielsweise

$$E_\xi[g((Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*})] = E[g((Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*}) \mid (X_{n,i})_{1 \leq i \leq n}].$$

Ferner definieren wir für eine beliebige Menge \mathcal{F}

$$BL_1(\mathcal{F}) := \left\{g : l^\infty(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{z \in l^\infty(\mathcal{F})} |g(z)| \leq 1, \right. \\ \left. |g(z) - g(\tilde{z})| \leq \|z - \tilde{z}\|_{\mathcal{F}} := \sup_{f \in \mathcal{F}} |z(f) - \tilde{z}(f)| \forall z, \tilde{z} \in l^\infty(\mathcal{F})\right\}.$$

als die Menge aller betragsmäßig durch 1 beschränkten reellwertigen Lipschitz-Funktionen mit Lipschitz-Konstante 1. Wir werden im Folgenden mit $\mathcal{F} = T \times [x_0, \infty)$ oder $\mathcal{F} = \Phi^*$ arbeiten.

Proposition 3.1. *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe, die regulär variierend mit Index $\alpha \in (0, \infty)$ ist. Seien des Weiteren ξ_j , $j \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilte beschränkte Zufallsvariablen mit $E[\xi_j] = 0$ und $\text{Var}(\xi_j) = 1$, die unabhängig von X_t , $t \in \mathbb{Z}$, sind. Falls die Voraussetzungen (A(x_0)), (B), (C') und (D) für ein $x_0 \geq 0$ und ein $\varepsilon \in (0, 1)$ erfüllt sind, folgt für alle $y_0 \in [x_0, \infty) \cap (0, \infty)$ die schwache Konvergenz in $l^\infty(\Phi^*)$ der Prozesse $(Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*}$, $n \in \mathbb{N}$, gegen den Gaußprozess $(Z(\psi))_{\psi \in \Phi^*}$ aus Proposition 2.1. Des Weiteren gilt*

$$\sup_{g \in BL_1(\Phi^*)} \left| E_\xi[g((Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*})] - E[g((Z(\psi))_{\psi \in \Phi^*})] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.1)$$

in äußerer Wahrscheinlichkeit.

Die Multiplier-Block-Bootstrap-Versionen der modifizierten Forward- und Backward-Schätzer sind

$$\hat{F}_n^{*(f, \Theta_t)}(x) := \frac{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1}\{X_{i+t}/|X_i| \leq x, |X_i| > \hat{u}_n\}}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1}\{|X_i| > \hat{u}_n\}},$$

$$\hat{F}_n^{*(b, \Theta_t)}(x) := \begin{cases} 1 - \frac{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \left| \frac{X_{i-t}}{X_i} \right|^{\hat{\alpha}_n^*} \mathbf{1}\{X_i/|X_{i-t}| > x, |X_i| > \hat{u}_n\}}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1}\{|X_i| > \hat{u}_n\}}, & \text{wenn } x \geq 0, \\ \frac{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \left| \frac{X_{i-t}}{X_i} \right|^{\hat{\alpha}_n^*} \mathbf{1}\{X_i/|X_{i-t}| \leq x, |X_i| > \hat{u}_n\}}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1}\{|X_i| > \hat{u}_n\}}, & \text{wenn } x < 0, \end{cases}$$

mit der Multiplier-Block-Bootstrap-Version des Hill-Schätzers

$$\hat{\alpha}_n^* := \frac{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1}\{|X_i| > \hat{u}_n\}}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \log(|X_i|/\hat{u}_n) \mathbf{1}\{|X_i| > \hat{u}_n\}}.$$

Bezeichne dann für alle $x \in [x_0, \infty)$, $y \in [y_0, \infty)$ und $t \in T := \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} V_{n,\xi}^{(f)}(t, x) &:= (nv_n)^{1/2} (\hat{F}_n^{*(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x)), \\ V_{n,\xi}^{(b)}(t, y) &:= (nv_n)^{1/2} (\hat{F}_n^{*(b, \Theta_t)}(y) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y)), \\ V^{(f)}(t, x) &:= Z(\phi_{2,x,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x)Z(\phi_{1,1}), \\ V^{(b)}(t, y) &:= Z(\phi_{3,y,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y)Z(\phi_{1,1}) + (\alpha^2 Z(\phi_{0,1}) - \alpha Z(\phi_{1,1}))E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}]. \end{aligned}$$

Im folgenden Theorem wird festgehalten, dass die Prozesse $V_{n,\xi}^{(f)}$ und $V_{n,\xi}^{(b)}$ gemeinsam schwach konvergieren und asymptotisch normal sind.

Theorem 3.2. *Seien ξ_j , $j \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilte beschränkte Zufallsvariablen mit $E[\xi_j] = 0$ und $\text{Var}(\xi_j) = 1$, die unabhängig von X_t , $t \in \mathbb{Z}$, sind. Wenn die Voraussetzungen aus Theorem 2.8 erfüllt sind, folgt in $l^\infty(T \times [x_0, \infty)) \times l^\infty(T \times [y_0, \infty))$ die schwache Konvergenz*

$$(V_{n,\xi}^{(f)}, V_{n,\xi}^{(b)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (V^{(f)}, V^{(b)}). \quad (3.2)$$

Mit Hilfe der schwachen Konvergenz von $V_{n,\xi}^{(f)}$ und $V_{n,\xi}^{(b)}$ lässt sich die Konsistenz dieser Multiplier-Block-Bootstrap-Versionen der modifizierten Forward- und Backward-Schätzer bedingt auf die zugrunde liegende Stichprobe folgern.

Theorem 3.3. *Seien ξ_j , $j \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilte beschränkte Zufallsvariablen mit $E[\xi_j] = 0$ und $\text{Var}(\xi_j) = 1$, die unabhängig von X_t , $t \in \mathbb{Z}$, sind. Wenn die Voraussetzungen aus Theorem 2.8 erfüllt sind, folgt*

$$\sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} \left| E_\xi[g(V_{n,\xi}^{(f)})] - E[g(V^{(f)})] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.3)$$

$$\sup_{g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))} \left| E_\xi[g(V_{n,\xi}^{(b)})] - E[g(V^{(b)})] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.4)$$

in äußerer Wahrscheinlichkeit.

Bemerkung 3.4. Tatsächlich lässt sich mit Proposition 3.1 und Theorem 3.2 auch gemeinsame Konsistenz von $(V_{n,\xi}^{(f)}, V_{n,\xi}^{(b)})$ gegeben der zugrunde liegenden Beobachtungen hinsichtlich der Bounded-Lipschitz-Metrik erzielen, also

$$\sup_{g \in BL_1((T \times [x_0, \infty)) \times (T \times [y_0, \infty)))} \left| E_\xi[g(V_{n,\xi}^{(f)}, V_{n,\xi}^{(b)})] - E[g(V^{(f)}, V^{(b)})] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

in äußerer Wahrscheinlichkeit. Damit lassen sich mit Hilfe von $V_{n,\xi}^{(f)}$ und $V_{n,\xi}^{(b)}$ Konfidenzbereiche konstruieren, die gemeinsam eine approximative Überdeckungswahrscheinlichkeit von $1 - \tau \in (0, 1)$ bieten. \diamond

3.2. Konfidenzbereiche für $F^{(\Theta_t)}$

Anhand von Theorem 3.3 lassen sich nun Konfidenzbereiche mit approximativer Überdeckungswahrscheinlichkeit für den gesamten Prozess $(F^{(\Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}$ konstruieren. Wir beschränken uns auf Konfidenzbereiche $D \in \mathcal{D} \subseteq l^\infty(T \times [x_0, \infty))$, deren topologischen Ränder unter dem Grenzprozess $V^{(f)}$ keine Wahrscheinlichkeitsmasse besitzen, das heißt

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} P\{V^{(f)} \in U_\delta(\partial D)\} \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0$$

mit $U_\delta(A) := \{z \in l^\infty(T \times [x_0, \infty)) \mid d_A(z) := \inf_{\tilde{z} \in A} \|z - \tilde{z}\|_\infty < \delta\}$ für $A \in l^\infty(T \times [x_0, \infty))$.

Jede Indikatorfunktion $\mathbb{1}_D$, $D \in \mathcal{D}$, lässt sich sowohl von oben als auch von unten gleichmäßig durch Funktionen der Form $g_{\delta,A} := (1 - d_A/\delta)^+$ approximieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in l^\infty(T \times [x_0, \infty))} |\mathbb{1}_D(z) - g_{\delta_n, A_n}(z)| = 0,$$

wobei $\delta_n \downarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = D$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ oder $A_{n+1} \subseteq A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt dann, dass die Distanzfunktion zu A , d_A , eine Lipschitz-Funktion mit Lipschitz-Konstante 1 ist. Damit lässt sich leicht zeigen, dass auch $\delta g_{\delta,A} \in BL_1(T \times [x_0, \infty))$ gilt. Nach (3.2) folgt also unmittelbar

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} \left| P_\xi\{V_{n,\xi}^{(f)} \in D\} - P\{V^{(f)} \in D\} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

in äußerer Wahrscheinlichkeit, wobei P_ξ das bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß P gegeben der zugrunde liegenden Beobachtungen bezeichnet.

Ist nun D_τ eine Mengen in $l^\infty(T \times [x_0, \infty))$, die

$$P_\xi\{(\hat{F}_n^{*(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} \in D_\tau\} = 1 - \tau$$

mit einer gegen 1 konvergierenden Wahrscheinlichkeit erfüllt, so gilt

$$P\{(\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x) - F^{(\Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} \in D_\tau\} \approx 1 - \tau.$$

Das heißt, D_τ ist ein Konfidenzbereich für $(F^{(\Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}$ mit approximativer Überdeckungswahrscheinlichkeit $1 - \tau$.

Analog kann man entsprechende Konfidenzbereiche anhand der Backward-Variante konstruieren, wenn der Parameterraum auf $T \times [y_0, \infty)$ eingeschränkt wird. Jene Konfidenzbereiche werden dann so gewählt, dass ihre topologischen Ränder keine Wahrscheinlichkeitsmasse unter den entsprechenden Grenzprozess $V^{(b)}$ besitzen.

Um nun eine solche Menge D_τ konkret zu bestimmen, kann man wie folgt vorgehen. Zu einer Stichprobe $X_{1-\tilde{t}}, \dots, X_{n+\tilde{t}}$ berechnet man $(\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}$ und generiert dazu $K \in \mathbb{N}$ unabhängige Multiplier-Versionen $(\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{*(k)(f, \Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}$, $1 \leq k \leq K$. Im nächsten Schritt wählt man eine (noch zu skalierende) feste Menge $D \subseteq l^\infty(T \times [x_0, \infty))$, die die Struktur beziehungsweise Form des Konfidenzbereiches festlegt. Man erhält dann ein Konfidenzbereich für $(F^{(\Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}$ mit approximativer Überdeckungswahrscheinlichkeit $1 - \tau$, wenn $D_\tau = \lambda_\tau D$ mit

$$\lambda_\tau = \inf \left\{ \lambda \in [0, \infty) \mid \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{1} \left\{ (\hat{F}_n^{*(k)(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} \in \lambda D \right\} \geq 1 - \tau \right\}$$

gewählt wird. Dabei sollte die Menge D von folgender Form sein: Aus $z \in D$ folgt $\lambda z \in D$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Beispielsweise kann $D = \{z \in l^\infty(T \times [x_0, \infty)) \mid \sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} |z(t, x)/h(t, x)| < 1\}$ gewählt werden, wobei $h : T \times [x^*, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dann die Abbildung ist, die die Form des Konfidenzbereiches bestimmt. In diesem Fall wird dann λ als der $\lceil m\tau \rceil$ -größte Wert von d_1, \dots, d_K mit $d_k := \sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} |(\hat{F}_n^{*(k)(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x))/h(t, x)|$ gewählt.

3.3. Beweise

3.3.1. Beweis von Proposition 3.1

Im Beweis von Proposition 2.1 haben wir die Bedingungen (C1), (C2), (C3), (D1), (D2'), (D3), (D5) und (D6) nachgewiesen. Wie bereits im Beweis von Theorem 2.8 erwähnt, kann mit denselben Techniken wie im Beweis von Proposition 2.1 gezeigt, dass diese Bedingungen auch für die Funktionenklasse Φ^* gültig sind. Nach Theorem 2.1 und Proposition 2.5 von Drees (2015) folgt die schwache Konvergenz $(Z_{n, \xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*} \rightarrow (Z(\psi))_{\psi \in \Phi^*}$ für $n \rightarrow \infty$, wenn zusätzlich Bedingung (D5') aus Drees (2015) erfüllt ist:

(D5') Für alle $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $(e_j)_{1 \leq j \leq \lfloor m_n/2 \rfloor} \in \{-1, 0, 1\}^{\lfloor m_n/2 \rfloor}$ und $k \in \{1, 2\}$ ist die Abbildung

$$\omega \mapsto \sup_{\substack{\psi_1, \psi_2 \in \Phi^*, \\ \rho_{\Phi^*}(\psi_1, \psi_2) < \delta}} \sum_{j=1}^{\lfloor m_n/2 \rfloor} e_j \left(\xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\psi_1(X_{n,i}^*(\omega)) - \psi_2(X_{n,i}^*(\omega)) \right) \right)^k$$

messbar, wobei ρ_{Φ^*} eine geeignete Semimetrik auf Φ^* bezeichnet, die Φ^* totalbeschränkt, und $(X_{n,i}^*)_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$ unabhängige Kopien der Zufallsblöcke $(X_{n,i})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$, $j \in \{1, \dots, \lfloor m_n/2 \rfloor\}$, sind. \diamond

Wählt man für $y, \tilde{y} \in [y_0, \infty)$, $s, \tilde{s} \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$

$$\rho_4(\phi_{4,y,s}^t, \phi_{4,\tilde{y},\tilde{s}}^t) := \rho_3(\phi_{3,y,s}^t, \phi_{3,\tilde{y},\tilde{s}}^t),$$

so wird wegen Lemma und Definition 2.10 und der Bijektion $f : \Phi_{4,y_0,\varepsilon}^t \rightarrow \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t$ mit $f(\phi_{4,y,s}^t) = \phi_{3,y,s}^t$ durch

$$\rho_{\Phi^*}(\psi_1, \psi_2) := \begin{cases} \rho_0(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{0,\varepsilon} \\ \rho_1(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{1,\varepsilon} \\ \rho_2(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{2,x_0,\varepsilon}^t \text{ (für ein } t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}), \\ \rho_3(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{3,y_0,\varepsilon}^t \text{ (für ein } t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}), \\ \rho_4(\psi_1, \psi_2), & \text{wenn } \psi_1, \psi_2 \in \Phi_{4,y_0,\varepsilon}^t \text{ (für ein } t \in \{-\tilde{t}, \dots, \tilde{t}\} \setminus \{0\}), \\ \max\{2, \log(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\} & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Semimetrik auf Φ^* definiert, die Φ^* totalbeschränkt. Bedingung (D5') ergibt sich dann mit derselben Argumentation wie beim Nachweis von (D5). Aus Theorem 2.3 von Drees (2015) folgt insbesondere dann die Konvergenz in (3.1). \square

3.3.2. Beweis von Theorem 3.2

Bevor wir den Beweis von Theorem 3.2 durchführen, halten wir zunächst folgendes Analogon von Proposition 2.11 für den Multiplier-Block-Bootstrap-Prozess $(Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*}$ fest.

Proposition 3.5. *Es seien die Voraussetzungen aus Proposition 2.11. Wenn (2.5) gilt, folgt die schwache Konvergenz*

$$\left(\begin{array}{c} Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n}) \\ Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) \\ (Z_{n,\xi}(\phi_{2,x_t,S_n}^t))_{x_t \in [x_0, \infty)} \\ (Z_{n,\xi}(\phi_{3,y_t,S_n}^t))_{y_t \in [y_0, \infty)} \\ (Z_{n,\xi}(\phi_{4,y_t,S_n}^t))_{y_t \in [y_0, \infty)} \end{array} \right)_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c} Z(\phi_{0,1}) \\ Z(\phi_{1,1}) \\ (Z(\phi_{2,x_t,1}^t))_{x_t \in [x_0, \infty)} \\ (Z(\phi_{3,y_t,1}^t))_{y_t \in [y_0, \infty)} \\ (Z(\phi_{4,y_t,1}^t))_{y_t \in [y_0, \infty)} \end{array} \right)_{|t| \in \{1, \dots, \tilde{t}\}} \quad (3.5)$$

Beweis. Der Beweis folgt mit analoger Argumentation wie in Proposition 2.11 für den Prozess $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi_{\varepsilon,x_0,y_0}^0}$ unter Verwendung von Proposition 3.1. \square

Beweis von Theorem 3.2. Wir zeigen im Folgenden, dass die Multiplier-Prozesse $V_{n,\xi}^{(f)}$ und $V_{n,\xi}^{(b)}$ einzeln asymptotisch normal. In Verbindung mit Proposition 3.1, der Tatsache, dass sich $V_{n,\xi}^{(f)}$ und $V_{n,\xi}^{(b)}$ mit Hilfe des Multiplier-Block-Bootstrap-Prozesses $(Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*}$ beschreiben lassen, und dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) folgt dann unmittelbar die schwache Konvergenz in (3.2).

Man beachte, dass nach den Proposition 2.1 und 3.1, Gleichung (2.5) und dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) für jede Folge a_n , $n \in \mathbb{N}$, die $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ erfüllt, die

schwache Konvergenz

$$\left((Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*}, (a_n \tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi^*}, S_n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left((Z(\psi))_{\psi \in \Phi^*}, 0, 1 \right) \quad (3.6)$$

gilt. Nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4) existieren Versionen der Prozesse $((Z_{n,\xi}(\psi))_{\psi \in \Phi^*}, (a_n \tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi^*}, S_n)$, $n \in \mathbb{N}$, und $((Z(\psi))_{\psi \in \Phi^*}, 0, 1)$, so dass die obige Konvergenz (3.6) fast sicher gilt. Der Einfachheit halber unterscheiden wir in diesem Beweis die Bezeichnungen für die unterschiedlichen Versionen nicht.

Schwache Konvergenz von $V_{n,\xi}^{(f)}$: Wir wenden den modifizierten Forward-Schätzer auf die Beobachtungen X_{1-t}, \dots, X_{h_n} mit $h_n := m_n r_n$ an:

$$\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t,h_n)}(x) := \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_{i+t}/X_i > x, X_i > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}} = \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i})},$$

wobei die letzte Gleichung mit einer gegen 1 strebender Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$ gilt. Um nachzuweisen, dass diese Einschränkung keinen Einfluss auf das asymptotische Verhalten von $\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}$ hat, halten wir zunächst folgendes Verhalten fest. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$B_n(s, x) := P\left(\frac{X_t}{X_0} > x, X_0 > su_n \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\right)$$

ist monoton fallend in $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Wegen der Konvergenz (2.5) gilt also: Für jedes $\zeta \in (0, \varepsilon)$ und jedes $\tau \in (0, 1)$ kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass

$$B_n(1 + \zeta, x) \leq B_n(s, x)|_{s=S_n} \leq B_n(1 - \zeta, x)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [x_0, \infty)} |B_n(s, x)|_{s=S_n} - B_n(1, x)| \\ & \leq \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left(|B_n(1 - \zeta, x) - B_n(1, x)| + |B_n(1, x) - B_n(1 + \zeta, x)| \right) \\ & = \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left(P\left(\frac{X_t}{X_0} > x, \frac{X_0}{u_n} \in (1 - \zeta, 1] \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\right) \right. \\ & \quad \left. + P\left(\frac{X_t}{X_0} > x, \frac{X_0}{u_n} \in (1, 1 + \zeta] \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\right) \right) \\ & = P\left(\frac{X_t}{X_0} > x_0, \frac{X_0}{u_n} \in (1 - \zeta, 1] \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\right) \\ & \quad + P\left(\frac{X_t}{X_0} > x_0, \frac{X_0}{u_n} \in (1, 1 + \zeta] \mid X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\right) \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Lässt man ζ gegen 0 streben, so konvergiert die rechte Seite obiger Gleichung gegen 0. Folglich gilt die stochastische

Konvergenz

$$\sup_{x \in [x_0, \infty)} |B_n(s, x)|_{s=S_n} - B_n(1, x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.7)$$

Aus Bemerkung 2.3 und der regulären Variation von X_0 folgt die gleichmäßige Konvergenz

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [x_0, \infty)} |B_n(1, x) - (1 - \varepsilon)^\alpha F^{(\Theta_t)}(x)| \\ &= \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \frac{v_n}{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}} P\left(\frac{X_t}{X_0} > x \mid X_0 > u_n\right) - (1 - \varepsilon)^\alpha \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) \right| \\ &\leq \left(\frac{v_n}{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}} - (1 - \varepsilon)^\alpha \right) \sup_{x \in [x_0, \infty)} P\left(\frac{X_t}{X_0} > x \mid X_0 > u_n\right) \\ &\quad + (1 - \varepsilon)^\alpha \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| P\left(\frac{X_t}{X_0} > x \mid X_0 > u_n\right) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) \right| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

In Kombination mit (3.7) ergibt sich also die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [x_0, \infty)} |B_n(s, x)|_{s=S_n} - (1 - \varepsilon)^\alpha F^{(\Theta_t)}(x)| &\leq \sup_{x \in [x_0, \infty)} |B_n(s, x)|_{s=S_n} - B_n(1, x)| \\ &\quad + \sup_{x \in [x_0, \infty)} |B_n(1, x) - (1 - \varepsilon)^\alpha F^{(\Theta_t)}(x)| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Im Übrigen gilt nach (3.6) und (2.25) die fast sichere Konvergenz

$$\frac{P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (3.9)$$

und nach Theorem A.2

$$\sup_{\psi \in \Phi^*} |\tilde{Z}_n(\psi) - \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\psi)| = o_P((nv_n)^{-1/2}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

wobei

$$\tilde{Z}_n^{(h_n)}(\psi) := (nv_n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{h_n} (\psi(X_{n,i}) - E[\psi(X_{n,i})]), \quad \psi \in \Phi^*.$$

Aus $n - h_n = (n/r_n - m_n)r_n < r_n$ und (3.9) folgt

$$(h_n - n)P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} = O_P(r_nv_n) = o_P(1). \quad (3.11)$$

In Verbindung mit (3.10) und (3.8) folgt dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=h_n+1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) &= (nv_n)^{1/2}(\tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) - \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{1,S_n})) + (h_n - n)P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} \\ &= o_P(1), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [x_0, \infty)} \sum_{i=h_n+1}^n \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) &= \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left((nv_n)^{1/2}(\tilde{Z}_n(\phi_{2,x,S_n}^t) - \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{2,x,S_n}^t)) \right. \\ &\quad \left. + (h_n - n)P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}B(s, x)|_{s=S_n} \right) \\ &= o_P(1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ferner gilt nach den Gleichungen (3.6), (3.9) und Proposition 2.11 die fast sichere Konvergenz

$$(nv_n)^{-1} \sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) = (nv_n)^{-1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) + \frac{P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (3.14)$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^n \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) \right) \left(\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right) - \left(\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) \right) \left(\sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right) \\ &= \left(\sum_{i=h_n+1}^n \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) \right) \left(\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right) - \left(\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) \right) \left(\sum_{i=h_n+1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right) \end{aligned}$$

und

$$\sup_{x \in [x_0, \infty)} \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i})} \leq 1$$

folgt derweil für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) \right| \\ &= \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i})} - \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i})} \right| \\ &= \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \frac{\left(\sum_{i=h_n+1}^n \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) \right) \left(\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right) \left(\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) \right) \left(\sum_{i=h_n+1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right) \left(\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right)} \right| \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i})} \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \sum_{i=h_n+1}^n \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) - \left(\frac{\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i})}{\sum_{i=1}^{h_n} \phi_{1,S_n}(X_{n,i})} \right) \sum_{i=h_n+1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i})} \left(\left| \sup_{x \in [x_0, \infty)} \sum_{i=h_n+1}^n \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) \right| + \left| \sum_{i=h_n+1}^n \phi_{1,S_n}(X_{n,i}) \right| \right) \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$. In Verbindung mit (3.12), (3.13) und (3.14) ergibt sich also

$$\sup_{x \in [x_0, \infty)} (nv_n)^{1/2} |\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x)| = o_P(1). \quad (3.15)$$

Wird also der modifizierte Forward-Schätzer auf die verkleinerte Stichprobe X_{1-t}, \dots, X_{h_n} angewandt, verändert sich dessen asymptotische Verhalten nicht. Dieser Zusammenhang erleichtert die folgenden Rechnungen.

Aus der Gleichheit

$$\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} = \sum_{i=1}^{h_n} \phi_{2, x, S_n}^t(X_{n, i})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & \hat{F}_n^{*(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \phi_{2, x, S_n}^t(X_{n, i}) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) \sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \phi_{2, x, S_n}^t(X_{n, i}) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da $\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j = O_P(m_n^{1/2})$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} &= (nv_n)^{1/2} Z_{n, \xi}(\phi_{1, S_n}) + r_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \\ &= (nv_n)^{1/2} Z_{n, \xi}(\phi_{1, S_n}) + O_P((nv_n)^{1/2} (r_n v_n)^{1/2}) \\ &= (nv_n)^{1/2} (Z_{n, \xi}(\phi_{1, S_n}) + o_P(1)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Des Weiteren folgt aus Gleichung (3.6), die $a_n(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi^*} \rightarrow 0$ fast sicher für jeden Folgen $a_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, liefert, und Proposition 2.11

$$(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{i, S_n}) = O_P((nv_n)^{1/2}) \quad \text{für } i \in \{0, 1\}. \quad (3.18)$$

Demzufolge gilt in Verbindung mit (3.10)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} &= (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{1, S_n}) + h_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} \\ &= h_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} + (nv_n)^{1/2} (\tilde{Z}_n(\phi_{1, S_n}) + o_P(1)) \\ &= h_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} + O_P((nv_n)^{1/2}). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Nenner der rechten Seite von (3.16) das asymptotische Verhalten

$$\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1}\{X_i > S_n u_n\} = h_n P\{X_0 > s u_n\}|_{s=S_n} + O_P((n v_n)^{1/2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) &= (n v_n)^{1/2} Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) + \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} E[\phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i})]|_{s=S_n} \\ &= (n v_n)^{1/2} Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) + r_n P\{X_0 > (1 - \varepsilon) u_n\} B_n(s, x)|_{s=S_n} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j. \end{aligned}$$

Aus (3.8) und

$$r_n P\{X_0 > (1 - \varepsilon) u_n\} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j = O_P((r_n v_n)^{1/2} (n v_n)^{1/2}) = o_P((n v_n)^{1/2})$$

folgt dann

$$\sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \phi_{2,x,S_n}^t(X_{n,i}) - (n v_n)^{1/2} Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) \right| = o_P((n v_n)^{1/2}). \quad (3.20)$$

Mit den Gleichungen (3.9), (3.16), (3.17), (3.19) und (3.20) ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| (n v_n)^{1/2} (\hat{F}_n^*(f, \Theta_t)(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x)) \right| \\ &= \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \frac{(n v_n)^{1/2} (n v_n)^{1/2} Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) - (n v_n)^{1/2} \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) + o_P((n v_n)^{1/2})}{n P\{X_0 > s u_n\}|_{s=S_n} + O_P((n v_n)^{1/2})} \right| \\ &= \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \frac{Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) + o_P(1)}{P\{X_0 > s u_n\}|_{s=S_n} / v_n + O_P((n v_n)^{-1/2})} \right| \\ &= \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) \right| + o_P(1). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ferner gilt wegen Proposition 3.5, Theorem 2.8 und (3.15)

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - (Z(\phi_{2,x,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) Z(\phi_{1,1})) \right| \\ &\leq \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left(\left| Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) - Z(\phi_{2,x,1}^t) \right| + \left| \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) Z(\phi_{1,1}) \right| \right) \\ &\leq \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) - Z(\phi_{2,x,1}^t) \right| + \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x_0) \left| Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - Z(\phi_{1,1}) \right| \\ &\quad + |Z(\phi_{1,1})| \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x) \right| \\ &= o_P(1). \end{aligned}$$

In Kombination mit den Gleichungen (3.15) und (3.21) folgt also

$$\begin{aligned}
& \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| (nv_n)^{1/2} (\hat{F}_n^{*(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x)) - (Z(\phi_{2,x,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x)Z(\phi_{1,1})) \right| \\
& \leq \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| (nv_n)^{1/2} (\hat{F}_n^{*(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x)) - (Z(\phi_{2,x,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(x)Z(\phi_{1,1})) \right| \\
& \quad + \sup_{x \in [x_0, \infty)} \left| (nv_n)^{1/2} (\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t, h_n)}(x)) \right| \\
& = o_P(1).
\end{aligned}$$

Folglich gilt die schwache Konvergenz $V_{n, \xi}^{(f)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V(f)$.

Schwache Konvergenz von $\hat{\alpha}_n^$:* Um das asymptotische Verhalten von $V_{n, \xi}^{(b)}$ herzuleiten, wird zunächst das asymptotische Verhalten der Multiplier-Block-Bootstrap-Version des Hill-Schätzers bestimmt.

Setze

$$\hat{\alpha}_{n,s}^* := \frac{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > su_n\}}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \log(X_i / (su_n)) \mathbb{1}\{X_i > su_n\}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zusätzlich definieren wir

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,s} &:= \frac{1}{E[\log(X_0 / (su_n)) \mid X_0 > su_n]} \\
\hat{\alpha}_{n,s} &:= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > su_n\}}{\sum_{i=1}^n \log(X_i / (su_n)) \mathbb{1}\{X_i > su_n\}} \\
\hat{\alpha}_{n,s}^{(h_n)} &:= \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > su_n\}}{\sum_{i=1}^{h_n} \log(X_i / (su_n)) \mathbb{1}\{X_i > su_n\}} \quad \text{und} \\
\hat{\alpha}_n^{(h_n)} &:= \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^{h_n} \log(X_i / \hat{u}_n) \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}
\end{aligned}$$

Die Differenz zwischen $\hat{\alpha}_{n, S_n}$ und $\hat{\alpha}_{n, S_n}^{(h_n)}$ ist asymptotisch vernachlässigbar: Aus (3.9), (3.10), (3.11), (3.18) der Bias-Bedingung (2.26) und Proposition 2.11 folgt nämlich

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{i=1}^n \log^+(X_i / (S_n u_n))}{\sum_{i=1}^{h_n} \log^+(X_i / (S_n u_n))} \\
& = \frac{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0, S_n}) + nE[\phi_{0,s}(X_{n,0})]_{|s=S_n}}{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{0, S_n}) + h_n E[\phi_{0,s}(X_{n,0})]_{|s=S_n}} \\
& = \frac{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0, S_n}) + nP\{X_0 > su_n\}_{|s=S_n} \alpha_{n,s}^{-1}|_{s=S_n}}{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{0, S_n}) + h_n P\{X_0 > su_n\}_{|s=S_n} \alpha_{n,s}^{-1}|_{s=S_n}} \\
& = 1 + \frac{(nv_n)^{1/2} (\tilde{Z}_n(\phi_{0, S_n}) - \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{0, S_n})) + (n - h_n) P\{X_0 > su_n\}_{|s=S_n} \alpha_{n,s}^{-1}|_{s=S_n}}{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{0, S_n}) + h_n P\{X_0 > su_n\}_{|s=S_n} \alpha_{n,s}^{-1}|_{s=S_n}} \\
& = 1 + o_P((nv_n)^{-1})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}} &= \frac{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{1,S_n}) + h_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n}}{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) + nP\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n}}, \\
&= 1 + \frac{(nv_n)^{1/2} (\tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{1,S_n}) - \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})) + (h_n - n)P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n}}{(nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) + nP\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n}} \\
&= 1 + o_P((nv_n)^{-1}). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}}{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}} - 1 &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n \log^+(X_i/(S_n u_n))}{\sum_{i=1}^{h_n} \log^+(X_i/(S_n u_n))} - 1 \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}} - 1 \right) \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^n \log^+(X_i/(S_n u_n))}{\sum_{i=1}^{h_n} \log^+(X_i/(S_n u_n))} - 1 + \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}} - 1 \\
&= o_P((nv_n)^{-1}) \tag{3.23}
\end{aligned}$$

wodurch sich

$$\hat{\alpha}_{n,S_n} - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} = \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \left(\frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}}{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}} - 1 \right) = o_P((nv_n)^{-1}) \tag{3.24}$$

ergibt. Wegen Lemma 2.7 gilt also die stochastische Konvergenz $\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$. Des Weiteren gilt wegen den Gleichungen (2.76) und (2.77)

$$\hat{\alpha}_{n,S_n} = \frac{nP\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})}{n \frac{P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n}}{\alpha_{n,s}|_{s=S_n}} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n})},$$

so dass wegen Proposition 2.11, (3.9) und (3.18)

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}}{\alpha_{n,s}|_{s=S_n}} - 1 &= \frac{nP\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} + (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n})}{nP\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} + \alpha_{n,s}|_{s=S_n} (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n})} - 1 \\
&= \frac{(nv_n)^{1/2} (\tilde{Z}_n(\phi_{1,S_n}) - \alpha_{n,s}|_{s=S_n} \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n}))}{nP\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} + \alpha_{n,s}|_{s=S_n} (nv_n)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{0,S_n})} \\
&= O_P((nv_n)^{-1/2})
\end{aligned}$$

gilt. In Kombination mit (3.23) folgt

$$\frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}}{\alpha_{n,s}|_{s=S_n}} - 1 = \left(\frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}}{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}} - 1 \right) \left(\frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}}{\alpha_{n,s}|_{s=S_n}} - 1 \right) + \frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}}{\alpha_{n,s}|_{s=S_n}} - 1 + \frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}}{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}} - 1 = O_P((nv_n)^{-1/2}) \tag{3.25}$$

Aus der Gleichheit

$$\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i/(S_n u_n)) = \sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} &= \frac{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i/(S_n u_n))}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i/(S_n u_n))} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i/(S_n u_n))}{\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i/(S_n u_n))}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nun gilt für Zähler der rechten Seite von (3.26) wegen (3.6), (3.9), (3.25), Proposition 3.5, $\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j = O_P(m_n^{1/2})$, $\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ in Wahrscheinlichkeit und $r_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned} (nv_n)^{-1/2} &\left(\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i/(S_n u_n)) \right) \\ &= Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n}) + (nv_n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j r_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} \\ &\quad + (nv_n)^{-1/2} \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j r_n E[\log^+(X_0/(su_n))]|_{s=S_n} \\ &= Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n}) + (nv_n)^{-1/2} r_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \left(1 + \frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}}{\alpha_{n,s}|_{s=S_n}}\right) \\ &= Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n}) \\ &\quad + (r_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n})^{1/2} \left(\frac{h_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n}}{nv_n}\right)^{1/2} m_n^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \left(1 + \frac{\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}}{\alpha_{n,s}|_{s=S_n}}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z(\phi_{1,1}) - \alpha Z(\phi_{0,1}) \end{aligned}$$

da $E[\log^+(X_0/(su_n))]/P\{X_0 > su_n\} = \alpha_{n,s}^{-1}$. Für den Nenner der rechten Seite von (3.26) gilt wegen den Gleichungen (3.6), (3.9), Proposition 3.5 und den stochastischen Konvergenzen $\alpha_{n,s}^{-1}|_{s=S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha^{-1}$ und $m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[\xi_0] = 0$ die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned} (nv_n)^{-1} &\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i/(S_n u_n)) \\ &= (nv_n)^{-1/2} (Z_n^{(h_n)}(\phi_{0,S_n}) + Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n})) + (nv_n)^{-1} E[\log^+(X_0/(su_n))]|_{s=S_n} \left(h_n + \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j r_n\right) \end{aligned}$$

$$= (nv_n)^{-1/2} (Z_n^{(h_n)}(\phi_{0,S_n}) + Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n})) + \frac{h_n P\{X_0 > su_n\}|_{s=S_n} \alpha_{n,s}^{-1}|_{s=S_n}}{nv_n} \left(1 + m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j\right) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha^{-1}.$$

In Verbindung mit (3.24) und (3.26) gilt dann die stochastische Konvergenz

$$(nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n}) \\ = (nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)}) + (nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} - \hat{\alpha}_{n,S_n}) \\ = \frac{(nv_n)^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i / (S_n u_n)) \right)}{(nv_n)^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \log^+(X_i / (S_n u_n))} \\ + (nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} - \hat{\alpha}_{n,S_n}) \\ = \alpha_{n,s}|_{s=S_n} \left(Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - \hat{\alpha}_{n,S_n}^{(h_n)} Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n}) \right) + o_P(1) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha Z(\phi_{1,1}) - \alpha^2 Z(\phi_{0,1}). \quad (3.27)$$

Des Weiteren ergibt sich mit Hilfe des Lemmas 2.7 dann die stochastische Konvergenz

$$(nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \alpha) = (nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n}) + (nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2(\alpha Z(\phi_{1,1}) - \alpha^2 Z(\phi_{0,1})). \quad (3.28)$$

Da $\hat{\alpha}_n^* = \hat{\alpha}_{n,S_n}^*$ mit einer gegen 1 konvergierenden Wahrscheinlichkeit gilt, bleiben die stochastischen Konvergenzen in den obigen Gleichungen (3.27) und (3.28) auch dann gültig, wenn $\hat{\alpha}_{n,S_n}^*$ durch $\hat{\alpha}_n^*$ ersetzt wird.

Schwache Konvergenz von $V_{n,\xi}^{(b)}$: Wir wenden den modifizierten Backward-Schätzer auf die Beobachtungen X_{1-t}, \dots, X_{h_n} an:

$$\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) := \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\{X_i / X_{i-t} > y, X_i > \hat{u}_n\}}{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > \hat{u}_n\}}.$$

Auch hier bleibt das asymptotische Verhalten des Schätzers unverändert, wenn nur die ersten $h_n + t$ Beobachtungen verwendet werden. Wegen der Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \right) \left(\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} \right) \\ - \left(\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \right) \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} \right) \\ = \left(\sum_{i=h_n+1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \right) \left(\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} \right) \\ - \left(\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \right) \left(\sum_{i=h_n+1}^n \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} \right)$$

gilt nämlich für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \sup_{y \in [y_0, \infty)} (nv_n)^{1/2} \left| \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) \right| \\
&= \sup_{y \in [y_0, \infty)} (nv_n)^{1/2} \left| \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}} \right| \\
&\leq \sup_{y \in [y_0, \infty)} (nv_n)^{1/2} \left| \frac{\sum_{i=h_n+1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}} \right| \\
&\quad + \sup_{y \in [y_0, \infty)} (nv_n)^{1/2} \left| \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}} \frac{\sum_{i=h_n+1}^n \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}} \right| \\
&= (nv_n)^{1/2} \left| \frac{\sum_{i=h_n+1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}} \right| \tag{3.29} \\
&\quad + (nv_n)^{1/2} \left| \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n \right\}}{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}} \frac{\sum_{i=h_n+1}^n \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1} \{X_i > S_n u_n\}} \right|
\end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$.

Die rechte Seite obiger Gleichung (3.29) konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0, wie wir im Nachfolgenden sehen werden. Man beachte hierfür, dass für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ die Gleichungen $\hat{\alpha}_n^* = \hat{\alpha}_{n, S_n}^*$ und $\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_{n, S_n}$ mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - \tau$ gelten. Aus dem Beweis von Theorem 2.8 lässt sich entnehmen, dass auf dem Ereignis $\{X_{i-t}/X_i \in (0, y_0^{-1}]\}$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ die Ungleichung

$$\left| \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n, S_n}} - \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha - \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_{n, S_n} - \alpha) \right| \leq C (\hat{\alpha}_{n, S_n} - \alpha)^2 \tag{3.30}$$

für eine Konstante $C > 0$ gilt, die lediglich von α , y_0 und ε abhängt. Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
C_n(s, y) &:= E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, X_0 > s u_n \right\} \mid X_0 > (1 - \varepsilon) u_n \right] \quad \text{und} \\
D_n(s, y) &:= E \left[\left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{-t}}{X_0} \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_0}{X_{-t}} > y, X_0 > s u_n \right\} \mid X_0 > (1 - \varepsilon) u_n \right]
\end{aligned}$$

folgt dann für den Zähler von $\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y)$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n, S_n}} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha + \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha) \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} + \tilde{R}_n(y) \\
&= (nv_n)^{1/2} \left(Z_n(\phi_{3,y,S_n}^t) + (\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha) Z_n(\phi_{4,y,S_n}^t) \right) \\
&\quad + nP\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\} (D_n(s, y) + C_n(s, y))|_{s=S_n} + R_n(y)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

mit

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} |R_n(y)| \leq C(\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha)^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} = O_P(1),$$

wobei sich die stochastische Beschränktheit des Terms $\sup_{y \in [y_0, \infty)} |R_n(y)|$ wie folgt erklärt: Nach Lemma 2.7 gilt $(\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha)^2 = O_P((nv_n)^{-1})$. Des Weiteren kann zu jedem $\delta > 0$ ein $M > 0$ derart gewählt werden, dass für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
P \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n \right\} > Mnv_n \right\} &\leq \frac{1}{Mnv_n} E \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{1} \{X_i > (1 - \varepsilon)u_n\} \right] \\
&= \frac{P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\}}{Mv_n} \\
&< \delta.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n,S_n}} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\
&= (nv_n)^{1/2} \left(Z_n^{(h_n)}(\phi_{3,y,S_n}^t) + (\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha) Z_n^{(h_n)}(\phi_{4,y,S_n}^t) \right) \\
&\quad + h_n P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\} (D_n(s, y) + C_n(s, y))|_{s=S_n} + R_n^{(h_n)}(y)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

und

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=h_n+1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n,S_n}} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\
&= (nv_n)^{1/2} \left(Z_n(\phi_{3,y,S_n}^t) - Z_n^{(h_n)}(\phi_{3,y,S_n}^t) + (\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha) (Z_n(\phi_{4,y,S_n}^t) - Z_n^{(h_n)}(\phi_{4,y,S_n}^t)) \right) \\
&\quad + (n - h_n) P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\} (D_n(s, y) + C_n(s, y))|_{s=S_n} + \tilde{R}_n(y)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

mit

$$\begin{aligned}
\sup_{y \in [y_0, \infty)} |R_n^{(h_n)}(y)| &\leq C(\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha)^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} = O_P(1), \\
\sup_{y \in [y_0, \infty)} |\tilde{R}_n(y)| &\leq C(\hat{\alpha}_{n,S_n} - \alpha)^2 \sum_{i=h_n+1}^n \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} = O_P(r_n/n) = o_P(1),
\end{aligned}$$

da sich mit analogen Rechnungen wie in (3.32)

$$\sum_{i=h_n+1}^n \mathbb{1}\left\{\frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n\right\} = O_P(r_n v_n)$$

ergibt.

Nach (2.85) und (2.94) sind die fast sicheren Konvergenzen

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} |C_n(s, y)|_{s=S_n} - (1-\varepsilon)^\alpha E[\Theta_{-t}^\alpha \mathbb{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.35)$$

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| D_n(s, y)|_{s=S_n} - (1-\varepsilon)^\alpha E[\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbb{1}\{1/\Theta_{-t} > y\}] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.36)$$

erfüllt. In Kombination mit (3.34), (3.10) und $r_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ folgt also

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| \sum_{i=h_n+1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i}\right)^{\hat{\alpha}_{n, S_n}} \mathbb{1}\left\{\frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n\right\} \right| = o_P(1).$$

Ferner gilt wegen Proposition 2.11, (3.9) und $\tilde{Z}_n(\phi_{1, S_n}) = O_P(1)$

$$\begin{aligned} (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_0 > S_n u_n\} &= \tilde{Z}_n(\phi_{1, S_n}) + \left(\frac{P\{X_0 > s u_n\}|_{s=S_n}}{v_n}\right)^{1/2} (nP\{X_0 > s u_n\}|_{s=S_n})^{1/2} \\ &= O_P((nv_n)^{1/2}) \end{aligned}$$

so dass der erste Summand der rechten Seite von (3.29) gleich $o_P((nv_n)^{-1/2})$ ist.

Nach Gleichung (3.22) gilt

$$(nv_n)^{1/2} \frac{\sum_{i=h_n+1}^n \mathbb{1}\{X_0 > S_n u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_0 > S_n u_n\}} = (nv_n)^{1/2} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_0 > S_n u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_0 > S_n u_n\}}\right) = o_P((nv_n)^{-1/2}).$$

Da nach Gleichung (3.33)

$$\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i}\right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\left\{\frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n\right\} = O_P(nv_n)$$

und nach Proposition 2.11, (3.6) und (3.9) die fast sichere Konvergenz

$$(nv_n)^{-1} \sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} = (nv_n)^{-1/2} \tilde{Z}_n^{(h_n)}(\phi_{1, S_n}) + \frac{h_n P\{X_0 > s u_n\}|_{s=S_n}}{nv_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

gelten, ergibt sich

$$\frac{\sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i}\right)^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\left\{\frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n\right\}}{\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\}} = O_P(1).$$

Demzufolge ist der zweite Summand der rechte Seite von (3.29) gleich $o_P((nv_n)^{-1/2})$. Folglich gilt

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} (nv_n)^{1/2} \left| \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) \right| = o_P(1), \quad (3.37)$$

so dass

$$(nv_n)^{1/2} \left(\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y) - \hat{F}_n^{*(b, \Theta_t)}(y) \right) = (nv_n)^{1/2} \left(\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) - \hat{F}_n^{*(b, \Theta_t)}(y) \right) + o_P(1)$$

gleichmäßig in $y \in [y_0, \infty)$ gilt. Wird also der modifizierte Backward-Schätzer auf die verkleinerte Stichprobe X_{1-t}, \dots, X_{h_n} angewandt, verändert sich dessen asymptotisches Verhalten nicht. Dieser Zusammenhang erleichtert die nachfolgenden Rechnungen.

Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ folgt nun

$$\begin{aligned} & (nv_n)^{1/2} \left(\hat{F}_n^{*(b, \Theta_t)}(y) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) \right) \\ &= (nv_n)^{-1/2} \left[\sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n, S_n}^*} \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \right. \\ & \quad \left. - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) \sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1} \{ X_i > S_n u_n \} \right] / \left[(nv_n)^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1} \{ X_i > S_n u_n \} \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$. Der Nenner der rechten Seite obiger Gleichung (3.38) erfüllt wegen (3.19) und der fast sicheren Konvergenz in (3.9)

$$(nv_n)^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} (1 + \xi_j) \sum_{i \in I_j} \mathbf{1} \{ X_i > S_n u_n \} = 1 + O_P((nv_n)^{-1/2}). \quad (3.39)$$

Mit Hilfe der Gleichheit

$$\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) \sum_{i=1}^{h_n} \mathbf{1} \{ X_i > S_n u_n \} = \sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n, S_n}} \mathbf{1} \{ X_i / X_{i-t} > y, X_i > S_n u_n \}$$

lässt sich der Zähler der rechten Seite von (3.38) schreiben als

$$\begin{aligned} A_n(y) &:= (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{h_n} \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n, S_n}^*} - \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n, S_n}} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\ & \quad + (nv_n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n, S_n}^*} \mathbf{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\ & \quad - (nv_n)^{-1/2} \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbf{1} \{ X_i > S_n u_n \}. \end{aligned}$$

Analog zu (3.30) kann auf derselben Ereignismenge $\{X_{i-t}/X_i \in (0, y_0^{-1}]\}$ die Ungleichung

$$\left| \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^{\hat{\alpha}_{n,S_n}^*} - \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha - \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \alpha) \right| \leq C (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \alpha)^2$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gefolgert werden. Damit folgt

$$\begin{aligned} A_n(y) &= (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n}) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \quad (3.40) \\ &\quad + (nv_n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha + \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n}) \right) \\ &\quad \quad \quad \times \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\ &\quad - (nv_n)^{-1/2} \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t, h_n)}(y) \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1} \{ X_i > S_n u_n \} + \tilde{R}_n(y) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [y_0, \infty)} |\tilde{R}_n(y)| &\leq (nv_n)^{-1/2} \left(C (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n})^2 \sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n \right\} \right. \\ &\quad \left. + C (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \alpha)^2 \left| \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n \right\} \right| \right) \\ &= O_P((nv_n)^{-1/2}), \end{aligned}$$

wobei sich die stochastische Ordnung von $\sup_{y \in [y_0, \infty)} |\tilde{R}_n(y)|$ wie folgt erklärt: Nach den Gleichungen (3.27) und (3.28) gilt stets $(\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n})^2 = O_P((nv_n)^{-1})$ und $(\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \alpha)^2 = O_P((nv_n)^{-1})$. In (3.32) hatten wir festgestellt, dass

$$\sum_{i=1}^{h_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n \right\} = O_P(nv_n)$$

gilt. Des Weiteren kann zu jedem $\delta > 0$ ein $M > 0$ derart gewählt werden, dass

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y_0, X_i > S_n u_n \right\} \right| > Mnv_n \right\} \\ &\leq \frac{1}{Mnv_n} E \left[\left| \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1} \{ X_i > (1 - \varepsilon) u_n \} \right| \right] \\ &\leq \frac{m_n r_n P \{ X_0 > (1 - \varepsilon) u_n \}}{Mnv_n} E[|\xi_1|] \\ &< \delta \end{aligned}$$

für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Ferner ist aus dem Beweis von Theorem 2.8 die stochastische Konvergenz (2.86) bekannt:

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \right. \\ \left. - E \left[\Theta_{-t}^\alpha \log(\Theta_{-t}) \mathbb{1} \{1/\Theta_{-t} > y\} \right] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

In Kombination mit (3.27) ergibt sich für den ersten Summanden der rechten Seite von (3.40)

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{h_n} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_{n, S_n}^* - \hat{\alpha}_{n, S_n}) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \right. \\ \left. + E[\log(\Theta_t) \mathbb{1} \{ \Theta_t > y \}] (nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n, S_n}^* - \hat{\alpha}_{n, S_n}) \right| = o_P(1). \quad (3.41)$$

Des Weiteren gilt

$$\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \\ = (nv_n)^{1/2} Z_{n, \xi}(\phi_{4, y, S_n}^t) + r_n P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j D(s, y)|_{s=S_n}.$$

Aus der regulären Variation von X_0 , der stochastischen Konvergenz (3.36), $\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j = O_P(m_n^{1/2})$ und $r_n v_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| r_n P\{X_0 > (1 - \varepsilon)u_n\} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j D(s, y)|_{s=S_n} \right| = O_P((nv_n)^{1/2} (r_n v_n)^{1/2}) = o_P((nv_n)^{1/2}).$$

Demzufolge gilt

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} - (nv_n)^{1/2} Z_{n, \xi}(\phi_{4, y, S_n}^t) \right| \\ = o_P((nv_n)^{1/2})$$

und wegen $\hat{\alpha}_{n, S_n}^* - \hat{\alpha}_{n, S_n} = O_P((nv_n)^{-1/2})$ also

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_{n, S_n}^* - \hat{\alpha}_{n, S_n}) \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} \right. \\ \left. - (nv_n)^{1/2} (\hat{\alpha}_{n, S_n}^* - \hat{\alpha}_{n, S_n}) Z_{n, \xi}(\phi_{4, y, S_n}^t) \right| = o_P(1).$$

Ferner gilt

$$\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\}$$

$$= (nv_n)^{1/2} Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,S_n}^t) + r_n P\{X_0 > (1-\varepsilon)u_n\} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j C(s,y)|_{s=S_n}.$$

Aus regulären Variation von X_0 , der stochastischen Konvergenz (3.35), $\sum_{j=1}^{m_n} \xi_j = O_P(m_n^{1/2})$ und $r_n v_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt dann

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| r_n P\{X_0 > (1-\varepsilon)u_n\} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j C(s,y)|_{s=S_n} \right| = O_P((nv_n)^{1/2} (r_n v_n)^{1/2}) = o_P((nv_n)^{1/2}).$$

Demnach gilt also

$$\sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} - (nv_n)^{1/2} Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,S_n}^t) \right| = o_P((nv_n)^{1/2}).$$

Damit erhalten wir für den zweiten Summanden der rechten Seite von (3.40)

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \left(\left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha + \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{X_{i-t}}{X_i} \right) (\hat{\alpha}_{n,S_n}^* - \hat{\alpha}_{n,S_n}) \right) \right. \\ \left. \times \mathbb{1} \left\{ \frac{X_i}{X_{i-t}} > y, X_i > S_n u_n \right\} - Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,S_n}^t) \right| = o_P(1). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Für den dritten Summanden der rechten Seite von (3.40) folgt aus (3.17)

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{-1/2} \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t,h_n)}(y) \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t,h_n)}(y) Z_{n,\varepsilon}(\phi_{1,S_n}) \right| \\ = \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t,h_n)}(y_0) \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{1}\{X_i > S_n u_n\} - Z_{n,\varepsilon}(\phi_{1,S_n}) \right| \\ = o_P(1). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Aus Proposition 3.5, den Gleichungen (3.27), (3.37), (3.38), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) und (3.39) folgt dann insgesamt die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{1/2} (\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) - \hat{F}_n^{*(b,\Theta_t)}(y)) \right. \\ \left. - \left(Z(\phi_{3,y,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) Z(\phi_{1,1}) + (\alpha^2 Z(\phi_{0,1}) - \alpha Z(\phi_{1,1})) E[\log(\Theta_t) \mathbb{1}\{\Theta_t > y\}] \right) \right| \\ \leq \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{1/2} (\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t,h_n)}(y)) \right| \\ + \sup_{y \in [y_0, \infty)} \left| (nv_n)^{1/2} (\hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t,h_n)}(y) - \hat{F}_n^{*(b,\Theta_t)}(y)) \right. \\ \left. - \left(Z(\phi_{3,y,1}^t) - \bar{F}^{(\Theta_t)}(y) Z(\phi_{1,1}) + (\alpha^2 Z(\phi_{0,1}) - \alpha Z(\phi_{1,1})) E[\log(\Theta_t) \mathbb{1}\{\Theta_t > y\}] \right) \right| \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

□

3.3.3. Beweis von Theorem 3.3

Sei \mathcal{B}_a die Menge aller $[0, 1]$ -wertigen Abbildungen auf $T \times [a, \infty)$.

Nachweis der Konvergenz in (3.3): Sei $g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))$ und $h \in \mathcal{B}_{x_0}$ beliebig gewählt. Sei des Weiteren $\tilde{g}_h : l^\infty(\Phi^*) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit der Abbildungsvorschrift

$$\tilde{g}_h(z) := \frac{1}{2}g((z(\phi_{2,x,1}^t) - h(t,x)z(\phi_{1,1}))_{(t,x) \in [x_0, \infty)}).$$

Die Abbildung \tilde{g}_h ist wegen $g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))$ betragsmäßig durch 1 beschränkt. Ferner folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit von g

$$\begin{aligned} & \sup_{h \in \mathcal{B}_{x_0}} |\tilde{g}_h(z) - \tilde{g}_h(\tilde{z})| \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_{h \in \mathcal{B}_{x_0}} \|(z(\phi_{2,x,1}^t) - \tilde{z}(\phi_{2,x,1}^t) - h(t,x)(z(\phi_{1,1}) - \tilde{z}(\phi_{1,1})))_{(t,x) \in [x_0, \infty)}\|_{T \times [x_0, \infty)} \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_{h \in \mathcal{B}_{x_0}} (\|(z(\phi_{2,x,1}^t) - \tilde{z}(\phi_{2,x,1}^t))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}\|_{T \times [x_0, \infty)} \\ & \quad + \|(h(t,x)(z(\phi_{1,1}) - \tilde{z}(\phi_{1,1})))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}\|_{T \times [x_0, \infty)}) \\ & \leq \frac{1}{2} (\|(z(\phi_{2,x,1}^t) - \tilde{z}(\phi_{2,x,1}^t))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}\|_{T \times [x_0, \infty)} \\ & \quad + \|((z(\phi_{1,1}) - \tilde{z}(\phi_{1,1})))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}\|_{T \times [x_0, \infty)}) \\ & \leq \|z - \tilde{z}\|_{\Phi^*} \end{aligned}$$

für alle $z, \tilde{z} \in l^\infty(\Phi^*)$, so dass $\tilde{g}_h \in BL_1(\Phi^*)$ für alle $h \in \mathcal{B}_{x_0}$ gilt. In Verbindung mit der Konvergenz in (3.1) und $h_n := (\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} \in \mathcal{B}_{x_0}$ fast sicher folgt damit

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |E_\xi [g((Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,1}^t) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,1}))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)})] - E[g(V^f)]| \\ & = \sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |2E_\xi [\tilde{g}_{h_n}(Z_{n,\xi})] - E[g(V^f)]| \\ & \leq \sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} (|2E[\tilde{g}_{h_n}(Z)] - E[g(V^f)]| + 2|E_\xi [\tilde{g}_{h_n}(Z_{n,\xi})] - E[\tilde{g}_{h_n}(Z)]|) \\ & \leq \sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |E[g((Z(\phi_{2,x,1}^t) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x)Z(\phi_{1,1}))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)})] - E[g(V^f)]| \\ & \quad + \sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} 2|E_\xi [\tilde{g}_{h_n}(Z_{n,\xi})] - E[\tilde{g}_{h_n}(Z)]| \\ & = o_P(1), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Beschränktheit und gleichmäßige Stetigkeit von g ausgenutzt wurde, die sich aus der Lipschitz-Stetigkeit ergibt:

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |E[g((Z(\phi_{2,x,1}^t) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(f, \Theta_t)}(x)Z(\phi_{1,1}))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)})] - E[g(V^f)]| \\ & = \sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |E[g((Z(\phi_{2,x,1}^t) - (\bar{F}^{(\Theta_t)}(x) + o_P(1))Z(\phi_{1,1}))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)})] - E[g(V^f)]| \\ & = o_P(1). \end{aligned}$$

Die stochastische Konvergenz (3.3) folgt nun, wenn

$$\sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |E_\xi [g((Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,1}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,1}))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)})] - E_\xi [g(V_{n,\xi}^{(f)})]| = o_P(1)$$

gilt. Nach (3.15) und (3.21) gilt

$$\sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} |V_{n,\xi}^{(f)}(t,x) - Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) + \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n})| = o_P(1).$$

In Kombination mit Proposition 3.5 folgt dann insbesondere

$$\begin{aligned} & \sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} |V_{n,\xi}^{(f)}(t,x) - Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,1}^t) + \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,1})| \\ & \leq \sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} |V_{n,\xi}^{(f)}(t,x) - Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) + \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n})| \\ & \quad + \sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} |Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) - Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,1}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)(Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - Z_{n,\xi}(\phi_{1,1}))| \\ & \leq \sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} |V_{n,\xi}^{(f)}(t,x) - Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) + \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n})| \\ & \quad + \sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} |Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,S_n}^t) - Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,1}^t) + \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x_0)|Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - Z_{n,\xi}(\phi_{1,1})| \\ & = o_P(1). \end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |E_\xi [g((Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,1}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,1}))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)})] - E_\xi [g(V_{n,\xi}^{(f)})]| \\ & \leq E_\xi^* \left[\sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} \left| g((Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,1}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,1}))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}) - g(V_{n,\xi}^{(f)}) \right| \right] \\ & \leq E_\xi^* \left[\sup_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)} \left| Z_{n,\xi}(\phi_{2,x,1}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(f,\Theta_t)}(x)Z_{n,\xi}(\phi_{1,1}) - V_{n,\xi}^{(f)}(t,x) \right| \right] \\ & = o_P(1), \end{aligned}$$

wobei E_ξ^* die äußere bedingte Erwartung gegeben $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ bezeichnet. Insgesamt ergibt sich also

$$\sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |E_\xi [g(V_{n,\xi}^{(f)})] - E[g(V^{(f)})]| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

in äußerer Wahrscheinlichkeit.

Nachweis der Konvergenz in (3.4): Sei $g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))$ und $h \in \mathcal{B}_{y_0}$ beliebig. Sei des Weiteren für $z \in l^\infty(\Phi^*)$

$$R_{n,h}(z) := (z(\phi_{3,y,1}^t) - h(t,x)z(\phi_{1,1}) - E[\log(\Theta_t)\mathbb{1}\{\Theta_t > y\}](\alpha z(\phi_{1,1}) - \alpha^2 z(\phi_{0,1})))_{(t,x) \in [x_0, \infty)}.$$

Wir definieren dann zu g und h die Abbildung $\bar{g}_h : l^\infty(\Phi^*) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\bar{g}_h(z) := \frac{1}{d} g(R_{n,h}(z)),$$

wobei $d := 2 + (\alpha + \alpha^2)M$ und $M := \max_{t \in T} |E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y_0\}]|$. Da $g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))$ gilt, ist $|\bar{g}_h| \leq 1$. Aus der Lipschitz-Stetigkeit von g folgt

$$\begin{aligned} & \sup_{h \in \mathcal{B}_{y_0}} |\bar{g}_h(z) - \bar{g}_h(\tilde{z})| \\ & \leq \sup_{h \in \mathcal{B}_{y_0}} \|R_{n,h}(z) - R_{n,h}(\tilde{z})\|_{T \times [y_0, \infty)} \\ & \leq \frac{1}{d} \sup_{h \in \mathcal{B}_{y_0}} \left(\left\| (z(\phi_{3,y,1}^t) - \tilde{z}(\phi_{3,y,1}^t))_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \right\|_{T \times [y_0, \infty)} \right. \\ & \quad + \left\| (h(t,y)(z(\phi_{1,1}) - \tilde{z}(\phi_{1,1})))_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \right\|_{T \times [y_0, \infty)} \\ & \quad + \left\| (\alpha E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}](z(\phi_{1,1}) - \tilde{z}(\phi_{1,1})))_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \right\|_{T \times [y_0, \infty)} \\ & \quad \left. + \left\| (\alpha^2 E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}](z(\phi_{0,1}) - \tilde{z}(\phi_{0,1})))_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \right\|_{T \times [y_0, \infty)} \right) \\ & \leq \frac{1}{d} (2 + (\alpha + \alpha^2)M) \|z - \tilde{z}\|_{\Phi^*} \\ & = \|z - \tilde{z}\|_{\Phi^*} \end{aligned}$$

für alle $z, \tilde{z} \in l^\infty(\Phi^*)$, so dass $\bar{g}_h \in BL_1(\Phi^*)$ für alle $h \in \mathcal{B}_{y_0}$ gilt. Des Weiteren gilt $\bar{h}_n := (\hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y))_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \in \mathcal{B}_{y_0}$ fast sicher. Mit Anwendung von (3.1) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))} |E_\xi[g(R_{n, \bar{h}_n}(Z_{n, \xi}))] - E[g(V^{(b)})]| \\ & = \sup_{g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))} |2E_\xi[\bar{g}_{\bar{h}_n}(Z_{n, \xi})] - E[g(V^{(b)})]| \\ & \leq \sup_{g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))} \left(|2E[\bar{g}_{\bar{h}_n}(Z)] - E[g(V^{(b)})]| + 2|E_\xi[\bar{g}_{\bar{h}_n}(Z_{n, \xi})] - E[\bar{g}_{\bar{h}_n}(Z)]| \right) \\ & \leq \sup_{g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))} |E[g((Z(\phi_{3,y,1}^t) - \hat{F}_{n, \hat{u}_n}^{(b, \Theta_t)}(y))Z(\phi_{1,1}) \\ & \quad - E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}](\alpha Z(\phi_{1,1}) - \alpha^2 Z(\phi_{0,1})))_{(t,x) \in T \times [x_0, \infty)}] - E[g(V^{(b)})]| \\ & \quad + \sup_{g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))} 2|E_\xi[\bar{g}_{\bar{h}_n}(Z_{n, \xi})] - E[\bar{g}_{\bar{h}_n}(Z)]| \\ & = o_P(1), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Beschränktheit und gleichmäßige Stetigkeit der Funktionen $g \in BL_1(T \times [y_0, \infty))$ ausgenutzt wurde. Aus der Gleichung (3.27) ergibt sich

$$(nv_n)^{1/2}(\hat{\alpha}_{n, S_n}^* - \hat{\alpha}_{n, S_n}) = \alpha Z_{n, \xi}(\phi_{1, S_n}) - \alpha^2 Z_{n, \xi}(\phi_{0, S_n}) + o_P(1).$$

In Kombination mit (3.40), (3.41), (3.42) und (3.43) ergibt sich dann

$$\sup_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \left| V_{n,\xi}^{(b)}(t,y) - Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,S_n}^t) + \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) \right. \\ \left. - E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}] (\alpha Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n})) \right] = o_P(1).$$

Bezeichne für $(t,y) \in T \times [y_0, \infty)$

$$\tilde{V}_{n,\xi}^{(b)}(t,y) := Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,1}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) Z_{n,\xi}(\phi_{1,1}) \\ + E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}] (\alpha Z_{n,\xi}(\phi_{1,1}) - \alpha^2 Z_{n,\xi}(\phi_{0,1})).$$

Durch Anwendung von Proposition 3.5 folgt insbesondere

$$\sup_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} |V_{n,\xi}^{(b)}(t,y) - \tilde{V}_{n,\xi}^{(b)}(t,y)| \\ \leq \sup_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \left| V_{n,\xi}^{(b)}(t,y) - Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,S_n}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) \right. \\ \left. + E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}] (\alpha Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n})) \right| \\ + \sup_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \left| Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,S_n}^t) - Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,1}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) (Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - Z_{n,\xi}(\phi_{1,1})) \right. \\ \left. + E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}] (\alpha (Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - Z_{n,\xi}(\phi_{1,1})) - \alpha^2 (Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n}) - Z_{n,\xi}(\phi_{0,1}))) \right| \\ \leq \sup_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \left| V_{n,\xi}^{(b)}(t,y) - Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,S_n}^t) - \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y) Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) \right. \\ \left. + E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y\}] (\alpha Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - \alpha^2 Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n})) \right| \\ + \sup_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} \left| Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,S_n}^t) - Z_{n,\xi}(\phi_{3,y,1}^t) \right| + \hat{F}_{n,\hat{u}_n}^{(b,\Theta_t)}(y_0) |Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - Z_{n,\xi}(\phi_{1,1})| \\ + E[\log(\Theta_t) \mathbf{1}\{\Theta_t > y_0\}] (\alpha |Z_{n,\xi}(\phi_{1,S_n}) - Z_{n,\xi}(\phi_{1,1})| + \alpha^2 |Z_{n,\xi}(\phi_{0,S_n}) - Z_{n,\xi}(\phi_{0,1})|) \\ = o_P(1).$$

Demnach gilt also

$$\sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |E_\xi[g(V_{n,\xi}^{(b)})] - E_\xi[g(\tilde{V}_{n,\xi}^{(b)})]| \leq E_\xi \left[\sup_{g \in BL_1(T \times [x_0, \infty))} |g(V_{n,\xi}^{(b)}) - g(\tilde{V}_{n,\xi}^{(b)})| \right] \\ \leq E_\xi \left[\sup_{(t,y) \in T \times [y_0, \infty)} |V_{n,\xi}^{(b)}(t,y) - \tilde{V}_{n,\xi}^{(b)}(t,y)| \right] \\ = o_P(1).$$

□

Kapitel 4.

Simulationen

In diesem Kapitel wird in einer Simulationsstudie untersucht, inwieweit sich die Forward- beziehungsweise Backward-Schätzer beim Einsetzen von Ordnungsstatistiken gegenüber dem Einsetzen von theoretischen Quantilen als Schranken unterscheiden. Geschätzt wird hierbei mit Hilfe des Survival-Forward-Schätzers (SFS)

$$\hat{F}_{n,u}^{(f,\Theta_t)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_{i+t}/|X_i| > x, |X_i| > u\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{|X_i| > u\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und des Survival-Backward-Schätzers (SBS)

$$\hat{F}_{n,u}^{(b,\Theta_t)}(x) := \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{X_{i-t}}{X_i} \right|^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\{X_i/|X_{i-t}| > x, |X_i| > u\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{|X_i| > u\}}, & \text{wenn } x \geq 0, \\ 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{X_{i-t}}{X_i} \right|^{\hat{\alpha}_n} \mathbb{1}\{X_i/|X_{i-t}| \leq x, |X_i| > u\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{|X_i| > u\}}, & \text{wenn } x < 0, \end{cases}$$

mit

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{|X_i| > u\}}{\sum_{i=1}^n \log(|X_i|/u) \mathbb{1}\{|X_i| > u\}},$$

die Wahrscheinlichkeit $P\{\Theta_t > x\}$ für verschiedene Lags $t \in \mathbb{N}$ und verschiedene Argumente $x \in \mathbb{R}$, wobei für die Schranke u theoretische Quantile der Form $F_{|X|}^{\leftarrow}(1 - k/n)$ und die entsprechenden Ordnungsstatistiken $|X|_{n-k:n}$ verwendet werden. (Hierbei bezeichnet $F_{|X|}^{\leftarrow}$ die Quantilfunktion von $|X_0|$ und $|X|_{n-k:n}$ die $(k + 1)$ -größte Ordnungsstatistik von $|X_1|, \dots, |X_n|$.) Das Hauptaugenmerk dieser Untersuchung liegt auf dem statistischen Vergleich der Schrankenwahl - theoretisches Quantil versus Ordnungsstatistik - für die einzelnen Schätzer. Ein ausführlicher Vergleich zur Performance der Forward- und Backward-Schätzer wird in Davis et al. (2018) erbracht. Um die Präsentation übersichtlich zu halten, präsentieren wir in diesem Abschnitt lediglich die Simulationsergebnisse zum Lag $t = 1$ und Argument $x \in \{1/2, 1\}$. Weitere Simulationsergebnisse, die insbesondere höhere Lags aufgreifen, sind im Anhang C angegeben.

4.1. Zeitreihenmodelle

Wir betrachten im Folgenden zwei Zeitreihenmodelle, die vor allem bei der Modellierung von Finanzzeitreihen beliebt sind. Da Finanzdaten wie beispielsweise Renditen von Kapitalanlagen insbesondere negative Werte umfassen, sind die verwendeten Zeitreihenmodelle reellwertig.

Das erste Modell ist das sogenannte *GARCH(1,1)-Modell*, welches aufgrund der geringen Anzahl an benötigten Parametern in der Praxis häufig Anwendung findet. Hierbei steht das Akronym GARCH für *generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*.

4.1.1. GARCH(1,1)-Modell

Eine strikt stationäre Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt *GARCH(1,1)-Zeitreihe*, falls für gewisse Parameter $\alpha_0, \alpha_1 \in (0, \infty)$, $\beta_1 \in [0, \infty)$

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 X_{t-1}^2 = \alpha_0 + \sigma_{t-1}^2 (\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2), \quad t \in \mathbb{Z},$$

gilt, wobei ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, unabhängig und identisch verteilte Residuen sind, die stochastisch unabhängig von $(X_{t-i}, \sigma_{t-i})_{i \in \mathbb{N}}$ sind. Die Existenz einer strikt stationären Lösung und ihre reguläre Variation wird in Theorem 3.1 von Basrak et al. (2002) unter geeigneten Bedingungen sichergestellt. Nach Theorem 8 von Lindner (2009) (ursprünglich Boussama, 1998, Théorème 3.4.2) sind GARCH(1,1)-Zeitreihen unter schwachen Bedingungen an $\mathcal{L}(\varepsilon_t)$ insbesondere β -mischend.

In den nachfolgenden Simulationen setzen wir $\alpha_0 = 0,1$, $\alpha_1 = 0,14$ und $\beta_1 = 0,84$. Ein Wert von $\alpha_1 + \beta_1$ nahe 1 ist sehr häufig bei GARCH(1,1)-Modellen zu beobachten, die sich aus einer Modellanpassung für reale log-Renditen ergeben, und geht in der Regel mit schweren Tails einher. Wir werden zwischen standardnormalverteilten Residuen und standardisierten t -verteilten Residuen mit 4 Freiheitsgraden unterscheiden. Im ersten Fall sprechen wir dann vom nGARCH-Modell und im zweiten Fall vom tGARCH-Modell. Die regulär variierende GARCH(1,1)-Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ besitzt mit dieser Parameterwahl einen numerisch bestimmten Index von näherungsweise $\xi = 4,02$ im nGARCH-Modell und $\xi = 2,6$ im tGARCH-Modell.

Die eindimensionalen Randverteilungen des Spektralprozesses $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ lassen sich mit Hilfe des Abschnitts 5.3 in Ehlert (2010) konkretisieren. Nach Ehlert (2010, Seite 93) gilt im Fall von standardnormalverteilten Residuen ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, die Darstellung

$$\mathcal{L}(\Theta_t) = \mathcal{L} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_t}{|\tilde{\varepsilon}_0|} \prod_{i=1}^t (\alpha_1 \tilde{\varepsilon}_{t-i}^2 + \beta_1)^{1/2} \right) \quad (4.1)$$

für alle $t \in \mathbb{N}$, wobei die Zufallsvariablen $\tilde{\varepsilon}_t$, $t \in \mathbb{N}_0$, stochastisch unabhängig sind und bis auf $\tilde{\varepsilon}_0$ dieselbe Verteilung wie ε_1 besitzen. Ein Vergleich mit Janßen (2010, Kapitel 3) zeigt, dass Darstellung (4.1) auch für allgemeinere Residuen ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, gültig ist, die eine positive, stetige und symmetrische Dichte besitzen. Die Zufallsvariable $\tilde{\varepsilon}_0$ ist symmetrisch um 0 verteilt und besitzt nach Lemma 6.1 von Ehlert et al. (2015) die Dichte $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$h(x) = g(x) \frac{|x|^\xi}{E[|\varepsilon_0|^\xi]},$$

wobei g die Dichte von ε_1 bezeichnet und ξ der Index der regulären Variation von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist.

Ein konzeptioneller unterschiedlicher Ansatz zur Modellierung einer Zeitreihe ist es, die eindimensionalen Randverteilungen und die Abhängigkeitsstruktur ebenjener Zeitreihe selbst vor-

zugeben. Wir schränken uns dabei auf die Konstruktion von strikt stationären Markov-Ketten $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ein, da deren Abhängigkeitsstruktur vollständig durch $\mathcal{L}(X_0, X_1)$ festgelegt wird. Die Abhängigkeitsstruktur zwischen X_0 und X_1 wird im Folgenden anhand von sogenannten *Copulas* vorgegeben.

4.1.2. Copula-Markov-Modell

Eine Copula C beschreibt eine multivariate Verteilungsfunktion, deren eindimensionalen Marginalverteilungen der Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ entsprechen. Nach Sklars Theorem (Rüschendorf, 2013, Theorem 2.1) existiert zu jeder Verteilung $\mathcal{L}(X_0, X_1)$ eine eindeutig bestimmte Copula C , so dass

$$F^{(X_0, X_1)}(x_0, x_1) = C(F^{(X_0)}(x_0), F^{(X_1)}(x_1)), \quad (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2,$$

gilt. Wir bezeichnen dann die durch die Marginalverteilung $\mathcal{L}(X_0)$ und die bivariate Copula C festgelegte Markov-Kette $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ als *Copula-Markov-Zeitreihe*. Eine solche Copula-Markov-Zeitreihe ist regulär variierend, wenn

- die eindimensionale Marginalverteilung $\mathcal{L}(X_0)$ absolut stetig, regulär variierend sowie die sogenannte *Tail-Balance-Bedingung*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{X_0 > u\}}{P\{|X_0| > u\}} = p \in (0, 1)$$

erfüllt, und

- die Copula von $\mathcal{L}(X_0, X_1)$ gewisse Regularitätsbedingungen in den Ecken des Definitionsbereiches $[0, 1]^2$ erfüllt (vergleiche Drees et al., 2015, Theorem 5.1).

Der Forward-Spektralprozess $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{N}}$ beschreibt dann eine geometrische Irrfahrt, die durch die Copula von $\mathcal{L}(X_0, X_1)$, dem Index der regulären Variation von $\mathcal{L}(X_0)$ und dem *Tail-Balance-Index* p festgelegt ist.

In den nachfolgenden Simulationen betrachten wir studentsche t -Copulas mit $\nu = 4$ Freiheitsgraden und Kovarianzfaktor $\rho \in \{0, 25; 0, 5; 0, 75\}$, das sind Copulas $C_{\nu, \rho}^t$ der Form

$$C_{\nu, \rho}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{F_{t, \nu}^{\leftarrow}(u)} \int_{-\infty}^{F_{t, \nu}^{\leftarrow}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - \rho^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1 - \rho^2)}\right)^{-(\nu+2)/2} dx dy,$$

und Gumbel-Hougaard-Copulas mit Parameter $\theta \in \{1, 2; 1, 5; 2\}$, das sind Copulas C_{θ}^{gum} der Form

$$C_{\theta}^{gum}(u, v) = \exp\left(-[(-\log(u))^{\theta} + (-\log(v))^{\theta}]^{1/\theta}\right)$$

für $u, v \in [0, 1]$. Hierbei bezeichnet $F_{t, \nu}^{\leftarrow}$ die Quantilfunktion einer t -Verteilung mit ν Freiheitsgraden. Die eindimensionalen Randverteilungen von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ wählen wir ebenfalls als t -Verteilung

mit 4 Freiheitsgraden. Diese sind dann gerade regulär variierend mit Index 4. Je nach Copulawahl sprechen wir vom tCopula- oder gumCopula-Modell.

Nach Proposition 5.1 von Drees et al. (2015) ist $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ wegen obiger Modellwahl stets regulär variierend zum Index $\xi = 4$. Nach Theorem 2.1 von Chen et al. (2009) sind Markov-Ketten, die auf einer Gumbel-Hougaard-Copula oder auf einer t -Copula mit Freiheitsgrad $\nu \in (2, \infty)$ basieren, stets ergodisch und β -mischend. Des Weiteren ergibt sich aus Beispielen A.1 und A.2 von Drees et al. (2015) im tCopula-Modell

$$P\{\Theta_1 \leq x\} = \frac{1}{2} + \frac{H(x) - H(-x)}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei

$$H(x) = F_{t, \nu+1} \left((\text{sign}(x)|x|^{\xi/\nu} - \rho) \left(\frac{\nu+1}{1-\rho^2} \right)^{1/2} \right),$$

und im gumCopula-Modell

$$P\{\Theta_1 \leq x\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(x) \left(1 + |x|^{-\xi\theta} \right)^{1/\theta-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.2. Simulationsergebnisse

Um die Performance der Forward- und Backward-Schätzer gegenüber den modifizierten Forward- und Backward-Schätzern im nGARCH- und tGARCH-Modell zu untersuchen, generieren wir jeweils 1.000 GARCH(1,1)-Zeitreihen der Länge $n = 2.000$. Für diese Schätzer wählen wir dann als Schranke u_n die theoretische Quantile $F_{|X_0|}^{\leftarrow}(\beta)$ von $|X_0|$ zum Niveau $\beta \in \{0,9; 0,95\}$ und die entsprechenden Ordnungsstatistiken. Da keine geschlossene Form der eindimensionalen Verteilungsfunktion von $|X_0|$ in den GARCH-Modellen existiert, berechnen wir die theoretischen Quantile von $|X_0|$ mittels Monte-Carlo-Simulationen. Hierfür werden die theoretischen Quantile $F_{|X_1|}^{\leftarrow}(\beta)$ anhand der $\lfloor m\beta \rfloor$ -größten Ordnungsstatistik von $|X_1|, \dots, |X_m|$ mit $m = 10^8$ approximiert und via 100 Monte-Carlo-Simulationen gemittelt. Wird die empirische Standardabweichung dieser 100 Monte-Carlo-Realisationen dann durch $\sqrt{100}$ geteilt, stellt diese einen Schätzer für die Standardabweichung dieser Approximation der wahren theoretischen Quantile $F_{|X_1|}^{\leftarrow}(\beta)$ dar (siehe Tabelle B.3).

Die wahren Wahrscheinlichkeiten $P\{\Theta_1 > x\}$ lassen sich mit Hilfe von Gleichung (4.1) numerisch bestimmen und sind in Tabelle B.1 zu finden. Zusätzlich sind in Tabelle B.2 die sogenannten *präasymptotischen Werte*

$$p_\beta(x) := P \left(\frac{X_1}{|X_0|} > x \mid |X_0| > F_{|X_1|}^{\leftarrow}(\beta) \right),$$

$$e_\beta(x) := E \left[\left| \frac{X_{-1}}{X_0} \right|^{1/a_\beta} \mathbb{1}\{X_0/|X_{-1}| > x\} \mid |X_0| > F_{|X_1|}^{\leftarrow}(\beta) \right]$$

mit

$$a_\beta := E \left[\log \left(\frac{|X_0|}{F_{|X|}^{\leftarrow}(\beta)} \right) \mid |X_0| > F_{|X|}^{\leftarrow}(\beta) \right]$$

für $x \in \{1/2, 1\}$ und $\beta \in \{0, 9; 0, 95\}$ angegeben. Der Forward-, Backward- und Hill-Schätzer mit Schrankenwahl $u_n = F_{|X|}^{\leftarrow}(\beta)$ stellt jeweils das empirische Gegenstück von $p_\beta(x)$, $e_\beta(x)$ und a_β dar. Man könnte daher erwarten, dass sich jene Schätzwerte der Forward- und Backward-Schätzer eher auf die entsprechenden präasymptotischen Werte $p_\beta(x)$ und $e_\beta(x)$ als auf die tatsächliche Grenzwahrscheinlichkeit $P\{\Theta_1 > x\}$ konzentrieren. Diese präasymptotischen Werte lassen sich in den Copula-Markov-Modellen numerisch berechnen, wohingegen sie in den GARCH(1,1)-Modellen erneut mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen approximiert werden können. Diese Approximationen sind in Tabelle B.3 angegeben, wobei für die Berechnung dasselbe Design wie für die Approximation der wahren theoretischen Quantilen (jedoch mit Zeitreihen der Länge $m = 10^7$) verwendet wurde.

Die nachfolgenden Abbildungen setzen sich stets aus vier Diagrammen zusammen. Dabei bleibt die Anordnung ohne Ausnahme dieselbe. Die oberen zwei Diagramme beziehen sich auf die Forward-Schätzwerte mit theoretischen Quantilen (TQ) und Ordnungsstatistiken (OS). Links wird das 90%- und rechts das 95%-Niveau betrachtet. Die unteren zwei Diagramme beschreiben denselben Sachverhalt für die Backward-Schätzwerte.

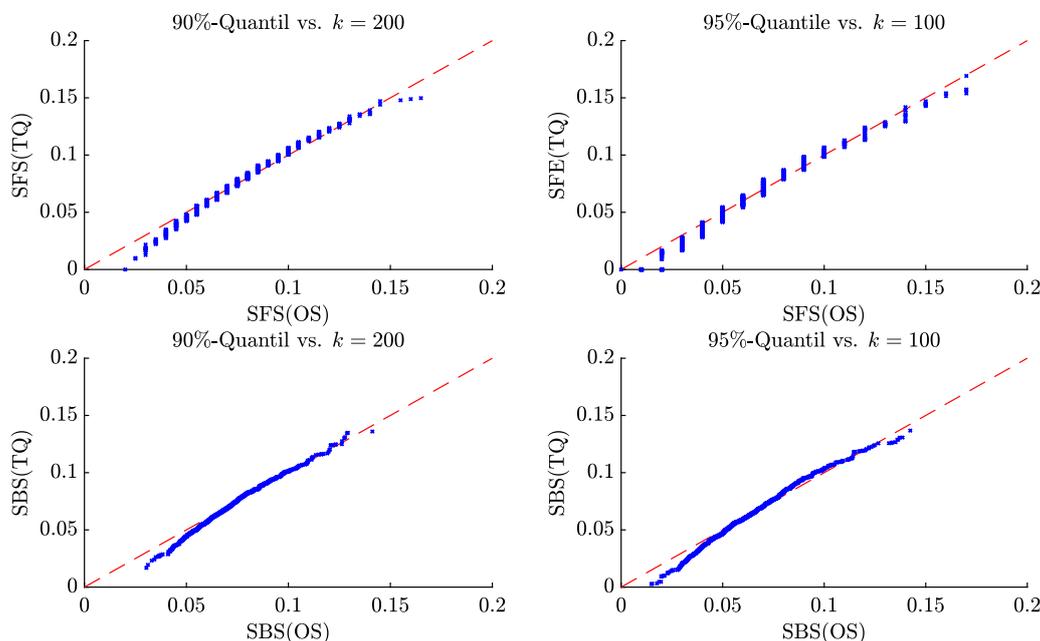


Abbildung 4.1. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1\}$ im nGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke. Links wird das 90%- und rechts das 95%-Niveau betrachtet. Die gestrichelte rote Linie entspricht der Hauptdiagonalen.

In Abbildung 4.1 werden vier QQ-Plots im nGARCH-Modell dargestellt. In jedem QQ-Plot werden die Schätzwerte basierend auf Ordnungsstatistiken den Schätzwerten basierend auf theo-

retischen Quantilen gegenübergestellt. Geschätzt wurde die Wahrscheinlichkeit $P\{\Theta_1 > 1\} \approx 0,0549$. Folgende Auffälligkeiten lassen sich in Abbildung 4.1 erkennen:

1. Die Punkte der QQ-Plots liegen im Großen und Ganzen dicht an der Hauptdiagonalen.
2. Bei niedrigeren Werten sind diese Punkte leicht unterhalb der Hauptdiagonalen.
3. Beim 95%-Niveau treten vereinzelt Punkte auf der x -Achse auf.
4. Die Graphen der oberen zwei Diagramme sind auf wenige Werte der x -Achse konzentriert.

Die erste Auffälligkeit bestätigt im Wesentlichen unsere asymptotischen Resultate aus Theorem 2.8. Aus der zweiten Auffälligkeit ergibt sich, dass die Schätzer basierend auf Exzedenten oberhalb von theoretischen Quantilen eher dazu tendieren, die wahre Wahrscheinlichkeit stärker zu unterschätzen. Bei genauerer Betrachtung der simulierten Daten lässt sich erkennen, dass dieser Effekt hauptsächlich dann auftritt, wenn nur von wenigen Beobachtungen der absolute Wert das Quantil überschreiten. Während die Anzahl an Überschreitungen bei den Schätzern basierend auf Ordnungsstatistiken festgelegt ist, führt dies zu einer unzuverlässigen Schätzung ebenjener Schätzer basierend auf theoretischen Quantilen. Dies erklärt dann insbesondere die dritte Auffälligkeit, in der bei einigen Simulationen zum 95%-Niveau die TQ-Versionen der Schätzer sehr nahe an oder auf der x -Achse liegen. Die diskrete Struktur der x -Werte der Punkte in den oberen zwei Diagrammen geht auf die Tatsache zurück, dass der Forward-Schätzer basierend auf Exzedenten oberhalb von $|X|_{n-k:n}$ nur Werte in $\{i/k \mid 0 \leq i \leq k\}$ annehmen kann. Dies wird auch bei Betrachtung der zugehörigen empirischen Verteilungsfunktionen in Abbildung 4.2 ersichtlich.

Zur Orientierung sind in Abbildung 4.2 zusätzlich jeweils zwei vertikale Linien in jedes Diagramm eingezeichnet. Die durchgezogene schwarze vertikale Linie gibt die tatsächliche Wahrscheinlichkeit $P\{\Theta_1 > 1\} \approx 0,0549$ an (siehe Tabelle B.1). Die gestrichelte schwarze vertikale Linie gibt die präasymptotischen Werte $p_\beta(1)$ (für den Forward-Schätzer) beziehungsweise $e_\beta(1)$ (für den Backward-Schätzer) an. Wie erwartet sind die empirischen Verteilungsfunktionen in etwa um die entsprechenden präasymptotischen Werte zentriert. Des Weiteren zeigen diese Grafiken erneut auf, dass die Schätzer, die auf theoretischen Quantilen basieren, den wahren Wert häufiger unterschätzen. Aufgrund der Differenz zwischen dem präasymptotischen Wert und dem tatsächlichen Grenzwert überschätzen jedoch alle Schätzer normalerweise die Wahrscheinlichkeit $P\{\Theta_1 > 1\}$. Ferner lässt sich aus dem flacheren Kurvenverlauf der empirischen Verteilungsfunktionen in den oberen zwei Graphiken gegenüber den unteren beiden Graphiken die von Davis et al. (2018) bereits festgestellte Charakteristik schließen, dass der Backward-Schätzer eine bessere Performance als der Forward-Schätzer beim Schätzen von $P\{\Theta_1 > 1\}$ besitzt.

Abbildung 4.3 zeigt vier QQ-Plots der Forward- und Backward-Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit $P\{\Theta_1 > 1/2\} \approx 0,2022$ im nGARCH-Modell. Im Wesentlichen treten dieselben Effekte wie in Abbildung 4.1 auf, wobei die zweite Auffälligkeit zum Teil stärker ausgeprägt ist. Zusätzlich macht sich eine weitere Besonderheit bemerkbar. In einigen Fällen überschätzen die TQ-Versionen des Backward-Schätzers die wahre Wahrscheinlichkeit deutlich - in einer Simulation mit $\beta = 0,95$ tritt sogar ein Schätzwert größer als 1 auf. Dies ist wiederum hauptsächlich auf

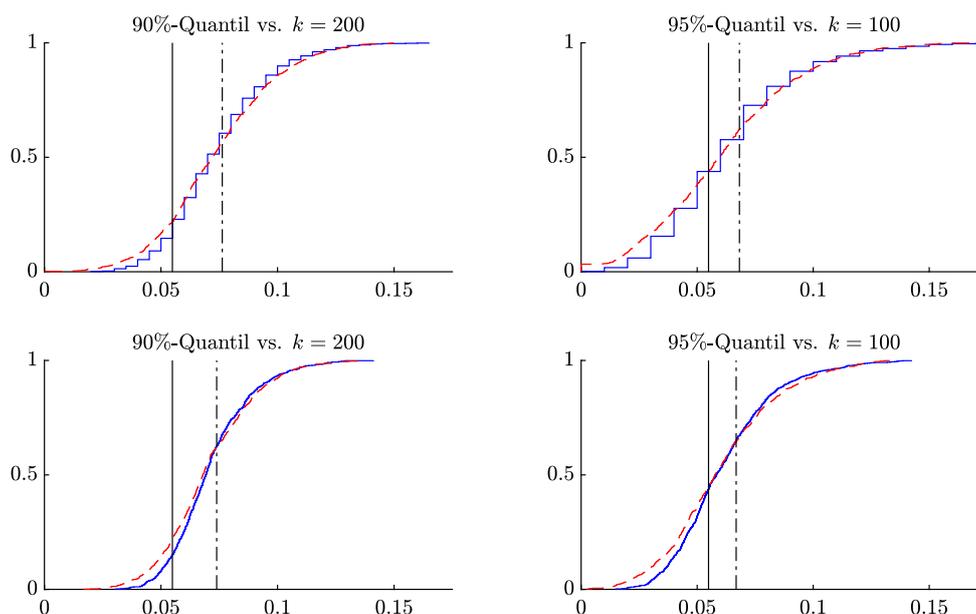


Abbildung 4.2. Empirische Verteilungsfunktionen der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1\}$ im nGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke. Die durchgezogene blaue bzw. gestrichelte rote Linie beschreibt die jeweiligen Schätzer basierend auf OS bzw. TQ. Die durchgezogene schwarze vertikale Linie gibt $P\{\Theta_1 > 1\}$ an, während die gestrichelte schwarze vertikale Linie in den oberen zwei Plots den Wert $p_\beta(1)$ und in den unteren zwei Plots den Wert $e_\beta(1)$ aus Tabelle B.2 angibt.

Simulationen zurückzuführen, bei denen relativ wenige Beobachtungen das theoretische Quantil betragsmäßig überschreiten. Im Gegensatz zur Schätzung von $P\{\Theta_1 > 1\}$ ist im Fall $x = 1/2$ nun der Forward-Schätzer im nGARCH-Modell vorzuziehen.

Die Ergebnisse im tGARCH-Modell und für höhere Lags $t = 5$ sind qualitativ dieselben. Eine entsprechende Diskussion der Simulationsergebnisse und die zugehörigen Graphiken sind in Anhang C zu finden.

Als nächstes untersuchen wir die Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1/2\} \approx 0,1831$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$. Dabei ist das Studiendesign dasselbe wie im nGARCH-Modelle. Das heißt, der Stichprobenumfang, die Anzahl an Simulationen und die Aufmachung der Graphiken, die die nachfolgenden QQ-Plots beinhalten, bleiben unverändert. In Abbildung 4.4 werden die entsprechenden QQ-Plots der Forward- und Backward-Schätzer basierend auf theoretischen Quantilen und Ordnungsstatistiken gegenübergestellt. Auffällig ist, dass die Punkte noch dichter an der Hauptdiagonalen als im nGARCH(1,1)-Modell sind, mit nur minimalen Schwankungen um die Hauptdiagonalen für große Werte des Backward-Schätzer. Gängige Tests wie Kolmogorov-Smirnov-, Cramer-von-Mises- und Anderson-Darling-Zweistichprobentest lehnen die Nullhypothese, dass die Forward- beziehungsweise Backward-Schätzwerte basierend auf Ordnungsstatistiken und theoretischen Quantilen dieselbe Verteilung besitzen, zum Signifikanzniveau von 0,05 nicht ab.

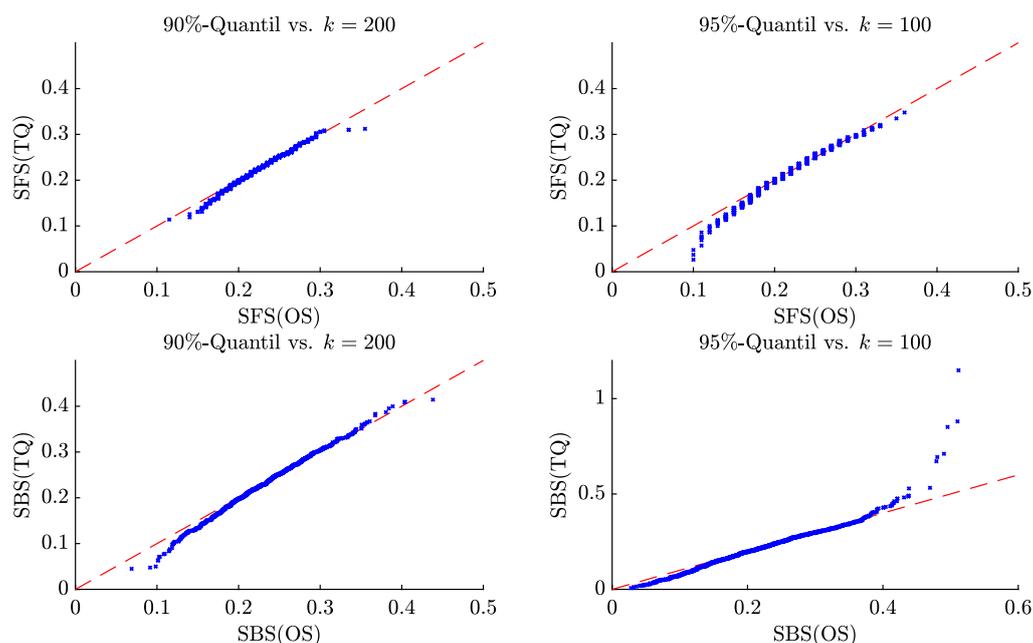


Abbildung 4.3. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ im nGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke. Links wird das 90%- und rechts das 95%-Niveau betrachtet. Die gestrichelte rote Linie entspricht der Hauptdiagonalen.

Ein ähnliches Bild zeichnet sich insbesondere im tCopula-Modell mit höheren Lags $t = 5$, unterschiedlichen Parametern $\rho \in \{0, 5; 0, 75\}$ und beim Schätzen von $P\{\Theta_1 > 1\}$ ab. Ebenso verhält es sich auch im gumCopula-Modell. Eine kurze Diskussion über die entsprechenden Graphiken ist in Anhang C angegeben.

Bisweilen haben wir nur die Verteilungen der unterschiedlichen Versionen der Forward- beziehungsweise Backward-Schätzern miteinander verglichen, die nach Theorem 2.8 dasselbe asymptotische Verhalten besitzen. Abgesehen von einigen Abweichungen in den Tails, sind die Verteilungen insbesondere bei endlichem Stichprobenumfang eng miteinander verbunden. Daher empfiehlt es sich zu untersuchen, ob zwischen beiden Versionen der Schätzer ein engerer Zusammenhang besteht.

In Abbildung 4.5 sind die Schätzwerte der Forward- und Backward-Schätzer basierend auf Exzedenten oberhalb von theoretischen Quantilen den Schätzwerte basierend auf Exzedenten oberhalb der entsprechenden Ordnungsstatistiken im vorher betrachteten tCopula-Modell mit $\rho = 0, 25$ gegenübergestellt. Wenngleich der Zusammenhang zwischen beiden Versionen nicht ganz so stark ausfällt, wie der Zusammenhang zwischen den Verteilungen in Abbildung 4.4, sind die OS-Versionen der Schätzer ein relativ zuverlässiger Prädiktor für die TQ-Versionen ebener Schätzer. Dies macht sich auch in den entsprechenden Varianzen bemerkbar. Die Varianzen der Differenz beider Versionen sind von der Größenordnung her bloß im Bereich von 6,5% (beim Forward-Schätzer zum 90%-Niveau) bis 11,4% (beim Backward-Schätzer zum 95%-Niveau) der entsprechenden Varianzen der TQ-Versionen.

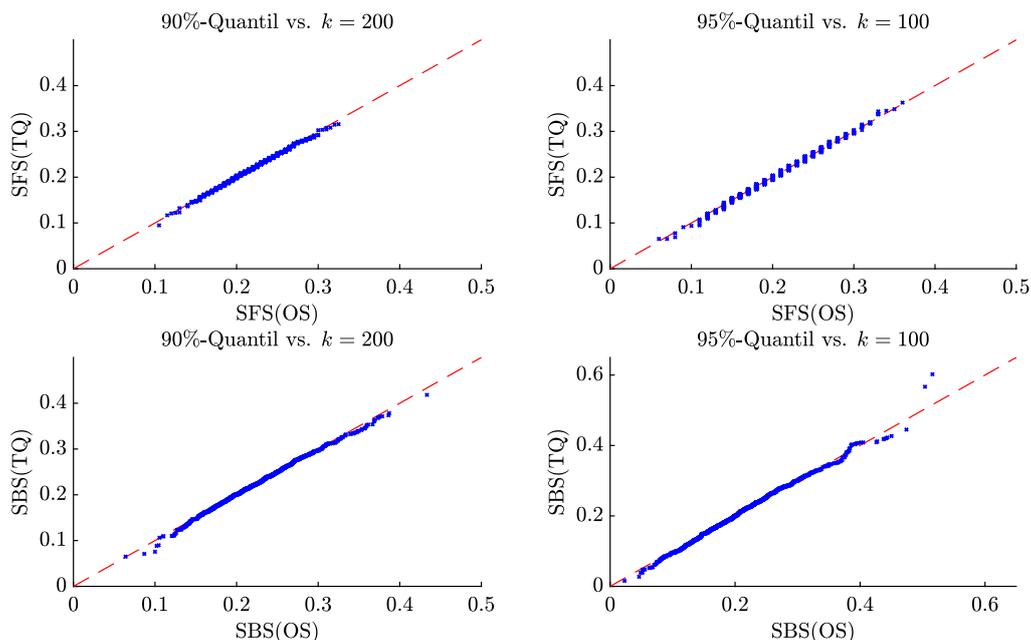


Abbildung 4.4. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke. Links wird das 90%- und rechts das 95%-Niveau betrachtet. Die gestrichelte rote Linie entspricht der Hauptdiagonalen.

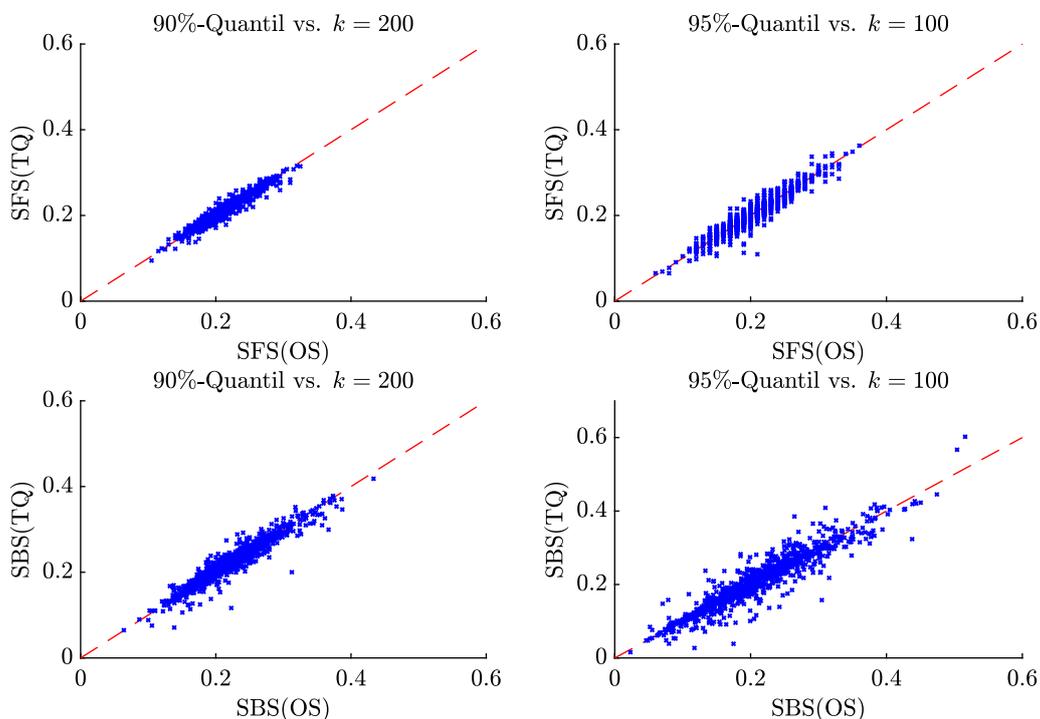


Abbildung 4.5. Vergleich der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke. Links wird das 90%- und rechts das 95%-Niveau betrachtet. Die gestrichelte rote Linie entspricht der Hauptdiagonalen.

Teil II.

Bivariate Tail-Schätzung für Zeitreihen

Aufbau von Teil II

Beginnend mit dem fünften Kapitel wird die reguläre Variation von d -dimensionalen Zufallsvektoren auf offenen Kegeln $(0, \infty)^d$ eingeführt und zentrale Eigenschaften festgehalten. Dabei werden wesentliche Unterschiede zur multivariaten regulären Variation insbesondere mit Blick auf die asymptotische Unabhängigkeit oder asymptotische Abhängigkeit der Koordinaten des Zufallsvektors besprochen.

Im Kontext von bivariaten strikt stationären Zeitreihen $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ wird im sechsten Kapitel ein Schätzer für das Grenzmaß der regulären Variation von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ auf $(0, \infty)^2$ konstruiert und gezeigt, dass dieser asymptotisch normal ist. Dabei wird insbesondere die Anwendung dieser Resultate für univariate regulär variierende Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ diskutiert. Am Beispiel von univariaten SV-Modellen mit regulär variierenden Volatilitäten wird gezeigt, dass unter geeigneten Annahmen die Konstruktion von Konfidenzintervallen möglich ist. Die Beweise jener Resultate sind hier und in den nachfolgenden Kapiteln jeweils im letzten Abschnitt eines Kapitels dargelegt.

Im siebten Kapitel wird ein Schätzer für das Grenzmaß der regulären Variation des marginaltransformierten Zufallsvektors $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auf $(0, \infty)^2$ konstruiert, der auf marginaltransformierten Beobachtungen basiert, wenn die Marginalverteilungen bekannt sind, und sonst rangtransformierte Beobachtungen verwendet. Die asymptotische Normalität des Schätzers basierend auf marginaltransformierte Beobachtungen wird anhand der Resultate des sechsten Kapitels bestimmt. Die asymptotische Normalität des Schätzer bei Verwendung von rangtransformierten Beobachtungen wird ebenfalls festgehalten, wobei bei der Analyse des Grenzwertverhaltens zwischen den Fällen asymptotische Unabhängigkeit und asymptotische Abhängigkeit unterschieden wird. Des Weiteren wird ein Zusammenhang zu marginaltransformierten univariaten Zeitreihen hergestellt.

Im achten Kapitel werden Schätzer für gemeinsame Überschreitungswahrscheinlichkeiten hergeleitet, in denen die Komponenten des Zufallsvektors $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ jeweils eine hohe Schranke überschreiten. Diese Schätzer setzen sich aus einem Schätzer für den Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit und zwei Schätzern für die Verteilungsfunktionen der eindimensionalen Randverteilungen von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ zusammen. Das asymptotische Verhalten des Schätzers für gemeinsame Überschreitungswahrscheinlichkeiten wird dann in Abhängigkeit des asymptotischen Verhaltens des Parameterschätzers, der Schätzer für die Marginalverteilungsfunktionen und dem Abhängigkeitsverhalten des Zufallsvektor $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$, wenn also asymptotische Unabhängigkeit oder asymptotische Abhängigkeit vorliegt, bestimmt. Des Weiteren wird mit Hilfe eines graphischen Verfahrens die richtige Anwendung des Schätzers dargelegt. Insbesondere wird die Anwendung ebenjenes Schätzers für univariate Zeitreihen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ besprochen und geeignete Konfidenzbereiche am Beispiel der SV-Modelle aus dem sechsten Kapitel konstruiert.

Kapitel 5.

Reguläre Variation auf $(0, \infty)^d$

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der regulären Variation von Zufallsvektoren auf offenen Kegeln $(0, \infty)^d$ mit $d \geq 2$ ein. Des Weiteren werden essenzielle Eigenschaften dieser regulären Variation festgehalten, sowie Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Zusammenhänge zur klassischen multivariaten regulären Variation erörtert.

Wir schreiben $\min\{x\} := \min\{x_1, \dots, x_d\}$ für $x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, \infty)^d$.

Definition 5.1. Ein Zufallsvektor (X_1, \dots, X_d) heißt *regulär variierend auf $(0, \infty)^d$* , falls ein nicht-entartetes Maß ν auf $((0, \infty)^d, \mathbb{B}((0, \infty)^d))$ existiert, so dass

$$\frac{P\{(X_1, \dots, X_d) \in uB\}}{P\{\min\{X_1, \dots, X_d\} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \nu(B) < \infty \quad (5.1)$$

für alle ν -randlosen Borelmengen $B \in \mathbb{B}((0, \infty)^d)$ gilt, die von $\{x \in [0, \infty)^d \mid \min\{x\} = 0\}$ weg beschränkt sind. \diamond

Nach obiger Definition 5.1 unterscheidet sich der Regularitätsbegriff der regulären Variation auf $(0, \infty)^d$ in den folgenden zwei Aspekten von der (klassischen) multivariaten regulären Variation aus Definition 1.2:

1. Mit der Einschränkung des Grundraums auf $(0, \infty)^d$ (von ursprünglich $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$) werden nun nur noch Borelmengen B mit $\nu(\partial B) = 0$ betrachtet, die $B \subset (\varepsilon, \infty)^d$ für ein $\varepsilon > 0$ erfüllen, das heißt $\min\{x\} > \varepsilon$ für alle $x \in B$. Die multivariate reguläre Variation eines Zufallsvektors wird hingegen für Borelmengen $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ definiert, die ebenfalls randlos bezüglich des entsprechenden Grenzmaßes sind, jedoch $\max\{|x_1|, \dots, |x_d|\} > \varepsilon$ für alle $(x_1, \dots, x_d) \in B$ erfüllen.
2. Die Wahrscheinlichkeit $P\{(X_1, \dots, X_d) \in uB\}$, die im Zähler der linken Seite von (5.1) auftritt, wird nun mit Hilfe von

$$q(u) := P\{\min\{X_1, \dots, X_d\} > u\}$$

normiert. Bei der multivariaten regulären Variation geschieht die Normierung durch die Wahrscheinlichkeit $P\{\|(X_1, \dots, X_d)\| > u\}$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^d bezeichnet.

Tatsächlich beschreibt die obige Konvergenz in (5.1) die sogenannte \mathbb{M}^* -Konvergenz von Maßen auf dem offenen Kegel $(0, \infty)^d$ (siehe Das et al., 2013, Lindskog et al., 2014). Wenn $\mathbb{M}^*((0, \infty)^d)$ den Raum aller Maße auf $((0, \infty)^d, \mathbb{B}((0, \infty)^d))$ bezeichnet, die auf von $\{x \in [0, \infty)^d \mid \min\{x\} = 0\}$ weg beschränkten Mengen endlich sind, gilt nämlich: Die Maße ν_n konvergieren in $\mathbb{M}^*((0, \infty)^d)$ gegen ν , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(B) = \nu(B)$$

für alle $B \in \mathbb{B}((0, \infty)^d)$ gilt, die $\nu(\partial B) = 0$ erfüllen und von $\{x \in [0, \infty)^d \mid \min\{x\} = 0\}$ weg beschränkt sind. Charakterisierungen der \mathbb{M}^* -Konvergenz lassen sich in einem entsprechendem Portmanteau-Theorem von Lindskog et al. (2014, Theorem 2.1) finden.

Eine unmittelbare Folgerung aus Gleichung (5.1) ist $\nu((1, \infty)^d) = 1$. Des Weiteren gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ die Gleichung

$$\nu(\lambda_1 \lambda_2 (1, \infty)^d) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{q(\lambda_1 \lambda_2 u)}{q(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{q(\lambda_1 \lambda_2 u)}{q(\lambda_2 u)} \frac{q(\lambda_2 u)}{q(u)} = \nu(\lambda_1 (1, \infty)^d) \nu(\lambda_2 (1, \infty)^d).$$

Nach Theorem 1.1.9 von Bingham et al. (1987) zusammen mit der Ungleichung $\nu(\lambda_1 (1, \infty)^d) \geq \nu(\lambda_2 (1, \infty)^d)$, die für alle $\lambda_1 \leq \lambda_2$ gilt, existiert ein $\alpha \in (0, \infty)$, so dass $\nu(\lambda (1, \infty)^d) = \lambda^{-\alpha}$ für alle $\lambda > 0$ gilt. Demzufolge ist die Normierungsfunktion q regulär variierend mit Index $-\alpha$. Daraus ergibt sich insbesondere

$$\nu(\lambda B) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{u^{-1}(X_1, \dots, X_d) \in \lambda B\} q(\lambda u)}{q(\lambda u)} \frac{q(\lambda u)}{q(u)} = \lambda^{-\alpha} \nu(B)$$

für alle ν -randlosen Borelmengen $B \in \mathbb{B}((0, \infty)^d)$, die von $\{x \in [0, \infty)^d \mid \min\{x\} = 0\}$ weg beschränkt sind. Demnach ist ν homogen vom Grad $-\alpha$. Wir bezeichnen deshalb $\alpha \in (0, \infty)$ als den *Index* des Grenzmaßes ν beziehungsweise der regulären Variation von (X_1, \dots, X_d) auf $(0, \infty)^d$.

Analog zum Theorem 1.3 lässt sich die folgende Aussage für Grenzmaße der regulären Variation auf $(0, \infty)^d$ folgern.

Lemma 5.2. *Sei ν ein homogenes Maß auf $((0, \infty)^d, \mathbb{B}((0, \infty)^d))$, das auf $(1, \infty)^d$ endlich ist. Für alle von $\{x \in [0, \infty)^d \mid \min\{x\} = 0\}$ weg beschränkten Mengen $B \in \mathbb{B}((0, \infty)^d)$, die $\#(\partial B \cap \{rx \mid r > 0\}) = 1$ für alle $x \in \partial B$ erfüllen, gilt $\nu(\partial B) = 0$.*

Beweis. Der Nachweis kann vollkommen analog zum Beweis von Theorem 1.3 geführt werden, indem man die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| > 1\}$ durch $(1, \infty)^d$ ersetzt. \square

Bemerkung 5.3. Intervalle der Form $(x, \infty) := (x_1, \infty) \times \dots \times (x_d, \infty)$ mit $x = (x_1, \dots, x_d) \in (0, \infty)^d$ sind stets randlos bezüglich homogener Maße auf $((0, \infty)^d, \mathbb{B}((0, \infty)^d))$, die endlich auf $(1, \infty)^d$ sind. Das Intervall (x, ∞) besitzt nämlich den topologischen Rand

$$\partial(x, \infty) = \left(\{x_1\} \times [x_2, \infty) \times \dots \times [x_d, \infty) \right) \cup \dots \cup \left([x_1, \infty) \times \dots \times [x_{d-1}, \infty) \times \{x_d\} \right)$$

$$=: \bigcup_{i=1}^d A_x(i).$$

Nun erfüllen die Mengen $A_x(i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, offensichtlich

$$\#(A_x(i) \cap \{rz \mid r > 0\}) = 1 \quad \text{für alle } z \in A_x(i),$$

so dass nach Lemma 5.2 und wegen der Subadditivität des Maßes ν

$$\nu(\partial(x, \infty)) \leq \sum_{i=1}^d \nu(A_x(i)) = 0$$

gilt. ◇

Nach Lemma 6.1 von Resnick (2007) folgt die Konvergenz (1.1) der multivariaten regulären Variation genau dann, wenn diese auf Komplementen von abgeschlossenen Rechteckmengen, die die 0 enthalten, gilt. In Anlehnung dazu gilt die folgende Aussagen für die reguläre Variation auf offenen Kegeln $(0, \infty)^d$.

Lemma 5.4. *Ein Zufallsvektor (X_1, \dots, X_d) ist genau dann regulär variierend auf $(0, \infty)^d$ mit Grenzmaß ν , wenn*

$$\frac{P\{X_1 > x_1 u, \dots, X_d > x_d u\}}{P\{\min\{X_1, \dots, X_d\} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \nu((x_1, \infty) \times \dots \times (x_d, \infty)) \quad (5.2)$$

für alle $x = (x_1, \dots, x_d) \in (0, \infty)^d$, die $\min\{x\} > \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ erfüllen.

Beweis. Da das Grenzmaß ν homogen ist und die Gleichheit $\nu((1, \infty)^d) = 1$ gilt, folgt aus Bemerkung 5.3 die Identität $\nu(\partial(x, \infty)) = 0$ für alle $x \in (0, \infty)^d$. Demnach impliziert die reguläre Variation von (X_1, \dots, X_d) auf $(0, \infty)^d$ die Konvergenz in (5.2).

Sei also nun (5.2) erfüllt. Nach Beispiel 2.3 von Billingsley (1999) ist die Menge der mehrdimensionalen Intervallen $\{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}^d\}$ in \mathbb{R}^d ein konvergenzbestimmendes Mengensystem hinsichtlich der schwachen Konvergenz. Folglich ist für beschränkte Maße insbesondere das Mengensystem $\{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}^d\}$ bestehend aus den jeweiligen Komplementmengen konvergenzbestimmend in \mathbb{R}^d hinsichtlich der schwachen Konvergenz. Da für alle $\varepsilon > 0$ die eingeschränkten Maße $\nu|_{(\varepsilon, \infty)}$ durch $\varepsilon^{-\alpha}$ beschränkt sind, folgt wegen (5.2) die schwache Konvergenz

$$\nu_n|_{(\varepsilon, \infty)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu|_{(\varepsilon, \infty)}$$

für alle $\varepsilon > 0$, wobei

$$\nu_n(\cdot) = \frac{P\{u^{-1}(X_1, \dots, X_d) \in \cdot\}}{P\{\min\{X_1, \dots, X_d\} > u_n\}} < \infty$$

und u_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Folge ist, die $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ erfüllt. Nach dem Portmanteau-Theorem von Lindskog et al. (2014, Theorem 2.1) ist die obige Konvergenz äquivalent zur \mathbb{M}^* -Konvergenz von

ν_n , $n \in \mathbb{N}$, in $\mathbb{M}^*((0, \infty)^d)$ gegen ν . Folglich ist der Zufallsvektor (X_1, \dots, X_d) regulär variierend auf $(0, \infty)^d$ mit Grenzmaß ν . \square

Nach Lemma 5.4 ist es also ausreichend, das Konvergenzverhalten in (5.2) zu überprüfen, um reguläre Variation eines Zufallsvektors (X_1, \dots, X_d) auf $(0, \infty)^d$ zu folgern. Tatsächlich gilt die obige Konvergenz in (5.2) sogar gleichmäßig auf $[a, \infty)^d$ für alle $a > 0$.

Theorem 5.5. *Sei (X_1, \dots, X_d) regulär variierend auf $(0, \infty)^d$ mit Grenzmaß ν . Für alle $a \in (0, \infty)$ gilt dann*

$$\sup_{x \in [a, \infty)^d} \left| \frac{P\{X_1 > x_1 u, \dots, X_d > x_d u\}}{P\{\min\{X_1, \dots, X_d\} > u\}} - \nu((x_1, \infty) \times \dots \times (x_d, \infty)) \right| \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Bezeichne der Übersichtlichkeit halber

$$\bar{F}_u(x) := \frac{P\{X_1 > x_1 u, \dots, X_d > x_d u\}}{P\{\min\{X_1, \dots, X_d\} > u\}}, \quad x \in (0, \infty)^d.$$

Aufgrund der Homogenität von ν gilt $\nu((a, \infty)^d) = a^{-\alpha} \nu((1, \infty)^d) = a^{-\alpha} < \infty$ für ein $\alpha > 0$. Aus Lemma 5.2 beziehungsweise Bemerkung 5.3 folgt, dass die Abbildung $x \mapsto \nu((x, \infty))$ auf $(0, \infty)^d$ stetig ist. Folglich existieren Konstanten $z_1, \dots, z_m \in (a, \infty)^d$, $m \in \mathbb{N}$, mit

$$a =: z_{0,j} < z_{1,j} < \dots < z_{m,j} < z_{m+1,j} := \infty, \quad j \in \{1, \dots, d\},$$

wobei $z_i = (z_{i,1}, \dots, z_{i,m})$, so dass für alle $i \in \{0, \dots, m\}$

$$\nu((z_i, \infty)) - \nu((z_{i+1}, \infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Ferner folgt aus Lemma 5.4 für hinreichend große u

$$|\bar{F}_u(z_i) - \nu((z_i, \infty))| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $i \in \{0, \dots, m\}$. Definiere nun die disjunkten Mengen $A_i := (z_i, \infty) \setminus (z_{i+1}, \infty)$, $i \in \{0, \dots, m\}$, die eine Partition des Intervalls $(a, \infty)^d$ darstellen. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in (a, \infty)^d} |\bar{F}_u(x) - \nu((x, \infty))| \\ &= \max_{i \in \{0, \dots, m\}} \sup_{x \in A_i} |\bar{F}_u(x) - \nu((x, \infty))| \\ &\leq \max_{i \in \{0, \dots, m\}} \max \left\{ \bar{F}_u(z_i) - \nu((z_{i+1}, \infty)), \nu((z_i, \infty)) - \bar{F}_u(z_{i+1}) \right\} \\ &\leq \max_{i \in \{0, \dots, m\}} \max \left\{ \bar{F}_u(z_i) - \nu((z_i, \infty)), \nu((z_{i+1}, \infty)) - \bar{F}_u(z_{i+1}) \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \max_{i \in \{0, \dots, m\}} |\bar{F}_u(z_i) - \nu((z_i, \infty))| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend große u . Lässt man ε gegen 0 streben, ergibt sich die Behauptung. \square

Bemerkung 5.6. Auf analoge Weise wie im Beweis von Theorem 5.5 lässt sich zeigen: Wenn der Zufallsvektor (X_1, \dots, X_d) multivariat regulär variierend mit Grenzmaß μ ist, gilt für alle $a \in (0, \infty)$

$$\sup_{x \in [a, \infty)^d} \left| \frac{P\{X_1 > x_1 u, \dots, X_d > x_d u\}}{P\{\|X_1, \dots, X_d\| > u\}} - \mu((x_1, \infty) \times \dots \times (x_d, \infty)) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

◇

Der konzeptionelle Unterschied der Regularitätsannahmen *multivariate reguläre Variation* und *reguläre Variation auf $(0, \infty)^d$* wird mit Hilfe des Begriffs der asymptotische Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen besonders deutlich.

Definition 5.7. Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit zugehörigen Quantilfunktionen $F_{X_1}^{\leftarrow}$ und $F_{X_2}^{\leftarrow}$ heißen *asymptotisch unabhängig* (in Zeichen: $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$), falls

$$\lim_{s \uparrow 1} P(X_2 > F_{X_2}^{\leftarrow}(s) \mid X_1 > F_{X_1}^{\leftarrow}(s)) = 0, \quad (5.3)$$

und *asymptotisch abhängig*, falls

$$\lim_{s \uparrow 1} P(X_2 > F_{X_2}^{\leftarrow}(s) \mid X_1 > F_{X_1}^{\leftarrow}(s)) = \lambda \quad (5.4)$$

für ein $\lambda > 0$.

◇

Man beachte, dass asymptotische Abhängigkeit nicht das Gegenteil der asymptotische Unabhängigkeit darstellt.

Wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 gemeinsam multivariat regulär variierend sind, kann die obige Definition der asymptotischen Unabhängigkeit mit Hilfe des zugehörigen Grenzmaßes charakterisiert werden.

Theorem 5.8. Sei (X_1, X_2) multivariat regulär variierend mit Grenzmaß μ , das $\mu\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_i > 1\} > 0$ für alle $i \in \{1, 2\}$ erfüllt. Dann sind folgenden zwei Aussagen äquivalent:

1. X_1 und X_2 sind asymptotisch unabhängig.
2. Es gilt $\mu((0, \infty)^2) = 0$.

Beweis. Sei $i \in \{1, 2\}$. Bezeichne F_i die Verteilungsfunktionen von X_i und F_{\max} die Verteilungsfunktion von $\max\{|X_1|, |X_2|\}$. Aufgrund der multivariaten regulären Variation von (X_1, X_2) , Theorem 1.3 und Bemerkung 1.4 gilt für $A_1 = (1, \infty) \times \mathbb{R}$ und $A_2 = \mathbb{R} \times (1, \infty)$

$$\frac{1 - F_{X_i}(u)}{1 - F_{\max}(u)} = \frac{P\{u^{-1}(X_1, X_2) \in A_i\}}{P\{\|(X_1, X_2)\|_{\infty} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \mu(A_i) =: a_i, \quad (5.5)$$

wobei $\|\cdot\|_{\infty}$ die Supremumsnorm auf $[0, \infty)^2$ bezeichnet. Da μ ein nicht-entartetes homogenes Grenzmaß ist, gilt in jedem Fall $a_i > 0$. Ferner ist die Survivalfunktion $1 - F_{\max}$ regulär variierend mit einem Index $-\alpha < 0$. Wegen $\mu\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_i > 1\} > 0$ folgt daraus insbesondere, dass $1 - F_{X_i}$

regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist. Demnach sind die zugehörigen Inversen $t \mapsto F_{X_i}^{\leftarrow}(1-t)$ und $t \mapsto F_{\max}^{\leftarrow}(1-t)$ regulär variierend in 0 mit Index $1/\alpha$. Wegen $1 - F_{X_i}(u) \sim a_i(1 - F_{\max}(u))$ für $u \rightarrow \infty$ folgt

$$F_{X_i}^{\leftarrow}(1-t) \sim F_{\max}^{\leftarrow}\left(1 - \frac{t}{a_i}\right) \sim a_i^{1/\alpha} F_{\max}^{\leftarrow}(1-t), \quad t \downarrow 0.$$

Ferner gilt nach Bemerkung 5.6

$$\sup_{x,y \in (a, \infty)} \left| \frac{P\{X_1 > xu, X_2 > yu\}}{P\{\|(X_1, X_2)\|_\infty > u\}} - \mu((x, \infty) \times (y, \infty)) \right| \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0.$$

Folglich gilt

$$\frac{P\{X_1 > F_{X_1}^{\leftarrow}(1-t), X_2 > F_{X_2}^{\leftarrow}(1-t)\}}{P\{\|(X_1, X_2)\|_\infty > F_{\max}^{\leftarrow}(1-t)\}} \xrightarrow{t \downarrow 0} \mu((a_1^{1/\alpha}, \infty) \times (a_2^{1/\alpha}, \infty)).$$

In Kombination mit (5.5) gilt also

$$\lim_{t \downarrow 0} P(X_2 > F_{X_2}^{\leftarrow}(1-t) \mid X_1 > F_{X_1}^{\leftarrow}(1-t)) = 0$$

genau dann, wenn $\mu((a_1^{1/\alpha}, \infty) \times (a_2^{1/\alpha}, \infty)) = 0$ gilt. Dies ist gerade äquivalent zu $\mu((0, \infty)^2) = 0$, da wegen der Homogenität von μ

$$\mu((a_1^{1/\alpha}, \infty) \times (a_2^{1/\alpha}, \infty)) \geq \mu((\max\{a_1^{1/\alpha}, a_2^{1/\alpha}\}, \infty)^2) = \left(\frac{\max\{a_1^{1/\alpha}, a_2^{1/\alpha}\}}{\varepsilon}\right)^\alpha \mu((\varepsilon, \infty)^2)$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. □

Auf analoge Weise lässt sich für multivariat regulär variierende Zufallsvektoren (X_1, \dots, X_d) mit Grenzmaß μ , die $\mu\{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i > 1\} > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ erfüllen, folgendes zeigen: Es ist

$$\mu\{x \in \mathbb{R}^d \mid \min\{x_i, x_j\} > 0\} = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq d$$

genau dann erfüllt, wenn die entsprechenden Zufallsvariablen X_i , $1 \leq i \leq d$, paarweise asymptotisch unabhängig sind.

Nun gilt unabhängig vom asymptotischen Abhängigkeitsverhalten der Zufallsvariablen X_i , $1 \leq i \leq d$, stets die Gleichheit $\nu((1, \infty)^d) = 1$, wenn diese gemeinsam regulär variierend auf $(0, \infty)^d$ sind. Mit Blick auf den zweidimensionalen Fall bedeutet das: Wenn X_1 und X_2 asymptotisch unabhängig sind, wird das extremale Abhängigkeitsverhalten von (X_1, X_2) auf $(u, \infty)^2$ für $u \rightarrow \infty$ nur vom Grenzmaß der regulären Variation auf $(0, \infty)^2$ erfasst und nicht vom Grenzmaß der multivariaten regulären Variation, da dieses nach Theorem 5.8 stets gleich 0 ist.

Für zwei asymptotisch abhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 , die gemeinsam multivariat regulär variierend mit Grenzmaß μ sind, kann ein Zusammenhang zur regulären Variation auf

dem offenen Kegel $(0, \infty)^2$ geschlossen werden: Es gilt

$$\frac{P\{u^{-1}(X_1, X_2) \in B\}}{P\{\min\{X_1, X_2\} > u\}} = \frac{P\{u^{-1}(X_1, X_2) \in B\}}{P\{\|(X_1, X_2)\|_\infty > u\}} \frac{P\{\|(X_1, X_2)\|_\infty > u\}}{P\{u^{-1}(X_1, X_2) \in (1, \infty)^2\}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(B)}{\mu((1, \infty)^2)}$$

für alle $B \in \mathbb{B}((0, \infty)^d)$ mit $\mu(\partial B) = 0$, die von $\{x \in [0, \infty)^d \mid \min\{x\} = 0\}$ weg beschränkt sind, wobei wegen der Homogenität von μ und Theorem 5.8 die Ungleichung $\mu((1, \infty)^2) > 0$ garantiert ist. Demnach ist (X_1, X_2) regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß

$$\nu = \frac{\mu|_{(0, \infty)^2}}{\mu((1, \infty)^2)}.$$

Im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit von X_1 und X_2 gilt wegen Theorem 5.8 die Gleichheit $\mu((1, \infty)^2) \leq \mu((0, \infty)^2) = 0$. Demnach kann ν nicht anhand von μ bestimmt werden. Diese Konstellation von asymptotischer Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen, die sowohl reguläre variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ als auch multivariate regulär variierend sind, beschreibt die von Resnick (2002) eingeführte *hidden regular variation*.

Mit Blick auf den univariaten Fall, in dem eine regulär variierende Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ betrachtet wird, liefert der Fall der asymptotischen Unabhängigkeit der Zufallspaare (X_0, X_h) , $h \neq 0$, einen trivialen Spektralprozess $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$:

$$|\Theta_h| = \begin{cases} 1, & \text{wenn } h = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In diesem Fall heißt die Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ asymptotisch unabhängig.

Kapitel 6.

Schätzer für $\nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))$

In diesem Kapitel betrachten wir eine strikt stationäre Zeitreihe $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$. Wir sind dann am extremalen Abhängigkeitsverhalten des Zufallsvektors $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ auf $(u, \infty)^2$ für $u \rightarrow \infty$ interessiert. Aus diesem Grund wird angenommen, dass ebenjener Zufallsvektor regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit einem Grenzmaß ν_0 ist. Nach Lemma 5.4 ist dies äquivalent dazu, dass

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{V_0^{(1)} > xu, V_0^{(2)} > yu\}}{P\{\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > u\}} = \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \quad (6.1)$$

für alle $x, y > 0$ gilt.

Ein Schätzer für $\nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))$ basierend auf einer Stichprobe $(V_1^{(1)}, V_1^{(2)}), \dots, (V_n^{(1)}, V_n^{(2)})$, $n \in \mathbb{N}$, ergibt sich nun durch die folgende Heuristik: Die obige Konvergenz (6.1) motiviert

$$\frac{P\{V_0^{(1)} > xu_n, V_0^{(2)} > yu_n\}}{P\{\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > u_n\}} \approx \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \quad (6.2)$$

für hinreichend große u_n . Werden also die Wahrscheinlichkeiten auf der linken Seite von (6.2) durch ihre empirischen Gegenstücke ersetzt, ergibt sich

$$\hat{\nu}_n((x, \infty) \times (y, \infty)) := \frac{\sum_{t=1}^n \mathbb{1}\{V_t^{(1)} > xu_n, V_t^{(2)} > yu_n\}}{\sum_{t=1}^n \mathbb{1}\{\min\{V_t^{(1)}, V_t^{(2)}\} > u_n\}} \quad (6.3)$$

als ein Schätzer für $\nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))$. Dessen asymptotisches Verhalten lässt sich mit Hilfe der Grenzwertresultate von Drees und Rootzén (2010) bestimmen.

6.1. Asymptotische Resultate

Definiere die Funktionen $\phi_{x,y} : [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\phi_{x,y}(z_1, z_2) := \mathbb{1}\{z_1 > x, z_2 > y\}$$

für alle $x, y \in [x^*, \infty)$, wobei $x^* \in (0, 1]$. Bezeichne $\Phi = \{\phi_{x_1, x_2} \mid x_1, x_2 \in [x^*, \infty)\}$ die zugehörige Funktionenklasse. Sei des Weiteren

$$V_{n,i} := u_n^{-1}(V_i^{(1)}, V_i^{(2)}) \mathbb{1}\{\min\{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}\} > x^* u_n\}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (6.4)$$

und

$$v_{n,x} := P\{\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > xu_n\}, \quad x \in [x^*, \infty).$$

Im Gegensatz zu Kapitel 2 schreiben wir nun

$$v_n := v_{n,x^*} = P\{V_{n,1} \neq 0\}.$$

Der Term $V_{n,i}$ bezeichnet also den durch u_n normierten Zufallsvektor $(V_i^{(1)}, V_i^{(2)})$, wenn beide Einträge die Schranke x^*u_n überschreiten, und ist sonst gleich 0.

Die zugehörigen standardisierten Tail-Array-Sums, die zur Analyse des asymptotischen Verhaltens von $(\hat{\nu}_n((x, \infty) \times (y, \infty)))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ benötigt werden, sind dann definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) &:= (nv_{n,1})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\phi_{x,y}(V_{n,i}) - E[\phi_{x,y}(V_{n,i})]) \\ &= (nv_{n,1})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1}\{V_i^{(1)} > xu_n, V_i^{(2)} > yu_n\} - P\{V_0^{(1)} > xu_n, V_0^{(2)} > yu_n\}), \end{aligned} \quad (6.5)$$

Damit lässt sich der Schätzer $\hat{\nu}_n((x, \infty) \times (y, \infty))$ wie folgt darstellen:

$$\hat{\nu}_n((x, \infty) \times (y, \infty)) = \frac{(nv_{n,1})^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) + nP\{V_0^{(1)} > xu_n, V_0^{(2)} > yu_n\}}{(nv_{n,1})^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,1}) + nv_{n,1}}. \quad (6.6)$$

Voraussetzungen

Bezeichne

$$\beta_{n,k} := \sup_{1 \leq l \leq n-k-1} E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^n} |P(B | \mathcal{B}_{n,1}^l) - P(B)| \right]$$

den β -Mischungskoeffizienten zu $((V_{n,i})_{1 \leq i \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $\mathcal{B}_{n,i}^j = \sigma((V_{n,l})_{i \leq l \leq j})$. Wir fordern nun, dass zwei Folgen $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n, r_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ existieren, so dass zu demselben $x^* \in (0, 1]$ wie in (6.4) die folgenden Voraussetzungen gelten:

(A1) Für $n \rightarrow \infty$ gilt $l_n = o(r_n)$, $r_n = o((nv_n)^{1/2})$, $r_n v_n \rightarrow 0$ und $\beta_{n,l_n} n/r_n \rightarrow 0$.

(A2) Für alle $k \in \{0, \dots, r_n\}$ existieren Konstanten

$$s_n(k) \geq P(\min\{V_k^{(1)}, V_k^{(2)}\} > x^*u_n \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^*u_n),$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} s_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} s_{\infty}(k) < \infty$ mit $s_{\infty}(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(k)$ erfüllen.

(A3) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i} \neq 0\} \right)^{2+\delta} \right] = O(r_n v_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

(A4) Zu jedem $t \in \mathbb{N}$ existiert ein Maß ν_t auf $((1, \infty)^4, \mathbb{B}((1, \infty)^4))$, so dass

$$\frac{P\{u^{-1}(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}, V_t^{(1)}, V_t^{(2)}) \in B\}}{P\{\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \nu_t(B) < \infty$$

für alle ν_t -randlosen Borelmengen $B \in \mathbb{B}((1, \infty)^4)$ gilt. \diamond

Voraussetzung **(A1)** stellt technische Anforderungen an das Tailverhalten von $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$, die eine erfolgreiche Anwendung der „big blocks, small blocks“-Technik ermöglicht. So wird beispielsweise durch $r_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ sichergestellt, dass die erwartete Anzahl der Überschreitungen innerhalb eines großen Blocks der Länge r_n gegen 0 konvergiert, und Bedingung $\beta_{n,l_n} n / r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ bewirkt, dass zeitlich weit auseinander liegende Zufallsvektoren, deren Koordinaten die Schranke $x^* u_n$ überschreiten, sich nahezu stochastisch unabhängig verhalten.

Mit Hilfe von Voraussetzung **(A2)** kann die Konvergenz der Kovarianzen des Prozesses der Tail-Array-Sums $(\tilde{Z}_n(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ sichergestellt werden. Dies wird für die schwache Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(\tilde{Z}_n(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ benötigt.

Voraussetzung **(A3)** dient dazu, die zufällige Anzahl an Überschreitungen innerhalb eines Blocks der Länge r_n zu beschränken. Da diese in der Regel schwierig nachzuprüfen ist, kann sie durch die folgende restriktivere Bedingung ersetzt werden:

(A5) Für alle $j, k \in \{0, \dots, r_n\}$ existieren Konstanten

$$\tilde{s}_n(j, k) \geq P(\min\{V_j^{(1)}, V_j^{(2)}, V_k^{(1)}, V_k^{(2)}\} > x^* u_n \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^* u_n),$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k \leq r_n} \tilde{s}_n(j, k) = \sum_{1 \leq j \leq k < \infty} \tilde{s}_\infty(j, k) < \infty$ mit $\tilde{s}_\infty(j, k) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n(j, k)$ erfüllen.

Bedingung **(A5)** impliziert offensichtlich auch Voraussetzung **(A2)**. In Abschnitt 6.3 wird in Lemma 6.6 gezeigt, dass Bedingung **(A5)** auch Voraussetzung **(A3)** impliziert.

Das extremale Abhängigkeitsverhalten zwischen den Zufallspaaren $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ und $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})$ wird mit Hilfe des Grenzmaßes ν_t , $t \in \mathbb{N}$, aus Voraussetzung **(A4)** erfasst. Da die Survivalfunktion des Minimums $\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\}$ regulär variierend ist, sind die Grenzmaße ν_t homogen.

Wir untersuchen nun das asymptotische Verhalten von $(\tilde{Z}_n(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$.

Proposition 6.1. *Sei $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe und die entsprechenden Zufallspaare $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})$, $t \in \mathbb{Z}$, regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß ν_0 . Unter den Voraussetzungen **(A1)**, **(A2)**, **(A3)** und **(A4)** konvergiert die Folge der Prozesse der Tail-Array-Sums $(\tilde{Z}_n(\psi))_{\psi \in \Phi}$, $n \in \mathbb{N}$, in $l^\infty(\Phi)$ schwach gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z(\psi))_{\psi \in \Phi}$ mit Kovarianzstruktur*

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(Z(\phi_{x,y}), Z(\phi_{\tilde{x}, \tilde{y}})) \\ &= \nu_0((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty)) \\ &+ \sum_{t=1}^{\infty} \left(\nu_t((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) + \nu_t((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times (y, \infty)) \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

für $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$.

Mit Hilfe von Proposition 6.1 kann nun das asymptotische Verhalten des Schätzers $\hat{\nu}_n((x, \infty) \times (y, \infty))$ bestimmt werden, wenn zusätzlich gefordert wird, dass der Bias asymptotisch vernachlässigbar ist:

$$\sup_{x, y \in [x^*, \infty)} \left| \frac{P\{V_0^{(1)} > xu_n, V_0^{(2)} > yu_n\}}{P\{\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > u_n\}} - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \right| = o((nv_{n,1})^{-1/2}) \quad (6.9)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Theorem 6.2. Sei $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe und die entsprechenden Zufallspaare $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})$, $t \in \mathbb{Z}$, regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß ν_0 . Falls die Voraussetzungen (A1), (A2), (A3), (A4) und Bias-Bedingung (6.9) erfüllt sind, folgt die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} (nv_{n,1})^{1/2} (\hat{\nu}_n((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)))_{x, y \in [x^*, \infty)} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z(\phi_{x,y}) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))Z(\phi_{1,1}))_{x, y \in [x^*, \infty)}, \end{aligned}$$

wobei $(Z(\phi_{x,y}))_{x, y \in [x^*, \infty)}$ derselbe Gaußprozess wie in Proposition 6.1 ist. Die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses ist in Gleichung (6.22) angegeben.

Das obige Resultat aus Theorem 6.2 lässt sich mit Hilfe der Herangehensweise aus Kapitel 2 auch für die modifizierte Version des Schätzers $\hat{\nu}_n$ folgern, die zufällige Schranken \hat{u}_n anstelle deterministischer Schranken u_n verwendet, sofern $\hat{u}_n/u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ in Wahrscheinlichkeit gilt.

Im folgenden Abschnitt betrachten wir den Spezialfall, dass eine univariate Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ zugrunde liegt. Wir sind dann am extremalen Abhängigkeitsverhalten von (X_0, X_h) für ein Lag $h \in \mathbb{N}$ interessiert.

6.2. Der Spezialfall: $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}) = (X_0, X_h)$

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre univariate Zeitreihe, die regulär variierend mit Tail- und Spektralprozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist. Wir nehmen im Folgenden an, dass der zugehörige Zufallsvektor (X_0, X_h) für $h \in \mathbb{N}$ regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß $\nu_0^{(h)}$ ist. Nach Kapitel 5 ist dies bereits dann erfüllt, wenn X_0 und X_h asymptotisch abhängig sind und der Zufallsvektor (X_0, X_h) multivariat regulär variierend ist, wobei Letzteres gerade aus der regulären Variation von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ folgt (siehe Diskussion auf Seite 135).

Im Fall der asymptotischen Abhängigkeit von X_0 und X_h lassen sich der zugehörige Parameter λ und das Grenzmaß $\nu_0^{(h)}$ mit Hilfe des Spektralprozesses $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ausdrücken: Es gilt

$$\lambda = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}}{P\{X_0 > u\}} = \lim_{u \rightarrow \infty} P(X_h > u \mid X_0 > u) = P\{Y_h > 1\}$$

und

$$\begin{aligned} \nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{X_0 > xu, X_h > yu\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(X_h > yu \mid X_0 > xu)}{P(X_h > u \mid X_0 > u)} \frac{P\{X_0 > xu\}}{P\{X_0 > u\}} \\ &= \frac{P\{Y_h > y/x\}}{x^\alpha P\{Y_h > 1\}}. \end{aligned}$$

Aus der Spektralzerlegung $Y_h = Y_0 \Theta_h$ und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} P\{Y_h > x\} &= P\{Y_0 \Theta_h > x\} \\ &= \int_{(1, \infty) \times [0, \infty)} \mathbb{1}\{s\vartheta > x\} \mathcal{L}(Y_0, \Theta_h)(d(s, \vartheta)) \\ &= \int_{[0, \infty)} P\{Y_0 > x/\vartheta\} \mathcal{L}(\Theta_h)(d\vartheta) \\ &= \int_{(x, \infty)} 1 \mathcal{L}(\Theta_h)(d\vartheta) + \int_{[0, x]} \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{-\alpha} \mathcal{L}(\Theta_h)(d\vartheta) \\ &= P\{\Theta_h > x\} + \frac{1}{x^\alpha} E[\Theta_h^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_h \leq x\}]. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich also

$$\lambda = P\{\Theta_h > 1\} + E[\Theta_h^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_h \leq 1\}]$$

und

$$\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{x^\alpha} P\{\Theta_h > y/x\} + \frac{1}{y^\alpha} E[\Theta_h^\alpha \mathbb{1}\{\Theta_h \leq y/x\}] \right). \quad (6.10)$$

Im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit von X_0 und X_h ist es wegen $P\{\Theta_h = 0\} = 1$ nicht möglich, das Grenzmaß $\nu_0^{(h)}$ mittels des Spektralprozesses zu beschreiben.

Mit der Darstellung $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)}) := (X_t, X_{t+h})$, $t \in \mathbb{Z}$, gilt dann nach Theorem 6.2 unter den Voraussetzungen (A1)–(A4) und der Bias-Bedingung (6.9), dass der Schätzer

$$\hat{\nu}_n^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) := \frac{\sum_{t=1}^n \mathbb{1}\{X_t > xu_n, X_{t+h} > yu_n\}}{\sum_{t=1}^n \mathbb{1}\{\min\{X_t, X_{t+h}\} > u_n\}}$$

asymptotisch normal für $\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))$ ist. Die Grenzmaße aus Voraussetzung (A4) lassen sich ebenfalls mit Hilfe des Spektralprozesses $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ausdrücken, wenn X_0 und X_h asymptotisch abhängig sind. Wir bezeichnen diese der Einheitlichkeit halber mit $\nu_t^{(h)}$, $t \in \mathbb{N}$. Es gilt dann für $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$

$$\begin{aligned} \nu_t^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \\ = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{X_0 > xu, X_h > yu, X_t > \tilde{x}u, X_{t+h} > \tilde{y}u\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(X_h > yu, X_t > \tilde{x}u, X_{t+h} > \tilde{y}u \mid X_0 > xu) P\{X_0 > xu\}}{P(X_h > u \mid X_0 > u) P\{X_0 > u\}} \\
&= \frac{P\{Y_h > y/x, Y_t > \tilde{x}/x, Y_{t+h} > \tilde{y}/x\}}{x^\alpha P\{Y_h > 1\}}.
\end{aligned}$$

Bezeichne nun $B(x, y, z) := (x, \infty) \times (y, \infty) \times (z, \infty)$ für $x, y, z \in [x^*, \infty)$. Durch das erneute Ausnutzen der Spektralzerlegung $Y_t = Y_0 \Theta_t$, $t \in \mathbb{Z}$, und dem Satz von Fubini folgt dann

$$\begin{aligned}
&P\{Y_h > x, Y_t > y, Y_{t+h} > z\} \\
&= P\{Y_0 \Theta_h > x, Y_0 \Theta_t > y, Y_0 \Theta_{t+h} > z\} \\
&= \int_{(1, \infty) \times [0, \infty)^3} \mathbf{1}\{s\vartheta_h > x, s\vartheta_t > y, s\vartheta_{t+h} > z\} \mathcal{L}(Y_0, \Theta_h, \Theta_t, \Theta_{t+h})(d(s, \vartheta_h, \vartheta_t, \vartheta_{t+h})) \\
&= \int_{[0, \infty)^3} P\left\{Y_0 > \max\left\{\frac{x}{\vartheta_h}, \frac{y}{\vartheta_t}, \frac{z}{\vartheta_{t+h}}\right\}\right\} \mathcal{L}(\Theta_h, \Theta_t, \Theta_{t+h})(d(\vartheta_h, \vartheta_t, \vartheta_{t+h})) \\
&= \int_{B(x, y, z)} 1 \mathcal{L}(\Theta_h, \Theta_t, \Theta_{t+h})(d(\vartheta_h, \vartheta_t, \vartheta_{t+h})) \\
&\quad + \int_{[0, \infty)^3 \setminus B(x, y, z)} \left(\max\left\{\frac{x}{\vartheta_h}, \frac{y}{\vartheta_t}, \frac{z}{\vartheta_{t+h}}\right\}\right)^{-\alpha} \mathcal{L}(\Theta_h, \Theta_t, \Theta_{t+h})(d(\vartheta_h, \vartheta_t, \vartheta_{t+h})) \\
&= P\{\Theta_h > x, \Theta_t > y, \Theta_{t+h} > z\} \\
&\quad + E\left[\left(\max\left\{\frac{x}{\Theta_h}, \frac{y}{\Theta_t}, \frac{z}{\Theta_{t+h}}\right\}\right)^{-\alpha} \mathbf{1}\{(\Theta_h, \Theta_t, \Theta_{t+h}) \in [0, \infty)^3 \setminus B(x, y, z)\}\right].
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich also

$$\begin{aligned}
&\nu_t^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{x^\alpha} P\{\Theta_h > y/x, \Theta_t > \tilde{x}/x, \Theta_{t+h} > \tilde{y}/x\} \right. \\
&\quad \left. + E\left[\left(\max\left\{\frac{y}{\Theta_h}, \frac{\tilde{x}}{\Theta_t}, \frac{\tilde{y}}{\Theta_{t+h}}\right\}\right)^{-\alpha} \mathbf{1}\{(\Theta_h, \Theta_t, \Theta_{t+h}) \in [0, \infty)^3 \setminus B\left(\frac{y}{x}, \frac{\tilde{x}}{x}, \frac{\tilde{y}}{x}\right)\}\right] \right).
\end{aligned}$$

Im nachfolgenden Abschnitt betrachten wir den Fall, in dem die zugrunde liegende univariate Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Lösung eines stochastischen Volatilitätsmodells (SV-Modells) mit Gamma-Typ-verteilten Log-Volatilitäten beschreibt. Unter geeigneten Bedingungen ist dann Voraussetzung (A4) für $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ trivial.

6.2.1. SV-Modelle mit Gamma-Typ-verteilten Log-Volatilitäten

Wir betrachten im Folgenden das in Definition 3.1 von Janssen und Drees (2016) verwendete SV-Modell mit Gamma-Typ-verteilten Log-Volatilitäten.

Definition 6.3. Sei

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

mit unabhängig und identisch verteilten ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, die $P\{\varepsilon_0 > 0\} > 0$ und $E[|\varepsilon_0|^{1+\delta}] < \infty$ für

ein $\delta > 0$ erfüllen. Sei des Weiteren

$$\log \sigma_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \eta_{t-i}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

mit

1. Koeffizienten $\pi_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}_0$, die $\max_{i \in \mathbb{N}_0} \pi_i = 1$ und $\pi_i = O(i^{-\theta})$ für $i \rightarrow \infty$ für ein $\theta > 1$ erfüllen,
2. unabhängig und identisch verteilte Innovationen η_t , $t \in \mathbb{Z}$, die unabhängig von $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $E[\eta_0^2] < \infty$ sind und

$$P\{\eta_0 > u\} \sim K u^\beta e^{-u}, \quad u \rightarrow \infty,$$

für reelle Konstanten $\beta \neq -1$ und $K > 0$ erfüllen.

Die Zeitreihe $(X_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt dann *SV-Modell mit Gamma-Typ-verteilten Log-Volatilitäten*. \diamond

Nach Theorem 3.2 von Janssen und Drees (2016) existiert für das obige SV-Modell eine strikt stationäre Lösung $(X_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, so dass X_0 und σ_0 regulär variierend mit Index -1 sind. Der Zufallsvektor (X_0, X_h) , $h \in \mathbb{N}$, ist dann nach Theorem 5.1 ebenjenes Artikels regulär variierend auf $(0, \infty)^2$, wenn die folgende Bedingung gilt:

(O) Es existiert eine eindeutige Lösung des linearen Optimierungsproblems:

$$\begin{aligned} \text{Finde } \kappa_i \geq 0, i \in \mathbb{N}_0, \text{ mit } \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i \rightarrow \min! \text{ unter den Nebenbedingungen} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \kappa_i \geq 1, \sum_{i=h}^{\infty} \pi_{i-h} \kappa_i \geq 1 \text{ und } E[(\varepsilon_0^+)^{\sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i + \delta}] < \infty \text{ für ein } \delta > 0, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_0^+ := \max\{\varepsilon_0, 0\}$. \diamond

Die optimale Lösung $(\kappa_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ hat dann höchstens zwei positive Einträge und ist sonst gleich 0 (vergleiche Janssen und Drees, 2016, Theorem 4.2). Das zugehörige Grenzmaß $\nu_0^{(h)}$ ist dann homogen vom Grad $-\sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i$ und von folgender Form:

$$\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) = (x^{\pi_i - \pi_j} y^{\pi_j - h - \pi_i - h})^{1/(\pi_j \pi_i - h - \pi_i \pi_j - h)},$$

wenn $\kappa_i, \kappa_j > 0$ für $i \neq j$, und

$$\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) = \frac{E[\min\{x^{-1} \varepsilon_0^+ \prod_{j \geq h, j \neq i} e^{\pi_j - h \eta_{h-j}}, y^{-1} \varepsilon_h^+ \prod_{j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{i\}} e^{\pi_j \eta_{h-j}}\}^{1/\pi_i}]}{E[\min\{\varepsilon_0^+ \prod_{j \geq h, j \neq i} e^{\pi_j - h \eta_{h-j}}, \varepsilon_h^+ \prod_{j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{i\}} e^{\pi_j \eta_{h-j}}\}^{1/\pi_i}]},$$

wenn $\kappa_i > 0$ für genau ein $i \in \mathbb{N}_0$ und sonst $\kappa_j = 0$ gilt.

Theorem 6.4. Sei $(X_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Lösung des SV-Modells aus Definition 6.3, die Bedingung (O) mit festem $h \in \mathbb{N}$ für $\kappa_{i_1}, \kappa_{i_2} > 0$ und $\kappa_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{i_1, i_2\}$ erfüllt.

Angenommen das folgende lineare Optimierungsproblem hat für $t \in \mathbb{N}$ eine optimale Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Finde } \tilde{\kappa}_i \geq 0, i \in \mathbb{N}_0, \text{ mit } \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i \rightarrow \min! \text{ unter den Nebenbedingungen} \quad (6.11) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \tilde{\kappa}_i \geq 1, \sum_{i=h}^{\infty} \pi_{i-h} \tilde{\kappa}_i \geq 1, \sum_{i=t}^{\infty} \pi_{i-t} \tilde{\kappa}_i \geq 1, \sum_{i=t+h}^{\infty} \pi_{i-(t+h)} \tilde{\kappa}_i \geq 1. \end{aligned}$$

Sei dann $E[(\varepsilon_0^+)^{\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i + \tilde{\delta}}] < \infty$ für ein $\tilde{\delta} > 0$ erfüllt und die Zufallsvariable η_0 fast sicher nach unten beschränkt. Es gilt dann

$$\nu_t^{(h)} = 0,$$

wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gilt

$$\sum_{i=t}^{\infty} \pi_{i-t} \kappa_i < 1 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=t+h}^{\infty} \pi_{i-(t+h)} \kappa_i < 1. \quad (6.12)$$

2. Das lineare Optimierungsproblem (6.11) besitzt für $t \neq h$ eine eindeutige Lösung mit genau vier positiven Einträgen $\tilde{\kappa}_{j_i}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$, und es gilt $\beta \neq 0$ oder $\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} < \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}$.

Im Fall $t = h$ existieren genau drei positive Einträge, die die obige Bedingung erfüllen.

Ferner gilt im Fall $\beta = 0$ mit $\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}$

$$\nu_t^{(h)}((x, \infty)) = D \frac{E \left[\nu_t^{(h, \sigma)}((\varepsilon_0^{-1} x_1, \infty) \times (\varepsilon_h^{-1} x_2, \infty) \times (\varepsilon_t^{-1} x_3, \infty) \times (\varepsilon_{t+h}^{-1} x_4, \infty)) \right]}{E \left[\nu_0^{(h, \sigma)}((\varepsilon_0^{-1} x_1, \infty) \times (\varepsilon_h^{-1} x_2, \infty)) \right]} \quad (6.13)$$

für $x \in (0, \infty)^4$, wobei $\nu_0^{(h, \sigma)}$ in (6.23), $\nu_t^{(h, \sigma)}$ in (6.24) und $D > 0$ in (6.27) definiert sind.

Addendum 6.5. Da die optimale Lösung $(\kappa_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des Optimierungsproblems in (O) gerade $\kappa_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{i_1, i_2\}$ erfüllt, gilt Bedingung (6.12) trivialerweise für alle $t > \max\{i_1, i_2\} - h$.

Nach Definition 6.3 gilt $\pi_k = 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Wählt man $\tilde{\kappa}_k = \tilde{\kappa}_{k-h} = \tilde{\kappa}_{k-t} = \tilde{\kappa}_{k-(t+h)} = 1$ und $\tilde{\kappa}_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{h, t, t+h\}$, so stellt dies eine zulässige Lösung des Optimierungsproblems (6.11) dar. Demzufolge gilt für eine optimale Lösung von (6.11) stets $\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i \leq 4$. Damit ist die Momentenbedingung $E[(\varepsilon_0^+)^{\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i + \tilde{\delta}}] < \infty$ für ein $\tilde{\delta} > 0$ bereits dann erfüllt, wenn $E[(\varepsilon_0^+)^{4+\tilde{\delta}}] < \infty$ für ein $\tilde{\delta} > 0$ gilt.

Theorem 6.4 zeigt, dass unter geeigneten Bedingungen die Grenzmaße $\nu_t^{(h)}$, $t \in \mathbb{N}$, aus Voraussetzung (A4) stets das Nullmaß beschreiben. Die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses

$$V := (Z(\phi_{x,y}) - \nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))Z(\phi_{1,1}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$$

aus Theorem 6.2 vereinfacht sich in diesem Fall immens. Nach Gleichung (6.22) (aus dem nachfolgenden Abschnitt 6.3) gilt nämlich

$$\begin{aligned} & Cov(V(x, y), V(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ &= \nu_0^{(h)}((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty)) + \nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))\nu_0^{(h)}((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \\ &\quad - \nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))\nu_0^{(h)}((\max\{\tilde{x}, 1\}, \infty) \times (\max\{\tilde{y}, 1\}, \infty)) \\ &\quad - \nu_0^{(h)}((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty))\nu_0^{(h)}((\max\{x, 1\}, \infty) \times (\max\{y, 1\}, \infty)). \end{aligned}$$

In diesem Fall lassen sich dann asymptotische Konfidenzintervalle für $\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))$ zum approximativen Niveau $1 - \tau \in (0, 1)$ konstruieren.

Tatsächlich folgt $\nu_t^{(h)} = 0$, $t \in \mathbb{N}$, im Fall von streng monoton fallenden Koeffizienten π_i , $i \in \mathbb{N}_0$, auch unter schwächeren Bedingungen. Nach Korollar 5.3 von Janssen und Drees (2016) ist die eindeutige Lösung des linearen Optimierungsproblems in (O) durch $\kappa_0 = 1 - \pi_h$, $\kappa_h = 1$ und $\kappa_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{h\}$ gegeben. Ist dann $E[(\varepsilon_0^+)^{2-\pi_{\inf}+\delta}] < \infty$ mit $\pi_{\inf} := \inf_{k \in \mathbb{N}} \pi_k$ für ein $\delta > 0$ erfüllt, sind die Zufallsvektoren (X_0, X_h) , $h \in \mathbb{N}$, jeweils regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß

$$\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) = x^{\pi_h-1} y^{-1}.$$

Offensichtlich ist $\nu_0^{(h)}$ damit homogen mit Index $\pi_h - 2 \in [-2, -1)$, wodurch die Survivalfunktion von $\min\{X_0, X_h\}$ regulär variierend mit ebenjenen Index ist. Da $\pi_{t+h} - 2 < \pi_h - 2$ für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich

$$\frac{P\{\min\{X_0, X_h, X_t, X_{t+h}\} > u\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} \leq \frac{P\{\min\{X_0, X_{t+h}\} > u\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0. \quad (6.14)$$

Demzufolge gilt $\nu_t^{(h)}((1, \infty)^4) = 0$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

Konfidenzintervalle für $\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))$

Die Grenzzufallsvariable $V(x, y)$ ist unter den Annahmen von Theorem 6.2 zentriert normalverteilt mit Varianz

$$\begin{aligned} \sigma_V^2 &:= \nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))(1 + \nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))) \\ &\quad - 2\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))\nu_0^{(h)}((\max\{x, 1\}, \infty) \times (\max\{y, 1\}, \infty)). \end{aligned}$$

Wird das in der Varianz σ_V^2 auftretende Grenzmaß $\nu_0^{(h)}$ durch den Schätzer $\hat{\nu}_n^{(h)}$ ersetzt, also

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{n,V}^2 &:= \hat{\nu}_n^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))(1 + \hat{\nu}_n^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))) \\ &\quad - 2\hat{\nu}_n^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))\hat{\nu}_n^{(h)}((\max\{x, 1\}, \infty) \times (\max\{y, 1\}, \infty)) \end{aligned}$$

betrachtet, so konvergiert nach Theorem 6.2 der Schätzer $\hat{\sigma}_{n,V}^2$ stochastisch gegen σ_V^2 . Nach Theorem 6.2 und Lemma von Slutsky gilt dann die schwache Konvergenz

$$\frac{(n\tilde{v}_{n,1})^{1/2}}{\hat{\sigma}_{n,V}}(\hat{\nu}_n^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \quad (6.15)$$

für $x, y \in [x^*, \infty)$ mit $S \sim \mathcal{N}(0, 1)$, wobei $\tilde{v}_{n,1} := P\{\min\{X_0, X_h\} > u_n\}$. Wird die Überschreitungswahrscheinlichkeit $\tilde{v}_{n,1}$ in der obigen Gleichung (6.15) durch einen Schätzer $\hat{\tilde{v}}_{n,1}$, der $\hat{\tilde{v}}_{n,1}/\tilde{v}_{n,1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ in Wahrscheinlichkeit erfüllt, bleibt die Konvergenzaussage (6.15) weiterhin gültig. Aus der Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ -b_{\tau/2} \leq \frac{(n\hat{\tilde{v}}_{n,1})^{1/2}}{\hat{\sigma}_{n,V}}(\hat{\nu}_n^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))) \leq b_{\tau/2} \right\} = 1 - \tau$$

ergibt sich das asymptotische Konfidenzintervall

$$\left[\hat{\nu}_n^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) - b_{\tau/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,V}}{(n\hat{\tilde{v}}_{n,1})^{1/2}}, \hat{\nu}_n^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) + b_{\tau/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,V}}{(n\hat{\tilde{v}}_{n,1})^{1/2}} \right] \quad (6.16)$$

für $\nu_0^{(h)}((x, \infty) \times (y, \infty))$ zum Niveau $1 - \tau$, wobei $b_{\tau/2} := \Psi^{-1}(1 - \tau/2)$ und Ψ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

6.3. Beweise

In diesem Abschnitt werden die Resultate aus den Abschnitten 6.1 und 6.2 nachgewiesen. An erster Stelle weisen wir jedoch den behaupteten Zusammenhang zwischen Voraussetzungen (A2), (A3) und (A5) nach.

Lemma 6.6. *Aus Voraussetzung (A5) folgen die Voraussetzungen (A2) und (A3).*

Beweis. Aus Voraussetzung (A5) folgt

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i} \neq 0\} \right)^3 \right] \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{r_n} P\{\min\{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}, V_j^{(1)}, V_j^{(2)}, V_k^{(1)}, V_k^{(2)}\} > x^* u_n\} \\ &\leq r_n v_n + 6r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) P\{\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}, V_j^{(1)}, V_j^{(2)}, V_k^{(1)}, V_k^{(2)}\} > x^* u_n\} \\ &\leq r_n v_n + 6r_n v_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \sum_{j=1}^k P(\min\{V_j^{(1)}, V_j^{(2)}, V_k^{(1)}, V_k^{(2)}\} > x^* u_n \\ &\hspace{15em} | \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^* u_n) \\ &\leq r_n v_n + 6r_n v_n \sum_{1 \leq j \leq k < \infty} \tilde{s}_n(j, k) \\ &= O(r_n v_n), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

so dass (A3) für $\delta = 1$ erfüllt ist. Ferner gilt

$$\tilde{s}_n(k, k) \geq P(\min\{V_k^{(1)}, V_k^{(2)}\} > x^*u_n \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^*u_n)$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \tilde{s}_n(k, k) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{s}_\infty(k, k) < \infty$, so dass auch (A2) erfüllt ist. \square

6.3.1. Beweis von Proposition 6.1

Wir zeigen im Folgenden anhand von Theorem A.2 (Drees und Rootzén, 2010, Korollar 3.6), dass die Folge der Prozesse

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{n,x^*}(\phi_{x,y}) &:= \left(\frac{v_{n,1}}{v_n}\right)^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) \\ &= (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\phi_{x,y}(V_{n,i}) - E[\phi_{x,y}(V_{n,i})]) \\ &= (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}\{V_i^{(1)} > xu_n, V_i^{(2)} > yu_n\} - P\{V_0^{(1)} > xu_n, V_0^{(2)} > yu_n\}), \end{aligned}$$

$x, y \in [x^*, \infty)$, schwach gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z_{x^*}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ konvergiert. Die aus der regulären Variation der Survivalfunktion von $\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\}$ resultierende Konvergenz $v_{n,1}/v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x^*)^\alpha$ liefert dann wegen $Z(\phi_{x,y}) = (x^*)^{-\alpha/2} Z_{x^*}(\phi_{x,y})$ die asymptotische Normalität des Prozesses $(\tilde{Z}_n(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$. Dessen Kovarianzstruktur ist dann durch die Gleichheit

$$\text{Cov}(Z(\phi_{x,y}), Z(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}})) = (x^*)^{-\alpha} \text{Cov}(Z_{x^*}(\phi_{x,y}), Z_{x^*}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}))$$

festgelegt.

Der Beweis ist in Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen und asymptotische Gleichstetigkeit von $(\tilde{Z}_{n,x^*}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ unterteilt.

Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen

Nachweis von (C1) und (C2) [unter (A1) und (A3) (bzw. (A2))]: Die minimale Einhüllende ϕ_{x^*,x^*} der Familie Φ ist sowohl messbar als auch beschränkt. Ferner stellt die Abbildung $\rho : \Phi^2 \rightarrow [0, \infty)$ mit der Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} \rho(\phi_{x,y}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}) & \\ &:= \nu_0 \left(\left(\frac{\min\{x, \tilde{x}\}}{x^*}, \frac{\max\{x, \tilde{x}\}}{x^*} \right] \times (1, \infty) \right) + \nu_0 \left((1, \infty) \times \left(\frac{\min\{y, \tilde{y}\}}{x^*}, \frac{\max\{y, \tilde{y}\}}{x^*} \right] \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

eine Semimetrik auf Φ dar. Die Semidefinitheit und Symmetrie folgen direkt und die Dreiecksungleichung ergibt sich aus der Subadditivität des Maßes ν_0 . Für $x, y, \tilde{x}, \tilde{y}, z_1, z_2 \in [x^*, \infty)$ gilt

nämlich

$$\begin{aligned}
& \rho(\phi_{x,y}, \rho_{\tilde{x},\tilde{y}}) \\
& \leq \nu_0 \left(\left(\frac{\min\{x, \tilde{x}, z_1\}}{x^*}, \frac{\max\{x, \tilde{x}, z_1\}}{x^*} \right] \times (1, \infty) \right) \\
& \quad + \nu_0 \left((1, \infty) \times \left(\frac{\min\{y, \tilde{y}, z_2\}}{x^*}, \frac{\max\{y, \tilde{y}, z_2\}}{x^*} \right] \right) \\
& \leq \nu_0 \left(\left(\frac{\min\{x, z_1\}}{x^*}, \frac{\max\{x, z_1\}}{x^*} \right] \times (1, \infty) \right) + \nu_0 \left(\left(\frac{\min\{\tilde{x}, z_1\}}{x^*}, \frac{\max\{\tilde{x}, z_1\}}{x^*} \right] \times (1, \infty) \right) \\
& \quad + \nu_0 \left((1, \infty) \times \left(\frac{\min\{y, z_2\}}{x^*}, \frac{\max\{y, z_2\}}{x^*} \right] \right) + \nu_0 \left((1, \infty) \times \left(\frac{\min\{\tilde{y}, z_2\}}{x^*}, \frac{\max\{\tilde{y}, z_2\}}{x^*} \right] \right) \\
& = \rho(\phi_{x,y}, \rho_{z_1,z_2}) + \rho(\phi_{z_1,z_2}, \rho_{\tilde{x},\tilde{y}}).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass $\rho(\phi_{x,y}, \rho_{\tilde{x},\tilde{y}}) \leq 2\nu_0((1, \infty)^2) = 2$ für alle $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$ gilt. Ferner ist die Abbildung $(x, y) \mapsto \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))$ nach Theorem 5.5 stetig. Demzufolge können zu jedem $\varepsilon > 0$ Konstanten $x_1, \dots, x_m \in [x^*, \infty)$ mit $x_1 < \dots < x_m$ und $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m \in [x^*, \infty)$ mit $\tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_m$ und $m = \lceil 2/\varepsilon \rceil$ gewählt werden, so dass

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \nu_0 \left(\left(\frac{x_i}{x^*}, \frac{x_{i+1}}{x^*} \right] \times (1, \infty) \right), \nu_0 \left(\left(\frac{x_m}{x^*}, \infty \right) \times (1, \infty) \right), \right. \\
& \quad \left. \nu_0 \left((1, \infty) \times \left(\frac{\tilde{x}_i}{x^*}, \frac{\tilde{x}_{i+1}}{x^*} \right] \right), \nu_0 \left((1, \infty) \times \left(\frac{\tilde{x}_m}{x^*}, \infty \right) \right) \right\} < \varepsilon/2
\end{aligned}$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ gilt, wobei $x_0 = \tilde{x}_0 = x^*$. Demzufolge überdecken die Teilmengen

$$A_i := \{\psi \in \Phi \mid \rho(\psi, \phi_{x_i, \tilde{x}_i}) < \varepsilon\}, \quad i \in \{0, 1, \dots, m\},$$

die Funktionenklasse Φ vollständig, so dass Φ totalbeschränkt bezüglich ρ ist.

Aus der Annahme (A3) folgt

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i} \neq 0\} \right)^2 \right] = O(r_n v_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Nach Theorem A.2 folgen damit die Bedingungen (C1), (D1), (D2') und (C2).

Nachweis von (C3) [unter (A1), (A2) und (A4)]: Aus der strikten Stationarität des Prozesses $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r_n v_n} \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{x,y}(V_{n,i}), \sum_{j=1}^{r_n} \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,j}) \right) \\
& = \frac{1}{r_n v_n} \left(\sum_{i=1}^{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} E[\phi_{x,y}(V_{n,i}) \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,j})] - r_n^2 E[\phi_{x,y}(V_{n,0})] E[\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,0})] \right) \\
& = \frac{1}{r_n v_n} \left[r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n} \right) \left(P\{V_k^{(1)} > x u_n, V_k^{(2)} > y u_n, V_0^{(1)} > \tilde{x} u_n, V_0^{(2)} > \tilde{y} u_n\} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P\{V_0^{(1)} > xu_n, V_0^{(2)} > yu_n, V_k^{(1)} > \tilde{x}u_n, V_k^{(2)} > \tilde{y}u_n\}) \\
& + r_n P\{V_0^{(1)} > \max\{x, \tilde{x}\}u_n, V_0^{(2)} > \max\{y, \tilde{y}\}u_n\} \\
& - r_n^2 P\{V_0^{(1)} > xu_n, V_0^{(2)} > yu_n\} P\{V_0^{(1)} > \tilde{x}u_n, V_0^{(2)} > \tilde{y}u_n\}] \\
= & \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) \left(p_k^{(n)}(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) + p_k^{(n)}(\tilde{x}, \tilde{y}, x, y)\right) \\
& + p_0^{(n)}(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) - r_n v_n p_0^{(n)}(x, y, x, y) p_0^{(n)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}),
\end{aligned} \tag{6.18}$$

wobei

$$\begin{aligned}
& p_k^{(n)}(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) \\
& := P(V_k^{(1)} > xu_n, V_k^{(2)} > yu_n, V_0^{(1)} > \tilde{x}u_n, V_0^{(2)} > \tilde{y}u_n \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^*u_n)
\end{aligned}$$

für alle $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$ und $k \in \{0, \dots, r_n - 1\}$.

Wir untersuchen nun das asymptotische Verhalten von $p_k^{(n)}(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})$, um damit die Konvergenz der Kovarianzen in (6.18) zu bestimmen. Nach Lemma 5.2 besitzen topologische Ränder von Mengen des Typs $(x, \infty) \times (y, \infty)$ keine Masse bezüglich des Grenzmaßes ν_0 . Dasselbe gilt auch für topologische Ränder von Mengen des Typs $(x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)$ bezüglich der Grenzmaße ν_t , $t \in \mathbb{N}$. Nach der regulären Variation von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ auf $(0, \infty)^2$ und Voraussetzung (A4) gilt also

$$\begin{aligned}
& p_0^{(n)}(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu_0\left(\left(\frac{\max\{x, \tilde{x}\}}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{\max\{y, \tilde{y}\}}{x^*}, \infty\right)\right) \quad \text{und} \\
& p_k^{(n)}(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu_k\left(\left(\frac{\tilde{x}}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{\tilde{y}}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{x}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{y}{x^*}, \infty\right)\right).
\end{aligned}$$

Ferner liefert Voraussetzung (A2) die Beschränktheit

$$p_k^{(n)}(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) \leq P(\min\{V_k^{(1)}, V_k^{(2)}\} > x^*u_n \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^*u_n) \leq s_n(k),$$

so dass nach dem Lemma von Pratt (1960) die Konvergenz

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n v_n} \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{x,y}(V_{n,i}), \sum_{i=1}^{r_n} \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,i})\right) \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k\left(\left(\frac{x}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{y}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{\tilde{x}}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{\tilde{y}}{x^*}, \infty\right)\right)\right. \\
& \quad \left. + \nu_k\left(\left(\frac{\tilde{x}}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{\tilde{y}}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{x}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{y}{x^*}, \infty\right)\right)\right) \\
& \quad + \nu_0\left(\left(\frac{\max\{x, \tilde{x}\}}{x^*}, \infty\right) \times \left(\frac{\max\{y, \tilde{y}\}}{x^*}, \infty\right)\right).
\end{aligned}$$

gilt. Demzufolge ist Bedingung (C3) erfüllt, so dass nach Theorem 2.3 von Drees und Rootzén (2010) die endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(\tilde{Z}_{n,x^*}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ schwach gegen die endlich-dimensionalen Randverteilungen eines Gaußprozesses $(Z_{x^*}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ konvergieren.

Wegen der Homogenität der Grenzmaße ν_k , $k \in \mathbb{N}_0$, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(Z_{x^*}(\phi_{x,y}), Z_{x^*}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}})) \\ &= (x^*)^\alpha \left[\nu_0((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty)) + \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right. \\ & \quad \left. + \nu_k((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times (y, \infty))) \right]. \end{aligned}$$

Asymptotische Gleichstetigkeit

Nachweis von (D1) und (D2') [unter (A1) und (A2)]: Siehe Abschnitt zum Nachweis von (C1) und (C2).

Nachweis von (D3) [unter (A2)]: Aus der strikten Stationarität von $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ folgt

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} (\phi_{x,y}(V_{n,i}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,i})) \right)^2 \right] \\ &= 2r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n} \right) E[(\phi_{x,y}(V_{n,k}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,k}))(\phi_{x,y}(V_{n,0}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,0}))] \\ & \quad + r_n E[(\phi_{x,y}(V_{n,0}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,0}))]. \end{aligned}$$

Sei nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x < \tilde{x}$. Dann gilt im Fall $y < \tilde{y}$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} & \phi_{x,y}(V_{n,k}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,k}) \\ &= \mathbb{1}\{u_n^{-1}V_k^{(1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(2)} > y \text{ oder } u_n^{-1}V_k^{(1)} > \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(2)} \in (y, \tilde{y}]\} \end{aligned}$$

und im Fall $y \geq \tilde{y}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & |\phi_{x,y}(V_{n,k}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,k})| \\ & \leq \mathbb{1}\{u_n^{-1}V_k^{(1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(2)} > y \text{ oder } u_n^{-1}V_k^{(1)} > \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(2)} \in (\tilde{y}, y]\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich unterscheiden sich die obigen beiden Indikatorfunktionen nur um das Intervall, in denen $u_n^{-1}V_k^{(2)}$ liegt. Wir führen deshalb sämtliche Rechnungen nur für einen Fall durch.

Sei $y < \tilde{y}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & v_n^{-1} E[(\phi_{x,y}(V_{n,k}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,k}))(\phi_{x,y}(V_{n,0}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,0}))] \\ &= v_n^{-1} P(\{u_n^{-1}V_k^{(1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(2)} > y \text{ oder } u_n^{-1}V_k^{(1)} > \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(2)} \in (y, \tilde{y}]\} \\ & \quad \cap \{u_n^{-1}V_0^{(1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_0^{(2)} > y \text{ oder } u_n^{-1}V_0^{(1)} > \tilde{x}, u_n^{-1}V_0^{(2)} \in (y, \tilde{y}]\}) \\ & \leq v_n^{-1} \left(P\{u_n^{-1}V_k^{(1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(2)} > y, u_n^{-1}V_0^{(1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_0^{(2)} > y\} \right. \\ & \quad + P\{u_n^{-1}V_k^{(1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(2)} > y, u_n^{-1}V_0^{(1)} > \tilde{x}, u_n^{-1}V_0^{(2)} \in (y, \tilde{y}]\} \\ & \quad + P\{u_n^{-1}V_k^{(1)} > \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(2)} \in (y, \tilde{y}], u_n^{-1}V_0^{(1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_0^{(2)} > y\} \\ & \quad \left. + P\{u_n^{-1}V_k^{(1)} > \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(2)} \in (y, \tilde{y}], u_n^{-1}V_0^{(1)} > \tilde{x}, u_n^{-1}V_0^{(2)} \in (y, \tilde{y}]\} \right). \end{aligned}$$

Die rechte Seite der obigen Ungleichung ist einerseits von oben beschränkt durch $4s_n(k)$ (nach Voraussetzung (A2)) und andererseits durch

$$\begin{aligned} & 2\left(P(u_n^{-1}V_0^{(1)} \in (x, \tilde{x}] \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^*u_n)\right. \\ & \quad \left.+ P(u_n^{-1}V_0^{(2)} \in (y, \tilde{y}] \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^*u_n)\right). \end{aligned}$$

Sei nun $M \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$. Dann gilt wegen Theorem 5.5

$$\begin{aligned} & v_n^{-1} \sum_{k=0}^{M-1} E[(\phi_{x,y}(V_{n,k}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,k}))(\phi_{x,y}(V_{n,0}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,0}))] \\ & \leq 2M \left(P(u_n^{-1}V_0^{(1)} \in (x, \tilde{x}] \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^*u_n) \right. \\ & \quad \left. + P(u_n^{-1}V_0^{(2)} \in (y, \tilde{y}] \mid \min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > x^*u_n) \right) \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2M \left(\nu_0 \left(\left(\frac{x}{x^*}, \frac{\tilde{x}}{x^*} \right] \times (1, \infty) \right) + \nu_0 \left((1, \infty) \times \left(\frac{y}{x^*}, \frac{\tilde{y}}{x^*} \right] \right) \right) \\ & = 2M \rho(\phi_{x,y}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}) \\ & < 2M\delta \end{aligned} \tag{6.19}$$

für alle $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$, die $\rho(\phi_{x,y}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}) < \delta$ erfüllen. Ferner gilt nach Voraussetzung (A2)

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n^{-1} \sum_{k=M}^{r_n-1} E[(\phi_{x,y}(V_{n,k}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,k}))(\phi_{x,y}(V_{n,0}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,0}))] \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{k=M}^{r_n-1} s_n(k) \\ & \leq 4 \sum_{k=M}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(k) < \infty. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Die rechte Seite von (6.20) kann beliebig klein gewählt werden, indem man M hinreichend groß wählt. Mit hinreichend kleiner Wahl von $\delta > 0$ kann die rechte Seite von (6.19) dann ebenfalls beliebig klein gewählt werden, so dass

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{x,y,\tilde{x},\tilde{y} \in [x^*, \infty), \\ \rho(\phi_{x,y}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}) < \delta}} \frac{1}{r_n v_n} E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} (\phi_{x,y}(V_{n,i}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}(V_{n,i})) \right)^2 \right] = 0$$

gilt.

Nachweis von (D5): Definiere für $x, y \in [x^*, \infty)$ die Abbildungen $f_{x,y}^{(r_n)} : [0, \infty)^{2r_n} \rightarrow [0, \infty)$ mit $f_{x,y}^{(r_n)}(z) = \sum_{i=1}^{r_n} \phi_{x,y}(z_i)$, wobei $z = (z_1, \dots, z_{r_n})$. Sei dann $\mathcal{F}_{r_n} := \{f_{x,y}^{(r_n)} \mid (x, y) \in T\}$ die zugehörige Funktionenklasse und $\rho_{\mathcal{F}} : (\mathcal{F}_{r_n})^2 \rightarrow [0, \infty)$ mit $\rho_{\mathcal{F}}(f_{x,y}^{(r_n)}, f_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(r_n)}) = \rho(\phi_{x,y}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}})$ eine entsprechende Semimetrik.

Nun ist jede Funktion in $\rho_{\mathcal{F}}$ eindeutig durch ihre Parameter $x, y \in [x^*, \infty)$ festgelegt. Folglich konvergiert eine Folge von Funktionen in \mathcal{F}_{r_n} genau dann, wenn die entsprechenden Parameter konvergieren. Demnach ist $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}} := \{f_{x,y}^{(r_n)} \mid x, y \in [x^*, \infty) \cap \mathbb{Q}^2\}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von \mathcal{F}_{r_n} hinsichtlich der von $\rho_{\mathcal{F}}$ erzeugten Topologie, so dass \mathcal{F}_{r_n} separabel ist.

Unterdessen ist die Abbildung $L(f, g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L(f, g)(\omega) = \sum_{j=1}^{\lfloor m_n/2 \rfloor} e_j(f(T_{n,j}^*(\omega)) - g(T_{n,j}^*(\omega)))^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $(e_i)_{1 \leq i \leq \lfloor m_n/2 \rfloor} \in \{-1, 0, 1\}^{\lfloor m_n/2 \rfloor}$ und $k \in \{1, 2\}$ messbar, wobei $m_n := \lceil n/r_n \rceil$ und $T_{n,j}^*$ unabhängige Kopien von $T_{n,j} := (V_{n,i})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$ seien. Aus der Identität

$$\sup_{f, g \in \mathcal{F}_{r_n}, \rho_{\mathcal{F}}(f, g) < \delta} L(f, g) = \sup_{f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}, \rho_{\mathcal{F}}(f, g) < \delta} L(f, g)$$

folgt schließlich Bedingung (D5).

Nachweis von (D6) [unter (A3)]: Bedingung (D6) lässt sich auf analoge Weise wie im Beweis von Proposition 2.1 aus Kapitel 2 beweisen.

Definiere die Menge $[0, \infty)_{\cup} := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} [0, \infty)^{2l}$ mit σ -Algebra $\mathcal{A}_{\cup} = \sigma(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{B}([0, \infty)^{2l})$. Sei $\mathcal{F} = \{f_{x,y} \mid x, y \in [x^*, \infty)\}$ mit $f_{x,y} : [0, \infty)_{\cup} \rightarrow \mathbb{N}_0$,

$$f_{x,y}(z) = \sum_{i=1}^l \phi_{x,y}(z_i),$$

wobei $z = (z_1, \dots, z_l) \in [0, \infty)^{2l}$ mit $l \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{F}^{(r)} = \{f_{x,y}^{(r)} \mid x, y \in [x^*, \infty)\}$ mit $f_{x,y}^{(r)} : [0, \infty)^{2r} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $f_{x,y}^{(r)}(z) = f_{x,y}(z)$ für $z \in [0, \infty)^{2r}$. Sei des Weiteren

$$d_n(f, g) = \left(\frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} (f(T_{n,j}^*) - g(T_{n,j}^*))^2 \right)^{1/2}$$

eine zufällige Semimetrik auf \mathcal{F} (bzw. $\mathcal{F}^{(r_n)}$), wobei $m_n = \lfloor n/r_n \rfloor$ und $T_{n,j}^* := (V_{n,i}^*)_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$, $1 \leq j \leq m_n$, stochastisch unabhängige Kopien der Blöcke $T_{n,j} := (V_{n,i})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$, $1 \leq j \leq m_n$, beschreiben. Mit anderen Worten ist d_n die L_2 -Semimetrik auf \mathcal{F} hinsichtlich des diskreten Maßes

$$\bar{Q}_n := \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \varepsilon_{T_{n,j}^*},$$

wobei $\varepsilon_{T_{n,j}^*}$ das Dirac-Maß im Punkt $T_{n,j}^*$ beschreibt.

Bezeichne $B_{x,y} = \{(z_1, z_2) \in [0, \infty)^2 \mid z_1 > x, z_2 > y\}$ für $x, y \in [x^*, \infty)$, so dass die Darstellung $f_{x,y}^{(r)}(z) = \sum_{i=1}^r \mathbf{1}\{z_i \in B_{x,y}\}$ gilt. Die Menge

$$\begin{aligned} M_{x,y}^{(r)} &:= \{(\lambda, z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)^{2r} \mid \lambda < f_{x,y}^{(r)}(z)\} \\ &= \bigcup_{j=0}^r (\infty, j) \times \{z \in [0, \infty)^{2r} \mid f_{x,y}^{(r)}(z) = j\} \end{aligned}$$

beschreibt den Subgraphen von $f_{x,y}^{(r)}$. Sei nun $A = \{(\lambda^{(l)}, a_1^{(l)}, \dots, a_r^{(l)}) \mid 1 \leq l \leq m\} \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)^{2r}$ eine beliebige m -elementige Menge. Wenn $a_i^{(l)} \notin B_{x,y} \Delta B_{\tilde{x},\tilde{y}}$ für alle $1 \leq i \leq r, 1 \leq l \leq m$ vorliegt, ergibt sich die Gleichheit $f_{x,y}^{(r)}(a_1^{(l)}, \dots, a_r^{(l)}) = f_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(r)}(a_1^{(l)}, \dots, a_r^{(l)})$ für alle $l \in \{1, \dots, m\}$. In diesem Fall gilt also $M_{x,y}^{(r)} \cap A = M_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(r)} \cap A$.

Die Indexmenge $[x^*, \infty)^2$ wird durch die Geraden

$$\{(a_{i,1}^{(l)}, y) \mid y \in [x^*, \infty)\} \quad \text{und} \quad \{(x, a_{i,2}^{(l)}) \mid x \in [x^*, \infty)\},$$

$1 \leq i \leq r, 1 \leq l \leq m$, in höchstens $(mr + 1)^2$ Rechteckmengen zerlegt. Ferner gilt für die symmetrische Differenz

$$\begin{aligned} & B_{x,y} \Delta B_{\tilde{x},\tilde{y}} \\ &= (B_{x,y} \cap B_{\tilde{x},\tilde{y}}^c) \cup (B_{\tilde{x},\tilde{y}} \cap B_{x,y}^c) \\ &= (\{z \in [0, \infty)^2 \mid z_1 > x, z_2 > y\} \cap \{z \in [0, \infty)^2 \mid z_1 \leq \tilde{x}, z_2 \geq 0 \text{ oder } z_1 \geq 0, z_2 \leq \tilde{y}\}) \\ &\quad \cup (\{z \in [0, \infty)^2 \mid z_1 > \tilde{x}, z_2 > \tilde{y}\} \cap \{z \in [0, \infty)^2 \mid z_1 \leq x, z_2 \geq 0 \text{ oder } z_1 \geq 0, z_2 \leq y\}) \\ &= \{z \in [0, \infty)^2 \mid z_1 \in (x, \tilde{x}], z_2 > y \text{ oder } z_1 > x, z_2 \in (y, \tilde{y}] \\ &\quad \text{oder } z_1 \in (\tilde{x}, x], z_2 > \tilde{y} \text{ oder } z_1 > \tilde{x}, z_2 \in (\tilde{y}, y]\}. \end{aligned}$$

Wenn also $a_{i,1}^{(l)} \notin (x, \tilde{x}] \cup (\tilde{x}, x]$ und $a_{i,2}^{(l)} \notin (y, \tilde{y}] \cup (\tilde{y}, y]$ gilt, dann ist $a_i^{(l)} \notin B_{x,y} \Delta B_{\tilde{x},\tilde{y}}$. Damit enthält $B_{x,y} \Delta B_{\tilde{x},\tilde{y}}$ keinen der Punkte $a_i^{(l)}$, $1 \leq i \leq r, 1 \leq l \leq m$, wenn (x, y) und (\tilde{x}, \tilde{y}) in derselben Rechteckmenge liegen. Das bedeutet, dass in jeder Rechteckmenge die Identität $M_{x,y}^{(r)} \cap A = M_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(r)} \cap A$ gilt. Die Menge A wird also nicht zerschlagen, wenn $(mr + 1)^2 < 2^m$ gilt. Aus dem Beweis von Proposition 2.1 folgt, dass der VC-Index dann höchstens $4 \log r$ ist. Nach Theorem A.1 gilt dann

$$N\left(\varepsilon \left(\int_{[0, \infty)^{2r}} (f_{x^*, x^*}^{(r)})^2 dQ \right)^{1/2}, \mathcal{F}, L_2(Q)\right) \leq K_1 r^{16} \varepsilon^{-K_2 \log r}$$

für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ und alle Wahrscheinlichkeitsmaße Q auf $([0, \infty)^{2r}, \mathbb{B}([0, \infty)^{2r}))$, die die Ungleichung $\int_{[0, \infty)^{2r}} (f_{x^*, x^*}^{(r)})^2 dQ > 0$ erfüllen, wobei $K_1, K_2 > 0$ geeignete Konstanten bezeichnen.

Definiere $N_r := \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \leq r\}$ und

$$Q_{n,r} := \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \leq r\} \varepsilon_{\tilde{T}_{n,j}^*},$$

wobei $\tilde{T}_{n,i}^*$ ein Zufallsvektor der Länge r ist, der alle von 0 verschiedene Einträge von $T_{n,i}^*$ umfasst, und sonst mit 0 gefüllt ist. Der Form halber wird im Fall, dass $T_{n,j}^*$ mehr als r von 0 verschiedene Einträge enthält, auf die ersten r von 0 verschiedenen Einträge reduziert. Es gilt

$$\begin{aligned} P\{N_r = 0\} &= P\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > r \text{ für alle } j \in \{1, \dots, r_n\}\} \\ &\leq P\{\mathbb{1}\{\min\{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}\} > x^* u_n\} > r/r_n \text{ für mind. ein } i \in \{1, \dots, r\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{r_n} P\{\mathbb{1}\{\min\{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}\} > x^* u_n\} > r/r_n\} \\
&\leq r_n v_n \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Die Distanz zwischen $g, h \in \mathcal{F}$ hinsichtlich d_n kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
d_n^2(g, h) &= \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} (g(T_{n,j}^*) - h(T_{n,j}^*))^2 \\
&\leq \frac{N_r}{nv_n} \int_{[0, \infty)^{2r}} (g - h)^2 dQ_{n,r} + \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*)\right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > r\}
\end{aligned}$$

für alle $r_n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$R_{n,\varepsilon} := \min \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*)\right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > r\} < \frac{\varepsilon^2}{2} \right\}$$

für $\varepsilon \in (0, 1)$. Dann gilt

$$d_n^2(g, h) \leq \frac{N_{R_{n,\varepsilon}}}{nv_n} \int_{[0, \infty)^{2R_{n,\varepsilon}}} (g - h)^2 dQ_{n,R_{n,\varepsilon}} + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Gilt nun

$$\int_{[0, \infty)^{2R_{n,\varepsilon}}} (g - h)^2 dQ_{n,R_{n,\varepsilon}} \leq \frac{nv_n}{2N_{R_{n,\varepsilon}}} \varepsilon^2 =: \xi_n^2,$$

so folgt

$$d_n^2(g, h) \leq \varepsilon^2.$$

Damit gilt

$$N(\varepsilon_0, \mathcal{F}, d_n) \leq N(\xi_n, \mathcal{F}, L_2(Q_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}})).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[0, \infty)^{2R_{n,\varepsilon}}} \left(f_{x^*, x^*}^{(R_{n,\varepsilon})}\right)^2 dQ_{n,R_{n,\varepsilon}} &= \frac{1}{N_{R_{n,\varepsilon}}} \sum_{j=1}^{m_n} \left(f_{x^*, x^*}^{(R_{n,\varepsilon})}(\tilde{T}_{n,j}^*)\right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \leq R_{n,\varepsilon}\} \\
&\leq \frac{R_{n,\varepsilon}^2}{N_{R_{n,\varepsilon}}} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > 0\}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
& N(\xi_n, \mathcal{F}, L_2(Q_{n, R_{n, \varepsilon}})) \\
& \leq K_1 R_{n, \varepsilon}^{16} \left(\xi_n \left(\int_{[0, \infty)^{2R_{n, \varepsilon}}} \left(f_{x^*, x^*}^{(R_{n, \varepsilon})} \right)^2 dQ_{n, R_{n, \varepsilon}} \right)^{-1/2} \right)^{-K_2 \log(R_{n, \varepsilon})} \\
& \leq K_1 R_{n, \varepsilon}^{16} \left(\frac{nv_n \varepsilon^2}{2R_{n, \varepsilon}^2 \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n, j}^*) > 0\}} \right)^{-\frac{1}{2} K_2 \log(R_{n, \varepsilon})} \\
& \leq K_1 R_{n, \varepsilon}^{16} \left(\frac{\varepsilon}{2R_{n, \varepsilon}} \left(\frac{1}{2nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{T_{n, j}^* \neq 0\} \right)^{-1/2} \right)^{-K_2 \log(R_{n, \varepsilon})}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
P \left\{ \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{T_{n, j}^* \neq 0\} \geq 2nv_n \right\} & \leq P \left\{ \sum_{j=1}^{m_n} (\mathbb{1}\{T_{n, j}^* \neq 0\} - P\{T_{n, j}^* \neq 0\}) \geq 2nv_n - m_n r_n v_n \right\} \\
& \leq \frac{m_n \text{Var}(\mathbb{1}\{T_{n, 1}^* \neq 0\})}{(nv_n)^2} \\
& \leq \frac{m_n P\{T_{n, 1}^* \neq 0\}}{(nv_n)^2} \\
& \leq \frac{m_n r_n}{n^2 v_n} \\
& \leq \frac{1}{nv_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

da $P\{T_{n, 1}^* \neq 0\} \leq r_n v_n$ gilt. Damit gilt

$$N(\varepsilon, \mathcal{F}, d_n) \leq K_1 R_{n, \varepsilon}^{16} \left(\frac{\varepsilon}{2R_{n, \varepsilon}} \right)^{-K_2 \log(R_{n, \varepsilon})}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit, die gegen 1 konvergiert.

Analog zu den Rechnung in (2.52) lässt sich nun zeigen, dass die Zufallsvariable $R_{n, \varepsilon}$ nicht zu schnell anwächst, wenn ε gegen 0 strebt. Nach Bedingung (A3) können zu jedem $\eta > 0$ Konstanten $M, \tau > 0$ gewählt werden, so dass

$$\begin{aligned}
& P \left\{ \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n, j}^*) \right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n, j}^*) > M\varepsilon^{-(2+\tau)/\delta}\} > \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ für ein } 0 < \varepsilon \leq 1 \right\} \\
& = P \left\{ \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n, j}^*) \right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n, j}^*) > M2^{l(2+\tau)/\delta}\} > \frac{2^{-2(l+1)}}{2} \text{ für ein } l \in \mathbb{N}_0 \right\} \\
& \leq \sum_{l=0}^{\infty} P \left\{ \frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n, j}^*) \right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n, j}^*) > M2^{l(2+\tau)/\delta}\} > \frac{2^{-2(l+1)}}{2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{2l+3} E \left[\frac{1}{nv_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbf{1} \left\{ f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,j}^*) > M2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} \right] \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+3}}{nv_n} m_n \left(E \left[\left(f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,1}^*) \right)^{2(1+\delta/2)} \right] \right)^{2/(2+\delta)} \left(P \left\{ f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,1}^*) > M2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} \right)^{\delta/(2+\delta)} \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+3}}{nv_n} m_n E \left[\left(f_{x^*, x^*}^{(r_n)}(T_{n,1}^*) \right)^{2+\delta} \right] \left(M2^{l(2+\tau)/\delta} \right)^{-\delta} \\
&\leq K_3 M^{-\delta} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\tau} \\
&< \eta
\end{aligned}$$

gilt, wobei für die Ungleichungskette sowohl die Hölder'sche Ungleichung als auch die allgemeine Markov-Ungleichung angewandt wurden, und $K_3 > 0$ eine geeignete Konstante ist. Es folgt, dass $R_{n,\varepsilon} \leq M\varepsilon^{-(2+\tau)/\delta}$ für alle $\varepsilon \in (0, 1]$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \eta$ erfüllt ist.

Demnach gilt für hinreichend kleines $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
\log N(\varepsilon, \mathcal{F}, d_n) &\leq \log \left(K_1 R_{n,\varepsilon}^{16} \left(\frac{\varepsilon}{2R_{n,\varepsilon}} \right)^{-K_2 \log(R_{n,\varepsilon})} \right) \\
&\leq \log \left(K_1 \left(M\varepsilon^{-(2+\tau)/\delta} \right)^{16} \left(\frac{\varepsilon}{2} M\varepsilon^{(2+\tau)/\delta} \right)^{-K_2 \log(M\varepsilon^{-(2+\tau)/\delta})} \right) \\
&\leq \log \left(K_3 \varepsilon^{K_4 \log \varepsilon} \right) \\
&\leq K_5 \log^2(\varepsilon)
\end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \eta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$, wobei $K_3, K_4, K_5 > 0$ geeignete Konstanten sind. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^\xi (\log N(\varepsilon_0, \mathcal{F}, d_n))^{1/2} d\varepsilon_0 &\leq K_5^{1/2} \int_0^\xi |\log(\varepsilon_0)| d\varepsilon_0 \\
&= K_5^{1/2} \left[\varepsilon_0 (\log(\varepsilon_0) - 1) \right]_0^\xi \\
&\xrightarrow{\xi \downarrow 0} 0
\end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \eta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Demzufolge ergibt sich für $\eta \rightarrow 0$

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P^* \left\{ \int_0^\xi (\log(N(\varepsilon, \mathcal{F}, d_n)))^{1/2} d\varepsilon > \tau \right\} = 0$$

für alle $\tau > 0$, so dass Bedingung (D6) gilt. □

6.3.2. Beweis von Theorem 6.2

Bezeichne

$$\begin{aligned} p_n(x, y) &:= P\{V_0^{(1)} > xu_n, V_0^{(2)} > yu_n\}, \\ V(x, y) &:= Z(\phi_{x,y}) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))Z(\phi_{1,1}) \end{aligned}$$

und $\alpha > 0$ der Grad der Homogenität von ν_0 . Mit Hilfe von Gleichung (6.6) und Proposition 6.1 gilt dann die Entwicklung

$$\begin{aligned} &(nv_{n,1})^{1/2}(\hat{\nu}_n((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))) \\ &= (nv_{n,1})^{1/2} \left(\frac{(nv_{n,1})^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) + np_n(x, y)}{nv_{n,1} + (nv_{n,1})^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,1})} - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \right) \\ &= (nv_{n,1})^{1/2} \frac{(nv_{n,1})^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) + np_n(x, y) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))[nv_{n,1} + (nv_{n,1})^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,1})]}{nv_{n,1} + (nv_{n,1})^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,1})} \\ &= nv_{n,1} \frac{\tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))\tilde{Z}_n(\phi_{1,1}) + (nv_{n,1})^{1/2} \left(\frac{p_n(x, y)}{v_{n,1}} - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \right)}{nv_{n,1} + (nv_{n,1})^{1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,1})} \\ &= \frac{\tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))\tilde{Z}_n(\phi_{1,1}) + (nv_{n,1})^{1/2} \left(\frac{p_n(x, y)}{v_{n,1}} - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \right)}{1 + (nv_{n,1})^{-1/2} \tilde{Z}_n(\phi_{1,1})} \\ &= V_n(x, y) + o_P(1), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} V_n(x, y) &:= \tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))\tilde{Z}_n(\phi_{1,1}) \\ &\quad + (nv_{n,1})^{1/2} \left(\frac{p_n(x, y)}{v_{n,1}} - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \right). \end{aligned}$$

Nun gilt wegen $\sup_{x,y \in [x^*, \infty)} \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) = (x^*)^{-\alpha}$ und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} &\sup_{x,y \in [x^*, \infty)} |V_n(x, y) - V(x, y)| \\ &\leq \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} \left| \tilde{Z}_n(\phi_{x,y}) - Z(\phi_{x,y}) \right| + (x^*)^{-\alpha} \left| \tilde{Z}_n(\phi_{1,1}) - Z(\phi_{1,1}) \right| \\ &\quad + \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} \left| (nv_{n,1})^{1/2} \left(\frac{p_n(x, y)}{v_{n,1}} - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \right) \right|. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4) existieren Versionen von $(\tilde{Z}_n(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$, $n \in \mathbb{N}$, und $(Z(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$, so dass $(\tilde{Z}_n(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ fast sicher gilt. Demzufolge konvergieren die ersten beiden Summanden der rechten Seite von (6.21) für diese Skorokhod-Versionen fast sicher gegen 0. In Verbindung mit der Bias-Bedingung (6.9) folgt also, dass die rechte Seite von (6.21)

asymptotisch vernachlässigbar ist. Insgesamt ergibt sich demnach die schwache Konvergenz

$$(nv_{n,1})^{1/2}(\hat{\nu}_n((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)))_{x,y \in [x^*, \infty)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (V(x, y))_{x,y \in [x^*, \infty)}.$$

Kovarianzstruktur

Die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses $(V(x, y))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ kann dann anhand der Gleichung (6.8) bestimmt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} & Cov(V(x, y), V(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ &= Cov(Z(\phi_{x,y}), Z(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}})) - \nu_0((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty))Cov(Z(\phi_{x,y}), Z(\phi_{1,1})) \\ &\quad - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))Cov(Z(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}), Z(\phi_{1,1})) \\ &\quad + \nu_0((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty))\nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))Var(Z(\phi_{1,1})) \\ &= \nu_0((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty)) \tag{6.22} \\ &\quad + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\nu_t((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) + \nu_t((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times (y, \infty)) \right) \\ &\quad - \nu_0((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \left[\nu_0((\max\{x, 1\}, \infty) \times (\max\{y, 1\}, \infty)) \right. \\ &\quad \quad \left. + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\nu_t((x, \infty) \times (y, \infty) \times (1, \infty)^2) + \nu_t((1, \infty)^2 \times (x, \infty) \times (y, \infty)) \right) \right] \\ &\quad - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \left[\nu_0((\max\{\tilde{x}, 1\}, \infty) \times (\max\{\tilde{y}, 1\}, \infty)) \right. \\ &\quad \quad \left. + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\nu_t((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (1, \infty)^2) + \nu_t((1, \infty)^2 \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right) \right] \\ &\quad + \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty))\nu_0((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \nu_t((1, \infty)^4) \right). \end{aligned}$$

□

6.3.3. Beweis von Theorem 6.4

Wir halten zunächst fest, dass die Volatilitäten σ_t , $t \in \mathbb{N}_0$, sich als sogenannte (unendlichdimensionale) Potenzprodukte schreiben lassen:

$$\sigma_t = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \eta_{t-i}\right) = \prod_{i=0}^{\infty} \exp(\eta_{t-i})^{\pi_i} = \prod_{i=0}^{\infty} \exp(\eta_{-i})^{\pi_i - t},$$

wobei im letzten Schritt $\pi_j := 0$ für $j < 0$ angewandt wurde. Die zugehörige Basis $\exp(\eta_{-i})$ ist dann wegen Definition 6.3 regulär variierend mit Index -1 :

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{\exp(\eta_0) > \lambda u\}}{P\{\exp(\eta_0) > u\}} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{\eta_0 > \log(\lambda u)\}}{P\{\eta_0 > \log(u)\}} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log^\beta(\lambda u) \exp(-\log(\lambda u))}{\log^\beta(u) \exp(-\log(u))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \left(1 + \frac{\log(\lambda)}{\log(u)} \right)^\beta \\
&= \lambda^{-1}
\end{aligned}$$

für alle $\lambda > 0$. Wir werden im Folgenden Resultate aus Janßen und Drees (2018; 2016) verwenden. Dabei ist zu beachten, dass jene Resultate aus Janßen und Drees (2018) für Potenzprodukten mit endlich vielen Faktoren formuliert sind. Jedoch weisen die Autoren darauf hin, dass sich mit ähnlicher Diskussion wie in Teil 2 des Beweises von Theorem 4.2 in Janssen und Drees (2016) diese auch auf Potenzprodukten mit unendlich vielen Faktoren erweitern lassen.

Der nachfolgende Beweis betrachtet den Fall $i_1 \neq i_2$. Der Nachweis im Fall $i_1 = i_2$ ergibt sich mit analoger Argumentation.

Nachweis von $\nu_t^{(h)} = 0$ unter der 1. Bedingung: Nach Bemerkung 3.2 von Janßen und Drees (2018) folgt aus der regulären Variation von $\exp(\eta_0)$ mit Index -1 stets $E[\exp(\eta_0)^{1-\delta}] < \infty$ für alle $\delta \in (0, 1)$. Des Weiteren gilt $P\{\exp(\eta_0) > c\} = 1$ für ein $c > 0$, da η_0 fast sicher nach unten beschränkt ist. Aus Theorem 3.1(b) von Janßen und Drees (2018) folgt dann für alle $\tilde{\varepsilon} > 0$

$$P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h}\} > u\} = o(u^{\tilde{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i}), \quad u \rightarrow \infty,$$

wobei $(\tilde{\kappa}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine optimale Lösung des Optimierungsproblems in (6.11) bezeichnet. Ferner folgt aus der Jensenungleichung und der Annahme $E[(\varepsilon_0^+)^{\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i + \tilde{\delta}}] < \infty$

$$E\left[(\varepsilon_0^+)^{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\kappa}_i - \tilde{\varepsilon}}\right] \leq \left(E\left[(\varepsilon_0^+)^{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\kappa}_i + \tilde{\delta}}\right]\right)^{1/(1 + \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon}}{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\kappa}_i - \tilde{\varepsilon}})} < \infty$$

für hinreichend kleine $\tilde{\varepsilon} > 0$. Für hinreichend großes $K_1 > 0$ ergibt sich also

$$\begin{aligned}
P\{\min\{X_0, X_h, X_t, X_{t+h}\} > u\} &\leq P\{\max\{\varepsilon_0^+, \varepsilon_h^+, \varepsilon_t^+, \varepsilon_{t+h}^+\} \min\{\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h}\} > u\} \\
&\leq 4P\{\varepsilon_0^+ \min\{\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h}\} > u\} \\
&\leq 4K_1 \int_{[0, \infty)} \left(\frac{u}{x}\right)^{\tilde{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i} \mathcal{L}(\varepsilon_0)(dx) \\
&= 4K_1 u^{\tilde{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i} E\left[(\varepsilon_0^+)^{\sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i - \tilde{\varepsilon}}\right] \\
&= O(u^{\tilde{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i}).
\end{aligned}$$

Nun stimmen die ersten beiden Nebenbedingungen aus (6.11) mit den Nebenbedingungen in (O) überein, so dass $(\tilde{\kappa}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine zulässige Lösung des linearen Optimierungsproblems in (O) ist. Derweil ist die eindeutige Lösung $(\kappa_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ des linearen Optimierungsproblems in (O) mit $\kappa_{i_1}, \kappa_{i_2} > 0$ und $\kappa_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{i_1, i_2\}$ keine Lösung von (6.11), da

$$\sum_{i=t}^{\infty} \pi_{i-t} \kappa_i < 1 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=t+h}^{\infty} \pi_{i-(t+h)} \kappa_i < 1$$

gilt. Somit stimmen $(\tilde{\kappa}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(\kappa_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ nicht überein. Aufgrund der Eindeutigkeit von $(\kappa_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$

als optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems in (O) folgt also

$$\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} < \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i.$$

Nach Theorem 5.1 von Janssen und Drees (2016) ist das Zufallspaar (X_0, X_h) regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit Index $-(\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2})$, so dass für alle $\varepsilon > 0$

$$u^{-(\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2}) - \varepsilon} = o(P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}), \quad u \rightarrow \infty,$$

gilt. Wird nun $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$ derart klein gewählt, dass

$$\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} + \varepsilon - \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i + \tilde{\varepsilon} < 0$$

gilt, ergibt sich

$$\frac{P\{\min\{X_0, X_h, X_t, X_{t+h}\} > u\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} = o\left(\frac{u^{-\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_i + \tilde{\varepsilon}}}{u^{-(\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2}) - \varepsilon}}\right) = o(1), \quad u \rightarrow \infty.$$

Das liefert also $\nu_t^{(h)}((1, \infty)^4) = 0$.

Nachweis von $\nu_t = 0$ unter der 2. Bedingung sowie Gleichung (6.13): Definiere zunächst $\tilde{A} = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2,3,4\}} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit

$$a_{i1} := \pi_{j_i}, \quad a_{i2} := \pi_{j_i - h}, \quad a_{i3} := \pi_{j_i - t} \quad \text{und} \quad a_{i4} := \pi_{j_i - (t+h)}.$$

Die Matrix \tilde{A} ist nach Theorem 3.3 von Janßen und Drees (2018) invertierbar. Die zugehörige Inverse wird mit \tilde{A}^{-1} bezeichnet. Definiere des Weiteren $\tau(1) := 0$, $\tau(2) := h$, $\tau(3) := t$ und $\tau(4) := t + h$. Nach Bemerkung 3.5(a) von Janßen und Drees (2018) impliziert die reguläre Variation von $\exp(\eta_0)$ mit Index -1 zusammen mit der Tatsache, dass $\exp(\eta_0)$ fast sicher von 0 weg beschränkt ist, stets: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{j_1, \dots, j_4\}$

$$E\left[\exp(\eta_0)^{\sum_{i,j=1}^4 \tilde{A}_{ji}^{-1} \pi_{k-\tau(i)} + \varepsilon}\right] < \infty \quad \text{und} \quad E\left[\exp(\eta_0)^{\sum_{i,j=1}^4 \tilde{A}_{ji}^{-1} \pi_{k-\tau(i)} - \varepsilon}\right] < \infty$$

gilt. Nach Theorem 3.3 von Janßen und Drees (2018) gilt damit

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{u^{-1}(\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h}) \in (x, \infty)\}}{\prod_{i=1}^4 P\{\exp(\eta_0) > u^{\tilde{\kappa}_{j_i}}\}} \\ &= |\det \tilde{A}|^{-1} \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^{-\sum_{j=1}^4 \tilde{A}_{ji}^{-1}}}{\prod_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \tilde{A}_{ji}^{-1}} \prod_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{j_1, \dots, j_4\}} E\left[\exp(\eta_0)^{\sum_{i,j=1}^4 \tilde{A}_{ji}^{-1} \pi_{k-\tau(i)}}\right] \\ &=: \nu_t^{(h, \sigma)}((x, \infty)) \end{aligned} \tag{6.23}$$

für alle $x \in (0, \infty)^4$, wobei $\det \tilde{A}$ die Determinante von \tilde{A} bezeichnet. Aus obiger Konvergenz (6.23) ergibt sich also, dass der Zufallsvektor $(\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h})$ regulär variierend auf $(0, \infty)^4$ mit Index $-\sum_{i,j=1}^4 \tilde{A}_{ji}^{-1} = -\sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}$ ist.

Ferner ergibt sich nach Theorem 4.2 von Janssen und Drees (2016) wegen Annahme (O)

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{u^{-1}(\sigma_0, \sigma_h) \in (x, \infty)\}}{P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_1}}\}P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_2}}\}} \\
&= |\det A|^{-1} \frac{x_1^{-(A_{11}^{-1}+A_{21}^{-1})} x_2^{-(A_{12}^{-1}+A_{22}^{-1})}}{(A_{11}^{-1}+A_{21}^{-1})(A_{12}^{-1}+A_{22}^{-1})} \prod_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{i_1, i_2\}} E \left[\exp(\eta_0)^{\sum_{i,j=1}^2 A_{ji}^{-1} \pi_{k-\tau(i)}} \right] \\
&=: \nu_0^{(h, \sigma)}((x, \infty))
\end{aligned} \tag{6.24}$$

für alle $x \in (0, \infty)^2$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} \pi_{i_1} & \pi_{i_1-h} \\ \pi_{i_2} & \pi_{i_2-h} \end{pmatrix}.$$

Demzufolge ist (σ_0, σ_h) regulär variierend auf $(0, \infty)^2$.

Wegen $E[(\varepsilon_0^+)^{\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} + \delta}] < \infty$ und $E[(\varepsilon_0^+)^{\sum_{j=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i} + \delta}] < \infty$ für jeweils ein $\delta > 0$ und $\tilde{\delta} > 0$ gilt nach dem Breiman-Resultat von Janssen und Drees (2016, Theorem 2.3)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{(X_0, X_h) \in uB_2\}}{P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h\} > u\}} = E \left[\nu_0^{(h, \sigma)}(\text{diag}(\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_h^{-1})B_2) \right] < \infty \quad \text{und} \tag{6.25}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{(X_0, X_h, X_t, X_{t+h}) \in uB_4\}}{P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h}\} > u\}} = E \left[\nu_t^{(h, \sigma)}(\text{diag}(\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_h^{-1}, \varepsilon_t^{-1}, \varepsilon_{t+h}^{-1})B_4) \right] < \infty \tag{6.26}$$

für alle $B_2 \in \mathbb{B}((0, \infty)^2)$ und alle $B_4 \in \mathbb{B}((0, \infty)^4)$, die $B_2 \subset (\varepsilon, \infty)^2$ und $B_4 \subset (\varepsilon, \infty)^4$ für ein $\varepsilon > 0$ sowie $E[\nu_0^{(\sigma)}(\partial \text{diag}(\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_h^{-1})B_2)] = 0$ und $E[\nu_0^{(\sigma)}(\partial \text{diag}(\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_h^{-1}, \varepsilon_t^{-1}, \varepsilon_{t+h}^{-1})B_4)] = 0$ erfüllen, wobei $\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ die entsprechende Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen b_1, \dots, b_n bezeichnet. Ferner folgt aus der Definition 6.3

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^4 P\{\exp(\eta_0) > u^{\tilde{\kappa}_{j_i}}\}}{P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_1}}\}P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_2}}\}} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^4 P\{\eta_0 > \tilde{\kappa}_{j_i} \log(u)\}}{P\{\eta_0 > \kappa_{i_1} \log(u)\}P\{\eta_0 > \kappa_{i_2} \log(u)\}} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^4 (K(\tilde{\kappa}_{j_i} \log(u))^\beta \exp(-\tilde{\kappa}_{j_i} \log(u)))}{(K(\kappa_{i_1} \log(u))^\beta \exp(-\kappa_{i_1} \log(u))) (K(\kappa_{i_2} \log(u))^\beta \exp(-\kappa_{i_2} \log(u)))} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} K^2 \left(\frac{\prod_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}}{\kappa_{i_1} \kappa_{i_2}} \right)^\beta \frac{\log^{4\beta}(u) u^{-\sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}}}{\log^{2\beta}(u) u^{-(\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2})}} \\
&= K^2 \left(\frac{\prod_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}}{\kappa_{i_1} \kappa_{i_2}} \right)^\beta \lim_{u \rightarrow \infty} \log^{2\beta}(u) u^{\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} - \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{wenn } \beta \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \text{ oder } \kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} < \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}, \\ K^2, & \text{wenn } \beta = 0 \text{ und } \kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}, \\ \infty, & \text{wenn } \beta > 0 \text{ und } \kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Da jedoch nach (6.23) und (6.24) eine Konstante $K_2 > 0$ existiert, so dass

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} K_2 \frac{\prod_{i=1}^4 P\{\exp(\eta_0) > u^{\tilde{\kappa}_{j_i}}\}}{P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_1}}\} P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_2}}\}} = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h}\} > u\}}{P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h\} > u\}} \leq 1$$

gilt, kann $\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}$ nicht eintreten, wenn $\beta > 0$ ist.

Mit der Erweiterung

$$\begin{aligned} & \frac{P\{u^{-1}(X_0, X_h, X_t, X_{t+h}) \in (x, \infty)\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} \\ &= \frac{P\{u^{-1}(X_0, X_h, X_t, X_{t+h}) \in (x, \infty)\} P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h}\} > u\}}{P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h, \sigma_t, \sigma_{t+h}\} > u\} \prod_{i=1}^4 P\{\exp(\eta_0) > u^{\tilde{\kappa}_{j_i}}\}} \\ & \times \frac{\prod_{i=1}^4 P\{\exp(\eta_0) > u^{\tilde{\kappa}_{j_i}}\}}{P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_1}}\} P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_2}}\}} \frac{P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_1}}\} P\{\exp(\eta_0) > u^{\kappa_{i_2}}\}}{P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h\} > u\}} \\ & \times \frac{P\{\min\{\sigma_0, \sigma_h\} > u\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} \end{aligned}$$

und den Gleichungen (6.23)–(6.26) folgt also für alle $x \in (0, \infty)^4$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{u^{-1}(X_0, X_h, X_t, X_{t+h}) \in (x, \infty)\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} = 0,$$

wenn $\beta \neq 0$ oder $\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} < \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}$ gilt, und

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{u^{-1}(X_0, X_h, X_t, X_{t+h}) \in (x, \infty)\}}{P\{\min\{X_0, X_h\} > u\}} \\ &= K^2 \frac{\nu_t^{(h, \sigma)}((1, \infty)^4) E\left[\nu_t^{(h, \sigma)}((\varepsilon_0^{-1}x_1, \infty) \times (\varepsilon_h^{-1}x_2, \infty) \times (\varepsilon_t^{-1}x_3, \infty) \times (\varepsilon_{t+h}^{-1}x_4, \infty))\right]}{\nu_0^{(h, \sigma)}((1, \infty)^2) E\left[\nu_0^{(h, \sigma)}((\varepsilon_0^{-1}x_1, \infty) \times (\varepsilon_h^{-1}x_2, \infty))\right]}, \end{aligned}$$

wenn $\beta = 0$ und $\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}$. Daraus ergibt sich $\nu_t^{(h)} = 0$, wenn $\beta \neq 0$ oder $\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} < \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}$ gilt, und

$$\nu_t^{(h)}((x, \infty)) = D \frac{E\left[\nu_t^{(h, \sigma)}((\varepsilon_0^{-1}x_1, \infty) \times (\varepsilon_h^{-1}x_2, \infty) \times (\varepsilon_t^{-1}x_3, \infty) \times (\varepsilon_{t+h}^{-1}x_4, \infty))\right]}{E\left[\nu_0^{(h, \sigma)}((\varepsilon_0^{-1}x_1, \infty) \times (\varepsilon_h^{-1}x_2, \infty))\right]}$$

mit

$$\begin{aligned} D &:= K^2 \frac{\nu_t^{(h, \sigma)}((1, \infty)^4)}{\nu_0^{(h, \sigma)}((1, \infty)^2)} \\ &= \frac{|\det A| (A_{11}^{-1} + A_{21}^{-1})(A_{12}^{-1} + A_{22}^{-1}) \prod_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{j_1, j_2, j_3, j_4\}} E\left[\exp(\eta_0)^{\sum_{i,j=1}^4 \tilde{A}_{ji}^{-1} \pi_{k-\tau(i)}}\right]}{|\det \tilde{A}| \prod_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \tilde{A}_{ji}^{-1} \prod_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{i_1, i_2\}} E\left[\exp(\eta_0)^{\sum_{i,j=1}^2 A_{ji}^{-1} \pi_{k-\tau(i)}}\right]}, \quad (6.27) \end{aligned}$$

wenn $\beta = 0$ und $\kappa_{i_1} + \kappa_{i_2} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\kappa}_{j_i}$. □

Kapitel 7.

Schätzer für $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$

Das Grenzmaß ν_0 erfasst neben der extremalen Abhängigkeitsstruktur auch das stochastische Verhalten der eindimensionalen Randverteilungen von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ in den Extrembereichen. Tatsächlich kann das extremale Abhängigkeitsverhalten von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ auch losgelöst vom Tailverhalten untersucht werden. Hierfür standardisiert beziehungsweise transformiert man die zugrunde liegende Zeitreihe $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ mit Hilfe ihrer Marginalverteilungen:

$$(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)}) = \left(\frac{1}{1 - F_1(V_t^{(1)})}, \frac{1}{1 - F_2(V_t^{(2)})} \right), \quad (7.1)$$

wobei F_1 und F_2 die Verteilungsfunktionen von $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ bezeichnen. Die marginaltransformierten Zufallsvariablen $V_t^{(*,1)}$ und $V_t^{(*,2)}$ sind dann Standard-Pareto-verteilt, wenn F_1 und F_2 stetig sind. In diesem Fall ist dann die Abhängigkeitsstruktur von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ um die obige Marginaltransformation (7.1) verändert, das bedeutet

$$P\{V_0^{(1)} > x, V_0^{(2)} > y\} = P\left\{V_0^{(*,1)} > \frac{1}{1 - F_1(x)}, V_0^{(*,2)} > \frac{1}{1 - F_2(y)}\right\}$$

für $x, y \in [0, \infty)$.

Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass der marginaltransformierte Zufallsvektor $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß ν_0^* ist. Das Grenzmaß ν_0^* erfasst dann das extremale Abhängigkeitsverhalten von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ unabhängig vom ursprünglichem Tailverhalten. Des Weiteren wird angenommen, dass F_1 und F_2 streng monoton steigend und stetig auf $[u_0, \infty)$ für ein $u_0 > 0$ sind, so dass sich die marginaltransformierten Zufallsvariablen $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ im Tail ihrer Verteilung wie Standard-Pareto-vertelte Zufallsvariablen verhalten: Für $j \in \{1, 2\}$ und alle $x > 0$, die $F_j^{\leftarrow}(1 - 1/x) > u_0$ erfüllen, gilt

$$P\{V_0^{(*,j)} > x\} = P\{V_0^{(j)} > F_j^{\leftarrow}(1 - 1/x)\} = 1 - F_j(F_j^{\leftarrow}(1 - 1/x)) = 1/x. \quad (7.2)$$

Nun führt die Marginaltransformation in (7.1) im Allgemeinen dazu, dass der Grad der Homogenität des Grenzmaßes ν_0^* kleiner oder gleich -1 ist: Nach Kapitel 5 entspricht dieser nämlich dem Index der regulären Variation von $\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\}$. Ferner liefert Gleichung (7.2), dass $V_0^{(*,1)}$ regulär variierend mit Index -1 ist. Folglich existiert wegen $\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} \leq V_0^{(*,1)}$

ein $\eta \in (0, 1]$, so dass

$$\nu_0^*(sB) = s^{-1/\eta} \nu_0^*(B)$$

für alle $s > 0$ und alle ν_0^* -randlosen Borelmengen $B \subset (\varepsilon, \infty)^2$, $\varepsilon > 0$, gilt.

Der Parameter η wird erstmals in den Arbeiten von Ledford und Tawn (1996, 1997, 1998) untersucht und als *Koeffizient der Tail-Abhängigkeit* (engl.: coefficient of tail dependence) eingeführt. Dieser stellt folgende Beziehung zwischen dem Abhängigkeitsverhalten zwischen $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ im Extrembereich her:

- Wenn $\eta \in (0, 1)$ gilt, dann sind $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch unabhängig.
- Wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind, dann ist $\eta = 1$.

Eine Umkehrung dieser Aussagen gilt im Allgemeinen nicht. Das heißt, es kann weder aus der asymptotischen Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ gefolgert werden, dass $\eta \in (0, 1)$ gilt, noch, dass aus $\eta = 1$ deren asymptotische Abhängigkeit folgt. Sind jedoch die marginaltransformierten Zufallsvariablen $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ (exakt) stochastisch unabhängig, dann ist wegen

$$P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\} = u^{-2}$$

für $u > u_0$ der Koeffizient $\eta = 1/2$. Der Fall $\eta \in (0, 1/2)$ beziehungsweise $\eta \in (1/2, 1)$ beschreibt dann die asymptotische Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$, in der eine negative beziehungsweise positive asymptotisch schwindende Abhängigkeit vorliegt.

Der Koeffizient der Tail-Abhängigkeit η wird für das Schätzen von gemeinsamen Überschreitungswahrscheinlichkeiten eine bedeutende Rolle einnehmen (siehe Kapitel 8). Für die hier vorgesehene Schätzung des Grenzmaßes ν_0^* ist festzuhalten, dass das Grenzmaß ν_0^* homogen zum Grad -1 ist, wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind, und zum Grad $-1/\eta$ für $\eta \in (0, 1]$, wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch unabhängig sind.

Im folgendem Lemma wird festgehalten, unter welchen Bedingungen das marginaltransformierte Zufallspaar $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ ist, wenn $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ bereits regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ ist.

Lemma 7.1. Sei $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß ν_0 und Index $\alpha > 0$. Des Weiteren seien die Survivalfunktionen $1 - F_1$ und $1 - F_2$ streng monoton fallend und stetig auf $[u_0, \infty)$ für ein $u_0 > 0$. Wenn $1 - F_1$ und $1 - F_2$ regulär variierend mit Index $-\xi < 0$ sind und die zugehörigen Quantilfunktionen F_1^{\leftarrow} und F_2^{\leftarrow} die Tail-Balance-Bedingung

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{F_2^{\leftarrow}(1 - 1/u)}{F_1^{\leftarrow}(1 - 1/u)} = d \quad (7.3)$$

für ein $d > 0$ erfüllen, dann ist das marginaltransformierte Zufallspaar $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit einem Grenzmaß ν_0^* , das homogen zum Grad $-1/\eta$ mit $\eta = \xi/\alpha \in (0, 1]$

ist. Es gilt dann für alle $x, y \in (0, \infty)$

$$\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)) = \frac{\nu_0((x^{1/\xi}, \infty) \times (dy^{1/\xi}, \infty))}{\nu_0((1, \infty) \times (d, \infty))}. \quad (7.4)$$

Bemerkung 7.2. Die obige Tail-Balance-Bedingung (7.3) ist äquivalent dazu, dass F_1 und F_2 für ein positives Vielfaches Tail-äquivalent (engl. tail equivalent) sind: Es existiert ein $\tilde{d} > 0$, so dass

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 - F_1(u)}{1 - F_2(u)} = \tilde{d}$$

gilt (siehe Resnick, 1971). In Kapitel 8 wird eine Bedingung dieser Form zur Schätzung von gemeinsamen Überschreitungswahrscheinlichkeiten von hohen Schranken einen essentiellen Bestandteil darstellen. \diamond

Wenn also die eindimensionalen Randverteilungen des auf $(0, \infty)^2$ regulär variierenden Zufallsvektors $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ die Tail-Balance-Bedingung (7.3) erfüllen und regulär variierend sind, dann ist der zugehörige marginaltransformierte Zufallsvektor $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auch regulär variierend auf $(0, \infty)^2$. Für die marginaltransformierte Zeitreihe $(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ kann dann die in Kapitel 6 ausgearbeitete Methodologie genutzt werden. Unter den Voraussetzungen aus Theorem 6.2, angewandt auf die Zeitreihe $(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})_{t \in \mathbb{Z}}$, stellt dann die Statistik

$$\hat{\nu}_n^*((x, \infty) \times (y, \infty)) := \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(*,1)} > xu_n, V_i^{(*,2)} > yu_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\min\{V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}\} > u_n\}}$$

einen geeigneten Schätzer für $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ basierend auf den marginaltransformierten Beobachtungen $(V_1^{(*,1)}, V_1^{(*,2)}), \dots, (V_n^{(*,1)}, V_n^{(*,2)})$ dar. Währenddessen liefert Lemma 7.1 beziehungsweise Gleichung (7.4) eine weitere Möglichkeit zur Schätzung von $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$. Wenn ξ und d bekannt sind, beschreibt unter den Voraussetzungen aus Theorem 6.2 für die originale Zeitreihe $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ die Statistik

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(1)} > x^{1/\xi}u_n, V_i^{(2)} > dy^{1/\xi}u_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(1)} > u_n, V_i^{(2)} > du_n\}}$$

einen geeigneten Schätzer für $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ basierend auf $(V_1^{(1)}, V_1^{(2)}), \dots, (V_n^{(1)}, V_n^{(2)})$.

Ungeachtet des Zusammenhangs zwischen der regulären Variation der Zufallspaare $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ und $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ ist die Analyse des marginaltransformierten Zufallsvektors $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ im Allgemeinen auch dann sinnvoll, wenn die Annahmen aus Lemma 7.1 nicht garantiert sind. So kann der marginaltransformierte Zufallsvektor $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ sein, auch wenn es der zugrunde liegende bivariate Zufallsvektor nicht ist. Damit wird die Anwendung auf beispielsweise Umweltdaten ermöglicht, die oft keine regulär variierende Tails aufweisen. Ein weiterer Vorteil der Marginaltransformation (7.1) ist, dass geeignete Schätzmethoden zur Schätzung von gemeinsamen Überschreitungswahrscheinlichkeiten von hohen Schranken auch bei unterschiedlich schweren Tails von $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ konstruiert werden können. Mehr noch

können Zufallspaare $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ in Betracht gezogen werden, für deren Marginalverteilungsfunktionen $F_1^{\leftarrow}(1) \neq F_2^{\leftarrow}(1)$ gilt.

7.1. Asymptotische Resultate im praxisrelevanten Fall

In der Praxis sind F_1 und F_2 für gewöhnlich unbekannt, weshalb die Marginaltransformation in (7.1) nicht durchgeführt werden kann. Stattdessen wird eine empirische Variante ebenjener Transformation herangezogen:

$$(V_i^{(n,1)}, V_i^{(n,2)}) := \left(\frac{n+1}{n+1-R_{i:n}^{(1)}}, \frac{n+1}{n+1-R_{i:n}^{(2)}} \right), \quad (7.5)$$

wobei $R_{i:n}^{(j)}$ den Rang von $V_i^{(j)}$ in $V_1^{(j)}, \dots, V_n^{(j)}$ für $j \in \{1, 2\}$ bezeichnet. Hierbei wurden im Wesentlichen die Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 durch ihrer empirischen Versionen ersetzt. Um Division durch 0 zu vermeiden, wurde zusätzlich jeweils im Zähler und Nenner einer Koordinate eine 1 hinzu addiert. Im praxisrelevanten Fall von unbekanntem Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 wird also die Statistik

$$\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(n,1)} > xu_n, V_i^{(n,2)} > yu_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\min\{V_i^{(n,1)}, V_i^{(n,2)}\} > u_n\}} \quad (7.6)$$

als Schätzer für $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ verwendet, die auf den rangtransformierten Beobachtungen $(V_1^{(n,1)}, V_1^{(n,2)}), \dots, (V_n^{(n,1)}, V_n^{(n,2)})$ basiert.

Die Tatsache, dass nun die zugrunde liegenden Beobachtungen $(V_1^{(1)}, V_1^{(2)}), \dots, (V_n^{(1)}, V_n^{(2)})$ statt mit den wahren Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 mit einer empirischen Variante standardisiert werden, hat einen Einfluss auf das Schätzen von $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$. Dieser Einfluss unterscheidet sich im Fall der asymptotischen Abhängigkeit beziehungsweise asymptotischen Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$. Ferner wird die Analyse des asymptotischen Verhaltens von $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ durch die rangtransformierten Daten merklich erschwert. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass jede rangtransformierte Beobachtung $(V_i^{(n,1)}, V_i^{(n,2)})$ von der gesamten Stichprobe $(V_1^{(1)}, V_1^{(2)}), \dots, (V_n^{(1)}, V_n^{(2)})$ abhängt. Damit sind klassische Mischungsannahme, wie sie in Kapitel 6 getroffen wurden (siehe Voraussetzung (A1)), für die rangtransformierten Daten nicht erfüllt.

Als zentraler Ausgangspunkt zur Analyse des asymptotischen Verhaltens des auf rangtransformierten Beobachtungen basierenden Schätzers $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ dient folgender Zusammenhang: Wenn die Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 streng monoton steigend und stetig auf $[u_0, \infty)$ für ein $u_0 > 0$ sind, dann gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} V_i^{(n,j)} > xu_n &\iff R_{i:n}^{(j)} > (n+1)(1-1/(xu_n)) \\ &\iff V_i^{(j)} > V_{\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor : n}^{(j)} \\ &\iff V_i^{(*,j)} > V_{\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor : n}^{(*,j)} \end{aligned} \quad (7.7)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1. Die Stetigkeit der Marginalverteilungsfunktion F_j auf $[u_0, \infty)$ bewirkt dann gerade, dass entsprechende Realisationen von F_j , die die Schranke u_0 übersteigen, sich P -fast sicher unterscheiden.

Bezeichne nun für $x, y \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n(x, y) &:= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(n,1)} > xu_n, V_i^{(n,2)} > yu_n\}, \\ \tilde{S}_n^*(x, y) &:= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(*,1)} > xu_n, V_i^{(*,2)} > yu_n\}, \\ t_{n,j}(x) &:= u_n^{-1} V_{[(n+1)(1-1/(xu_n))]:n}^{(*,j)}, \quad j \in \{1, 2\}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Wegen (7.7) gilt dann für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{S}_n(x, y) = \tilde{S}_n^*(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) \quad P\text{-fast sicher.}\tag{7.9}$$

Damit lässt sich $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ schreiben als

$$\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) = \frac{\tilde{S}_n(x, y)}{\tilde{S}_n(1, 1)} = \frac{\tilde{S}_n^*(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y))}{\tilde{S}_n^*(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1))} = \frac{\hat{\nu}_n^*((t_{n,1}(x), \infty) \times (t_{n,2}(y), \infty))}{\hat{\nu}_n^*((t_{n,1}(1), \infty) \times (t_{n,2}(1), \infty))}$$

P -fast sicher. Das heißt, das asymptotische Verhalten von $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ kann mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens der gemeinsamen Verteilung von $(\hat{\nu}_n^*((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)))_{\tilde{x}, \tilde{y} \in (0, \infty)}$ (beziehungsweise $(\tilde{S}_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}))_{\tilde{x}, \tilde{y} \in (0, \infty)}$) und der Zufallsvariablen $t_{n,1}(1)$, $t_{n,2}(1)$, $t_{n,1}(x)$ und $t_{n,2}(y)$ bestimmt werden. Wir werden im Folgenden sehen, dass die Zufallsvariablen $t_{n,1}(x)$ und $t_{n,2}(y)$ in Wahrscheinlichkeit gegen x und y konvergieren. Die normierten Ordnungsstatistiken $t_{n,1}(x)$ und $t_{n,2}(y)$ liegen also mit einer gegen 1 konvergierenden Wahrscheinlichkeit in einer offenen Umgebung von x und y . Demnach reicht es aus, das asymptotische Verhalten des Prozesses $(\hat{\nu}_n^*((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)))_{\tilde{x}, \tilde{y} \in I}$ lediglich für eine Indexmenge $I \subseteq (0, \infty)$ zu bestimmen, die offene Umgebungen von 1, x und y enthält.

Die weitere Analyse des asymptotischen Verhaltens des Schätzers $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ bedarf unterschiedlicher Herangehensweisen, wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig oder asymptotisch unabhängig sind. Im nachfolgenden Abschnitt wird das asymptotische Verhalten des Schätzers $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ untersucht.

7.1.1. Asymptotische Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall, in dem $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch unabhängig sind. Unter der Annahme, dass die Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 streng monoton wachsenden und stetig auf $[u_0, \infty)$ sind, bedeutet die asymptotische Unabhängigkeit aus Defini-

tion 5.1

$$\frac{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}}{P\{V_0^{(*,1)} > u\}} = uP\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0. \quad (7.10)$$

Definiere für ein $x^* \in (0, 1]$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} V_{n,i}^{(*,U)} &:= u_n^{-1}(V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)})\mathbb{1}\{\min\{V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}\} > x^*u_n\} \quad \text{und} \\ V_{n,i}^{(*,j)} &:= u_n^{-1}V_i^{(*,j)}\mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > x^*u_n\}, \quad j \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Der Term $V_{n,i}^{(*,U)}$ bezeichnet also den durch u_n normierten Zufallsvektor $(V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)})$, wenn beide Einträge die Schranke x^*u_n überschreitet, und ist anderenfalls gleich 0. Ebenso bezeichnet $V_{n,i}^{(*,j)}$ die durch u_n normierte Zufallsvariable $V_i^{(*,j)}$, wenn diese die Schranke x^*u_n überschreitet, und ist sonst gleich 0. Sei nun

$$v_{n,x}^{(*,U)} := P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > xu_n\}, \quad x \in [x^*, \infty),$$

so dass $v_n^{(*,U)} := v_{n,x^*}^{(*,U)} = P\{V_{n,0}^{(*,U)} \neq 0\}$ gilt.

Mit Hilfe der Funktionenklasse $\Phi = \{\phi_{x,y} \mid x, y \in [x^*, \infty)\}$, die die Funktionen $\phi_{x,y} : [0, \infty)^2 \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\phi_{x,y}(z) = \mathbb{1}\{z_1 > x, z_2 > y\} \quad (7.12)$$

enthält, lassen sich die Indikatorfunktionen innerhalb des Schätzers $\hat{\nu}_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ schreiben als

$$\mathbb{1}\{V_i^{(*,1)} > xu_n, V_i^{(*,2)} > yu_n\} = \phi_{x,y}(V_{n,i}^{(*,U)}).$$

Die zugehörigen standardisierten Tail-Array-Sums $\tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{x,y})$, die zur Analyse des asymptotischen Verhaltens von $(\hat{\nu}_n^*((x, \infty) \times (y, \infty)))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ verwendet werden, sind dann definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{x,y}) &:= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\phi_{x,y}(V_{n,i}^{(*,U)}) - E[\phi_{x,y}(V_{n,i}^{(*,U)})]) \\ &= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1}\{V_i^{(*,1)} > xu_n, V_i^{(*,2)} > yu_n\} \\ &\quad - P\{V_0^{(*,1)} > xu_n, V_0^{(*,2)} > yu_n\}). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Definiere des Weiteren für $j \in \{1, 2\}$ den Prozess

$$e_n^{(j)}(x) := (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > xu_n\} - \frac{1}{x} \right), \quad x \in [x^*, \infty),$$

der für die Analyse des asymptotischen Verhaltens von $t_{n,j}(x)$ herangezogen wird.

Voraussetzungen

Bezeichne

$$\beta_{n,k}^{(*,U)} := \sup_{1 \leq l \leq n-k-1} E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,i+k+1}^{(n,U)}} |P(B | \mathcal{B}_{n,1}^{(l,U)}) - P(B)| \right]$$

den β -Mischungskoeffizienten von $((V_{n,i}^{(*,U)})_{1 \leq i \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $\mathcal{B}_{n,i}^{(h,U)} = \sigma((V_{n,l}^{(*,U)})_{i \leq l \leq h})$. Wir fordern nun, dass zwei Folgen $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n, r_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ existieren, so dass zu demselben $x^* \in (0, 1]$ wie in (7.11) die folgenden Voraussetzungen gelten:

(A1*) Für $n \rightarrow \infty$ gilt $l_n = o(r_n)$, $r_n = o((n v_n^{(*,U)})^{1/2})$, $r_n v_n^{(*,U)} \rightarrow 0$, $\beta_{n,l_n}^{(*,U)} n / r_n \rightarrow 0$.

(A2*) Für alle $k \in \{0, \dots, r_n\}$ existieren Konstanten

$$s_n^*(k) \geq P(\min\{V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\} > x^* u_n \mid \min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n),$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} s_n^*(k) = \sum_{k=1}^{\infty} s_{\infty}^*(k) < \infty$ mit $s_{\infty}^*(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^*(k)$ erfüllen.

(A3*) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i}^{(*,U)} \neq 0\} \right)^{2+\delta} \right] = O(r_n v_n^{(*,U)}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.14)$$

(A4*) Zu jedem $t \in \mathbb{N}$ existiert ein Maß ν_t^* auf $((1, \infty)^4, \mathbb{B}((1, \infty)^4))$, so dass

$$\frac{P\{u^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}, V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)}) \in B\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \nu_t^*(B) < \infty$$

für alle ν_t^* -randlosen Borelmengen $B \in \mathbb{B}((1, \infty)^4)$ gilt.

(A5*) Es gilt

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i}^{(*,j)} \neq 0\} \right)^2 \right] = O(r_n / u_n), \quad j \in \{1, 2\},$$

für $n \rightarrow \infty$. ◇

Die Voraussetzungen (A1*)–(A4*) sind die Analoga der Voraussetzungen (A1)–(A4) angewandt auf die marginaltransformierte Zeitreihe $(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})_{t \in \mathbb{Z}}$. Voraussetzung (A5*) stellt sicher, dass auch für die univariaten Zeitreihen $(V_t^{(*,1)})_{t \in \mathbb{Z}}$ und $(V_t^{(*,2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ die Varianzen der zufälligen Anzahl an Überschreitungen innerhalb eines Clusters genügend schnell gegen 0 streben. Alternativ zu den Voraussetzungen (A3*) und (A5*) kann auch die folgende Bedingung verwendet werden, die zwar restriktiver jedoch leichter zu überprüfen ist:

(A6*) Für alle $j, k \in \{0, \dots, r_n\}$ existieren Konstanten

$$\tilde{s}_n^*(k) \geq \max \{P(V_k^{(*,1)} > x^* u_n \mid V_0^{(*,1)} > x^* u_n), P(V_k^{(*,2)} > x^* u_n \mid V_0^{(*,2)} > x^* u_n)\},$$

$$\tilde{s}_n^*(j, k) \geq P(\min\{V_j^{(*,1)}, V_j^{(*,2)}, V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\} > x^* u_n \mid \min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n),$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \tilde{s}_n^*(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{s}_\infty^*(k) < \infty$ mit $\tilde{s}_\infty^*(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n^*(k)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k \leq r_n} \tilde{s}_n^*(j, k) = \sum_{1 \leq j \leq k < \infty} \tilde{s}_\infty^*(j, k) < \infty$ mit $\tilde{s}_\infty^*(j, k) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n^*(j, k)$ erfüllen.

Bedingung (A6*) impliziert dann offensichtlich auch Voraussetzung (A2*). Ein Nachweis dieses Zusammenhangs zwischen den Voraussetzungen (A2*), (A3*), (A5*) und (A6*) ist im Abschnitt 7.3 (Lemma 7.12) erbracht.

Im Übrigen besteht zwischen den Grenzmaßen ν_t^* , $t \in \mathbb{N}$, aus Voraussetzung (A4*) und den Grenzmaßen ν_t , $t \in \mathbb{N}$, aus Voraussetzung (A4) ein ähnlicher Zusammenhang, wie er für die Grenzmaße ν_0^* und ν_0 in Lemma 7.1 formuliert ist.

Lemma 7.3. *Wenn die Voraussetzungen aus Lemma 7.1 sowie Voraussetzung (A4) erfüllt sind, ist insbesondere Voraussetzung (A4*) gültig. Die zugehörigen Grenzmaße ν_t^* , $t \in \mathbb{N}$, sind dann homogen vom Grad $-1/\eta$ mit $\eta = \xi/\alpha \in (0, 1]$ und erfüllen für $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in (0, \infty)$*

$$\nu_t^*((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) = \frac{\nu_t((x^{1/\xi}, \infty) \times (dy^{1/\xi}, \infty) \times (\tilde{x}^{1/\xi}, \infty) \times (d\tilde{y}^{1/\xi}, \infty))}{\nu_0((1, \infty) \times (d, \infty))},$$

wobei ν_t , $t \in \mathbb{N}$, die Grenzmaße aus (A4) mit Index $\alpha > 0$, $d > 0$ den Tail-Balance-Parameter aus (7.3), und ξ den Index der regulären Variation der Survivalfunktionen von $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ bezeichnen.

Anhand der Voraussetzungen (A1*), (A2*), (A3*), (A4*) und (A5*) kann das gemeinsame asymptotische Verhalten der stochastischen Prozesse $(\tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$, $(e_n^{(1)}(x))_{x \in [x^*, \infty)}$ und $(e_n^{(2)}(x))_{x \in [x^*, \infty)}$ bestimmt werden.

Proposition 7.4. *Sei $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe mit Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 , die stetig und streng monoton wachsend auf $[u_0, \infty)$ für ein $u_0 > 0$ sind. Sei des Weiteren $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß ν_0^* und Index $1/\eta$ für ein $\eta \in (0, 1]$. Unter den Voraussetzungen (A1*), (A2*), (A3*), (A4*) und (A5*) gilt die schwache Konvergenz*

$$((\tilde{Z}_n^{(*,U)}(\psi))_{\psi \in \Phi}, (e_n^{(1)}(x))_{x \in [x^*, \infty)}, (e_n^{(2)}(x))_{x \in [x^*, \infty)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ((Z^{(*,U)}(\psi))_{\psi \in \Phi}, 0, 0)$$

in $l^\infty(\Phi) \times (l^\infty([x^*, \infty)))^2$, wobei $(Z^{(*,U)}(\psi))_{\psi \in \Phi}$ einen zentrierten Gaußprozess mit Kovarianzstruktur

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}), Z^{(*,U)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}})) \\ &= \nu_0^*((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty)) \\ &+ \sum_{t=1}^{\infty} \left(\nu_t^*((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) + \nu_t^*((\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times (y, \infty)) \right) \end{aligned} \quad (7.15)$$

für $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$ bezeichnet.

Offensichtlich stimmt die obige Kovarianzstruktur (7.15) mit der Kovarianzstruktur (6.8) aus Proposition 6.1 überein, wenn die Grenzmaße ν_t^* durch ν_t , $t \in \mathbb{N}_0$, ersetzt werden.

Wegen der aus Gleichung (7.13) resultierenden Gleichheit

$$\tilde{S}_n^*(x, y) = (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{x,y}) + nE[\phi_{x,y}(V_{n,0}^{(*,U)})]$$

kann mittels Proposition 7.4 das asymptotische Verhalten des Prozesses $(\tilde{S}_n^*(x, y))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ analysiert werden. Das asymptotische Verhalten der normierten Ordnungsstatistik $t_{n,j}(x)$ lässt sich mit Hilfe der schwachen Konvergenz von $(e_n^{(j)}(x))_{x \in [x^*, \infty)}$ herleiten.

Lemma 7.5. Sei $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe mit Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 , die stetig und streng monoton wachsend auf $[u_0, \infty)$ für ein $u_0 > 0$ sind. Sei $a \in [x^*, \infty)$ beliebig gewählt. Die schwache Konvergenz $(e_n^{(j)}(x))_{x \in [x^*, a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt für $j \in \{1, 2\}$ genau dann, wenn

$$\sup_{x \in [x^*, a]} |t_{n,j}(x) - x| = o_P((nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2}).$$

Bemerkung 7.6. Die obige Konvergenzaussage in Lemma 7.5 kann nicht gleichmäßig auf $[x^*, \infty)$ erzielt werden, da für alle $x \in [(n+1)/u_n, \infty)$

$$V_{\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor : n}^{(*,j)} = \max\{V_1^{(*,j)}, \dots, V_n^{(*,j)}\}$$

gilt und deshalb

$$\sup_{x \in [x^*, \infty)} |t_{n,j}(x) - x| \geq \sup_{x \in [(n+1)/u_n, \infty)} |u_n^{-1} \max\{V_1^{(*,j)}, \dots, V_n^{(*,j)}\} - x| = \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. \diamond

Aus Proposition 7.4 und Lemma 7.5 lässt sich nun die schwache Konvergenz von $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ folgern. Wir fordern dazu folgende Bias-Bedingung: Es existiert ein $a \in (x^*, \infty)$, so dass

$$\sup_{x,y \in [x^*, a]} \left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > xu_n, V_0^{(*,2)} > yu_n\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u_n\}} - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)) \right| = o((nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2}). \quad (7.16)$$

Theorem 7.7. Unter den Voraussetzungen von Proposition 7.4 sowie der Bedingung (7.16) gilt für beliebiges $\varepsilon \in (0, (a - x^*)/2)$ die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} & (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)))_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}) - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))Z^{(*,U)}(\phi_{1,1}))_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

wobei $(Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ der zentrierte Gaußprozess aus Proposition 7.4 ist. Die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses ist in Gleichung (7.50) angegeben.

Bemerkung 7.8. Man beachte, dass unter den Voraussetzungen des obigen Theorems 7.7 die Konvergenz in (7.17) auch dann gilt, wenn $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}$ durch $\hat{\nu}_n^*$ ersetzt wird (siehe Theorem 6.2).

Das bedeutet also, dass das Verwenden von rangtransformierten Beobachtungen an Stelle von marginaltransformierten keinen Einfluss auf das asymptotische Verhalten des Schätzverfahrens hat. Mit anderen Worten: Asymptotisch betrachtet macht es keinen Unterschied, ob mittels $\hat{\nu}_n^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ oder $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ das Grenzmaß $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ geschätzt wird, wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch unabhängig sind.

Jedoch führt die Verwendung von rangtransformierten Beobachtungen anstelle von marginaltransformierten Beobachtungen zu zwei Ergebnis-technischen Einschränkungen:

1. Die obige Prozesskonvergenz (7.17) kann nur auf Indexmengen $[x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]$ mit $\varepsilon \in (0, (a - x^*)/2)$ erzielt werden, obwohl die Bias-Bedingung (7.16) gleichmäßig auf $[x^*, a]$ gilt.
2. Selbst wenn die Bias-Bedingung (7.16) gleichmäßig auf $[x^*, \infty)$ erfüllt ist, kann wegen Lemma 7.5 die obige Prozesskonvergenz (7.17) nur auf abgeschlossenen Intervallen gefolgert werden, die in (x^*, ∞) liegen.

Im Gegensatz dazu gilt nach Theorem 6.2 die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} & (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (\hat{\nu}_n^*((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}) - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))Z^{(*,U)}(\phi_{1,1}))_{x,y \in [x^*, \infty)}, \end{aligned}$$

wenn die Bias-Bedingung (7.16) gleichmäßig auf $[x^*, \infty)$ gilt. \diamond

7.1.2. Asymptotische Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall, in dem $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind. Nach Definition 5.7 und unter der Annahme, dass die Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 streng monoton wachsend und stetig auf $[u_0, \infty)$ sind, bedeutet das dann

$$\frac{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}}{P\{V_0^{(*,1)} > u\}} = uP\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \lambda \quad (7.18)$$

für ein $\lambda > 0$.

Definiere für ein $x^* \in (0, 1]$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$V_{n,i}^{(*,A)} := u_n^{-1}(V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}) \mathbb{1}\{\max\{V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}\} > x^* u_n\}. \quad (7.19)$$

Der Term $V_{n,i}^{(*,A)}$ beschreibt also den durch u_n normierten Zufallsvektor $(V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)})$, wenn mindestens ein Eintrag die Schranke $x^* u_n$ überschreitet, und ist sonst gleich 0. In diesem Abschnitt werden also marginaltransformierte Zufallsvektoren $(V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)})$ für die statistische Untersuchung verwendet, wenn bereits ein Koordinate die Schranke $x^* u_n$ überschreitet. Sei des Weiteren

$$v_{n,x}^{(*,A)} := P\{\max\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x u_n\}, \quad x \in [x^*, \infty).$$

Dann gilt $v_n^{(*,A)} := v_{n,x^*}^{(*,A)} = P\{V_{n,0}^{(*,A)} \neq 0\}$. Man beachte, dass wegen (7.2)

$$v_{n,x}^{(*,A)} = 2(xu_n)^{-1} - v_{n,x}^{(*,U)}$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aus (7.18) ergibt sich damit

$$xu_n v_{n,x}^{(*,A)} = 2 - xu_n v_{n,x}^{(*,U)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 - \lambda \quad \text{und} \quad \frac{v_{n,x}^{(*,A)}}{v_{n,x}^{(*,U)}} = \frac{2}{xu_n v_{n,x}^{(*,U)}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\lambda^{-1} - 1.$$

Wir erhalten also im Fall der asymptotischen Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ folgende asymptotische Beziehung:

$$v_{n,x}^{(*,A)} \sim (2\lambda^{-1} - 1)v_{n,x}^{(*,U)} \sim (2 - \lambda)(xu_n)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.20)$$

Im Übrigen folgt dann aus der regulären Variation von $u \mapsto P\{V_0^{(*,1)} > u\}$

$$\frac{v_{n,x}^{(*,A)}}{v_{n,1}^{(*,A)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^{-1}, \quad x \in [x^*, \infty).$$

Ferner betrachten wir die Funktionenklasse $\Phi^{(or)} := \{\phi_{x,y}^{(or)} \mid (x, y) \in T\}$, wobei $T := [x^*, \infty]^2 \setminus \{\infty, \infty\}$ und

$$\phi_{x,y}^{(or)}(z) = \mathbf{1}\{z_1 > x \text{ oder } z_2 > y\} \quad (7.21)$$

für $z = (z_1, z_2) \in [0, \infty)^2$. Man beachte, dass $\phi_{x,\infty}^{(or)}(z) = \mathbf{1}\{z_1 > x\}$ und $\phi_{\infty,y}^{(or)}(z) = \mathbf{1}\{z_2 > y\}$ gilt. Damit lassen sich die Funktionen $\phi_{x,y}$ aus (7.12) mittels der Funktionen aus $\Phi^{(or)}$ darstellen:

$$\phi_{x,y}(z) = \phi_{x,\infty}^{(or)}(z) + \phi_{\infty,y}^{(or)}(z) - \phi_{x,y}^{(or)}(z).$$

Die entsprechenden Tail-Array-Sums $\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)})$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) &:= (nv_{n,1}^{(*,A)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)}) - E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)})]) \\ &= (nv_{n,1}^{(*,A)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}\{V_i^{(*,1)} > xu_n \text{ oder } V_i^{(*,2)} > yu_n\} \\ &\quad - P\{V_0^{(*,1)} > xu_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > yu_n\}). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Voraussetzungen

Bezeichne

$$\beta_{n,k}^{(*,A)} := \sup_{1 \leq l \leq n-k-1} E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^{(n,A)}} |P(B \mid \mathcal{B}_{n,1}^{(l,A)}) - P(B)| \right]$$

den β -Mischungskoeffizienten von $((V_{n,i}^{(*,A)})_{1 \leq i \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $\mathcal{B}_{n,i}^{(h,A)} = \sigma((V_{n,l}^{(*,A)})_{i \leq l \leq h})$. Wir fordern nun, dass zwei Folgen $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n, r_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ existieren, so dass zu demselben $x^* \in (0, 1]$ wie in (7.19) die folgenden Voraussetzungen gelten:

(A1)** Für $n \rightarrow \infty$ gilt $l_n = o(r_n)$, $r_n = o((n v_n^{(*,A)})^{1/2})$, $r_n v_n^{(*,A)} \rightarrow 0$, $\beta_{n,l_n}^{(*,A)} n / r_n \rightarrow 0$.

(A2)** Für alle $k \in \{0, \dots, r_n\}$ existieren Konstanten

$$s_n^{**}(k) \geq \frac{1}{v_n^{(*,A)}} \max \left\{ P\{\min\{V_k^{(*,1)}, V_0^{(*,1)}\} > x^* u_n\}, P\{\min\{V_k^{(*,2)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n\}, \right. \\ \left. P\{\min\{V_k^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n\}, P\{\min\{V_k^{(*,2)}, V_0^{(*,1)}\} > x^* u_n\} \right\},$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} s_n^{**}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} s_{\infty}^{**}(k) < \infty$ mit $s_{\infty}^{**}(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{**}(k)$ erfüllen.

(A3)** Es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i}^{(*,A)} \neq 0\} \right)^{2+\delta} \right] = O(r_n v_n^{(*,A)}), \quad n \rightarrow \infty.$$

(A4)** Zu jedem $t \in \mathbb{N}$ existiert ein Maß ν_t^{**} auf $([0, \infty)^4 \setminus \{0\}, \mathbb{B}([0, \infty)^4 \setminus \{0\}))$, so dass

$$\frac{P\{u^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}, V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)}) \in B\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \nu_t^{**}(B) < \infty$$

für alle ν_t^{**} -randlosen Borelmengen $B \in \mathbb{B}([0, \infty)^4 \setminus \{0\})$ gilt, die von 0 weg beschränkt sind.

(PD) Die Abbildung $(x, y) \mapsto \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ ist stetig partiell differenzierbar auf $[x^*, \infty)^2$. \diamond

Voraussetzung **(A1**)** stellt grundlegende Anforderung an die Zeitreihe $((V_{n,i}^{(*,A)})_{1 \leq i \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$, wie sie Voraussetzung **(A1*)** für $((V_{n,i}^{(*,U)})_{1 \leq i \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$ fordert. Wir rekapitulieren dabei, dass der normierte Zufallsvektor $V_{n,i}^{(*,A)}$ von 0 verschieden ist, wenn mindestens eine Koordinate von $(V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)})$ die Schranke $x^* u_n$ überschreitet. Währenddessen ist $V_{n,i}^{(*,U)}$ nur dann ungleich 0, wenn eine gemeinsame Überschreitung der Koordinaten von $(V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)})$ vorliegt. Damit impliziert Voraussetzung **(A1**)** im Fall der asymptotischen Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ Voraussetzung **(A1*)**.

Aus diesem Zusammenhang heraus ergibt sich, dass Voraussetzung **(A2**)** eine Erweiterung von Bedingung **(A2*)** darstellt, die alle Kombinationen an möglichen Überschreitungen der Zufallsvektoren $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ und $(V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)})$, $k \in \mathbb{N}$, berücksichtigt.

In Voraussetzung **(A3**)** wird die Überlegung aus Voraussetzung **(A3*)** und **(A5*)** aufgegriffen, dass die zufällige Anzahl an Überschreitungen innerhalb eines Clusters der Länge r_n beschränkt sein soll. Aus technischen Gründen wird jedoch die Anforderung an Überschreitungen, die explizit durch eine Koordinate verursacht werden, restriktiver formuliert als in Voraussetzung

(A5*). Indessen lässt sich ähnlich wie Voraussetzung (A3*) auch Voraussetzung (A3**) durch eine restriktivere Bedingung ersetzen:

(A6**) Für alle $j, k \in \{0, \dots, r_n\}$ existieren Konstanten

$$\tilde{s}_n^{**}(j, k) \geq P\left(\max\{V_j^{(*,1)}, V_j^{(*,2)}\} > x^* u_n, \max\{V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\} > x^* u_n \mid \max\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n\right),$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k \leq r_n} \tilde{s}_n^{**}(j, k) = \sum_{1 \leq j \leq k < \infty} \tilde{s}_\infty^{**}(j, k) < \infty$ mit $\tilde{s}_\infty^{**}(j, k) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n^{**}(j, k)$ erfüllen.

Aus Bedingung (A6**) folgt dann insbesondere Voraussetzung (A2**). Ein Nachweis dieses Zusammenhangs zwischen den Voraussetzungen (A2**), (A3**) und (A6**) ist im Abschnitt 7.3 (Lemma 7.13) erbracht.

Das Grenzmaß ν_t^{**} aus (A4**) erfasst das zeitliche Abhängigkeitsverhalten von $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ und $(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})$ auf einem Extrembereich, welcher auch koordinatenweise Überschreitungen der Zufallsvektoren $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ und $(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})$ berücksichtigt. Damit impliziert Voraussetzung (A4**) auch Bedingung (A4*), wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind.

Mittels der Voraussetzungen (A1**), (A2**), (A3**) und (A4**) kann nun das asymptotische Verhalten von $(\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in T}$ bestimmt werden.

Proposition 7.9. Sei $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})$ eine strikt stationäre Zeitreihe mit Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 , die stetig und streng monoton wachsend auf $[u_0, \infty)$ für ein $u_0 > 0$ sind. Sei des Weiteren $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß ν_0^* und Index 1. Unter den Voraussetzungen (A1**), (A2**), (A3**) und (A4**) konvergiert die Folge der Tail-Array-Sums $(\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\psi))_{\psi \in \Phi^{(or)}}$, $n \in \mathbb{N}$, in $l^\infty(\Phi^{(or)})$ schwach gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z^{(*,A)}(\psi))_{\psi \in \Phi^{(or)}}$ mit Kovarianzstruktur

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\ &= \frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\nu_0^*(D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*(B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) + \nu_k^*(B(\tilde{x}, \tilde{y}, x, y)) \right) \right] \end{aligned} \quad (7.23)$$

mit

$$\begin{aligned} D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) &:= \left((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times [0, \infty) \right) \cup \left((x, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \right) \cup \left((\tilde{x}, \infty) \times (y, \infty) \right) \\ &\quad \cup \left([0, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty) \right), \\ B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) &:= \left((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty) \right) \cup \left((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty) \right) \\ &\quad \cup \left([0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty) \right) \cup \left([0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty) \right) \end{aligned}$$

für $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$.

Eine genau Spezifikation (hinsichtlich aller möglichen Indexkombinationen $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$) dieser Kovarianzen ist in den Gleichungen (7.63)–(7.71) angegeben.

Mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens von $(\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in T}$ lässt sich das asymptotische Verhalten von $(t_{n,j}(x))_{x \in [x^*, a]}$ für beliebiges $a \in [x^*, \infty)$ herleiten, wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind.

Lemma 7.10. *Sei $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe mit Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 , die stetig und streng monoton wachsenden auf $[u_0, \infty)$ für ein $u_0 > 0$ sind. Sei $a \in [x^*, \infty)$ beliebig gewählt. Dann gilt unter den Voraussetzungen von Proposition 7.9 die schwache Konvergenz*

$$\begin{pmatrix} (\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ (n/u_n)^{1/2}(t_{n,1}(x) - x)_{x \in [x^*, a]} \\ (n/u_n)^{1/2}(t_{n,2}(y) - y)_{y \in [x^*, a]} \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ ((2-\lambda)^{1/2}x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}))_{x \in [x^*, a]} \\ ((2-\lambda)^{1/2}y^2 Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}))_{y \in [x^*, a]} \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{pmatrix} (\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ (n/u_n)^{1/2} \left(\frac{1}{t_{n,1}(x)} - \frac{1}{x} \right)_{x \in [x^*, a]} \\ (n/u_n)^{1/2} \left(\frac{1}{t_{n,1}(y)} - \frac{1}{y} \right)_{y \in [x^*, a]} \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ (-(2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}))_{x \in [x^*, a]} \\ (-(2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}))_{y \in [x^*, a]} \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

schwach.

Unter der Zuhilfenahme der Bias-Bedingung (7.16) ergibt sich nun mittels Proposition 7.9 und Lemma 7.10 das asymptotische Verhalten des Schätzer $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ im Fall der asymptotischen Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$.

Theorem 7.11. *Unter den Voraussetzungen von Proposition 7.9 sowie Voraussetzung (PD) und Bias-Bedingung (7.16) gilt für beliebiges $\varepsilon \in (0, (a - x^*)/2)$ die schwache Konvergenz*

$$\begin{aligned} & (n v_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)) \right)_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-\lambda}{\lambda} \right)^{1/2} \left((1 + \lambda c_x(x, y) x^2) Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) + (1 + \lambda c_y(x, y) y^2) Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) \right. \\ & \quad \left. - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) - c(x, y) [(1 + \lambda c_x(1, 1)) Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) + (1 + \lambda c_y(1, 1)) Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}) \right. \\ & \quad \left. - Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)}) \right] \Big)_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]}, \end{aligned}$$

wobei $c(x, y) := \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$, $c_x := \partial c(x, y) / \partial x$, $c_y := \partial c(x, y) / \partial y$ und $(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in T}$ derselbe Gaußprozess wie in Proposition 7.9 ist. Die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses ist in Gleichung (7.97) angegeben.

Sowohl im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit als auch im Fall der asymptotischen Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ ist die Verteilung des Grenzprozesses von

$$(n v_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)) \right)_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]}$$

durch die Verteilung des Grenzprozesses der Tail-Array-Sums, dem Grenzmaß der regulären Variation von $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auf $(0, \infty)^2$ und den Grenzmaßen, die die zeitliche (extremale) Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvektoren $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ und $(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})$, $t \in \mathbb{N}$, festhalten, bestimmt. Im Fall der asymptotischen Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ ist jedoch die Verteilung des Grenzprozesses aus Theorem 7.11 zusätzlich noch vom unbekanntem Parameter der asymptotischen Abhängigkeit λ und den partiellen Ableitungen ersten Ordnung c_x und c_y abhängig. Damit stellt der Grenzprozess aus Theorem 7.11 den für statistische Untersuchungen anspruchsvolleren Prozess dar.

7.2. Der Spezialfall: $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) = (X_0^*, X_h^*)$

In diesem Abschnitt betrachten wir wie in Abschnitt 6.2 den Spezialfall, dass eine univariate strikt stationären Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ zugrunde liegt. Wir sind dann für einen festen Lag $h \in \mathbb{N}$ an dem extremalen Abhängigkeitsverhalten des Zufallsvektors (X_0, X_h) interessiert. Dieses wird nun anhand der Methodologie aus Abschnitt 7.1 untersucht.

Bezeichne dazu $(X_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ die zu $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gehörige marginaltransformierte Zeitreihe, das heißt

$$X_t^* := \frac{1}{1 - F_X(X_t)}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (7.26)$$

wobei F_X die Verteilungsfunktion von X_0 bezeichnet. Nach Lemma 2.1 von Drees et al. (2015) ist die marginaltransformierte Zeitreihe $(X_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ regulär variierend, wenn die zugrunde liegende Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ regulär variierend ist. Der Index der regulären Variation von $(X_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist dann stets gleich 1. Wir nehmen im Folgenden für die zugrunde liegende Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ an, dass nach entsprechender Marginaltransformation $(X_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ regulär variierend mit Index 1 ist. Die zugehörigen Tail- und Spektralprozesse bezeichnen wir mit $(Y_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ und $(\Theta_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Um nun das extremale Abhängigkeitsverhalten von X_0 und X_h losgelöst vom Tailverhalten zu analysieren, fordern wir, dass der marginaltransformierte Zufallsvektor (X_0^*, X_h^*) regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ mit einem Grenzmaß $\nu_0^{(*,h)}$ ist. Zur Erinnerung: Nach Lemma 7.12 ist dies bereits dann erfüllt, wenn die strikt stationäre Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ regulär variierend ist und der zugehörige Zufallsvektor (X_0, X_h) regulär variierend auf $(0, \infty)^2$. In diesem Fall sind nämlich die Tail-Balance-Bedingung in (7.3) und die reguläre Variation der Survivalfunktion $1 - F_X$ trivial. Ferner ist nach Diskussion auf Seite 135 der Zufallsvektor (X_0^*, X_h^*) insbesondere dann regulär variierend auf $(0, \infty)^2$, wenn X_0^* und X_h^* asymptotisch abhängig sind und der Zufallsvektor (X_0^*, X_h^*) multivariat regulär variierend ist. Mit analogen Rechnungen wie in Abschnitt 6.2 kann dann gefolgert werden, dass sich der Parameter der asymptotischen Abhängigkeit λ und das Grenzmaß $\nu_0^{(*,h)}$ wie folgt mittels des Spektralprozesses $(\Theta_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ darstellen lassen:

$$\lambda = P\{\Theta_h^* > 1\} + E[\Theta_h^* \mathbf{1}\{\Theta_h^* \leq 1\}] \quad \text{und} \quad (7.27)$$

$$\nu_0^{(*,h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{x} P\{\Theta_h^* > y/x\} + \frac{y}{x^2} E[\Theta_h^* \mathbf{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] \right). \quad (7.28)$$

In Anbetracht des praxisrelevanten Falls, dass die Marginalverteilungsfunktion F_X unbekannt ist, verwenden wir eine empirische Variante der Marginaltransformation in (7.26): Zu einer Stichprobe X_1, \dots, X_{n+h} konstruieren wir die rangtransformierten Zufallsvariablen

$$X_i^{(R,1)} := \frac{n+1}{n+1-R_{i:n}^{(1)}} \quad \text{und} \quad X_j^{(R,2)} := \frac{n+1}{n+1-R_{j:n}^{(2)}},$$

$1 \leq i \leq n, 1+h \leq j \leq n+h$, wobei $R_{i:n}^{(1)}$ den Rang von X_i in X_1, \dots, X_n und $R_{j:n}^{(2)}$ den Rang von X_j in X_{1+h}, \dots, X_{n+h} bezeichnet. Nach Theorem 7.7 beziehungsweise Theorem 7.11 ist dann der Schätzer

$$\hat{\nu}_n^{(\text{tr},h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) := \frac{\sum_{t=1}^n \mathbb{1}\{X_t^{(R,1)} > xu_n, X_{t+h}^{(R,2)} > yu_n\}}{\sum_{t=1}^n \mathbb{1}\{\min\{X_t^{(R,1)}, X_{t+h}^{(R,2)}\} > u_n\}} \quad (7.29)$$

unter den Annahmen (A1*)–(A5*) beziehungsweise (A1**)–(A4**) und (PD) asymptotisch normal für $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$, wenn die Bias-Bedingung (7.16) erfüllt ist. Die jeweiligen Grenzprozess aus Theorem 7.7 und Theorem 7.11 unterscheiden sich jedoch hinsichtlich ihrer Komplexität merklich.

Im Fall der asymptotischen Abhängigkeit von X_0^* und X_h^* ist der Grenzprozess aus Theorem 7.11 unter anderem noch von den partiellen Ableitungen c_x und c_y abhängig. Diese lassen sich, wie bereits für den Parameter der asymptotischen Abhängigkeit λ in Gleichung (7.27) geschehen, anhand des Spektralprozesses $(\Theta_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ ausdrücken: Mit Hilfe von Gleichung (7.28) folgt

$$\begin{aligned} c_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \nu_0^{(*,h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} P\{\Theta_h^* > y/x\} + \frac{y}{x^2} E[\Theta_h^* \mathbb{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{x^2} P\{\Theta_h^* > y/x\} + \frac{1}{x} \left(\frac{\partial}{\partial x} P\{\Theta_h^* > y/x\} \right) - \frac{2y}{x^3} E[\Theta_h^* \mathbb{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} E[\Theta_h^* \mathbb{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] \right) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{x} \left(\frac{\partial}{\partial x} P\{\Theta_h^* > y/x\} \right) + \frac{y}{x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} E[\Theta_h^* \mathbb{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] \right) - \frac{y}{x^3} E[\Theta_h^* \mathbb{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] \right) \\ &\quad - \frac{1}{x} \nu_0^{(*,h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \nu_0^{(*,h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} P\{\Theta_h^* > y/x\} + \frac{y}{x^2} E[\Theta_h^* \mathbb{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} P\{\Theta_h^* > y/x\} \right) + \frac{1}{x^2} E[\Theta_h^* \mathbb{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] + \frac{y}{x^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} E[\Theta_h^* \mathbb{1}\{\Theta_h^* \leq y/x\}] \right) \right). \end{aligned}$$

7.3. Beweise

In diesem Abschnitt werden sämtliche Nachweise der Ergebnisse in Abschnitt 7.1 erbracht. An erster Stelle weisen wir den behaupteten Zusammenhang zwischen Voraussetzungen (A2*), (A3*), (A5*) und (A6*) sowie (A2**), (A3**) und (A6**) nach.

Lemma 7.12. *Aus Voraussetzung (A6*) folgen die Voraussetzungen (A2*), (A3*) und (A5*).*

Beweis. Ersetzt man im Beweis von Lemma 6.6 die Zufallsvektoren $(V_i^{(1)}, V_i^{(2)})$, $i \in \mathbb{N}$, durch die marginaltransformierten Zufallsvektoren $(V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)})$, $i \in \mathbb{N}$, und die Konstante $\tilde{s}_n(j, k)$ durch $\tilde{s}_n^*(j, k)$, so ergeben sich wegen Voraussetzung (A6*) die Voraussetzungen (A2*) und (A3*).

Des Weiteren folgt aus Voraussetzung (A6*) zusammen mit (7.2) für $j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i}^{(*,j)} \neq 0\} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{k=1}^{r_n} P\{\min\{V_i^{(*,j)}, V_k^{(*,j)}\} > x^* u_n\} \\
&= r_n P\{V_0^{(*,j)} > x^* u_n\} + r_n \sum_{k=1}^{r_n} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) P\{\min\{V_0^{(*,j)}, V_k^{(*,j)}\} > x^* u_n\} \\
&= \frac{r_n}{x^* u_n} + \frac{r_n}{x^* u_n} \sum_{k=1}^{r_n} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) x^* u_n P\{\min\{V_0^{(*,j)}, V_k^{(*,j)}\} > x^* u_n\} \\
&\leq \frac{r_n}{x^* u_n} + \frac{r_n}{x^* u_n} \sum_{k=1}^{r_n} P(V_k^{(*,j)} > x^* u_n \mid V_0^{(*,j)} > x^* u_n) \\
&\leq \frac{r_n}{x^* u_n} + \frac{r_n}{x^* u_n} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{s}_n^*(k) \\
&= O\left(\frac{r_n}{u_n}\right), \quad n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

so dass (A5*) erfüllt ist. □

Lemma 7.13. *Aus Voraussetzung (A6**) folgen die Voraussetzungen (A2**) und (A3**).*

Beweis. Aus Voraussetzung (A6**) folgt

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i}^{(*,A)} \neq 0\} \right)^3 \right] \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{r_n} P\left\{ \min \left\{ \max\{V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}\}, \max\{V_j^{(*,1)}, V_j^{(*,2)}\}, \max\{V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\} \right\} > x^* u_n \right\} \\
&\leq r_n v_n^{(*,A)} + 6r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) P\left\{ \min \left\{ \max\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\}, \max\{V_j^{(*,1)}, V_j^{(*,2)}\}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \max\{V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\} \right\} > x^* u_n \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq r_n v_n^{(*,A)} + 6r_n v_n^{(*,A)} \sum_{k=1}^{r_n-1} \sum_{j=1}^k P\left(\min\{\max\{V_j^{(*,1)}, V_j^{(*,2)}\}, \max\{V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\}\} > x^* u_n\right. \\
&\quad \left. \mid \max\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n\right) \\
&\leq r_n v_n^{(*,A)} + 6r_n v_n^{(*,A)} \sum_{1 \leq j \leq k < \infty} \tilde{s}_n^{**}(j, k) \\
&= O(r_n v_n^{(*,A)}), \quad n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

so dass (A3**) erfüllt ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_n^{**}(k, k) &\geq P(\max\{V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\} > x^* u_n \mid \max\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n) \\
&\geq \frac{1}{v_n^{(*,A)}} \max\left\{P\{\max\{V_k^{(*,1)}, V_0^{(*,1)}\} > x^* u_n\}, P\{\max\{V_k^{(*,2)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n\},\right. \\
&\quad \left.P\{\max\{V_k^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* u_n\}, P\{\max\{V_k^{(*,2)}, V_0^{(*,1)}\} > x^* u_n\}\right\}
\end{aligned}$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \tilde{s}_n^{**}(k, k) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{s}_\infty^{**}(k, k) < \infty$, so dass auch (A2**) erfüllt ist. \square

7.3.1. Beweis von Lemma 7.1

Es gilt

$$V_0^{(*,j)} > u \iff 1/u > 1 - F_j(V_0^{(j)}) \iff V_0^{(j)} > F_j^{\leftarrow}(1 - 1/u) =: U_j(u)$$

für alle $u \in [u_0, \infty)$ und $j \in \{1, 2\}$. Nach Voraussetzung ist die Survivalfunktion $1 - F_j$ regulär variierend mit einem Index $-\xi < 0$. Demnach ist die Funktion U_j regulär variierend mit Index $1/\xi > 0$. Folglich existiert zu jedem $x \in (0, \infty)$ eine Funktion $r_{j,x} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r_{j,x}(u) = o(U_j(u))$ für $u \rightarrow \infty$, so dass

$$U_j(xu) = x^{1/\xi} U_j(u) + r_{j,x}(u)$$

für alle $u \in (0, \infty)$ gilt.

Des Weiteren gilt nach Theorem 5.5 für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{x, y \in (\varepsilon, \infty)} \left| \frac{P\{V_0^{(1)} > xu, V_0^{(2)} > yu\}}{P\{\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > u\}} - \nu_0((x, \infty) \times (y, \infty)) \right| = 0.$$

In Verbindung mit $\lim_{u \rightarrow \infty} U_2(u)/U_1(u) = d$ folgt also

$$\begin{aligned}
&\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{V_0^{(*,1)} > xu, V_0^{(*,2)} > yu\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{V_0^{(1)} > U_1(xu), V_0^{(2)} > U_2(yu)\}}{P\{V_0^{(1)} > U_1(u), V_0^{(2)} > U_2(u)\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\left\{V_0^{(1)} > \left(x^{1/\xi} + \frac{r_{1,x}(u)}{U_1(u)}\right)U_1(u), V_0^{(2)} > \left(y^{1/\xi} + \frac{r_{2,y}(u)}{U_2(u)}\right)\frac{U_2(u)}{U_1(u)}U_1(u)\right\}}{P\left\{V_0^{(1)} > U_1(u), V_0^{(2)} > \frac{U_2(u)}{U_1(u)}U_1(u)\right\}} \\
&= \frac{\nu_0((x^{1/\xi}, \infty) \times (dy^{1/\xi}, \infty))}{\nu_0((1, \infty) \times (d, \infty))} \\
&=: \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in (0, \infty)$, da $\nu_0(\partial((z_1, \infty) \times (z_2, \infty))) = 0$ für alle $z_1, z_2 \in (0, \infty)$, $\nu_0((1, \infty) \times (d, \infty)) \geq \nu_0((\max\{1, d\}, \infty)^2) = (\max\{1, d\})^{-\alpha} > 0$ und

$$\min\left\{x^{1/\xi} + \frac{r_{1,x}(u)}{U_1(u)}, y^{1/\xi} + \frac{r_{2,y}(u)}{U_2(u)}\frac{U_2(u)}{U_1(u)}\right\}$$

für hinreichend große u von 0 weg beschränkt ist.

Nach Lemma 5.4 ist damit ν_0^* eindeutig bestimmt. Aus der Homogenität von ν_0 zum Grad $-\alpha$ folgt dann, dass ν_0^* homogen zum Grad $-1/\eta := -1/(\xi/\alpha)$ ist. Ferner folgt aus $\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} \leq V_0^{(j)}$ die Ungleichung $\xi \leq \alpha$, so dass $1/\eta \in [1, \infty)$ gilt. \square

7.3.2. Beweis von Lemma 7.3

Dem Beweis von Lemma 7.1 lässt sich entnehmen, dass

$$V_0^{(*,j)} > u \iff V_0^{(j)} > F_i^{\leftarrow}(1 - 1/u) =: U_j(u)$$

für alle $u \in [u_0, \infty)$ gilt, U_j regulär variierend mit Index $1/\xi > 0$ ist und zu jedem $x \in (0, \infty)$ eine Funktion $r_{j,x} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r_{j,x}(u) = o(U_j(u))$ existiert, so dass

$$U_j(xu) = x^{1/\xi}U_j(u) + r_{j,x}(u)$$

für alle $u \in (0, \infty)$ gilt.

Nach Lemma 5.2 ist die Abbildung $(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \nu_t((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty))$ in jedem Fall stetig, da $\nu_t(\partial((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty))) = 0$ für alle $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in (0, \infty)$ gilt. Mit analoger Argumentation wie im Beweis von Theorem 5.5 lässt sich dann zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in (\varepsilon, \infty)} &\left| \frac{P\{V_0^{(1)} > xu, V_0^{(2)} > yu, V_t^{(1)} > \tilde{x}u, V_t^{(2)} > \tilde{y}u\}}{P\{\min\{V_0^{(1)}, V_0^{(2)}\} > u\}} \right. \\
&\left. - \nu_t((x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right| = 0
\end{aligned}$$

gilt. In Verbindung mit $\lim_{u \rightarrow \infty} U_2(u)/U_1(u) = d$ folgt also

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{V_0^{(*,1)} > xu, V_0^{(*,2)} > yu, V_t^{(*,1)} > \tilde{x}u, V_t^{(*,2)} > \tilde{y}u\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{V_0^{(1)} > U_1(xu), V_0^{(2)} > U_2(yu), V_t^{(1)} > U_1(\tilde{x}u), V_t^{(2)} > U_2(\tilde{y}u)\}}{P\{V_0^{(1)} > U_1(u), V_0^{(2)} > U_2(u)\}} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} P\left\{V_0^{(1)} > \left(x^{1/\xi} + \frac{r_{1,x}(u)}{U_1(u)}\right)U_1(u), V_0^{(2)} > \left(y^{1/\xi} + \frac{r_{2,y}(u)}{U_2(u)}\right)\frac{U_2(u)}{U_1(u)}U_1(u), \right. \\
&\quad \left. V_t^{(1)} > \left(x^{1/\xi} + \frac{r_{1,x}(u)}{U_1(u)}\right)U_1(u), V_t^{(2)} > \left(\tilde{y}^{1/\xi} + \frac{r_{2,\tilde{y}}(u)}{U_2(u)}\right)\frac{U_2(u)}{U_1(u)}U_1(u)\right\} \\
&\quad \times \left(P\left\{V_0^{(1)} > U_1(z), V_0^{(2)} > \frac{U_2(u)}{U_1(u)}U_1(u)\right\}\right)^{-1} \\
&= \frac{\nu_t((x^{1/\xi}, \infty) \times (y^{1/\xi}, \infty) \times (\tilde{x}^{1/\xi}, \infty) \times (\tilde{y}^{1/\xi}, \infty))}{\nu_0((1, \infty) \times (d, \infty))} \\
&=: \nu_t^*((x^{1/\xi}, \infty) \times (y^{1/\xi}, \infty) \times (\tilde{x}^{1/\xi}, \infty) \times (\tilde{y}^{1/\xi}, \infty))
\end{aligned}$$

für alle $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in (0, \infty)$, da $\nu_t(\partial((z_1, \infty) \times (z_2, \infty) \times (z_3, \infty) \times (z_4, \infty))) = 0$ für alle $z_1, z_2, z_3, z_4 \in (0, \infty)$, $\nu_0((1, \infty) \times (d, \infty)) \geq \nu_0((\max\{1, d\}, \infty)^2) = (\max\{1, d\})^{-\alpha} > 0$ und

$$\min \left\{ x^{1/\xi} + \frac{r_{1,x}(u)}{U_1(u)}, y^{1/\xi} + \frac{r_{2,y}(u)}{U_2(u)} \frac{U_2(u)}{U_1(u)}, \tilde{x}^{1/\xi} + \frac{r_{1,\tilde{x}}(u)}{U_2(u)}, \tilde{y}^{1/\xi} + \frac{r_{2,\tilde{y}}(u)}{U_2(u)} \frac{U_2(u)}{U_1(u)} \right\}$$

für hinreichend große u von 0 weg beschränkt ist. \square

7.3.3. Beweis von Proposition 7.4

Sei $j \in \{1, 2\}$ fest gewählt. Wir zeigen zuerst, dass der Prozess $e_n^{(j)} := (e_n^{(j)}(x))_{x \in [x^*, \infty)}$ schwach gegen 0 konvergiert.

Sei $m_n^* := \lfloor n/r_n \rfloor$. Man beachte, dass das asymptotische Verhalten des Prozesses $e_n^{(j)}$ sich nicht ändert, wenn nur die ersten $m_n^* r_n$ Beobachtungen verwendet werden, da nach Annahme (A1*) und wegen $nv_{n,1}^{(*,U)} \leq nP\{V_0^{(*,1)} > u_n\} = n/u_n$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in [x^*, \infty)} \left| e_n^{(j)}(x) - (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^{m_n^* r_n} \mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > xu_n\} - \frac{1}{x} \right) \right| \\
&= \sup_{x \in [x^*, \infty)} (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \frac{u_n}{n} \sum_{i=m_n^* r_n + 1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > xu_n\} \\
&= \frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} \sum_{i=m_n^* r_n + 1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > x^* u_n\} \\
&\leq \frac{1}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}} r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

fast sicher gilt. Im Übrigen folgt aus $m_n^* r_n/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ und $nv_{n,1}^{(*,U)} \leq nP\{V_0^{(*,1)} > u_n\} = n/u_n$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} \left(\frac{n}{xu_n} - \frac{m_n^* r_n}{xu_n} \right) \leq \frac{1}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}} \frac{n - m_n^* r_n}{xu_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sei nun $T_{n,k} := (V_{n,i}^{(*,j)})_{(k-1)r_n+1 \leq i \leq kr_n}$ und definiere die Abbildung $f_x : [0, \infty)^{r_n} \rightarrow [0, \infty)$ mit $f_x(z_1, \dots, z_{r_n}) = \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{z_i > x\}$ für $x \in [x^*, \infty)$. Dann gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$E[f_x(T_{n,k})] = r_n P\{V_0^{(*,1)} > xu_n\} = \frac{r_n}{xu_n}.$$

Für $x \in [x^*, \infty)$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} e_n^{(j)}(x) &= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^{m_n^* r_n} \mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > xu_n\} - \frac{1}{x} \right) + o_P(1) \\ &= \frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} \left(\sum_{i=1}^{m_n^* r_n} \mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > xu_n\} - \frac{m_n^* r_n}{xu_n} \right) + o_P(1) \\ &= \frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} \sum_{k=1}^{m_n^*} (f_x(T_{n,k}) - E[f_x(T_{n,k})]) + o_P(1). \end{aligned}$$

Seien nun $T_{n,k}^* := (\tilde{V}_{n,i}^{(*,j)})_{(k-1)r_n+1 \leq i \leq kr_n}$ unabhängige Kopien von $T_{n,k}$ für $1 \leq k \leq m_n^*$ und

$$\tilde{Z}_{n,k}^{(j)}(x) := \frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} f_x(T_{n,k}^*), \quad x \in [x^*, \infty),$$

$k \in \{1, \dots, m_n^*\}$, stochastische Prozesse. Wir zeigen nun, dass der Prozess

$$W_n^{(j)} := \left(\sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} (\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x) - E[\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x)]) \right)_{x \in [x^*, \infty)},$$

welcher sich nur auf Blöcke $T_{n,k}^*$ bezieht, die einen geraden Index k besitzen, schwach gegen 0 konvergiert. Definiere dazu die zufällige Semimetrik

$$d_n(x_1, x_2) := \left(\sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} (\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_1) - \tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_2))^2 \right)^{1/2}$$

auf $[x^*, \infty)$. Sei des Weiteren $\rho : [x^*, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$ eine Abbildung mit $\rho(x_1, x_2) = x^* |x_1^{-1} - x_2^{-1}|$. Diese beschreibt offensichtlich eine Metrik auf $[x^*, \infty)$ und es lässt sich leicht zeigen, dass ρ den Parameterraum $[x^*, \infty)$ totalbeschränkt (vergleiche Lemma 2.10).

Wir weisen nun die Eigenschaft (i)–(iv) aus Theorem A.4 (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 2.11.1) nach, um die asymptotische Gleichstetigkeit des Prozesses $W_n^{(j)}$ zu folgern:

- (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $s \in \{1, 2\}$ und alle Vektoren $(a_1, \dots, a_{\lfloor m_n^*/2 \rfloor}) \in \{-1, 0, 1\}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor}$ ist die Abbildung $\sup_{\substack{\rho(x_1, x_2) < \delta, \\ x_1, x_2 \in [x^*, \infty)}} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} a_k (\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_1) - \tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_2))^s \right|$ messbar.
- (ii) Für jedes $\tau > 0$ gilt $\sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} E^* [\|\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}\|_\infty^2 \mathbb{1}\{\|\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}\|_\infty > \tau\}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (iii) Für jede Folge $\delta_n \downarrow 0$ gilt $\sup_{\substack{\rho(x_1, x_2) < \delta_n, \\ x_1, x_2 \in [x^*, \infty)}} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} E [(\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_1) - \tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_2))^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(iv) Für jede Folge $\delta_n \downarrow 0$ gilt $\int_0^{\delta_n} \sqrt{\log N(\varepsilon, [x^*, \infty), d_n)} \, d\varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in äußerer Wahrscheinlichkeit.

Nachweis von (i): Die Abbildung $L_{s,a}(x_1, x_2) : \omega \mapsto \left| \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} a_i(\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_1, \omega) - \tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_2, \omega))^s \right|$ ist offensichtlich für alle $x_1, x_2 \in [x^*, \infty)$, $s \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$ und alle Vektoren $(a_1, \dots, a_{\lfloor m_n^*/2 \rfloor}) \in \{-1, 0, 1\}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor}$ messbar. Derweil ist $\mathbb{Q} \cap [x^*, \infty)$ eine dichte Teilmenge von $[x^*, \infty)$, die bekanntermaßen abzählbar ist. Folglich ist auch die Abbildung

$$\sup_{\substack{\rho(x_1, x_2) < \delta, \\ x_1, x_2 \in [x^*, \infty)}} L_{s,a}(x_1, x_2) = \sup_{\substack{\rho(x_1, x_2) < \delta, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \cap [x^*, \infty)}} L_{s,a}(x_1, x_2)$$

messbar, so dass Eigenschaft (i) gilt.

Nachweis von (ii): Aus $nv_{n,1}^{(*,U)} \leq nP\{V_0^{(*,1)} > u_n\} = n/u_n$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ und (A1*) folgt

$$\frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} f_x(T_{n,2k}^*) \leq \frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} r_n \leq \frac{r_n}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

fast sicher. Demzufolge gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} E^* [\|\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}\|_\infty^2 \mathbf{1}\{\|\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}\|_{[x^*, \infty)} > \tau\}] \\ &= \lfloor m_n^*/2 \rfloor E^* \left[\frac{nv_{n,1}^{(*,U)}}{(n/u_n)^2} f_{x^*}^2(T_{n,0}^*) \mathbf{1}\left\{ \frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} f_{x^*}(T_{n,0}^*) > \tau \right\} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

Nachweis von (iii): Nach Voraussetzung (A5*), $P\{V_0^{(*,1)} > u_n\} = 1/u_n$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ und Gleichung (7.10) gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\rho(x_1, x_2) < \delta_n, \\ x_1, x_2 \in [x^*, \infty)}} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} E[(\tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_1) - \tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x_2))^2] \\ &= \frac{nv_{n,1}^{(*,U)}}{(n/u_n)^2} \sup_{\substack{\rho(x_1, x_2) < \delta_n, \\ x_1, x_2 \in [x^*, \infty)}} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} E \left[\left(\sum_{i=(2k-1)r_n+1}^{2kr_n} \mathbf{1}\{\tilde{V}_{n,i}^{(*,j)} \in (x_1 u_n, x_2 u_n]\} \right)^2 \right] \\ &= \frac{nv_{n,1}^{(*,U)}}{(n/u_n)^2} \lfloor m_n^*/2 \rfloor \sup_{\substack{\rho(x_1, x_2) < \delta_n, \\ x_1, x_2 \in [x^*, \infty)}} E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbf{1}\{V_i^{(*,j)} \in (x_1 u_n, x_2 u_n]\} \right)^2 \right] \\ &= \frac{v_{n,1}^{(*,U)} u_n^2}{n} \lfloor m_n^*/2 \rfloor O(r_n/u_n) \\ &= O\left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{P\{V_0^{(*,1)} > u_n\}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Nachweis von (iv): Setze $W_{n,k}^{(j)}(f) = (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} f(T_{n,k}^*) / (n/u_n)$ für $f : [0, \infty)^{r_n} \rightarrow [0, \infty)$. Es gilt dann $W_{n,k}^{(j)}(f_x) = \tilde{Z}_{n,k}^{(j)}(x)$ für alle $x \in [x^*, \infty)$. Mit der zufälligen Semimetrik

$$\tilde{d}_n(f_{x_1}, f_{x_2}) = \left(\sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} \left(W_{n,2k}^{(j)}(f_{x_1}) - W_{n,2k}^{(j)}(f_{x_2}) \right)^2 \right)^{1/2}$$

auf $\mathcal{F}_{x^*} := \{f_x \mid x \in [x^*, \infty)\}$ folgt also

$$N(\varepsilon, [x^*, \infty), d_n) = N(\varepsilon, \mathcal{F}_{x^*}, \tilde{d}_n)$$

für alle $\varepsilon > 0$. Die Funktionenklasse \mathcal{F}_{x^*} ist linear geordnet, so dass nach Beispiel 2.6.1 von van der Vaart und Wellner (1996) diese eine VC-Klasse mit Index $V(\mathcal{F}_{x^*}) = 2$ ist. Ferner beschreibt \tilde{d}_n die L_2 -Metrik hinsichtlich des zufälligen Maßes

$$Q_n := \frac{nv_{n,1}^{(*,U)}}{(n/u_n)^2} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} \varepsilon_{T_{n,2k}^*},$$

so dass nach Theorem 2.6.7 von van der Vaart und Wellner (1996)

$$\begin{aligned} N(\varepsilon, \mathcal{F}_{x^*}, \tilde{d}_n) &= N(\varepsilon, \mathcal{F}_{x^*}, L_2(Q_n)) \\ &\leq \tilde{K} V(\mathcal{F}_{x^*}) (16e)^{V(\mathcal{F}_{x^*})} \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{[0, \infty)^{r_n}} f_{x^*}^2 dQ_n \right)^{1/2} \right)^{2(V(\mathcal{F}_{x^*})-1)} \\ &= K \varepsilon^{-2} \int_{[0, \infty)^{r_n}} f_{x^*}^2 dQ_n \\ &= K \varepsilon^{-2} \frac{nv_{n,1}^{(*,U)}}{(n/u_n)^2} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} f_{x^*}^2(T_{n,2k}^*) \end{aligned} \quad (7.30)$$

für eine hinreichend große Konstante $\tilde{K} > 0$ gilt, wobei $K := 2\tilde{K}(16e)^2$. Man beachte, dass im Fall $\int_{[0, \infty)^{r_n}} f_{x^*}^2 dQ_n = 0$ die Überdeckungszahl gerade gleich 1 ist. Die obere Schranke (7.30) konvergiert für festes $\varepsilon > 0$ stochastisch gegen 0, denn es gilt mit der Markov-Ungleichung, (A5*), $P\{V_0^{(*,1)} > u_n\} = 1/u_n$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ und Gleichung (7.10)

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{nv_{n,1}^{(*,U)}}{(n/u_n)^2} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} f_{x^*}^2(T_{n,2k}^*) > c \right\} &\leq \frac{1}{c} E \left[\frac{nv_{n,1}^{(*,U)}}{(n/u_n)^2} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} f_{x^*}^2(T_{n,2k}^*) \right] \\ &= \frac{nv_{n,1}^{(*,U)}}{c(n/u_n)^2} \lfloor m_n^*/2 \rfloor E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_i^{(*,1)} > x^* u_n\} \right)^2 \right] \\ &= \frac{v_{n,1}^{(*,U)} u_n^2}{cn} \lfloor m_n^*/2 \rfloor O(r_n/u_n) \\ &= O \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{P\{V_0^{(*,1)} > u_n\}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

für $c > 0$. Für jedes $\delta \in (0, 1)$ kann also $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass $N(\varepsilon, \mathcal{F}_{x^*}, \tilde{d}_n) \leq K\varepsilon^{-2}$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt. Damit ergibt sich für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta_n} (\log N(\varepsilon, \mathcal{F}_{x^*}, \tilde{d}_n))^{1/2} d\varepsilon &\leq \int_0^{\delta_n} \log(K) - 2\log(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \left[\log(K)\varepsilon - 2\varepsilon(\log(\varepsilon) - 1) \right]_0^{\delta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Nach Theorem A.4 ist also der Prozess $W_n^{(j)}$ asymptotisch gleichstetig bezüglich ρ .

Ferner gilt für alle $x \in [x^*, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} \tilde{Z}_{n,2k}^{(j)}(x) \right) &= \lfloor m_n^*/2 \rfloor \text{Var}(\tilde{Z}_{n,1}^{(1)}(x)) \\ &\leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor E[(\tilde{Z}_{n,1}^{(1)}(x))^2] \\ &= \frac{\lfloor m_n^*/2 \rfloor n v_{n,1}^{(*,U)}}{(n/u_n)^2} E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > x u_n\} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\lfloor m_n^*/2 \rfloor v_{n,1}^{(*,U)} u_n^2}{n} O(r_n/u_n) \\ &= O \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{P\{V_0^{(*,1)} > u_n\}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

so dass $W_n^{(j)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ schwach für alle $x \in [x^*, \infty)$ gilt. Daraus ergibt sich dann insbesondere, dass die endlich-dimensionalen Randverteilung von $W_n^{(j)}$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergieren: Für alle $\tau > 0$, $d \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_d \in [x^*, \infty)$ gilt

$$P\{\max\{|W_n^{(j)}(x_1)|, \dots, |W_n^{(j)}(x_d)|\} > \tau\} \leq \sum_{i=1}^d P\{|W_n^{(j)}(x_i)| > \tau\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Kombination dieser beiden Resultate liefert nach Theorem 2.1 von Kosorok (2008) die Prozesskonvergenz $W_n^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Wir folgern nun mittels der schwachen Konvergenz von $W_n^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ die Prozesskonvergenz des Teils des Prozesses $e_n^{(j)}$, der sich auf Blöcke mit geraden Index bezieht, das heißt

$$\tilde{e}_n^{(j)}(x) := \frac{(n v_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \lfloor m_n^*/2 \rfloor}{n/u_n} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} (f_x(T_{n,2k}) - E[f_x(T_{n,2k})]), \quad x \in [x^*, \infty).$$

Bezeichne hierfür $\mathcal{B}_{n,i}^{(l,j)}$ die von $(V_{n,h}^{(*,j)})_{i \leq h \leq l}$ erzeugte σ -Algebra. Da $\mathcal{B}_{n,1}^{(l,j)} \subseteq \mathcal{B}_{n,1}^{(l,U)}$ gilt, folgt durch Anwendung des totalen Erwartungswerts, der Dreiecksungleichung und der Turmeigen-

schaft des bedingten Erwartungswerts

$$\begin{aligned}
E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^{(n,U)}} |P(B | \mathcal{B}_{n,1}^{(l,U)}) - P(B)| \right] &\geq E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^{(n,U)}} E \left[|P(B | \mathcal{B}_{n,1}^{(l,U)}) - P(B)| \mid \mathcal{B}_{n,1}^{(l,j)} \right] \right] \\
&\geq E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^{(n,U)}} \left| E \left[P(B | \mathcal{B}_{n,1}^{(l,U)}) \mid \mathcal{B}_{n,1}^{(l,j)} \right] - P(B) \right| \right] \\
&\geq E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^{(n,j)}} |P(B | \mathcal{B}_{n,1}^{(l,j)}) - P(B)| \right].
\end{aligned}$$

Demnach ist die Zeitreihe $((V_{n,l}^{(*,j)})_{1 \leq l \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$ β -mischend mit Koeffizienten $\beta_{n,k}^{(*,j)} \leq \beta_{n,k}^{(*,U)}$. Nun sind die Blöcke $T_{n,2k}$, $k \in \{1, \dots, \lfloor m_n^*/2 \rfloor\}$, um jeweils r_n Beobachtungen separiert, so dass sich nach Lemma 2 von Eberlein (1984), (A1*) und $\beta_{n,l_n}^{(*,U)} \leq \beta_{n,l_n}^{(*,j)}$ die Konvergenz

$$\|\mathcal{L}((T_{n,2k})_{1 \leq k \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor}) - \mathcal{L}((T_{n,2k}^*)_{1 \leq k \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor})\|_{\text{TV}} \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor \beta_{n,r_n}^{(*,j)} \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor \beta_{n,l_n}^{(*,U)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (7.31)$$

ergibt, wobei $\|\mu_1 - \mu_2\|_{\text{TV}} = \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mu_1(A) - \mu_2(A)|$ den Totalvariationsabstand zwischen zwei Maßen μ_1 und μ_2 auf (E, \mathcal{A}) beschreibt.

Bezeichne nun $g : \mathbb{B}(l^\infty([x^*, \infty))) \rightarrow \mathbb{B}([0, \infty)^{r_n})^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor}$ eine Abbildung mit

$$g(A) := \left\{ z \in ([0, \infty)^{r_n})^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} \mid \left(\frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}}{n/u_n} \sum_{k=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} (f_x(u_n^{-1}z_k) - E[f_x(T_{n,2k})]) \right)_{x \in [x^*, \infty)} \in A \right\},$$

wobei g wegen der Messbarkeit von f_x wohldefiniert ist. Nach (7.31) gilt dann

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{L}(\tilde{e}_n^{(j)}) - \mathcal{L}(W_n^{(j)})\|_{\text{TV}} \\
&= \sup_{A \in \mathbb{B}(l^\infty([x^*, \infty)))} |\mathcal{L}(\tilde{e}_n^{(j)})(A) - \mathcal{L}(W_n^{(j)})(A)| \\
&= \sup_{A \in \mathbb{B}(l^\infty([x^*, \infty)))} |\mathcal{L}((T_{n,2k})_{1 \leq k \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor})(g(A)) - \mathcal{L}((T_{n,2k}^*)_{1 \leq k \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor})(g(A))| \\
&\leq \|\mathcal{L}((T_{n,2k})_{1 \leq k \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor}) - \mathcal{L}((T_{n,2k}^*)_{1 \leq k \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor})\|_{\text{TV}} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

so dass $\tilde{e}_n^{(j)} - W_n^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in (äußerer) Wahrscheinlichkeit folgt. Nach dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) ergibt sich also

$$\tilde{e}_n^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

in (äußerer) Wahrscheinlichkeit. Auf analoge Weise folgt, dass der Teil des Prozesse $e_n^{(j)}$, der sich auf Blöcke mit ungeraden Index bezieht, schwach gegen 0 konvergiert. Nach dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) folgt dann, dass der gesamte Prozess $e_n^{(j)}$ gegen 0 konvergiert.

Nach Proposition 6.1 folgt mit den Annahmen (A1*)–(A4*) die schwache Konvergenz der Tail-Array-Sums $(\tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ mit Kovarianzstruktur wie in (6.9) unmittelbar, wobei die Grenzmaße ν_t durch ν_t^* , $t \in \mathbb{N}_0$, ersetzt werden. Die Semimetrik in (6.17) wird dann zu

$$\begin{aligned} & \rho^*(\phi_{x,y}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}) \\ & := \nu_0^* \left(\left(\frac{\min\{x, \tilde{x}\}}{x^*}, \frac{\max\{x, \tilde{x}\}}{x^*} \right) \times (1, \infty) \right) + \nu_0^* \left((1, \infty) \times \left(\frac{\min\{y, \tilde{y}\}}{x^*}, \frac{\max\{y, \tilde{y}\}}{x^*} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.32)$$

modifiziert wird. Mit erneuter Anwendung des Lemmas von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) folgt dann die schwache Konvergenz der gemeinsamen Verteilung der stochastischen Prozesse $(\tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$, $e_n^{(1)}$ und $e_n^{(2)}$. \square

7.3.4. Beweis von Lemma 7.5

Sei $j \in \{1, 2\}$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$ derart groß, so dass nach Gleichung (7.2) die Gleichheit $P\{V_0^{(*,1)} > x^* u_n\} = 1/(x^* u_n)$ gilt. Sei des Weiteren $a_\varepsilon := a + \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Angenommen die schwache Konvergenz

$$(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,j)} > \frac{1}{s} u_n \right\} - s \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (7.33)$$

gilt. Nun ist die Abbildung $G_n(\cdot, \omega) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, mit

$$G_n(0, \omega) := 0 \quad \text{und} \quad G_n(s, \omega) := \frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,j)}(\omega) > \frac{1}{s} u_n \right\} \quad \text{für } s > 0,$$

offensichtlich monoton steigend in $s \in [0, \infty)$. Ferner besitzt $G_n(\cdot, \omega)$ die verallgemeinerte Inverse

$$\begin{aligned} G_n^{\leftarrow}(s, \omega) & := \inf \left\{ r \in [0, \infty) \mid \frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,j)}(\omega) > \frac{1}{r} u_n \right\} \geq s \right\} \\ & = \begin{cases} u_n (V_{n - \lceil (n/u_n)s \rceil : n}^{(*,j)}(\omega))^{-1} & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Theorem 1 von Vervaat (1972) gilt die schwache Konvergenz (7.33) genau dann, wenn

$$(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(u_n (V_{n - \lceil (n/u_n)s \rceil : n}^{(*,j)})^{-1} - s \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (7.34)$$

schwach gilt.

Nun sind die Pfade

$$s \mapsto u_n (V_{n - \lceil (n/u_n)s \rceil : n}^{(*,j)}(\omega))^{-1}$$

P -fast sicher Element von $\mathbb{D} := \{g \in l^\infty([1/a_\varepsilon, 1/x^*]) \mid g > 0\}$. Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow l^\infty([1/a_\varepsilon, 1/x^*])$ mit

$f(g) = 1/g$ und bezeichne Id die Identitätsabbildung auf $[1/a_\varepsilon, 1/x^*]$. Für alle Folgen $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ mit $t_n \in [0, \infty)$, $h, h_n \in l^\infty([1/a_\varepsilon, 1/x^*])$, die $Id + t_n h_n \in \mathbb{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen, folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(Id + t_n h_n) - f(Id)}{t_n} &= \frac{1}{t_n Id + t_n^2 h_n} - \frac{1}{t_n Id} \\ &= -\frac{t_n h_n}{Id(t_n Id + t_n^2 h_n)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{h}{Id^2}. \end{aligned}$$

Demzufolge ist das Differential von f in Id , geschrieben als f'_{Id} , eine lineare und stetige Abbildung, so dass f Hadamard-differenzierbar in Id tangential zu \mathbb{D} ist.

Nach der funktionellen Delta-Methode (Kosorok, 2008, Theorem 2.8) gilt dann wegen (7.34) die schwache Konvergenz

$$(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(f \left(\left(u_n (V_{n-\lfloor (n/u_n)s \rfloor : n}^{(*,j)}) \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \right) - f(Id) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'_{Id}(0),$$

das heißt

$$(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(u_n^{-1} V_{n-\lfloor (n/u_n)s \rfloor : n}^{(*,j)} - \frac{1}{s} \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{schwach.}$$

Die obige Konvergenz ist gerade gleichbedeutend zu

$$\sup_{x \in [x^*, a_\varepsilon]} \left| u_n^{-1} V_{n-\lfloor (n/xu_n) \rfloor : n}^{(*,j)} - x \right| = o_P((nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2}). \quad (7.35)$$

Wir zeigen nun, dass sich $V_{n-\lfloor n/(xu_n) \rfloor : n}^{(*,j)}$ in Gleichung (7.35) durch $V_{\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor : n}^{(*,j)}$ ersetzen lässt, wenn a_ε durch a ersetzt wird. Man beachte dafür, dass $\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor = n + 1 - \lfloor (n+1)/(xu_n) \rfloor$ für alle $x \in [x^*, a_\varepsilon]$ gilt. Wird $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt, so ist für alle $x \in [x^*, a_\varepsilon]$ die Gaußklammer $\lfloor (n+1)/(xu_n) \rfloor$ entweder gleich $\lfloor n/(xu_n) \rfloor$ oder gleich $\lfloor n/(xu_n) \rfloor + 1$. Für $\delta_{n,x} := (x^{-1} - u_n/n)^{-1} - x$ gilt dann

$$\left\lceil \frac{n}{(x + \delta_{n,x})u_n} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{u_n} \left(\frac{1}{x} - \frac{u_n}{n} \right) \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{xu_n} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{xu_n} \right\rceil - 1.$$

Des Weiteren ist der Term $\delta_{n,x}$ wegen $\partial \delta_{n,x} / \partial x = (1 - xu_n/n)^{-2} - 1 > 0$ (für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$) monoton steigend in x . Folglich gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sup_{x \in [x^*, a]} \delta_{n,x} \leq \delta_{n,a} < \varepsilon. \quad (7.36)$$

Damit folgt dann

$$(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} \left| u_n^{-1} V_{n-\lfloor n/(xu_n) \rfloor : n}^{(*,j)} - u_n^{-1} V_{n+1-\lfloor n/(xu_n) \rfloor : n}^{(*,j)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} \left| u_n^{-1} V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil; n}^{(*,j)} - u_n^{-1} V_{n-\lceil n/((x+\delta_{n,x})u_n) \rceil; n}^{(*,j)} \right| \\
&\leq \sup_{x \in [x^*, a]} \left| (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (u_n^{-1} V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil; n}^{(*,1)} - x) \right| \\
&\quad + \sup_{x \in [x^*, a]} \left| (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (u_n^{-1} V_{n-\lceil n/((x+\delta_{n,x})u_n) \rceil; n}^{(*,1)} - (x + \delta_{n,x})) \right| + \sup_{x \in [x^*, a]} (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \delta_{n,x}.
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Der erste Summand der rechten Seite von (7.37) konvergiert wegen (7.35) in (äußerer) Wahrscheinlichkeit gegen 0. Wegen (7.36) gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in [x^*, a]} \left| (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (u_n^{-1} V_{n-\lceil n/((x+\delta_{n,x})u_n) \rceil; n}^{(*,1)} - (x + \delta_{n,x})) \right| \\
&\leq (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \sup_{\tilde{x} \in [x^*, a_\varepsilon]} \left| u_n^{-1} V_{n-\lceil n/(\tilde{x}u_n) \rceil; n}^{(*,1)} - \tilde{x} \right|,
\end{aligned}$$

so dass wegen (7.35) die rechte Seite von (7.37) in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Eine Taylorapproximation der Funktion $f_x(t) := (x^{-1} - t)^{-1} - x$ in 0 liefert $f_x(t) = -x^2 t + O(t^2)$. Daraus folgt $\delta_{n,x} = f_x(u_n/n) = O(u_n/n)$, so dass wegen $u_n = 1/P\{V_0^{(*,1)} > u_n\} \leq 1/v_{n,1}^{(*,U)}$ und (A1*) auch der letzte Summand der rechten Seite von (7.37) gegen 0 konvergiert:

$$\sup_{x \in [x^*, a]} (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \delta_{n,x} \leq (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \delta_{n,a} = (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} O(u_n/n) = o((nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

7.3.5. Beweis von Theorem 7.7

Für den Nachweis von Theorem 7.7 weisen wir zunächst folgendes Hilfsresultat nach.

Lemma 7.14. *Es sei ν_0^* ein Maß auf $((0, \infty)^2, \mathbb{B}((0, \infty)^2))$, das homogen vom Grad $-1/\eta$ für ein $\eta \in (0, 1]$ ist. Bezeichne $c(x, y) := \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon \in (0, x^*)$ eine Konstante $K_\varepsilon > 0$, so dass für alle $s, r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*

$$\sup_{x, y \in [x^*, \infty)} |c(x + s, y + r) - c(x, y)| \leq K_\varepsilon (|s| + |r|) \tag{7.38}$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen im Folgenden anhand einer Fallunterscheidung, dass Ungleichung (7.38) gilt. Bevor wir damit beginnen, definieren wir $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(s) = s^{-1}(1 - (1 + s/x^*)^{-1/\eta})$. Die Funktion f erfüllt

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(1 + \frac{s}{x^*}\right)^{-1/\eta} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{\eta x^*} s + O(s^2)\right) = \frac{1}{\eta x^*},$$

wobei in der zweiten Gleichheit eine Taylorapproximation der Funktion $s \mapsto (1 + s/x^*)^{-1/\eta}$ in 0 angewandt wurde. Demnach ist f stetig und beschränkt.

1. Fall: $s, r \geq 0$: Für $s, r \geq 0$ und $m_{x,y} = \max\{(x + s)/x, (y + r)/y\}$ gilt $(m_{x,y}x, \infty) \times (m_{x,y}y, \infty) \subseteq (x + s, \infty) \times (y + r, \infty)$. In der folgenden Rechnung wird ausgenutzt, dass c homogen

vom Grad $-1/\eta$ ist, die Abbildung $x \mapsto 1 - (1 + s/x)^{-1/\eta}$ monoton fallend auf $[x^*, \infty)$ ist, und eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $|f| \leq C$ gilt. Es folgt dann

$$\begin{aligned}
& \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} |c(x+s, y+r) - c(x, y)| \\
& \leq \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} (1 - m_{x,y}^{-1/\eta})c(x, y) \\
& \leq c(x^*, x^*) \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} \left(1 - \min \left\{ \left(\frac{x}{x+s}\right)^{1/\eta}, \left(\frac{y}{y+r}\right)^{1/\eta} \right\}\right) \\
& = (x^*)^{-1/\eta} \max \left\{ \sup_{x \in [x^*, \infty)} 1 - \left(1 + \frac{s}{x}\right)^{-1/\eta}, \sup_{y \in [x^*, \infty)} 1 - \left(1 + \frac{r}{y}\right)^{-1/\eta} \right\} \\
& = (x^*)^{-1/\eta} \max\{sf(s), rf(r)\} \\
& \leq C(x^*)^{-1/\eta}(s+r). \tag{7.39}
\end{aligned}$$

2. *Fall: $s, r \leq 0$:* Im Fall $s, r \leq 0$ ergibt sich mit $\bar{m}_{x,y} = \min\{(x+s)/x, (y+r)/y\}$ die Inklusion $(x+s, \infty) \times (y+r, \infty) \subseteq (\bar{m}_{x,y}x, \infty) \times (\bar{m}_{x,y}y, \infty)$. In folgender Rechnung wird erneut ausgenutzt, dass c homogen vom Grad $-1/\eta$ ist, die Abbildung $x \mapsto (1 + s/x)^{-1/\eta} - 1$ monoton fallend auf $[x^*, \infty)$ ist, und eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $|f| \leq C$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
& \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} |c(x+s, y+r) - c(x, y)| \\
& \leq \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} (\bar{m}_{x,y}^{-1/\eta} - 1)c(x, y) \\
& = c(x^*, x^*) \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} \left(\max \left\{ \left(\frac{x}{x+s}\right)^{1/\eta}, \left(\frac{y}{y+r}\right)^{1/\eta} \right\} - 1\right) \\
& = (x^*)^{-1/\eta} \max \left\{ \sup_{x \in [x^*, \infty)} \left(1 + \frac{s}{x}\right)^{-1/\eta} - 1, \sup_{y \in [x^*, \infty)} \left(1 + \frac{r}{y}\right)^{-1/\eta} - 1 \right\} \\
& \leq (x^*)^{-1/\eta} \max\{-sf(s), -rf(r)\} \\
& \leq C(x^*)^{-1/\eta}(|s| + |r|). \tag{7.40}
\end{aligned}$$

3. *Fall: $s < 0 < r$:* Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, (7.39) und (7.40) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} |c(x+s, y+r) - c(x, y)| \\
& \leq \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} |c(x+s, y+r) - c(x, y+r)| + \sup_{x,y \in [x^*, \infty)} |c(x, y+r) - c(x, y)| \\
& \leq C(x^*)^{-1/\eta}(|s| + r).
\end{aligned}$$

Auf analoge Weise folgt dann im Fall $r < 0 < s$

$$\sup_{x,y \in [x^*, \infty)} |c(x+s, y+r) - c(x, y)| \leq C(x^*)^{-1/\eta}(s + |r|).$$

Insgesamt folgt also Ungleichung (7.38). \square

Beweis von Theorem 7.7. Sei $x, y \in [x^*, a]$ und $\tau \in (0, 1)$ beliebig klein. Setze der Übersichtlichkeit halber

$$\begin{aligned} c(x, y) &:= \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)), \\ p_n(x, y) &:= P\{V_0^{(*,1)} > xu_n, V_0^{(*,2)} > yu_n\} \quad \text{und} \\ d_n(x, y) &:= P\{V_0^{(*,1)} > su_n, V_0^{(*,2)} > tu_n\}_{(s,t)=(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y))}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.5 gilt

$$\sup_{x \in [x^*, a]} |t_{n,j}(x) - x| = o_P((nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2}). \quad (7.41)$$

Zu jedem $\delta > 0$ kann also $n \in \mathbb{N}$ derart groß gewählt werden, so dass

$$t_{n,j}(x) \in [x - \delta, x + \delta]$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ gilt. Damit lässt sich $d_n(x, y)$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ wie folgt abschätzen:

$$p_n(x + \delta, y + \delta) \leq d_n(x, y) \leq p_n(x - \delta, y - \delta).$$

Aus der Stetigkeit von $x \mapsto c(x, 1)$ auf $(0, \infty)$, die sich aus Theorem 5.5 ergibt, folgt dann: Zu beliebigen $\varepsilon_1 > 0$ kann $\delta > 0$ derart gewählt werden kann, so dass

$$\begin{aligned} \frac{c(x + \delta, y + \delta)}{c(x, y)} &= \left(\frac{y + \delta}{y}\right)^{-1/\eta} \frac{c((x + \delta)/(y + \delta), 1)}{c(x/y, 1)} > 1 - \varepsilon_1, \\ \frac{c(x - \delta, y - \delta)}{c(x, y)} &= \left(\frac{y - \delta}{y}\right)^{-1/\eta} \frac{c((x - \delta)/(y - \delta), 1)}{c(x/y, 1)} < 1 + \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Aus der regulären Variation von $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auf $(0, \infty)^2$ folgt demnach für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{p_n(x + \delta, y + \delta)}{p_n(x, y)} > 1 - \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \frac{p_n(x - \delta, y - \delta)}{p_n(x, y)} < 1 + \varepsilon_1.$$

Daraus resultiert

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{d_n(x, y)}{p_n(x, y)} > 1 + \varepsilon_1\right\} &\leq P\{d_n(x, y) > p_n(x - \delta, y - \delta)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ P\left\{\frac{d_n(x, y)}{p_n(x, y)} > 1 - \varepsilon_1\right\} &\geq P\{d_n(x, y) > p_n(x + \delta, y + \delta)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$\frac{d_n(x, y)}{p_n(x, y)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.} \quad (7.42)$$

Mit der regulären Variation von $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ folgt dann

$$\frac{d_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} = \frac{d_n(x, y) p_n(x, y)}{p_n(x, y) v_{n,1}^{(*,U)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c(x, y) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.} \quad (7.43)$$

Mittels Proposition 7.4 und $t_{n,j}(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ in Wahrscheinlichkeit lässt sich zeigen, dass die Zufallsvariable $\tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)})$ schwach gegen $Z^{(*,U)}(\phi_{1,1})$ konvergiert. Wir weisen dies zu einem späteren Zeitpunkt des Beweises nach (siehe Gleichung (7.49)). Mit Hilfe der schwachen Konvergenz $\tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z^{(*,U)}(\phi_{1,1})$, (7.43) und (7.9) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U)}} \tilde{S}_n(1, 1) &= \frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U)}} (\tilde{S}_n^*(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - nd_n(1, 1)) + \frac{d_n(1, 1)}{v_{n,1}^{(*,U)}} \\ &= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2} \tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}) + \frac{d_n(1, 1)}{v_{n,1}^{(*,U)}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} c(1, 1) = 1 \end{aligned}$$

in Wahrscheinlichkeit. Damit lässt sich der Schätzer $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}$ wie folgt entwickeln:

$$\begin{aligned} & (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) - c(x, y)) \\ &= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \frac{\tilde{S}_n(x, y) - c(x, y) \tilde{S}_n(1, 1)}{\tilde{S}_n(1, 1)} \\ &= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \frac{\tilde{S}_n^*(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y) \tilde{S}_n^*(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1))}{\tilde{S}_n(1, 1)} \\ &= \left[(nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2} (\tilde{S}_n^*(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - nd_n(x, y) - c(x, y) (\tilde{S}_n^*(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - nd_n(1, 1))) \right. \\ &\quad \left. + (nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2} n (d_n(x, y) - c(x, y) d_n(1, 1)) \right] / \left[(nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1} \tilde{S}_n(1, 1) \right] \\ &= \tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - c(x, y) \tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}) \\ &\quad + (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{d_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(x, y) \frac{d_n(1, 1)}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right) + o_P(1). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Wir zeigen im ersten Schritt, dass der dritte Summand der rechten Seite von (7.44) asymptotisch vernachlässigbar ist. Nach Gleichung (7.41) kann $n \in \mathbb{N}$ derart groß gewählt werden, so dass

$$\sup_{x \in [x^*, a]} |t_{n,j}(x) - x| < \varepsilon \quad (7.45)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ gilt. Dann ist für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \frac{d_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) \right| \leq \sup_{x, y \in [x^*, a]} \left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > xu_n, V_0^{(*,2)} > yu_n\}}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(x, y) \right|$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ erfüllt. Folglich gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left| \frac{d_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(x, y) \frac{d_n(1, 1)}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right| \\ & \leq \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} |c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y)c(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1))| \\ & \quad + \sup_{x,y \in [x^*, a]} (1 + c(x, y))(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > xu_n, V_0^{(*,2)} > yu_n\}}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(x, y) \right| \end{aligned} \quad (7.46)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Nach der Bias-Bedingung (7.16) ist der zweite Summand der rechten Seite von (7.46) wegen $\sup_{x,y \in [x^*, a]} c(x, y) = (x^*)^{-1/\eta}$ asymptotisch vernachlässigbar. Für den ersten Summand der rechten Seite von (7.46) halten wir zunächst fest, dass wegen der Monotonie des Grenzmaßes ν_0^* , (7.45) und Lemma 7.14

$$\begin{aligned} & \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y)| \\ & \leq \max \left\{ \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| c\left(x + \sup_{\bar{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}^*(\bar{x}) - \bar{x}|, y + \sup_{\bar{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}^*(\bar{y}) - \bar{y}|\right) - c(x, y) \right|, \right. \\ & \quad \left. \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| c\left(x - \sup_{\bar{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}^*(\bar{x}) - \bar{x}|, y - \sup_{\bar{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}^*(\bar{y}) - \bar{y}|\right) - c(x, y) \right| \right\} \\ & \leq K \left(\sup_{\bar{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}(\bar{x}) - \bar{x}| + \sup_{\bar{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}(\bar{y}) - \bar{y}| \right) \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $K > 0$ eine geeignete Konstante bezeichnet. Es ergibt sich also wegen $c(1, 1) = 1$

$$\begin{aligned} & \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} |c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y)c(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1))| \\ & \leq \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(|c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y)| + c(x, y) |c(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - 1| \right) \\ & \leq K(1 + (x^* + \varepsilon)^{-1/\eta})(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\sup_{x \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}(x) - x| + \sup_{y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}(y) - y| \right) \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 7.5 ist die rechte Seite obiger Ungleichung asymptotisch vernachlässigbar und somit auch der dritte Summand der rechten Seite von (7.44).

Wir bestimmen nun das asymptotische Verhalten der restlichen Summanden der rechten Seite von (7.44). Setze dazu

$$W_n := (W_n((x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y})))_{x,y,\bar{x},\bar{y},\tilde{x},\tilde{y} \in [x^*, \infty)} \quad \text{und} \quad W := (W((x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y})))_{x,y,\bar{x},\bar{y},\tilde{x},\tilde{y} \in [x^*, \infty)}$$

mit

$$\begin{aligned} W_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}) & := \tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{x,y}) - c(\bar{x}, \bar{y}) \tilde{Z}_n^{(*,U)}(\phi_{\bar{x},\bar{y}}), \\ W(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}) & := Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}) - c(\bar{x}, \bar{y}) Z^{(*,U)}(\phi_{\bar{x},\bar{y}}). \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) gilt wegen Theorem 5.5, Proposition 7.4 und Lemma 7.5 die Prozesskonvergenz

$$(W_n, (t_{n,1}(x))_{x \in [x^*, a]}, (t_{n,2}(y))_{y \in [x^*, a]}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (W, (x)_{x \in [x^*, a]}, (y)_{y \in [x^*, a]}).$$

Nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4) existieren Versionen der Prozesse $(W_n, (t_{n,1}(x))_{x \in [x^*, a]}, (t_{n,2}(y))_{y \in [x^*, a]})$, $n \in \mathbb{N}$, und $(W, (x)_{x \in [x^*, a]}, (y)_{y \in [x^*, a]})$, so dass die obige Konvergenz fast sicher gilt. Der Übersichtlichkeit halber unterscheiden wir zwischen den Bezeichnungen dieser Versionen nicht. Die Konvergenz

$$(W_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)))_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (W(x, y, x, y, 1, 1))_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]}$$

ist genau dann für die Skorokhod-Versionen erfüllt, wenn

$$\sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - W(x, y, x, y, 1, 1)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher}$$

gilt. Nun gilt die folgende Abschätzung mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - W(x, y, x, y, 1, 1)| \\ & \leq \sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) \\ & \quad - W(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1))| \\ & \quad + \sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - W(x, y, x, y, 1, 1)| \\ & \leq \sup_{x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, a]} |W_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}) - W(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y})| \\ & \quad + \sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - W(x, y, x, y, 1, 1)|. \end{aligned} \tag{7.47}$$

Der erste Summand der rechten Seite von (7.47) ist wegen der fast sicheren Konvergenz $W_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W$ asymptotisch vernachlässigbar. Nach Theorem 7.19 von Kosorok (2008) besitzt der Grenzprozess $(Z^{(*, U)}(\phi_{x, y}))_{x, y \in [x^*, \infty)}$ fast sicher gleichmäßig stetige Pfade bezüglich der Semimetrik ρ^* aus (7.32). Ferner gilt: Zu jedem $\delta \in (0, 1)$ kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass

$$\max \left\{ \sup_{x \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}(x) - x|, \sup_{y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}(y) - y| \right\} < \varepsilon$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt. Nach Lemma 7.14 ergibt sich also für hinreichend

große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \rho^*(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}, \phi_{x,y}) \\
&= x^* \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left(\nu_0^*((\min\{t_{n,1}(x), x\}, \max\{t_{n,1}(x), x\}) \times (x^*, \infty)) \right. \\
&\quad \left. + \nu_0^*((x^*, \infty) \times (\min\{t_{n,2}(y), y\}, \max\{t_{n,2}(y), y\})) \right) \\
&= x^* \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left(c(\min\{t_{n,1}(x), x\}, x^*) - c(\max\{t_{n,1}(x), x\}, x^*) \right. \\
&\quad \left. + c(x^*, \min\{t_{n,2}(y), y\}) - c(x^*, \max\{t_{n,2}(y), y\}) \right) \\
&\leq x^* \left(\sup_{x \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| c\left(x - \sup_{\tilde{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}(\tilde{x}) - \tilde{x}|, x^*\right) - c(x, x^*) \right| \right. \\
&\quad + \sup_{x \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| c\left(x + \sup_{\tilde{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}(\tilde{x}) - \tilde{x}|, x^*\right) - c(x, x^*) \right| \\
&\quad + \sup_{y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| c\left(x^*, y - \sup_{\tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}(\tilde{y}) - \tilde{y}|\right) - c(x^*, y) \right| \\
&\quad \left. + \sup_{y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| c\left(x^*, y + \sup_{\tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}(\tilde{y}) - \tilde{y}|\right) - c(x^*, y) \right| \right) \\
&\leq 2x^* K \left(\sup_{\tilde{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}(\tilde{x}) - \tilde{x}| + \sup_{\tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}(\tilde{y}) - \tilde{y}| \right)
\end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$, wobei $K > 0$ eine geeignete Konstante beschreibt. Aus der fast sicheren Konvergenz $((t_{n,1}(x))_{x \in [x^*, a]}, (t_{n,2}(y))_{y \in [x^*, a]}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ((x)_{x \in [x^*, a]}, (y)_{y \in [x^*, a]})$ folgt demnach

$$\sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \rho^*(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}, \phi_{x,y}) = o_P(1).$$

Demzufolge gilt

$$\sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,U)}(\phi_{x,y})| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.48)$$

Man beachte, dass für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ insbesondere

$$\begin{aligned}
& \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,U)}(\phi_{x,y})| \\
&\leq \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)})| \\
&\quad + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,U)}(\phi_{x,y})| \\
&\leq \sup_{x,y \in [x^*, a]} |Z_n^{(*,U)}(\phi_{x,y}) - Z^{(*,U)}(\phi_{x,y})| + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,U)}(\phi_{x,y})|
\end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$. Nach Proposition 7.4 und Gleichung (7.48) gilt

also stets

$$\sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z_n^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,U)}(\phi_{x,y})| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.49)$$

Ferner folgt aus Gleichung (7.48), dass auch der zweite Summand asymptotisch vernachlässigbar ist:

$$\begin{aligned} & \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - W(x, y, x, y, 1, 1)| \\ & \leq \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,U)}(\phi_{x,y})| \\ & \quad + (x^*)^{-1/\eta} |Z^{(*,U)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}) - Z^{(*,U)}(\phi_{1,1})| \\ & = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also die schwache Konvergenz

$$(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) - c(x, y))_{x,y \in [x^*, \infty)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (W(x, y, x, y, 1, 1))_{x,y \in [x^*, \infty)}.$$

Kovarianzstruktur des Grenzprozesses

Die Kovarianzen des Grenzprozesses $(W(x, y, x, y, 1, 1))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ lassen sich mit Hilfe von Gleichung (7.15) bestimmen. Der Übersichtlichkeit halber setzen wir $c_t(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) := \nu_t^*(x, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)$ für $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(W(x, y, x, y, 1, 1), W(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, 1, 1)) \\ & = \text{Cov}(Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}), Z^{(*,U)}(\phi_{\tilde{x}, \tilde{y}})) - c(x, y) \text{Cov}(Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}), Z^{(*,U)}(\phi_{1,1})) \\ & \quad - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{Cov}(Z^{(*,U)}(\phi_{1,1}), Z^{(*,U)}(\phi_{\tilde{x}, \tilde{y}})) + c(x, y) c(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{Var}(Z^{(*,U)}(\phi_{1,1})) \\ & = c(\max\{x, \tilde{x}\}, \max\{y, \tilde{y}\}) + \sum_{t=1}^{\infty} (c_t(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) + c_t(\tilde{x}, \tilde{y}, x, y)) \\ & \quad - c(x, y) \left[c(\max\{x, 1\}, \max\{y, 1\}) + \sum_{t=1}^{\infty} (c_t(x, y, 1, 1) + c_t(1, 1, x, y)) \right] \\ & \quad - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left[c(\max\{\tilde{x}, 1\}, \max\{\tilde{y}, 1\}) + \sum_{t=1}^{\infty} (c_t(\tilde{x}, \tilde{y}, 1, 1) + c_t(1, 1, \tilde{x}, \tilde{y})) \right] \\ & \quad + c(x, y) c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left[1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} c_t(1, 1, 1, 1) \right] \\ & = c(\max\{x, \tilde{x}\}, \max\{y, \tilde{y}\}) + c(x, y) c(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ & \quad - c(x, y) c(\max\{x, 1\}, \max\{y, 1\}) - c(\tilde{x}, \tilde{y}) c(\max\{\tilde{x}, 1\}, \max\{\tilde{y}, 1\}) \\ & \quad + \sum_{t=1}^{\infty} \left[c_t(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) + c_t(\tilde{x}, \tilde{y}, x, y) + 2c(x, y) c(\tilde{x}, \tilde{y}) c_t(1, 1, 1, 1) \right. \\ & \quad \left. - c(x, y) (c_t(x, y, 1, 1) + c_t(1, 1, x, y)) - c(\tilde{x}, \tilde{y}) (c_t(\tilde{x}, \tilde{y}, 1, 1) + c_t(1, 1, \tilde{x}, \tilde{y})) \right]. \end{aligned} \quad (7.50)$$

□

7.3.6. Beweis von Proposition 7.9

Wir zeigen im Folgenden anhand von Theorem A.2, dass die Folge der Prozesse

$$\tilde{Z}_{n,x^*}^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) := \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{v_n^{(*,A)}} \right)^{-1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) = (nv_n^{(*,A)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)}) - E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)})]),$$

$(x, y) \in T$, schwach gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z_{x^*}^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in T}$ mit Kovarianzstruktur in (7.55) konvergiert. Aus der regulären Variation von $\max\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\}$ folgt dann

$$(\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in T} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in T}$$

schwach, wobei $Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) := (x^*)^{-1/2} Z_{x^*}^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)})$. Die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses $(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in T}$ ist in den Gleichung (7.63)–(7.71) angegeben.

Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen

*Nachweis von (C1) und (C2) [unter (A1**) und (A3**) (bzw. (A2**)]:* Die minimale Einhüllende $\phi_{x^*,x^*}^{(or)}$ von $\Phi^{(or)}$ ist sowohl messbar als auch beschränkt. Ferner beschreibt die Abbildung $\rho^{(or)} : (\Phi^{(or)})^2 \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\rho^{(or)}(\phi_{x,y}^{(or)}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}) := \left| \frac{x^*}{x} - \frac{x^*}{\tilde{x}} \right| + \left| \frac{x^*}{y} - \frac{x^*}{\tilde{y}} \right| \quad (7.51)$$

offensichtlich eine Metrik auf $\Phi^{(or)}$. Des Weiteren lassen sich zu beliebigen $\delta > 0$ Konstanten $x_1, \dots, x_n \in [x^*, \infty)$ mit $n = \lceil 1/\delta \rceil$ und $x_0 := x^* < x_1 < \dots < x_n$ derart wählen, dass

$$\left| \frac{x^*}{x_i} - \frac{x^*}{x_{i+1}} \right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{und} \quad \frac{x^*}{x_n} < \frac{\delta}{2}$$

für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt. Demzufolge überdecken $A_{i,j} := \{\psi \in \Phi^{(or)} \mid \rho^{(or)}(\psi, \phi_{x_i, x_j}^{(or)}) < \delta\}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, die Funktionenklasse $\Phi^{(or)}$ vollständig, so dass $\Phi^{(or)}$ durch $\rho^{(or)}$ totalbeschränkt wird.

Aus Voraussetzung (A3**) folgt derweil

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i}^{(*,A)} \neq 0\} \right)^2 \right] = O(r_n v_n^{(*,A)}), \quad n \rightarrow \infty,$$

so dass aus Voraussetzung (A1**) und Theorem A.2 die Bedingungen (C1), (D1), (D2') und (C2) folgen. Tatsächlich lässt sich leicht zeigen, dass die obige Ordnung auch wegen Voraussetzung (A2**) gilt.

Nachweis von (C3) [unter (A1**), (A2**), (A4**)]: Aus der strikten Stationarität des marginaltransformierten Prozesses $(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ folgt

$$\begin{aligned} & Cov\left(\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)}), \sum_{i=1}^{r_n} \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)}) \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,j}^{(*,A)})] - r_n^2 E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)})] E[\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)})] \\ &= r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) \left[E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}) \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)})] + E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}) \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)})] \right] \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} & + r_n E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}) \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)})] - r_n^2 E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)})] E[\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)})]. \\ &= r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) \left[P(\{V_k^{(*,1)} > xu_n \text{ oder } V_k^{(*,2)} > yu_n\} \right. \\ & \quad \cap \{V_0^{(*,1)} > \tilde{x}u_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > \tilde{y}u_n\}) \\ & \quad \left. + P(\{V_0^{(*,1)} > xu_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > yu_n\} \cap \{V_k^{(*,1)} > \tilde{x}u_n \text{ oder } V_k^{(*,2)} > \tilde{y}u_n\}) \right] \\ & + r_n P(\{V_0^{(*,1)} > xu_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > yu_n\} \cap \{V_0^{(*,1)} > \tilde{x}u_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > \tilde{y}u_n\}) \\ & - r_n^2 P\{V_0^{(*,1)} > xu_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > yu_n\} P\{V_0^{(*,1)} > \tilde{x}u_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > \tilde{y}u_n\}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Definiere für $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$

$$\begin{aligned} B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) &:= \left((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty) \right) \cup \left((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty) \right) \\ & \cup \left([0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty) \right) \cup \left([0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) &:= \left((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times [0, \infty) \right) \cup \left((x, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \right) \cup \left((\tilde{x}, \infty) \times (y, \infty) \right) \\ & \cup \left([0, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty) \right), \end{aligned}$$

$$D_2(x, y) := \left((x, \infty) \times [0, \infty) \right) \cup \left([0, \infty) \times (y, \infty) \right).$$

Gleichung (7.53) liefert dann

$$\begin{aligned} C_n(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) &:= \frac{1}{r_n v_n^{(*,A)}} Cov\left(\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)}), \sum_{i=1}^{r_n} \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)})\right) \\ &= \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) \frac{1}{v_n^{(*,A)}} \left[P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}, V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}) \in B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})\} \right. \\ & \quad \left. + P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}, V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}) \in B(\tilde{x}, \tilde{y}, x, y)\} \right] \\ & + \frac{1}{v_n^{(*,A)}} P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})\} \\ & - \frac{r_n}{v_n^{(*,A)}} P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in D_2(x, y)\} P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in D_2(\tilde{x}, \tilde{y})\}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Man beachte, dass wegen $P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in D_2(x, y)\} \leq v_n^{(*,A)}$ und (A1**) der letzte Summand der rechten Seite von (7.54) in jedem Fall asymptotisch vernachlässigbar ist.

Da die topologischen Ränder der Menge $D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})$ und $D_2(x, y)$ für $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$ sich stets als Vereinigung von kartesischen Produktmengen zusammensetzen, die mindestens eine Einpunktmenge beinhalten, folgt nach Lemma 5.2 die Identität $\nu_0^*(\partial D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) = \nu_0^*(\partial D_2(x, y)) = 0$ (vergleiche Bemerkung 5.3). Auf analoge Weise lässt sich zeigen, dass die topologischen Ränder der Mengen $B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})$ keine Masse bezüglich ν_t^* , $t \in \mathbb{N}$, besitzen. Wegen der regulären Variation von $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auf $(0, \infty)^2$, Voraussetzung (A4**) und Gleichung (7.20) ergeben sich deshalb die folgenden Konvergenzen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_n^{(*,A)}} P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}, V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}) \in B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^*}{2\lambda^{-1} - 1} \nu_t^*(B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})), \\ & \frac{1}{v_n^{(*,A)}} P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^*}{2\lambda^{-1} - 1} \nu_0^*(D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})), \\ & \frac{1}{v_n^{(*,A)}} P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in D_2(x, y)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^*}{2\lambda^{-1} - 1} \nu_0^*(D_2(x, y)) \end{aligned}$$

für alle $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$ und alle $t \in \mathbb{N}$. Unterdessen liefert Annahme (A2**) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) \frac{1}{v_n^{(*,A)}} P\{u_n^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}, V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}) \in B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})\} \\ & \leq \frac{1}{v_n^{(*,A)}} (P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_k^{(*,1)}\} > x^* u_n\} + P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\} > x^* u_n\} \\ & \quad + P\{\min\{V_0^{(*,2)}, V_k^{(*,1)}\} > x^* u_n\} + P\{\min\{V_0^{(*,2)}, V_k^{(*,2)}\} > x^* u_n\}) \\ & \leq 4s_n^{**}(k), \end{aligned}$$

so dass wegen (7.54) und des Satzes von Pratt (1960) die Konvergenz

$$C_n(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^*}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\nu_0^*(D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*(B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) + \nu_k^*(B(\tilde{x}, \tilde{y}, x, y)) \right) \right] \quad (7.55)$$

für alle $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$ gilt.

Asymptotische Gleichstetigkeit

Nachweis von (D1) und (D2') [unter (A1**) und (A3**) (bzw. (A2**))]: Siehe Abschnitt zum Nachweis von (C1) und (C2).

Nachweis von (D3) [unter (A2**)]: Seien $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$. Analog zu Gleichung (7.52) folgt

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} (\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)})) \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= 2r_n \sum_{k=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{k}{r_n}\right) E[(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}))(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}))] \\
&\quad + r_n E[(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}))^2].
\end{aligned}$$

Sei nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x < \tilde{x}$. Dann gilt für $y < \tilde{y}$

$$\begin{aligned}
&\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,k}^{(or)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,k}^{(or)}) \\
&= \mathbf{1}\{u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \leq \tilde{y} \text{ oder } u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \leq \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \in (y, \tilde{y}]\}. \quad (7.56)
\end{aligned}$$

Im Fall $y \geq \tilde{y}$ gilt

$$\begin{aligned}
&|\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,k}^{(or)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,k}^{(or)})| \\
&\leq \mathbf{1}\{u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \leq \tilde{y} \text{ oder } u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \leq \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \in (\tilde{y}, y]\}. \quad (7.57)
\end{aligned}$$

Offensichtlich unterscheiden sich die Indikatorfunktionen auf der rechten Seite von (7.56) und (7.57) konzeptionell nicht. Sei deshalb fortan $y < \tilde{y}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&E[(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}))(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}))] \\
&= P\{\{u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \leq \tilde{y} \text{ oder } u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \leq \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \in (y, \tilde{y}]\} \\
&\quad \cap \{u_n^{-1}V_0^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_0^{(*,2)} \leq \tilde{y} \text{ oder } u_n^{-1}V_0^{(*,1)} \leq \tilde{x}, u_n^{-1}V_0^{(*,2)} \in (y, \tilde{y}]\}\} \\
&\leq P\{u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \leq \tilde{y}, u_n^{-1}V_0^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_0^{(*,2)} \leq \tilde{y}\} \\
&\quad + P\{u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \leq \tilde{y}, u_n^{-1}V_0^{(*,1)} \leq \tilde{x}, u_n^{-1}V_0^{(*,2)} \in (y, \tilde{y}]\} \\
&\quad + P\{u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \leq \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \in (y, \tilde{y}], u_n^{-1}V_0^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}], u_n^{-1}V_0^{(*,2)} \leq \tilde{y}\} \\
&\quad + P\{u_n^{-1}V_k^{(*,1)} \leq \tilde{x}, u_n^{-1}V_k^{(*,2)} \in (y, \tilde{y}], u_n^{-1}V_0^{(*,1)} \leq \tilde{x}, u_n^{-1}V_0^{(*,2)} \in (y, \tilde{y}]\}. \quad (7.58)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite der obigen Ungleichung (7.58) ist sowohl durch den Term

$$\begin{aligned}
&P\{\min\{V_k^{(*,1)}, V_0^{(*,1)}\} > x^*u_n\} + P\{\min\{V_k^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^*u_n\} \\
&\quad + P\{\min\{V_k^{(*,2)}, V_0^{(*,1)}\} > x^*u_n\} + P\{\min\{V_k^{(*,2)}, V_0^{(*,2)}\} > x^*u_n\} \\
&\leq 4v_n^{(*,A)}s_n^{**}(k) \quad (7.59)
\end{aligned}$$

nach oben beschränkt (wegen Annahme (A2**)) als auch durch den Term

$$2(P\{u_n^{-1}V_0^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}]\} + P\{u_n^{-1}V_0^{(*,2)} \in (y, \tilde{y}]\}).$$

Man beachte, dass nach Gleichung (7.2) für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $P\{u_n^{-1}V_0^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}]\} = 1/(xu_n) - 1/(\tilde{x}u_n)$ gilt. Für fest gewähltes $M \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ folgt dann

$$\frac{1}{v_n^{(*,A)}} \sum_{k=0}^{M-1} E[(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}))(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}))]$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2M \frac{(x^* u_n)^{-1}}{v_n^{(*,A)}} \left(\frac{P\{u_n^{-1} V_0^{(*,1)} \in (x, \tilde{x}]\}}{(x^* u_n)^{-1}} + \frac{P\{u_n^{-1} V_0^{(*,1)} \in (y, \tilde{y}]\}}{(x^* u_n)^{-1}} \right) \\
&= 2M \frac{(x^* u_n)^{-1}}{v_n^{(*,A)}} \left(\frac{x^*}{x} - \frac{x^*}{\tilde{x}} + \frac{x^*}{y} - \frac{x^*}{\tilde{y}} \right) \\
&\leq 2M \frac{(x^* u_n)^{-1}}{v_n^{(*,A)}} \rho^{(or)}(\phi_{x^*,y}^{(or)}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2M}{2-\lambda} \rho^{(or)}(\phi_{x,y}^{(or)}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}) \\
&< \frac{2M}{2-\lambda} \delta
\end{aligned} \tag{7.60}$$

für alle $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$, die $\rho^{(or)}(\phi_{x,y}^{(or)}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}) < \delta$ erfüllen. Ferner gilt mit der Ungleichung (7.59) und mit Annahme (A2**)

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n^{(*,A)}} \sum_{k=M}^{r_n-1} E[(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,k}^{(*,A)}))(\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,0}^{(*,A)}))] \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{k=M}^{r_n-1} s_n^{**}(k) \\
&\leq 4 \sum_{k=M}^{\infty} s_{\infty}^{**}(k) < \infty.
\end{aligned} \tag{7.61}$$

Die rechte Seite von (7.61) kann also beliebig klein gewählt werden, indem man M hinreichend groß wählt. Mit hinreichend kleiner Wahl von $\delta > 0$ kann die rechte Seite von (7.60) dann ebenfalls beliebig klein gewählt werden, so dass

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(x,y), (\tilde{x},\tilde{y}) \in T, \\ \rho^{(*,or)}((x,y), (\tilde{x},\tilde{y})) < \delta}} \frac{1}{r_n v_n^{(*,A)}} E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} (\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)}) - \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A)})) \right)^2 \right] = 0$$

gilt, wobei $\rho^{(*,or)}((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) := \rho^{(or)}(\phi_{x,y}^{(or)}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})$.

Nachweis von (D5): Definiere für $(x, y) \in T$ die Abbildungen $f_{x,y}^{(r_n, or)} : [0, \infty)^{2r_n} \rightarrow [0, \infty)$ mit $f_{x,y}^{(r_n, or)}(z) = \sum_{i=1}^{r_n} \phi_{x,y}^{(or)}(z_i)$, wobei $z = (z_1, \dots, z_{r_n})$. Sei dann $\mathcal{F}_{r_n}^{(or)} := \{f_{x,y}^{(r_n, or)} \mid (x, y) \in T\}$ die zugehörige Funktionsklasse und $\rho_{\mathcal{F}}^{(or)} : (\mathcal{F}_{r_n}^{(or)})^2 \rightarrow [0, \infty)$ mit $\rho_{\mathcal{F}}^{(or)}(f_{x,y}^{(r_n, or)}, f_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(r_n, or)}) = \rho^{(or)}(\phi_{x,y}^{(or)}, \phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})$ eine entsprechende Semimetrik.

Nun ist jede Funktion in $\rho_{\mathcal{F}}^{(or)}$ eindeutig durch ihre Parameter $(x, y) \in T$ festgelegt. Folglich konvergiert eine Folge von Funktionen in $\mathcal{F}_{r_n}^{(or)}$ genau dann, wenn die entsprechenden Parameter konvergieren. Demnach ist $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^{(or)} := \{f_{x,y}^{(r_n, or)} \mid (x, y) \in T \cap (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})^2\}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von $\mathcal{F}_{r_n}^{(or)}$ hinsichtlich der von $\rho_{\mathcal{F}}^{(or)}$ erzeugten Topologie, so dass $\mathcal{F}_{r_n}^{(or)}$ separabel ist.

Unterdessen ist die Abbildung $L(f, g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L(f, g)(\omega) = \sum_{j=1}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor} e_j(f(T_{n,j}^*(\omega)) - g(T_{n,j}^*(\omega)))^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $(e_i)_{1 \leq i \leq \lfloor m_n^*/2 \rfloor} \in \{-1, 0, 1\}^{\lfloor m_n^*/2 \rfloor}$ und $k \in \{1, 2\}$ messbar, wobei $m_n^* := \lceil n/r_n \rceil$ und $T_{n,j}^*$ unabhängige Kopien von $T_{n,j} := (V_{n,i}^{(*,A)})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$ seien. Aus der Identität

$$\sup_{f, g \in \mathcal{F}_{r_n}^{(or)}, \rho_{\mathcal{F}}^{(or)}(f, g) < \delta} L(f, g) = \sup_{f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^{(or)}, \rho_{\mathcal{F}}^{(or)}(f, g) < \delta} L(f, g)$$

folgt schließlich Bedingung (D5).

*Nachweis von (D6) [unter (A1**) und (A3**)]:* Der Beweis von Bedingung (D6) kann im Wesentlich analog zum Beweis von Bedingung (D6) für Proposition 6.1 geführt werden, da die verwendete Beweistechnik auch für die Funktionenklasse $\Phi^{(or)}$ anwendbar ist.

Definiere die Menge $[0, \infty)_{\cup} := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} [0, \infty)^{2l}$ mit σ -Algebra $\mathcal{A}_{\cup} = \sigma(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{B}([0, \infty)^{2l})$. Sei $\mathcal{F}_{\cup}^{(or)} = \{f_{x,y}^{(or)} \mid (x, y) \in T\}$ mit $f_{x,y}^{(or)} : [0, \infty)_{\cup} \rightarrow \mathbb{N}_0$,

$$f_{x,y}^{(or)}(z) = \sum_{i=1}^l \phi_{x,y}^{(or)}(z_i),$$

wobei $z = (z_1, \dots, z_l) \in [0, \infty)^{2l}$ mit $l \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{F}_r^{(or)} = \{f_{x,y}^{(r,or)} \mid (x, y) \in T\}$ mit $f_{x,y}^{(r,or)} : [0, \infty)^{2r} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $f_{x,y}^{(r,or)}(z) = f_{x,y}^{(or)}(z)$ für $z \in [0, \infty)^{2r}$ und $r \in \mathbb{N}$. Sei des Weiteren

$$d_n(f, g) = \left(\frac{1}{nv_n^{(*,A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} (f(T_{n,j}^*) - g(T_{n,j}^*))^2 \right)^{1/2}$$

eine zufällige Semimetrik auf $\mathcal{F}_{\cup}^{(or)}$ (bzw. $\mathcal{F}_{r_n}^{(or)}$), wobei $m_n^* := \lfloor n/r_n \rfloor$ und die Terme $T_{n,j}^* := (\tilde{V}_{n,i}^{(*,A)})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$, $1 \leq j \leq m_n^*$, stochastisch unabhängige Kopien der Blöcke $T_{n,j} := (V_{n,i}^{(*,A)})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}$, $1 \leq j \leq m_n^*$, beschreiben. Mit anderen Worten: d_n ist die L_2 -Semimetrik auf $\mathcal{F}_{\cup}^{(or)}$ hinsichtlich des diskreten Maßes

$$\bar{Q}_n := \frac{1}{nv_n^{(*,A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \varepsilon_{T_{n,j}^*},$$

wobei $\varepsilon_{T_{n,j}^*}$ das Dirac-Maß im Punkt $T_{n,j}^*$ beschreibt.

Bezeichne $B_{x,y} = \{(z_1, z_2) \in [0, \infty)^2 \mid z_1 > x \text{ oder } z_2 > y\}$ für $(x, y) \in T$, so dass die Gleichung $f_{x,y}^{(r,or)}(z) = \sum_{i=1}^r \mathbf{1}\{z_i \in B_{x,y}\}$ gilt. Die Menge

$$\begin{aligned} M_{x,y}^{(r)} &:= \{(\lambda, z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)^{2r} \mid \lambda < f_{x,y}^{(r,or)}(z)\} \\ &= \bigcup_{j=0}^r (\infty, j) \times \{z \in [0, \infty)^{2r} \mid f_{x,y}^{(r,or)}(z) = j\} \end{aligned}$$

beschreibt den Subgraphen von $f_{x,y}^{(r,or)}$. Sei nun $A = \{(\lambda^{(l)}, a_1^{(l)}, \dots, a_r^{(l)}) \mid 1 \leq l \leq m\} \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)^{2r}$ eine beliebige m -elementige Menge mit $a_i^{(l)} = (a_{i,1}^{(l)}, a_{i,2}^{(l)})$. Wenn $a_i^{(l)} \notin B_{x,y} \Delta B_{\tilde{x},\tilde{y}}$ für alle $1 \leq i \leq r, 1 \leq l \leq m$ vorliegt, dann gilt die Gleichheit $f_{x,y}^{(r)}(a_1^{(l)}, \dots, a_r^{(l)}) = f_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(r)}(a_1^{(l)}, \dots, a_r^{(l)})$ für alle $l \in \{1, \dots, m\}$. Daraus folgt also $M_{x,y}^{(r)} \cap A = M_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(r)} \cap A$.

Die Indexmenge T wird durch die Geraden

$$\{(a_{i,1}^{(l)}, y) \mid y \in [x^*, \infty)\} \quad \text{und} \quad \{(x, a_{i,2}^{(l)}) \mid x \in [x^*, \infty)\},$$

$1 \leq i \leq r, 1 \leq l \leq m$, in höchstens $(mr + 1)^2$ Rechteckmengen zerlegt. Ferner gilt für die symmetrische Differenz

$$\begin{aligned} B_{x,y} \Delta B_{\tilde{x},\tilde{y}} &= \{z \in [0, \infty)^2 \mid (z_1 > x \text{ oder } z_2 > y) \text{ und } (z_1 \leq \tilde{x} \text{ und } z_2 \leq \tilde{y})\} \\ &\quad \cup \{z \in [0, \infty)^2 \mid (z_1 > \tilde{x} \text{ oder } z_2 > \tilde{y}) \text{ und } (z_1 \leq x \text{ und } z_2 \leq y)\} \\ &= \{z \in [0, \infty)^2 \mid z_1 \in (x, \tilde{x}], z_2 \leq \tilde{y} \text{ oder } z_1 \leq \tilde{x}, z_2 \in (y, \tilde{y}] \\ &\quad \text{oder } z_1 \in (\tilde{x}, x], z_2 \leq y \text{ oder } z_1 \leq x, z_2 \in (\tilde{y}, y]\}. \end{aligned}$$

Wenn also $a_{i,1}^{(l)} \notin (x, \tilde{x}] \cup (\tilde{x}, x]$ und $a_{i,2}^{(l)} \notin (y, \tilde{y}] \cup (\tilde{y}, y]$ gilt, dann ist $a_i^{(l)} \notin B_{x,y} \Delta B_{\tilde{x},\tilde{y}}$. Damit enthält $B_{x,y} \Delta B_{\tilde{x},\tilde{y}}$ keinen der Punkte $a_i^{(l)}$, $1 \leq i \leq r, 1 \leq l \leq m$, wenn (x, y) und (\tilde{x}, \tilde{y}) in derselben Rechteckmenge liegen. Das bedeutet, dass in jeder Rechteckmenge die Identität $M_{x,y}^{(r)} \cap A = M_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(r)} \cap A$ erfüllt ist. Die Menge A wird also nicht zerschlagen, wenn $(mr + 1)^2 < 2^m$ gilt. Aus dem Beweis von Proposition 2.1 folgt, dass der VC-Index dann höchstens $4 \log r$ ist. Nach Theorem A.1 gilt dann

$$N\left(\varepsilon \left(\int_{[0, \infty)^{2r}} (f_{x^*, x^*}^{(r,or)})^2 dQ \right)^{1/2}, \mathcal{F}, L_2(Q)\right) \leq K_1 r^{16} \varepsilon^{-K_2 \log r}$$

für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ und alle Wahrscheinlichkeitsmaße Q auf $([0, \infty)^{2r}, \mathbb{B}([0, \infty)^{2r}))$, die die Ungleichung $\int_{[0, \infty)^{2r}} (f_{x^*, x^*}^{(r,or)})^2 dQ > 0$ erfüllen, wobei $K_1, K_2 > 0$ geeignete Konstanten seien.

Bedingung (D6) kann von nun an unter Verwendung von Annahme (A1**) und (A3**) vollkommen analog zu dem Beweis von Bedingung (D6) in Proposition 6.1 nachgewiesen werden. Der Vollständigkeit halber ist der restliche Beweis von Bedingung (D6) angegeben.

Definiere $N_r := \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) \leq r\}$ und

$$Q_{n,r} := \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) \leq r\} \varepsilon_{\tilde{T}_{n,j}^*},$$

wobei $\tilde{T}_{n,i}^*$ ein Zufallsvektor der Länge r ist, der alle von 0 verschiedene Einträge von $T_{n,i}$ umfasst, und sonst mit 0 gefüllt ist. Der Form halber wird im Fall, dass $T_{n,j}^*$ mehr als r von 0 verschiedene Einträge enthält, dieser auf die ersten r von 0 verschiedenen Einträge reduziert. Nach Annahme (A1**) gilt

$$P\{N_r = 0\} = P\{f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) > r \text{ für alle } j \in \{1, \dots, m_n\}\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq P\{\mathbb{1}\{\max\{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}\} > x^*u_n\} > r/r_n \text{ für mind. ein } i \in \{1, \dots, r\}\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{r_n} P\{\mathbb{1}\{\max\{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}\} > x^*u_n\} > r/r_n\} \\
&\leq r_n v_n^{(*,A)} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Die Distanz zwischen $g, h \in \mathcal{F}$ hinsichtlich d_n kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
d_n^2(g, h) &= \frac{1}{nv_n^{(*,A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} (g(T_{n,j}^*) - h(T_{n,j}^*))^2 \\
&\leq \frac{N_r}{nv_n^{(*,A)}} \int_{[0, \infty)^{2r}} (g - h)^2 \, dQ_{n,r} + \frac{1}{nv_n^{(*,A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) > r\}
\end{aligned}$$

für alle $r_n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$R_{n,\varepsilon} := \min \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{nv_n^{(*,A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) > r\} < \frac{\varepsilon^2}{2} \right\}$$

für $\varepsilon \in (0, 1)$. Dann gilt

$$d_n^2(g, h) \leq \frac{N_{R_{n,\varepsilon}}}{nv_n^{(*,A)}} \int_{[0, \infty)^{2R_{n,\varepsilon}}} (g - h)^2 \, dQ_{n,R_{n,\varepsilon}} + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Gilt nun

$$\int_{[0, \infty)^{2R_{n,\varepsilon}}} (g - h)^2 \, dQ_{n,R_{n,\varepsilon}} \leq \frac{nv_n^{(*,A)}}{2N_{R_{n,\varepsilon}}} \varepsilon^2 =: \xi_n^2,$$

so folgt

$$d_n^2(g, h) \leq \varepsilon^2.$$

Damit gilt

$$N(\varepsilon_0, \mathcal{F}_{\cup}^{(or)}, d_n) \leq N(\xi_n, \mathcal{F}_{\cup}^{(or)}, L_2(Q_{n,R_{n,i,\varepsilon_0}})).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[0, \infty)^{2R_{n,\varepsilon}}} \left(f_{x^*, x^*}^{(R_{n,\varepsilon}, or)} \right)^2 \, dQ_{n,R_{n,\varepsilon}} &= \frac{1}{N_{R_{n,\varepsilon}}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \left(f_{x^*, x^*}^{(R_{n,\varepsilon}, or)}(\tilde{T}_{n,j}^*) \right)^2 \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) \leq R_{n,\varepsilon}\} \\
&\leq \frac{R_{n,\varepsilon}^2}{N_{R_{n,\varepsilon}}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n,j}^*) > 0\}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
& N\left(\xi_n, \mathcal{F}_{\cup}^{(or)}, L_2(Q_{n, R_{n, \varepsilon}})\right) \\
& \leq K_1 R_{n, \varepsilon}^{16} \left(\xi_n \left(\int_{[0, \infty)^{2R_{n, \varepsilon}}} \left(f_{x^*, x^*}^{(R_{n, \varepsilon}, or)} \right)^2 dQ_{n, R_{n, \varepsilon}} \right)^{-1/2} \right)^{-K_2 \log(R_{n, \varepsilon})} \\
& \leq K_1 R_{n, \varepsilon}^{16} \left(\frac{nv_n^{(*, A)} \varepsilon^2}{2R_{n, \varepsilon}^2 \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n, j}^*) > 0\}} \right)^{-\frac{1}{2} K_2 \log(R_{n, \varepsilon})} \\
& \leq K_1 R_{n, \varepsilon}^{16} \left(\frac{\varepsilon}{2R_{n, \varepsilon}} \left(\frac{1}{2nv_n^{(*, A)}} \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}\{T_{n, j}^* \neq 0\} \right)^{-1/2} \right)^{-K_2 \log(R_{n, \varepsilon})}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung und Annahme (A1**) folgt

$$\begin{aligned}
& P\left\{ \sum_{j=1}^{m_n^*} \mathbb{1}\{T_{n, j}^* \neq 0\} \geq 2nv_n^{(*, A)} \right\} \\
& \leq P\left\{ \sum_{j=1}^{m_n^*} (\mathbb{1}\{T_{n, j}^* \neq 0\} - P\{T_{n, j}^* \neq 0\}) \geq 2nv_n^{(*, A)} - m_n^* r_n v_n^{(*, A)} \right\} \\
& \leq \frac{m_n^* \text{Var}(\mathbb{1}\{T_{n, 1}^* \neq 0\})}{(nv_n^{(*, A)})^2} \\
& \leq \frac{m_n^* P\{T_{n, 1}^* \neq 0\}}{(nv_n^{(*, A)})^2} \\
& \leq \frac{m_n^* r_n}{n^2 v_n^{(*, A)}} \\
& \leq \frac{1}{nv_n^{(*, A)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

da $P\{T_{n, 1}^* \neq 0\} \leq r_n v_n^{(*, A)}$ gilt. Damit gilt

$$N(\varepsilon, \mathcal{F}_{\cup}^{(or)}, d_n) \leq K_1 R_{n, \varepsilon}^{16} \left(\frac{\varepsilon}{2R_{n, \varepsilon}} \right)^{-K_2 \log(R_{n, \varepsilon_0})}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit, die gegen 1 konvergiert.

Wir zeigen nun, dass die Zufallsvariable $R_{n, \varepsilon}$ nicht zu schnell anwächst, wenn ε gegen 0 strebt. Nach Bedingung (A3**) können zu jedem $\eta > 0$ Konstanten $M, \tau > 0$ gewählt werden, so dass

$$\begin{aligned}
& P\left\{ \frac{1}{nv_n^{(*, A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n, j}^*) \right)^2 \mathbb{1}\left\{ f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n, j}^*) > M\varepsilon^{-(2+\tau)/\delta} \right\} > \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ für ein } 0 < \varepsilon \leq 1 \right\} \\
& = P\left\{ \frac{1}{nv_n^{(*, A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \left(f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n, j}^*) \right)^2 \mathbb{1}\left\{ f_{x^*, x^*}^{(r_n, or)}(T_{n, j}^*) > M2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} > \frac{2^{-2(l+1)}}{2} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \text{für ein } l \in \mathbb{N}_0 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} P \left\{ \frac{1}{nv_n^{(*,A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \left(f_{x^*,x^*}^{(r_n,or)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbb{1} \left\{ f_{x^*,x^*}^{(r_n,or)}(T_{n,j}^*) > M2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} > \frac{2^{-2(l+1)}}{2} \right\} \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{2l+3} E \left[\frac{1}{nv_n^{(*,A)}} \sum_{j=1}^{m_n^*} \left(f_{x^*,x^*}^{(r_n,or)}(T_{n,j}^*) \right)^2 \mathbb{1} \left\{ f_{x^*,x^*}^{(r_n,or)}(T_{n,j}^*) > M2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} \right] \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+3}}{nv_n^{(*,A)}} m_n^* \left(E \left[\left(f_{x^*,x^*}^{(r_n,or)}(T_{n,1}^*) \right)^{2(1+\delta/2)} \right] \right)^{2/(2+\delta)} \\
&\quad \times \left(P \left\{ f_{x^*,x^*}^{(r_n,or)}(T_{n,1}^*) > M2^{l(2+\tau)/\delta} \right\} \right)^{\delta/(2+\delta)} \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+3}}{nv_n^{(*,A)}} m_n^* E \left[\left(f_{x^*,x^*}^{(r_n,or)}(T_{n,1}^*) \right)^{2+\delta} \right] \left(M2^{l(2+\tau)/\delta} \right)^{-\delta} \\
&\leq K_3 M^{-\delta} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\tau} \\
&< \eta
\end{aligned} \tag{7.62}$$

gilt, wobei für die Ungleichungskette sowohl die Hölder'sche Ungleichung als auch die allgemeine Markov-Ungleichung angewandt wurden, und $K_3 > 0$ eine geeignete Konstante ist. Es folgt, dass $R_{n,\varepsilon} \leq M\varepsilon^{-(2+\tau)/\delta}$ für alle $\varepsilon \in (0, 1]$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \eta$ erfüllt. Nach dem Beweis von Proposition 6.1 ergibt sich daraus, dass Bedingung (D6) erfüllt ist.

Kovarianzen von $(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}))_{(x,y) \in T}$

Nach Gleichung (7.55) besitzt der Grenzprozess $(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}))_{(x,y) \in T}$ also die Kovarianzstruktur

$$\begin{aligned}
&Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\
&= (x^*)^{-1} Cov(Z_{x^*}^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z_{x^*}^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\
&= \frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\nu_0^*(D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*(B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) + \nu_k^*(B(\tilde{x}, \tilde{y}, x, y)) \right) \right].
\end{aligned}$$

Im Nachfolgenden sind die Kovarianzen $Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}))$ für sämtlich Indexkombinationen $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T = [x^*, \infty]^2 \setminus \{\infty, \infty\}$ angegeben.

Für $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$:

$$\frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\nu_0^*(D_1(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*(B(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})) + \nu_k^*(B(\tilde{x}, \tilde{y}, x, y)) \right) \right]. \tag{7.63}$$

Für $x, \tilde{x} \in [x^*, \infty)$ und $y = \tilde{y} = \infty$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty)) + \nu_k^*((x, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty)) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2 - \lambda} \frac{x^*}{\max\{x, \tilde{x}\}}.
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Für $y, \tilde{x} \in [x^*, \infty)$ und $x = \tilde{y} = \infty$:

$$\frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty)) + \nu_k^*([0, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty)) \right) + \nu_0^*((\tilde{x}, \infty) \times (y, \infty)) \right]. \quad (7.65)$$

Für $y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$ und $x = \infty$ gilt

$$\frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty) \cup [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty)) + \nu_k^*([0, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \cup [0, \infty) \times (y, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right) + \nu_0^*((\tilde{x}, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty)) \right]. \quad (7.66)$$

Für $y, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$ und $x = \tilde{x} = \infty$ gilt

$$\frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*([0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty)) + \nu_k^*([0, \infty) \times (y, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right) + \frac{1}{2 - \lambda} \frac{x^*}{\max\{y, \tilde{y}\}}. \quad (7.67)$$

Für $x, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$ und $y = \tilde{x} = \infty$ gilt

$$\frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*([0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty)) + \nu_k^*((x, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right) + \nu_0^*((x, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right]. \quad (7.68)$$

Für $x, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$ und $y = \infty$ gilt

$$\frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty) \cup [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty)) + \nu_k^*((x, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \cup (x, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right) + \nu_0^*((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right]. \quad (7.69)$$

Für $x, y, \tilde{y} \in [x^*, \infty)$ und $\tilde{x} = \infty$ gilt

$$\frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*([0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty) \cup [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty)) + \nu_k^*((x, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty) \cup [0, \infty) \times (y, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{y}, \infty)) \right) + \nu_0^*((x, \infty) \times (\max\{y, \tilde{y}\}, \infty)) \right]. \quad (7.70)$$

Für $x, y, \tilde{x} \in [x^*, \infty)$ und $\tilde{y} = \infty$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k^*((\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times (x, \infty) \times [0, \infty) \cup (\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times (y, \infty)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \nu_k^*((x, \infty) \times [0, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty) \cup [0, \infty) \times (y, \infty) \times (\tilde{x}, \infty) \times [0, \infty)) \right) \right. \\ & \quad \left. + \nu_0^*((\max\{x, \tilde{x}\}, \infty) \times (y, \infty)) \right]. \end{aligned} \quad (7.71)$$

□

7.3.7. Beweis von Lemma 7.10

Sei $j \in \{1, 2\}$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$ derart groß, so dass nach Gleichung (7.2) die Gleichheit $P\{V_0^{(*,j)} > xu_n\} = 1/(xu_n)$ gilt. In Verbindung mit Proposition 7.9 und Gleichung (7.20) ergibt sich deshalb die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} (n/u_n)^{1/2} \left(\frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(*,1)} > xu_n\} - \frac{1}{x} \right) &= (n/u_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{1}\{V_i^{(*,1)} > xu_n\} - \frac{1}{xu_n} \right) \\ &= \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{1/u_n} \right)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{P}} (2 - \lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) \end{aligned}$$

gleichmäßig auf $x \in [x^*, \infty)$. Daraus folgt dann unter anderem die schwache Prozesskonvergenz

$$(n/u_n)^{1/2} \left(\frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\left\{V_i^{(*,1)} > \frac{1}{s}u_n\right\} - s \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{P}} \left((2 - \lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{1/s,\infty}^{(or)}) \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]}, \quad (7.72)$$

wobei $a_\varepsilon := a + \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ bezeichnet.

Die Abbildung $G_n(\cdot, \omega) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, mit

$$G_n(0, \omega) := 0 \quad \text{und} \quad G_n(s, \omega) := \frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\left\{V_i^{(*,1)}(\omega) > \frac{1}{s}u_n\right\} \quad \text{für } s > 0,$$

ist offensichtlich monoton steigend in $s \in [0, \infty)$. Ferner besitzt $G_n(\cdot, \omega)$ die verallgemeinerte Inverse

$$\begin{aligned} G_n^{\leftarrow}(s, \omega) &:= \inf \left\{ r \in [0, \infty) \mid \frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\left\{V_i^{(*,1)}(\omega) > \frac{1}{r}u_n\right\} \geq s \right\} \\ &= \begin{cases} u_n (V_{n - \lceil (n/u_n)s \rceil; n}^{(*,1)}(\omega))^{-1} & \text{für } s > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Theorem 1 von Vervaat (1972) gilt die schwache Konvergenz (7.72) genau dann, wenn

$$(n/u_n)^{1/2} \left(u_n (V_{n-\lceil (n/u_n)s \rceil}^{(*,1)})^{-1} - s \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(-(2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{1/s, \infty}^{(or)}) \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \quad (7.73)$$

gilt.

Auf analoge Weise erhält man die schwache Konvergenz

$$(n/u_n)^{1/2} \left(u_n (V_{n-\lceil (n/u_n)s \rceil}^{(*,2)})^{-1} - s \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(-(2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, 1/s}^{(or)}) \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]}. \quad (7.74)$$

Aus Proposition 7.9 folgt die schwache Konvergenz

$$\left((\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)}, (\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}))_{x \in [x^*, a_\varepsilon]}, (\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}))_{y \in [x^*, a_\varepsilon]} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left((Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)}, (Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}))_{x \in [x^*, a_\varepsilon]}, (Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}))_{y \in [x^*, a_\varepsilon]} \right) \quad (7.75)$$

in $l^\infty([x^*, \infty)^2) \times l^\infty([x^*, a_\varepsilon]) \times l^\infty([x^*, a_\varepsilon])$. Da

$$(7.73) \iff (7.72) \iff (\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}))_{x \in [x^*, a_\varepsilon]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}))_{x \in [x^*, a_\varepsilon]} \quad \text{schwach}$$

und (7.74) äquivalent zur schwachen Konvergenz $(\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}))_{y \in [x^*, a_\varepsilon]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}))_{y \in [x^*, a_\varepsilon]}$ ist, folgt aus der obigen Konvergenz (7.75) die schwache Konvergenz

$$\left(\begin{array}{c} (\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ (n/u_n)^{1/2} (u_n (V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1} - x^{-1})_{x \in [x^*, a_\varepsilon]} \\ (n/u_n)^{1/2} (u_n (V_{n-\lceil n/(yu_n) \rceil}^{(*,2)})^{-1} - y^{-1})_{y \in [x^*, a_\varepsilon]} \end{array} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c} (Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ (-(2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}))_{x \in [x^*, a_\varepsilon]} \\ (-(2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}))_{y \in [x^*, a_\varepsilon]} \end{array} \right).$$

Man beachte, dass die Pfade

$$s \mapsto u_n (V_{n-\lceil (n/u_n)s \rceil}^{(*,1)}(\omega))^{-1}$$

P -fast sicher Element von $\mathbb{D} := \{g \in l^\infty([1/a_\varepsilon, 1/x^*]) \mid g > 0\}$ sind. Sei nun $f : \mathbb{D} \rightarrow l^\infty([1/a_\varepsilon, 1/x_0])$ mit $f(g) = 1/g$ und bezeichne Id die Identitätsabbildung auf $[1/a, 1/x_0]$. Für alle Folgen $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ mit $t_n \in [0, \infty)$, $h, h_n \in l^\infty([1/a, 1/x_0])$, die $Id + t_n h_n \in \mathbb{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen, folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(Id + t_n h_n) - f(Id)}{t_n} &= \frac{1}{t_n Id + t_n^2 h_n} - \frac{1}{t_n Id} \\ &= -\frac{t_n h_n}{Id(t_n Id + t_n^2 h_n)} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{h}{Id^2}.$$

Demzufolge ist das Differential von f in Id , geschrieben als f'_{Id} , eine lineare und stetige Abbildung, so dass f Hadamard-differenzierbar in Id tangential zu \mathbb{D} ist.

Nach der funktionellen Delta-Methode (Kosorok, 2008, Theorem 2.8) gilt dann wegen (7.73)

$$(n/u_n)^{1/2} \left(f \left(\left(u_n (V_{n-\lceil (n/u_n)s \rceil : n}^{(*,1)})^{-1} \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \right) - f(Id) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'_{Id} \left(\left(- (2 - \lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{1/s, \infty}^{(or)}) \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \right),$$

das heißt

$$(n/u_n)^{1/2} \left(u_n^{-1} V_{n-\lceil (n/u_n)s \rceil : n}^{(*,1)} - 1/s \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left((2 - \lambda)^{1/2} s^{-2} Z^{(*,A)}(\phi_{1/s, \infty}^{(or)}) \right)_{s \in [1/a_\varepsilon, 1/x^*]}. \quad (7.76)$$

Wir zeigen nun, dass sich $V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil : n}^{(*,1)}$ in Gleichung (7.76) und (7.73) durch die Ordnungsstatistik $V_{\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor : n}^{(*,1)}$ ersetzen lässt, wenn a_ε durch a in jenen Gleichungen ersetzt wird. Die Herangehensweise ist dabei dieselbe wie im Beweis von Lemma 7.5. Es gilt $\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor = n+1 - \lceil (n+1)/(xu_n) \rceil$ für alle $x \in [x^*, a_\varepsilon]$. Wird $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt, so ist für alle $x \in [x^*, a_\varepsilon]$ die Gaußklammer $\lceil (n+1)/(xu_n) \rceil$ entweder gleich $\lceil n/(xu_n) \rceil$ oder gleich $\lceil n/(xu_n) \rceil + 1$. Für $\delta_{n,x} := (x^{-1} - u_n/n)^{-1} - x$ gilt dann

$$\left\lceil \frac{n}{(x + \delta_{n,x})u_n} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{u_n} \left(\frac{1}{x} - \frac{u_n}{n} \right) \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{xu_n} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{xu_n} \right\rceil - 1.$$

Der Term $\delta_{n,x}$ ist wegen $\partial \delta_{n,x} / \partial x = (1 - xu_n/n)^{-2} - 1 > 0$ (für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$) monoton steigend für $x \in [x^*, a]$. Folglich gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sup_{x \in [x^*, a]} \delta_{n,x} \leq \delta_{n,a} < \varepsilon. \quad (7.77)$$

Damit folgt dann für

$$\begin{aligned} & (n/u_n)^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} \left| u_n^{-1} V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil : n}^{(*,1)} - u_n^{-1} V_{n+1-\lceil n/(xu_n) \rceil : n}^{(*,1)} \right| \\ &= (n/u_n)^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} \left| u_n^{-1} V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil : n}^{(*,1)} - u_n^{-1} V_{n-\lceil n/((x+\delta_{n,x})u_n) \rceil : n}^{(*,1)} \right| \\ &\leq \sup_{x \in [x^*, a]} \left| (n/u_n)^{1/2} (u_n^{-1} V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil : n}^{(*,1)} - x) - (2 - \lambda)^{1/2} x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x, \infty}^{(or)}) \right| \\ &\quad + \sup_{x \in [x^*, a]} \left| (n/u_n)^{1/2} (u_n^{-1} V_{n-\lceil n/((x+\delta_{n,x})u_n) \rceil : n}^{(*,1)} - (x + \delta_{n,x})) \right. \\ &\quad \quad \quad \left. - (2 - \lambda)^{1/2} (x + \delta_{n,x})^2 Z^{(*,A)}(\phi_{(x+\delta_{n,x}), \infty}^{(or)}) \right| \\ &\quad + (2 - \lambda)^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} \left| x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x, \infty}^{(or)}) - (x + \delta_{n,x})^2 Z^{(*,A)}(\phi_{(x+\delta_{n,x}), \infty}^{(or)}) \right| \\ &\quad + (2 - \lambda)^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} (n/u_n)^{1/2} \delta_{n,x}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Der erste Summand der rechten Seite von (7.78) konvergieren wegen (7.76) in (äußerer) Wahrscheinlichkeit gegen 0. Wegen (7.77) gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [x^*, a]} \left| (n/u_n)^{1/2} (u_n^{-1} V_{n - \lceil n / ((x + \delta_{n,x}) u_n) \rceil : n}^{(*,1)} - (x + \delta_{n,x})) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - (2 - \lambda)^{1/2} (x + \delta_{n,x})^2 Z^{(*,A)}(\phi_{(x + \delta_{n,x}, \infty)}^{(or)}) \right| \\ & \leq \sup_{\tilde{x} \in [x^*, a_\varepsilon]} \left| (n/u_n)^{1/2} (u_n^{-1} V_{n - \lceil n / (\tilde{x} u_n) \rceil : n}^{(*,1)} - \tilde{x}) - (2 - \lambda)^{1/2} \tilde{x}^2 Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}, \infty}^{(or)}) \right|, \end{aligned}$$

so dass wegen (7.76) auch der zweite Summand der rechten Seite von (7.78) gegen 0 in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

Der dritte Summand ebener Ungleichung lässt sich wegen (7.77) nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [x^*, a]} \left| x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x, \infty}^{(or)}) - (x + \delta_{n,x})^2 Z^{(*,A)}(\phi_{(x + \delta_{n,x}, \infty)}^{(or)}) \right| \\ & \leq \sup_{x \in [x^*, a]} \left(x^2 \left| Z^{(*,A)}(\phi_{x, \infty}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{(x + \delta_{n,x}, \infty)}^{(or)}) \right| + (2x\delta_{n,x} + \delta_{n,x}^2) \left| Z^{(*,A)}(\phi_{(x + \delta_{n,x}, \infty)}^{(or)}) \right| \right) \\ & = a^2 \sup_{x \in [x^*, a]} \left| Z^{(*,A)}(\phi_{x, \infty}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{(x + \delta_{n,x}, \infty)}^{(or)}) \right| \tag{7.79} \\ & \quad + (2a\delta_{n,a} + \delta_{n,a}^2) \sup_{\tilde{x} \in [x^*, a_\varepsilon]} \left| Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}, \infty}^{(or)}) \right|. \end{aligned}$$

Der zweite Summand obiger Ungleichung (7.79) konvergiert wegen $\delta_{n,a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ sowie der stochastischen Beschränktheit von $\sup_{\tilde{x} \in [x^*, a_\varepsilon]} \left| Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}, \infty}^{(or)}) \right|$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Nach Theorem 7.19 von Kosorok (2008) sind wegen Proposition 7.9 P -fast sicher alle Pfade von $Z^{(*,A)}$ gleichmäßig stetig bezüglich $\rho^{(or)}$ (definiert in (7.51)). Da

$$\rho^{(or)}(\phi_{x, \infty}^{(or)}, \phi_{(x + \delta_{n,x}, \infty)}^{(or)}) = \left| \frac{x^*}{x} - \frac{x^*}{x + \delta_{n,x}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für alle $x \in [x^*, a]$ gilt, ergibt sich, dass die rechte Seite von (7.79) in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Folglich konvergiert auch der dritte Summand der rechten Seite von (7.78) in Wahrscheinlichkeit gegen 0.

Eine Taylorapproximation der Funktion $f_x(t) := (x^{-1} - t)^{-1} - x$ in 0 liefert $f_x(t) = -x^2 t + O(t^2)$. Daraus folgt $\delta_{n,x} = f_x(u_n/n) = O(u_n/n)$, so dass auch der letzte Summand der rechten Seite von (7.78) gegen 0 konvergiert:

$$\sup_{x \in [x^*, a]} (n/u_n)^{1/2} \delta_{n,x} \leq (n/u_n)^{1/2} \delta_{n,a} = (n/u_n)^{1/2} O(u_n/n) = o(1).$$

In Verbindung mit der obigen Konvergenz (7.76) ergibt sich daraus

$$(n/u_n)^{1/2} \left(u_n^{-1} V_{\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor : n}^{(*,1)} - x \right)_{x \in [x^*, a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ((2 - \lambda)^{1/2} x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x, \infty}^{(or)}))_{x \in [x^*, a]} \tag{7.80}$$

schwach.

Mit den vorangegangenen Überlegungen kann nun auf analoge Weise die schwache Konvergenz (7.25) gefolgert werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
& (n/u_n)^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} |u_n(V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1} - u_n(V_{n+1-\lceil n/(xu_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1}| \\
&= (n/u_n)^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} |u_n(V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1} - u_n(V_{n-\lceil n/((x+\delta_{n,x})u_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1}| \\
&\leq \sup_{x \in [x^*, a]} |(n/u_n)^{1/2} (u_n(V_{n-\lceil n/(xu_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1} - x^{-1}) + (2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)})| \quad (7.81) \\
&+ \sup_{x \in [x^*, a]} |(n/u_n)^{1/2} (u_n(V_{n-\lceil n/((x+\delta_{n,x})u_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1} - (x+\delta_{n,x})^{-1}) \\
&\quad + (2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{(x+\delta_{n,x}),\infty}^{(or)})| \\
&+ (2-\lambda)^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} |Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{(x+\delta_{n,x}),\infty}^{(or)})| \\
&+ (2-\lambda)^{1/2} \sup_{x \in [x^*, a]} (n/u_n)^{1/2} |x^{-1} - (x+\delta_{n,x})^{-1}|.
\end{aligned}$$

Der erste Summand der rechten Seite von (7.81) konvergieren wegen der Prozesskonvergenz in (7.73) in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Wegen (7.77) gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \sup_{x \in [x^*, a]} |(n/u_n)^{1/2} (u_n(V_{n-\lceil n/((x+\delta_{n,x})u_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1} - (x+\delta_{n,x})^{-1}) \\
&\quad + (2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{(x+\delta_{n,x}),\infty}^{(or)})| \\
&\leq \sup_{\tilde{x} \in [x^*, a_\varepsilon]} |(n/u_n)^{1/2} (u_n(V_{n-\lceil n/(\tilde{x}u_n) \rceil}^{(*,1)})^{-1} - \tilde{x}^{-1}) + (2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\infty}^{(or)})|,
\end{aligned}$$

so dass wegen (7.73) auch der zweite Summand der rechten von (7.81) gegen 0 in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Wir haben bereits gezeigt, dass der erste Summand von (7.79) in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Damit konvergiert der dritte Summand der rechten Seite von (7.81) in Wahrscheinlichkeit gegen 0.

Definiere nun für $x > 0$ die Funktion $g_x(t) := x^{-1} + (x+t)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Der Funktionswert $g_x(t)$ wird wegen $\partial g_x(t)/\partial x = -x^{-2} + (x+t)^{-2} < 0$ für $t > 0$ kleiner, wenn x ansteigt, und wird wegen $\partial g_x(t)/\partial t = (x+t)^{-2} > 0$ größer, wenn t ansteigt. In Verbindung mit $\delta_{n,x} \leq \delta_{n,x'}$ für $x' > x$ folgt daraus dann für den letzten Summanden der rechten Seite von (7.81)

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [x^*, a]} (n/u_n)^{1/2} |x^{-1} - (x+\delta_{n,x})^{-1}| &= \sup_{x \in [x^*, a]} (n/u_n)^{1/2} |g_x(\delta_{n,x})| \\
&\leq \sup_{x \in [x^*, a]} (n/u_n)^{1/2} |g_x(\delta_{n,a})| \\
&\leq (n/u_n)^{1/2} |g_{x^*}(\delta_{n,a})|.
\end{aligned}$$

Eine Taylorapproximation der Funktion g_x in 0 liefert $g_x(t) = x^{-2}t + O(t^2)$, so dass wegen $\delta_{n,x} = O(u_n/n)$

$$(n/u_n)^{1/2} |g_{x^*}(\delta_{n,a})| = (n/u_n)^{1/2} O(\delta_{n,a}) = o(1)$$

folgt. Folglich konvergiert die rechte Seite von (7.81) in Wahrscheinlichkeit gegen 0. In Kombination mit der Konvergenz (7.73) ergibt sich daraus die schwache Konvergenz

$$(n/u_n)^{1/2} \left(u_n (V_{[(n+1)(1-1/(xu_n))]:n}^{(*,1)})^{-1} - x^{-1} \right)_{x \in [x^*, a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(-(2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) \right)_{x \in [x^*, a]}.$$

Auf analoge Weise erhält man die schwache Konvergenzen

$$(n/u_n)^{1/2} \left(u_n^{-1} V_{[(n+1)(1-1/(yu_n))]:n}^{(*,2)} - y \right)_{y \in [x^*, a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left((2-\lambda)^{1/2} y^2 Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) \right)_{y \in [x^*, a]},$$

$$(n/u_n)^{1/2} \left(u_n (V_{[(n+1)(1-1/(yu_n))]:n}^{(*,2)})^{-1} - y^{-1} \right)_{y \in [x^*, a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(-(2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) \right)_{y \in [x^*, a]}.$$

Insgesamt folgt also die schwachen Konvergenzen in (7.24) und (7.25). \square

7.3.8. Beweis von Theorem 7.11

Wir greifen auf die Notation aus dem Beweis von Theorem 7.7 zurück: Seien

$$\begin{aligned} c(x, y) &:= \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)), \\ p_n(x, y) &:= P\{V_0^{(*,1)} > xu_n, V_0^{(*,2)} > yu_n\}, \\ d_n(x, y) &:= P\{V_0^{(*,1)} > su_n, V_0^{(*,2)} > tu_n\}_{s=t_{n,1}(x), t=t_{n,2}(y)}, \\ p_n^{(or)}(x, y) &:= P\{V_0^{(*,1)} > xu_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > yu_n\}, \\ d_n^{(or)}(x, y) &:= P\{V_0^{(*,1)} > su_n \text{ oder } V_0^{(*,2)} > tu_n\}_{s=t_{n,1}(x), t=t_{n,2}(y)} \end{aligned}$$

für $x, y \in [x^*, \infty)$. Nach Gleichung (7.2) gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$p_n(x, y) = (xu_n)^{-1} + (yu_n)^{-1} - p_n^{(or)}(x, y). \quad (7.82)$$

In Kombination mit Lemma 7.10 gilt dann: Zu jedem $\delta > 0$ kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass

$$d_n(x, y) = u_n^{-1} t_{n,1}^{-1}(x) + u_n^{-1} t_{n,2}^{-1}(y) - d_n^{(or)}(x, y) \quad (7.83)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt. Daraus ergibt sich

$$d_n^{(or)}(x, y) - p_n^{(or)}(x, y) = u_n^{-1} (t_{n,1}^{-1}(x) - x^{-1}) + u_n^{-1} (t_{n,2}^{-1}(y) - y^{-1}) - (d_n(x, y) - p_n(x, y)).$$

Mit Lemma 7.10, Gleichung (7.42), $p_n^{(or)}(x, y) \geq P\{V_0^{(*,1)} > x^*u_n\} = 1/(x^*u_n)$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ und $p_n^{(or)}(x, y) \geq p_n(x, y)$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{d_n^{(or)}(x, y)}{p_n^{(or)}(x, y)} - 1 \right| &\leq \left| \frac{u_n^{-1}}{p_n^{(or)}(x, y)} (t_{n,1}^{-1}(x) - x^{-1}) \right| + \left| \frac{u_n^{-1}}{p_n^{(or)}(x, y)} (t_{n,2}^{-1}(y) - y^{-1}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{d_n(x, y) - p_n(x, y)}{p_n^{(or)}(x, y)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (x^*)^{-1} |t_{n,1}^{-1}(x) - x^{-1}| + (x^*)^{-1} |t_{n,2}^{-1}(y) - y^{-1}| + \left| \frac{d_n(x, y)}{p_n(x, y)} - 1 \right| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

in Wahrscheinlichkeit. Wir erhalten also

$$\frac{d_n^{(or)}(x, y)}{p_n^{(or)}(x, y)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (7.84)$$

in Wahrscheinlichkeit.

Nach Definition von $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}$ und \tilde{S}_n (in (7.6) und (7.8)) und Gleichung (7.9) gilt

$$\begin{aligned} &(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) - c(x, y)) \\ &= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{\tilde{S}_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y))}{\tilde{S}_n(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1))} - c(x, y) \right) \\ &= \frac{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2} (\tilde{S}_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y) \tilde{S}_n(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)))}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1} \tilde{S}_n(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1))}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Wir analysieren nun den Zähler und Nenner der rechten Seite von (7.85) separat. Bezeichne dafür $\tilde{S}_n^{(or)}(x, y) := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(*,1)} > xu_n \text{ oder } V_i^{(*,2)} > yu_n\}$ für $(x, y) \in T = [x^*, \infty]^2 \setminus \{-\infty, \infty\}$. Man beachte, dass wegen $\lfloor (n+1)(1 - 1/(xu_n)) \rfloor = n+1 - \lceil (n+1)/(xu_n) \rceil$ die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(*,j)} > V_{\lfloor (n+1)(1-1/(xu_n)) \rfloor : n}^{(*,j)}\} = \left\lceil \frac{n+1}{xu_n} \right\rceil - 1, \quad j \in \{1, 2\}, \quad (7.86)$$

gilt. Demnach gilt

$$\tilde{S}_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) = \left\lceil \frac{n+1}{xu_n} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{yu_n} \right\rceil - 2 - \tilde{S}_n^{(or)}(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)). \quad (7.87)$$

Derweil ergibt sich aus (7.22)

$$\tilde{S}_n^{(or)}(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) = (nv_{n,1}^{(*,A)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}^{(or)}) + nd_n^{(or)}(x, y). \quad (7.88)$$

Mit Hilfe von (7.2), (7.20), (7.84), (7.87), (7.88), $v_{n,1}^{(*,A)} = p_n^{(or)}(1, 1)$ und der schwachen Konvergenz $\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}^{(or)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})$, die sich im späteren Verlauf des Beweises ergibt (siehe Gleichung (7.96)), folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U)}} \tilde{S}_n(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) \\ &= \frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U)}} \left(2 \left(\left\lceil \frac{n+1}{u_n} \right\rceil - 1 \right) - \tilde{S}_n^{(or)}(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) \right) \\ &= \frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U)}} \left(2 \left(\left\lceil \frac{n+1}{u_n} \right\rceil - 1 \right) - (nv_{n,1}^{(*,A)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}^{(or)}) - nd_n^{(or)}(1, 1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,U)}} \frac{[(n+1)/u_n] - 1}{n/u_n} - \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right)^{1/2} (nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}^{(or)}) - \frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} \frac{d_n^{(or)}(1, 1)}{v_{n,1}^{(*,A)}} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\lambda^{-1} - (2\lambda^{-1} - 1) = 1
\end{aligned} \tag{7.89}$$

in Wahrscheinlichkeit.

Mit Hilfe von (7.83), (7.87) und (7.88) ergibt sich dann für den Zähler der rechten Seiten von (7.85)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}} (\tilde{S}_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y) \tilde{S}_n(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1))) \\
&= \frac{1}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}} \left(\left\lceil \frac{n+1}{xu_n} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{yu_n} \right\rceil - 2 - \tilde{S}_n^{(or)}(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) \right. \\
&\quad \left. - c(x, y) \left[2 \left(\left\lceil \frac{n+1}{u_n} \right\rceil - 1 \right) - \tilde{S}_n^{(or)}(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) \right] \right) \\
&= \frac{1}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}} \left(\left\lceil \frac{n+1}{xu_n} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{yu_n} \right\rceil - 2 - (nv_{n,1}^{(*,A)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}^{(or)}) - nd_n^{(or)}(x, y) \right. \\
&\quad \left. - c(x, y) \left[2 \left(\left\lceil \frac{n+1}{u_n} \right\rceil - 1 \right) - (nv_{n,1}^{(*,A)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}^{(or)}) - nd_n^{(or)}(1, 1) \right] \right) \\
&= \frac{1}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}} \left(\left\lceil \frac{n+1}{xu_n} \right\rceil - \frac{n}{xu_n} + \left\lceil \frac{n+1}{yu_n} \right\rceil - \frac{n}{yu_n} - 2 - (nv_{n,1}^{(*,A)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}^{(or)}) \right. \\
&\quad - \frac{n}{u_n} (t_{n,1}^{-1}(x) - x^{-1}) - \frac{n}{u_n} (t_{n,2}^{-1}(y) - y^{-1}) + nd_n(x, y) \\
&\quad \left. - c(x, y) \left[2 \left(\left\lceil \frac{n+1}{u_n} \right\rceil - \frac{n}{u_n} - 1 \right) - (nv_{n,1}^{(*,A)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}^{(or)}) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \frac{n}{u_n} (t_{n,1}^{-1}(1) + t_{n,2}^{-1}(1) - 2) + nd_n(1, 1) \right] \right) \\
&= \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right)^{1/2} \left[- \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}^{(or)}) + c(x, y) \tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}^{(or)}) \right. \\
&\quad - \left(\frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,1}^{-1}(x) - x^{-1}) - \left(\frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,2}^{-1}(y) - y^{-1}) \\
&\quad \left. + c(x, y) \left(\frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,1}^{-1}(1) + t_{n,2}^{-1}(1) - 2) \right] \\
&\quad + (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{d_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(x, y) \frac{d_n(1, 1)}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right) + o(1)
\end{aligned} \tag{7.90}$$

gleichmäßig für $x, y \in [x^*, a]$. Um das gemeinsame Grenzverhalten der obigen Summanden zu bestimmen, untersuchen wir zunächst das asymptotische Verhalten des vorletzten Summanden obiger Gleichung (7.90). Nach Lemma 7.10 gilt: Für jedes $\delta > 0$ kann $n \in \mathbb{N}$ derart groß gewählt werden, so dass

$$\sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \frac{d_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) \right| \leq \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, a]} \left| \frac{p_n(\tilde{x}, \tilde{y})}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \right|$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt. Die rechte Seite obiger Ungleichung ist wegen der Bias-Bedingung (7.16) von kleiner Ordnung als $(nv_{n,1}^{(*,U)})^{-1/2}$. Demnach ergibt sich wegen $c(1, 1) = 1$

$$\begin{aligned}
& (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{d_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(x, y) \frac{d_n(1, 1)}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right) \\
&= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y)c(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) \right) + o_P(1) \\
&= (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y) \right) \\
&\quad - (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} c(x, y) (c(t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - c(1, 1)) + o_P(1)
\end{aligned} \tag{7.91}$$

gleichmäßig für $x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]$. Nach Annahme (PD) ist c stetig partiell differenzierbar. Unter Berücksichtigung von Lemma 7.10 gilt dann die Taylorapproximation

$$c(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) = c(x, y) + c_x(x, y)(t_{n,1}(x) - x) + c_y(x, y)(t_{n,2}(y) - y) + o_P((n/u_n)^{-1/2}).$$

Mit Hilfe von (7.91), $c(1, 1) = 1$, Lemma 7.10 und (7.20) folgt also die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned}
& (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} \left(\frac{d_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(x, y) \frac{d_n(1, 1)}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right) \\
&= \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{1/u_n} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (c_x(x, y)(t_{n,1}(x) - x) + c_y(x, y)(t_{n,2}(y) - y)) \\
&\quad - c(x, y) \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{1/u_n} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (c_x(1, 1)(t_{n,1}(1) - 1) + c_y(1, 1)(t_{n,2}(1) - 1)) \\
&\quad + o_P(1) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda^{1/2} (2 - \lambda)^{1/2} \left(c_x(x, y) x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) + c_y(x, y) y^2 Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) \right. \\
&\quad \left. - c(x, y) (c_x(1, 1) Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) + c_y(1, 1) Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})) \right)
\end{aligned}$$

gleichmäßig für $x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]$.

Bezeichne nun

$$\begin{aligned}
W_n(x, y) &:= G_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) \\
&\quad - \left(\frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} \left((t_{n,1}^{-1}(x) - x^{-1}) + (t_{n,2}^{-1}(y) - y^{-1}) \right. \\
&\quad \left. - c(x, y) ((t_{n,1}^{-1}(1) - 1) + (t_{n,2}^{-1}(1) - 1)) \right) \\
&\quad + \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{1/u_n} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} \left(c_x(x, y)(t_{n,1}(x) - x) + c_y(x, y)(t_{n,2}(y) - y) \right. \\
&\quad \left. - c(x, y) [c_x(1, 1)(t_{n,1}(1) - 1) + c_y(1, 1)(t_{n,2}(1) - 1)] \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} W(x, y) := & G(x, y, x, y, 1, 1) + Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) + Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) \\ & - c(x, y)(Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) + Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})) \\ & + \lambda \left(c_x(x, y)x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) + c_y(x, y)y^2 Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) \right. \\ & \left. - c(x, y)[c_x(1, 1)Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) + c_y(1, 1)Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})] \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} G_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}) &:= -\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) + c(\bar{x}, \bar{y})\tilde{Z}_n^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}), \\ G(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}) &:= -Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) + c(\bar{x}, \bar{y})Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)}) \end{aligned}$$

für $x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^*, a]$. Wegen (7.90) und (7.91) gilt dann

$$\frac{1}{(nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2}} (S_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)) - c(x, y)S_n(t_{n,1}(1), t_{n,1}(1))) = \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right)^{1/2} W_n(x, y) + o_P(1) \quad (7.92)$$

gleichmäßig für $x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]$.

Nach dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) gilt wegen der Stetigkeit von c , Proposition 7.9 und Lemma 7.10 die schwache Konvergenz

$$(G_n, (t_{n,1}(x))_{x \in [x^*, a]}, (t_{n,2}(y))_{y \in [x^*, a]}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (G, (x)_{x \in [x^*, a]}, (y)_{y \in [x^*, a]}).$$

Nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4) existieren Versionen von $(G_n, (t_{n,1}(x))_{x \in [x^*, a]}, (t_{n,2}(y))_{y \in [x^*, a]})$, $n \in \mathbb{N}$, und $(G, (x)_{x \in [x^*, a]}, (y)_{y \in [x^*, a]})$, so dass die obige Konvergenz fast sicher gilt. Der Übersichtlichkeit halber unterscheiden wir zwischen den Bezeichnungen dieser Versionen nicht. Die Konvergenz

$$(W_n(x, y))_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (W(x, y))_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]}$$

ist genau dann für die entsprechenden Skorokhod-Versionen erfüllt, wenn

$$\sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W_n(x, y) - W(x, y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher}$$

gilt. Für jedes $\delta > 0$ kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass die folgende Abschätzung mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} & \sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W_n(x, y) - W(x, y)| \\ & \leq \sup_{x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| G_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - G(x, y, x, y, 1, 1) \right| \end{aligned} \quad (7.93)$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{x \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \left(\frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,1}^{-1}(x) - x^{-1}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) \right| \\
& + \sup_{y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \left(\frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,2}^{-1}(y) - y^{-1}) - Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) \right| \\
& + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} c(x,y) \left| \left(\frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,1}^{-1}(1) - 1) - Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) \right| \\
& + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} c(x,y) \left| \left(\frac{1/u_n}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,2}^{-1}(1) - 1) - Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}) \right| \\
& + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |c_x(x,y)| \left| \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{1/u_n} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,1}(x) - x) - \lambda x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) \right| \\
& + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |c_y(x,y)| \left| \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{1/u_n} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,2}(y) - y) - \lambda y^2 Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) \right| \\
& + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} c(x,y) |c_x(1,1)| \left| \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{1/u_n} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,1}(1) - 1) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \lambda Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) \right| \\
& + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} c(x,y) |c_y(1,1)| \left| \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{v_{n,1}^{(*,A)}} \right)^{1/2} \left(\frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{1/u_n} \right)^{1/2} (n/u_n)^{1/2} (t_{n,2}(1) - 1) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \lambda Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}) \right|.
\end{aligned}$$

Der erste Summand der rechten Seite obiger Ungleichung (7.93) lässt sich mit Hilfe folgender Tatsache weiter nach oben beschränken: Für jedes $\delta \in (0, 1)$ kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass $\sup_{x \in [x^*, a + \varepsilon]} |t_{n,j}(x) - x| < \varepsilon$ für $j \in \{1, 2\}$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
& \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| G_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - G(x, y, x, y, 1, 1) \right| \\
& \leq \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| G_n(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - G(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) \right| \\
& \quad + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| G(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - G(x, y, x, y, 1, 1) \right| \\
& \leq \sup_{x,y,\bar{x},\bar{y},\tilde{x},\tilde{y} \in [x^*, a]} \left| G_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}) - G(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}) \right| \\
& \quad + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| G(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - G(x, y, x, y, 1, 1) \right|
\end{aligned} \tag{7.94}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$. Der erste Summand der rechten Seite von (7.94) konvergiert wegen der fast sicheren Konvergenz $G_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G$ fast sicher gegen 0. Nach Theorem 7.19 von Kosorok (2008) besitzt der Grenzprozess $(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in T}$ fast sicher gleichmäßig

stetige Pfade bezüglich $\rho^{(or)}$ (definiert in (7.51)). Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{x,y \in [x^*, a]} \rho^{(or)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}^{(or)}, \phi_{x,y}^{(or)}) \\ &= x^* \sup_{x,y \in [x^*, a]} \left(\left| \frac{1}{t_{n,1}(x)} - \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{1}{t_{n,2}(y)} - \frac{1}{y} \right| \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher.} \end{aligned}$$

Demzufolge gilt die fast sichere Konvergenz

$$\sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (7.95)$$

Man beachte, dass für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y})| \\ & \leq \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)})| \\ & \quad + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y})| \\ & \leq \sup_{x,y \in [x^*, a]} |Z_n^{(*,A)}(\phi_{x,y}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y})| + \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y})| \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \tau$. Nach Proposition 7.9 und Gleichung (7.95) gilt also stets

$$\sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z_n^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y})| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.96)$$

Ferner ist nach Gleichung (7.95) auch der zweite Summand der rechten Seite von (7.94) asymptotisch vernachlässigbar:

$$\begin{aligned} & \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| G(t_{n,1}(x), t_{n,2}(y), x, y, t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)) - G(x, y, x, y, 1, 1) \right| \\ & \leq \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |Z^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(x), t_{n,2}(y)}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)})| \\ & \quad + (x^*)^{-1} |Z^{(*,A)}(\phi_{t_{n,1}(1), t_{n,2}(1)}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})| \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher.} \end{aligned}$$

Aus Lemma 7.10, der Ungleichung $\sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a]} c(x, y) \leq (x^*)^{-1}$ und der Tatsache, dass die partiellen Ableitungen c_x und c_y als stetige Funktionen beschränkt sind auf kompakten Intervallen, folgt, dass auch die restlichen Summanden der rechten Seite von (7.93) fast sicher gegen 0 konvergieren. Es ergibt sich also

$$\sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W_n(x, y) - W(x, y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Nach Gleichung (7.20) gilt damit

$$\begin{aligned}
& \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right)^{1/2} W_n(x,y) - \left(\frac{2-\lambda}{\lambda} \right)^{1/2} W(x,y) \right| \\
& \leq \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right)^{1/2} \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W_n(x,y) - W(x,y)| \\
& \quad + \left| \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} \right)^{1/2} - \left(\frac{2-\lambda}{\lambda} \right)^{1/2} \right| \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |W(x,y)| \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher.}
\end{aligned}$$

In Verbindung mit der stochastischen Konvergenz (7.89) und den Gleichungen (7.85) und (7.92) erhält man die Prozesskonvergenz

$$\begin{aligned}
& (nv_{n,1}^{(*,U)})^{1/2} (\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty)) - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))) \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-\lambda}{\lambda} \right)^{1/2} \left[Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) + Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) \right. \\
& \quad - c(x,y) [Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) + Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})] \\
& \quad + \lambda (c_x(x,y)x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) + c_y(x,y)y^2 Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)})) \\
& \quad \left. - c(x,y) [c_x(1,1)Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) + c_y(1,1)Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})] \right] \\
& = \left(\frac{2-\lambda}{\lambda} \right)^{1/2} \left[(1 + \lambda c_x(x,y)x^2) Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}) + (1 + \lambda c_y(x,y)y^2) Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}) \right. \\
& \quad \left. - c(x,y) [(1 + \lambda c_x(1,1)) Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}) + (1 + \lambda c_y(1,1)) Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})] \right] \\
& =: \tilde{W}(x,y)
\end{aligned}$$

für $x, y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]$.

Kovarianzstruktur des Grenzprozesses

Die Kovarianzen des Grenzprozesses $(\tilde{W}(x,y))_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]}$ lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (7.63)–(7.71) bestimmen. Bezeichne dafür $C(x,y, \tilde{x}, \tilde{y}) := I(x) \times I(y) \times I(\tilde{x}) \times I(\tilde{y})$ und $D(x,y) := I(x) \times I(y)$ für

$$I(x) := \begin{cases} (x, \infty), & \text{falls } x > 0, \\ [0, \infty), & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und $c_t(x,y, \tilde{x}, \tilde{y}) := \nu_t^*(C(x,y, \tilde{x}, \tilde{y}))$ für $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [0, \infty)$. Dann gilt für alle $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]$

$$\begin{aligned}
& Cov(\tilde{W}(x, y), \tilde{W}(\tilde{x}, \tilde{y})) \\
&= \frac{2 - \lambda}{\lambda} \left((1 + \lambda c_x(x, y)x^2) \left[(1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\infty}^{(or)})) \right. \right. \\
&\quad + (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,\tilde{y}}^{(or)})) - Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\
&\quad - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 + \lambda c_y(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})) - Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})) \right) \right] \\
&+ (1 + \lambda c_x(x, y)y^2) \left[(1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad + (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,\tilde{y}}^{(or)})) - Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\
&\quad - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 + \lambda c_y(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})) - Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})) \right) \right] \\
&+ \left[- (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad - (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,\tilde{y}}^{(or)})) + Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\
&\quad + c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 + \lambda c_y(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})) - Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})) \right) \right] \\
&+ c(x, y)(1 + \lambda c_x(1, 1)) \left[- (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad - (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,\tilde{y}}^{(or)})) + Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\
&\quad + c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) Var(Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 + \lambda c_y(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})) - Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})) \right) \right] \\
&+ c(x, y)(1 + \lambda c_y(1, 1)) \left[- (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad - (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,\tilde{y}}^{(or)})) + Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\
&\quad + c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 + \lambda c_y(1, 1)) Var(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})) - Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})) \right) \right] \\
&+ c(x, y) \left[(1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad + (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,\tilde{y}}^{(or)})) - Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}^{(or)})) \\
&\quad - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{1,\infty}^{(or)})) \right. \\
&\quad \left. \left. - (1 + \lambda c_y(1, 1)) Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,1}^{(or)})) + Var(Z^{(*,A)}(\phi_{1,1}^{(or)})) \right) \right] \\
&= (1 + \lambda c_x(x, y)x^2) \left[(1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(\tilde{x}, 0, x, 0) + c_k(x, 0, \tilde{x}, 0)) + \frac{1}{\lambda} \frac{x^*}{\max\{x, \tilde{x}\}} \right) \right. \\
&\quad \left. \right] \tag{7.97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, \tilde{y}, x, 0) + c_k(x, 0, 0, \tilde{y})) + c(x, \tilde{y}) \right) \\
& - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}, 0, x, 0) \cup C(0, \tilde{y}, x, 0)) + \nu_k^*(C(x, 0, \tilde{x}, 0) \cup C(x, 0, 0, \tilde{y}))) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + c(\max\{x, \tilde{x}\}, \tilde{y}) \right) \\
& - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(1, 0, x, 0) + c_k(x, 0, 1, 0)) + \frac{1}{\lambda} \frac{x^*}{\max\{x, 1\}} \right) \right) \\
& + (1 + \lambda c_y(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, 1, x, 0) + c_k(x, 0, 0, 1)) + c(x, \tilde{y}) \right) \\
& - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(1, 0, x, 0) \cup C(0, 1, x, 0)) + \nu_k^*(C(x, 0, 1, 0) \cup C(x, 0, 0, 1))) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + c(\max\{x, 1\}, 1) \right) \Big] \\
& + (1 + \lambda c_x(x, y)y^2) \left[(1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(\tilde{x}, 0, 0, y) + c_k(0, y, \tilde{x}, 0)) + c(\tilde{x}, y) \right) \right. \\
& + (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, \tilde{y}, 0, y) + c_k(0, y, 0, \tilde{y})) + \frac{1}{\lambda} \frac{x^*}{\max\{y, \tilde{y}\}} \right) \\
& - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}, 0, 0, y) \cup C(0, \tilde{y}, 0, y)) + \nu_k^*(C(0, y, \tilde{x}, 0) \cup C(0, y, 0, \tilde{y}))) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + c(\tilde{x}, \max\{y, \tilde{y}\}) \right) \\
& - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(1, 0, 0, y) + c_k(0, y, 1, 0)) + c(1, y) \right) \right) \\
& + (1 + \lambda c_y(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, 1, 0, y) + c_k(0, y, 0, 1)) + \frac{1}{\lambda} \frac{x^*}{\max\{y, \tilde{y}\}} \right) \\
& - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(1, 0, 0, y) \cup C(0, 1, 0, y)) + \nu_k^*(C(0, y, 1, 0) \cup C(0, y, 0, 1))) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + c(1, \max\{y, 1\}) \right) \Big] \\
& + \left[- (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}, 0, x, 0) \cup C(\tilde{x}, 0, 0, y)) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \nu_k^*(C(x, 0, \tilde{x}, 0) \cup C(0, y, \tilde{x}, 0))) + c(\max\{x, \tilde{x}\}, y) \right) \right. \\
& - (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(0, \tilde{y}, x, 0) \cup C(0, \tilde{y}, 0, y)) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \nu_k^*(C(x, 0, 0, \tilde{y}) \cup C(0, y, 0, \tilde{y}))) + c(x, \max\{y, \tilde{y}\}) \right) \right) \\
& + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}, 0, x, 0) \cup C(\tilde{x}, 0, 0, y) \cup C(0, \tilde{y}, x, 0) \cup C(0, \tilde{y}, 0, y)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nu_k^*(C(x, 0, \tilde{x}, 0) \cup C(x, 0, 0, \tilde{y}) \cup C(0, y, \tilde{x}, 0) \cup C(0, y, 0, \tilde{y})) \\
& + \nu_0^*(D(\max\{x, \tilde{x}\}, 0) \cup D(x, \tilde{y}) \cup D(\tilde{x}, y) \cup D(0, \max\{y, \tilde{y}\})) \\
& + c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(1, 0, x, 0) \cup C(1, 0, 0, y)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \nu_k^*(C(x, 0, 1, 0) \cup C(0, y, 1, 0))) + c(\max\{x, 1\}, y) \right) \right) \\
& + (1 + \lambda c_y(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(0, 1, x, 0) \cup C(0, 1, 0, y)) \right. \\
& \quad \left. + \nu_k^*(C(x, 0, 0, 1) \cup C(0, y, 0, 1))) + c(x, \max\{y, 1\}) \right) \\
& - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(1, 0, x, 0) \cup C(1, 0, 0, y) \cup C(0, 1, x, 0) \cup C(0, 1, 0, y)) \right. \\
& \quad + \nu_k^*(C(x, 0, 1, 0) \cup C(x, 0, 0, 1) \cup C(0, y, 1, 0) \cup C(0, y, 0, 1))) \\
& \quad \left. + \nu_0^*(D(\max\{x, 1\}, 0) \cup D(x, 1) \cup D(1, y) \cup D(0, \max\{y, 1\})) \right) \\
& + c(x, y)(1 + \lambda c_x(1, 1)) \left[- (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(\tilde{x}, 0, 1, 0) + c_k(1, 0, \tilde{x}, 0)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\lambda} \frac{x^*}{\max\{1, \tilde{x}\}} \right) \right. \\
& - (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, \tilde{y}, 1, 0) + c_k(1, 0, 0, \tilde{y})) + c(1, \tilde{y}) \right) \\
& + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}, 0, 1, 0) \cup C(0, \tilde{y}, 1, 0)) + \nu_k^*(C(1, 0, \tilde{x}, 0) \cup C(1, 0, 0, \tilde{y}))) \right. \\
& \quad \left. + c(\max\{1, \tilde{x}\}, \tilde{y}) \right) \\
& + c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k(1, 0, 1, 0) + \frac{x^*}{\lambda} \right) \right. \\
& + (1 + \lambda c_y(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, 1, 1, 0) + c_k(1, 0, 0, 1)) + 1 \right) \\
& \left. - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(1, 0, 1, 0) \cup C(0, 1, 1, 0)) + \nu_k^*(C(1, 0, 1, 0) \cup C(1, 0, 0, 1))) + 1 \right) \right] \\
& + c(x, y)(1 + \lambda c_y(1, 1)) \left[- (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(\tilde{x}, 0, 0, 1) + c_k(0, 1, \tilde{x}, 0)) + c(\tilde{x}, 1) \right) \right. \\
& - (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{y}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, \tilde{y}, 0, 1) + c_k(0, 1, 0, \tilde{y})) + \frac{1}{\lambda} \frac{x^*}{\max\{1, \tilde{y}\}} \right) \\
& + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}, 0, 0, 1) \cup C(0, \tilde{y}, 0, 1)) + \nu_k^*(C(0, 1, \tilde{x}, 0) \cup C(0, 1, 0, \tilde{y}))) \right. \\
& \quad \left. + c(\tilde{x}, \max\{1, \tilde{y}\}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(1, 0, 0, 1) + c_k(0, 1, 1, 0)) + 1 \right) \right. \\
& + (1 + \lambda c_y(1, 1)) \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0, 1, 0, 1) + \frac{x^*}{\lambda} \right) \\
& \left. - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(1, 0, 0, 1) \cup C(0, 1, 0, 1)) + \nu_k^*(C(0, 1, 1, 0) \cup C(0, 1, 0, 1))) + 1 \right) \right) \\
& + c(x, y) \left[(1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{x}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}, 0, 1, 0) \cup C(\tilde{x}, 0, 0, 1)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \nu_k^*(C(1, 0, \tilde{x}, 0) \cup C(0, 1, \tilde{x}, 0))) + c(\max\{1, \tilde{x}\}, 1) \right) \right. \\
& + (1 + \lambda c_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{y}^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(0, \tilde{y}, 1, 0) \cup C(0, \tilde{y}, 0, 1)) \right. \\
& \quad \left. + \nu_k^*(C(1, 0, 0, \tilde{y}) \cup C(0, 1, 0, \tilde{y}))) + c(1, \max\{1, \tilde{y}\}) \right) \\
& - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}, 0, 1, 0) \cup C(\tilde{x}, 0, 0, 1) \cup C(0, \tilde{y}, 1, 0) \cup C(0, \tilde{y}, 0, 1)) \right. \\
& \quad + \nu_k^*(C(1, 0, \tilde{x}, 0) \cup C(1, 0, 0, \tilde{y}) \cup C(0, 1, \tilde{x}, 0) \cup C(0, 1, 0, \tilde{y})) \\
& \quad \left. + \nu_0^*(D(\max\{1, \tilde{x}\}, 0) \cup D(1, \tilde{y}) \cup D(\tilde{x}, 1) \cup D(0, \max\{1, \tilde{y}\})) \right) \\
& - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \left((1 + \lambda c_x(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(1, 0, 1, 0) \cup C(1, 0, 0, 1)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \nu_k^*(C(1, 0, 1, 0) \cup C(0, 1, 1, 0))) + 1 \right) \right. \\
& - (1 + \lambda c_y(1, 1)) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(0, 1, 1, 0) \cup C(0, 1, 0, 1)) \right. \\
& \quad \left. + \nu_k^*(C(1, 0, 0, 1) \cup C(0, 1, 0, 1))) + 1 \right) \\
& + \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^*(C(1, 0, 1, 0) \cup C(1, 0, 0, 1) \cup C(0, 1, 1, 0) \cup C(0, 1, 0, 1)) \right. \\
& \quad \left. \left. + \nu_0^*(D(1, 0) \cup D(1, 1) \cup D(0, 1)) \right) \right) \Big].
\end{aligned}$$

□

Kapitel 8.

Schätzer für Überschreitungswahrscheinlichkeiten von hohen Schranken

In diesem Kapitel werden wir ausgehend von zwei hohen Schranken x_n und y_n Wahrscheinlichkeiten des Typs

$$P\{V_0^{(1)} > x_n \quad \text{und} \quad V_0^{(2)} > y_n\}$$

schätzen. Dafür nehmen wir an, dass der marginaltransformierte Zufallsvektor $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ ist. Dann ist das Minimum $\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\}$ regulär variierend mit Index -1 , wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind, und mit Index $-1/\eta$ für $\eta \in (0, 1]$, wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch unabhängig sind. Folglich gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in suB\}}{P\{(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in uB\}} = \begin{cases} s^{-1/\eta}, & \text{wenn } V_0^{(*,1)} \not\perp V_0^{(*,2)}, \\ s^{-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.1)$$

für alle $s > 0$ und alle $B \in \mathbb{B}((0, \infty)^2)$ mit $\nu_0^*(B) > 0$ und $\nu_0^*(\partial B) = 0$, wobei $X \not\perp Y$ dafür steht, dass X und Y asymptotisch abhängig sind (siehe Definition 5.7). Anhand der regulären Variation in (8.1) kann nun die Wahrscheinlichkeit, dass $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ in einer extremen Menge uB liegt, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit, dass $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ in einer weniger extremen Menge $(u/t)B$ liegt, approximiert werden: Für große $u > 0$ ergibt sich aus Gleichung (8.1) die Approximation

$$P\{(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in uB\} \approx \begin{cases} t^{-1/\eta} P\{(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in (u/t)B\}, & \text{wenn } V_0^{(*,1)} \not\perp V_0^{(*,2)}, \\ t^{-1} P\{(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in (u/t)B\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.2)$$

Die Wahl von $t > 1$ ist dabei maßgebend für die Güte der obigen Approximation. In der Regel ist diese Approximation nämlich umso schlechter, je kleiner der Skalierungsfaktor (u/t) wird. Aus statistischer Sicht ist man jedoch daran interessiert, dass möglichst viele Beobachtungen in der Menge $(u/t)B$ liegen, so dass die Wahrscheinlichkeit $P\{(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in (u/t)B\}$ gut durch die zugehörige relative Häufigkeit geschätzt werden kann. Während im Fall der asymptotischen

Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ lediglich die Wahrscheinlichkeit $P\{(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}) \in (u/t)B\}$ geschätzt werden muss, tritt im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ zusätzlich der unbekannte Parameter η auf. Diesen unbekannt Parameter gilt es dann ebenfalls zu schätzen. Damit stellt auf theoretischer Ebene der Fall der asymptotischen Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ den statistisch aufwändigeren Fall dar. In der Praxis ist jedoch üblicherweise unbekannt, ob $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig oder unabhängig sind. Demnach muss zwangsläufig der Index der regulären Variation von $\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\}$ geschätzt werden.

Seien nun x_n und y_n Schranken, die gegen den rechten Endpunkt der Träger der Randverteilungen F_1 und F_2 konvergieren, also $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = F_1^{\leftarrow}(1)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = F_2^{\leftarrow}(1)$ erfüllen. Mit steigendem Stichprobenumfang $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir demnach immer extremere Ausfallmengen $(x_n, \infty) \times (y_n, \infty)$, die $P\{V_0^{(1)} > x_n, V_0^{(2)} > y_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ erfüllen. Sei nun für $F_j^*(x) := 1/(1 - F_j(x))$, $x \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$, die Menge

$$(F_1^*(x_n), \infty) \times (F_2^*(y_n), \infty),$$

die mittels F_1 und F_2 marginaltransformierte Ausfallmenge von $(x_n, \infty) \times (y_n, \infty)$, so dass unter der Annahme, dass F_1 und F_2 streng monoton steigend und stetig auf $[u_0^{(1)}, F_1^{\leftarrow}(1))$ und $[u_0^{(2)}, F_2^{\leftarrow}(1))$ für $u_0^{(1)}, u_0^{(2)} > 0$ sind,

$$P\{V_0^{(1)} > x_n, V_0^{(2)} > y_n\} = P\{V_0^{(*,1)} > F_1^*(x_n), V_0^{(*,2)} > F_2^*(y_n)\}$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt. In der Praxis sind üblicherweise Marginalverteilungsfunktionen unbekannt. Der bisher verwendete Ansatz, dass dann empirische Verteilungsfunktionen $\hat{F}_{n,1}$ und $\hat{F}_{n,2}$ anstelle von F_1 und F_2 verwendet werden, ist zur Schätzung von $P\{V_0^{(*,1)} > F_1^*(x_n), V_0^{(*,2)} > F_2^*(y_n)\}$ wenig hilfreich, da bei moderaten Stichprobenumfängen in der Regel keine Beobachtungen in der Ausfallmenge $(x_n, \infty) \times (y_n, \infty)$ vorliegen, wenn diese sehr extrem ist. Wir fordern deshalb im weiteren Verlauf, dass die Survivalfunktionen \bar{F}_1 und \bar{F}_2 regulär variierend mit Index $-1/\gamma_1$ beziehungsweise $-1/\gamma_2$ sind. Um die Präsentation der nachfolgenden Ergebnisse möglichst übersichtlich zu halten, betrachten wir ausschließlich die Fälle, in denen γ_1 und γ_2 positiv sind.

Aus der univariaten Extremwerttheorie ist bekannt, dass die reguläre Variation von \bar{F}_j mit Index $-1/\gamma_j < 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die folgende Konvergenz ist:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P\left(\frac{V_0^{(j)} - u}{\gamma_j u} \leq x \mid V_0^{(j)} > u\right) = H_{\gamma_j}(x) := (1 - (1 + \gamma_j x)^{-1/\gamma_j}) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x), \quad j \in \{1, 2\}.$$

Daraus ergibt sich für hinreichend große u die Approximation

$$\bar{F}_j(x) \approx \bar{F}_j(u) \left(1 - H_{\gamma_j}\left(\frac{x-u}{\gamma_j u}\right)\right) = \bar{F}_j(u) \left(\frac{x}{u}\right)^{-1/\gamma_j}, \quad x > u. \quad (8.3)$$

Wird nun u in (8.3) durch $V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}$ ersetzt, wobei $k_{n,j}$, $n \in \mathbb{N}$, eine intermediäre Folge beschreibt,

dann ergibt sich für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{F}_j(x) \approx \bar{F}_j(V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}) \left(\frac{x}{V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}} \right)^{-1/\gamma_j}, \quad x > V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}.$$

Da $\bar{F}_j(V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}) \approx 1 - \hat{F}_{n,j}(V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}) = k_{n,j}/n$ gilt, erhalten wir die Approximation

$$\bar{F}_j(x) \approx \frac{k_{n,j}}{n} \left(\frac{x}{V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}} \right)^{-1/\gamma_j}, \quad x > V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}.$$

Wird nun γ_j durch einen geeigneten Schätzer $\hat{\gamma}_{n,j}$, wie zum Beispiel den Hill-Schätzer, ersetzt, dann stellt

$$(\hat{G}_{n,1}(x_n), \infty) \times (\hat{G}_{n,2}(y_n), \infty)$$

mit

$$\hat{G}_{n,j}(x) := \frac{n}{k_{n,j}} \left(\frac{x}{V_{n-k_{n,j}:n}^{(j)}} \right)^{1/\hat{\gamma}_{n,j}}$$

einen Schätzer für die marginaltransformierte Ausfallmenge $(F_1^*(x_n), \infty) \times (F_2^*(y_n), \infty)$ dar.

Mit der folgenden Heuristik lässt sich nun ein Schätzer für $P\{V_0^{(1)} > x_n, V_0^{(2)} > y_n\}$ motivieren: Für eine geeignete Folge c_n , $n \in \mathbb{N}$, mit $c_n \rightarrow \infty$, und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} P\{V_0^{(1)} > x_n, V_0^{(2)} > y_n\} &= P\{V_0^{(*,1)} > F_1^*(x_n), V_0^{(*,2)} > F_2^*(y_n)\} \\ &\approx c_n^{-1/\eta} P\left\{V_0^{(*,1)} > \frac{F_1^*(x_n)}{c_n}, V_0^{(*,2)} > \frac{F_2^*(y_n)}{c_n}\right\} \\ &\approx c_n^{-1/\hat{\eta}_n} P\left\{V_0^{(*,1)} > \frac{s}{c_n}, V_0^{(*,2)} > \frac{t}{c_n}\right\} \Big|_{(s,t)=(\hat{G}_{n,1}(x_n), \hat{G}_{n,2}(y_n))} \\ &\approx c_n^{-1/\hat{\eta}_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\left\{V_i^{(n,1)} > \frac{\hat{G}_{n,1}(x_n)}{c_n}, V_i^{(n,2)} > \frac{\hat{G}_{n,2}(y_n)}{c_n}\right\}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

wobei $\hat{\eta}_n$ ein geeigneter Schätzer für η sei. Der Skalierungsfaktor c_n legt dann fest, wie viele der transformierten Beobachtungen $(V_i^{(n,1)}, V_i^{(n,2)})$, die in (7.5) definiert wurden, zusätzlich zur Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit $P\{V_0^{(1)} > x_n, V_0^{(2)} > y_n\}$ herangezogen werden. Die skalierte Ausfallmenge $(\hat{G}_{n,1}(x_n)/c_n, \infty) \times (\hat{G}_{n,2}(y_n)/c_n, \infty)$ soll dann zum einen möglichst viele dieser transformierten Beobachtungen umfassen, damit das Schätzen mit einem geringeren Fehler stochastischer Art möglich ist, aber zum anderen nicht zu viele transformierte Beobachtungen umfassen, die gegebenenfalls das Abhängigkeitsverhalten in den Tails ungenau oder überhaupt nicht wiedergeben.

Wenn bekannt ist, dass $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind, dann ergibt sich mit analogen Überlegungen wegen $\eta = 1$

$$P\{(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}) \in C_n\} \approx c_n^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\left\{V_i^{(n,1)} > \frac{\hat{G}_{n,1}(x_n)}{c_n}, V_i^{(n,2)} > \frac{\hat{G}_{n,2}(y_n)}{c_n}\right\}.$$

Bezeichne

$$p_n(x, y) := P\{V_0^{(1)} > xu_{n,1}, V_0^{(2)} > yu_{n,2}\}$$

die zu schätzende Ausfallwahrscheinlichkeit, wobei $u_{n,1}$ und $u_{n,2}$ Schranken sind, die gegen ∞ streben. In dem nachfolgenden Abschnitt wird dann das asymptotische Verhalten des Schätzers

$$\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y) := c_n^{-1/\hat{\eta}_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\left\{V_i^{(n,1)} > c_n^{-1} \hat{G}_{n,1}(xu_{n,1}), V_i^{(n,2)} > c_n^{-1} \hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})\right\}$$

für $p_n(x, y)$ untersucht.

Alternativ lässt sich aus der obigen Heuristik ein weiterer Schätzer motivieren. Anstatt die marginaltransformierten Zufallsvariablen $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ im letzten Schritt von (8.4) durch ihre empirischen Varianten $V_i^{(n,1)}$ und $V_i^{(n,2)}$ zu ersetzen, kann man alternativ (wegen $V_0^{(*,j)} = F_j^*(V_0^{(j)})$) erneut die verallgemeinerte Paretoapproximation anwenden. Dann ergibt sich

$$c_n^{-1/\hat{\eta}_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\left\{\hat{G}_{n,1}(V_i^{(1)}) > c_n^{-1} \hat{G}_{n,1}(xu_{n,1}), \hat{G}_{n,2}(V_i^{(2)}) > c_n^{-1} \hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})\right\}$$

als ein weiterer Schätzer für $p_n(x, y)$.

8.1. Asymptotisches Verhalten von $\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}$

Im Folgenden wird angenommen, dass die Schranken $u_{n,1}$ und $u_{n,2}$, welche festlegen, wie extrem die zu schätzenden Ausfallwahrscheinlichkeiten $p_n(x, y)$ sind, eine sogenannte Tail-Balance-Bedingung erfüllen: Es gelte

$$\frac{1 - F_1(u_{n,1})}{1 - F_2(u_{n,2})} = \frac{F_2^*(u_{n,2})}{F_1^*(u_{n,1})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d \quad (8.5)$$

für ein $d > 0$, wobei $F_j^*(x) := 1/(1 - F_j(x))$ für $x \in \mathbb{R}$ und $j \in \{1, 2\}$. Diese Bedingung an $u_{n,1}$ und $u_{n,2}$ soll also sicherstellen, dass die Geschwindigkeit, mit der $F_1(u_{n,1})$ gegen 1 konvergiert, nicht die Geschwindigkeit, mit der $F_2(u_{n,2})$ gegen 1 konvergiert, dominiert, und vice versa.

Seien des Weiteren

$$V_{n,i}^{(*,U,c_n)} := \frac{c_n}{u_n^*} (V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}) \mathbb{1}\left\{\min\{V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}\} > x^* \frac{u_n^*}{c_n}\right\}, \quad (8.6)$$

$$V_{n,i}^{(*,j,c_n)} := \frac{c_n}{u_n^*} V_i^{(*,j)} \mathbb{1}\left\{V_i^{(*,j)} > x^* \frac{u_n^*}{c_n}\right\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \text{und} \quad (8.7)$$

$$V_{n,i}^{(*,A,c_n)} := \frac{c_n}{u_n^*} (V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}) \mathbb{1} \left\{ \max\{V_i^{(*,1)}, V_i^{(*,2)}\} > x^* \frac{u_n^*}{c_n} \right\} \quad (8.8)$$

für ein $x^* > 0$, $u_n^* := F_1^*(u_{n,1})$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Der Skalierungsfaktor $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ wird derart gewählt, dass $c_n = o(u_n^*)$ gilt. Bezeichne

$$\begin{aligned} v_{n,x}^{(*,U,c_n)} &:= P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x u_n^*/c_n\} \quad \text{und} \\ v_{n,x}^{(*,A,c_n)} &:= P\{\max\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x u_n^*/c_n\} \end{aligned}$$

für $x \in [x^*, \infty)$. Die zur Funktionenklasse $\Phi = \{\phi_{x,y} \mid x, y \in [x^*, \infty)\}$ mit $\phi_{x,y}(z) = \mathbb{1}\{z_1 > x, z_2 > y\}$ für $z = (z_1, z_2) \in [0, \infty)^2$ zugehörigen standardisierten Tail-Array-Sums sind dann definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{x,y}) &:= (n v_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\phi_{x,y}(V_{n,i}^{(*,U,c_n)}) - E[\phi_{x,y}(V_{n,i}^{(*,U,c_n)})]) \\ &= (n v_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,1)} > x \frac{u_n^*}{c_n}, V_i^{(*,2)} > y \frac{u_n^*}{c_n} \right\} \right. \\ &\quad \left. - P \left\{ V_0^{(*,1)} > x \frac{u_n^*}{c_n}, V_0^{(*,2)} > y \frac{u_n^*}{c_n} \right\} \right). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Ebenso sind die zur Funktionenklasse $\Phi^{(or)} = \{\phi_{x,y}^{(or)} \mid x, y \in [x^*, \infty)\}$ mit $\phi_{x,y}^{(or)}(z) = \mathbb{1}\{z_1 > x \text{ oder } z_2 > y\}$ für $z = (z_1, z_2) \in [0, \infty)^2$ zugehörigen standardisierten Tail-Array-Sums definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\phi_{x,y}^{(or)}) &:= (n v_{n,1}^{(*,A,c_n)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A,c_n)}) - E[\phi_{x,y}^{(or)}(V_{n,i}^{(*,A,c_n)})]) \\ &= (n v_{n,1}^{(*,A,c_n)})^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,1)} > x \frac{u_n^*}{c_n} \text{ oder } V_i^{(*,2)} > y \frac{u_n^*}{c_n} \right\} \right. \\ &\quad \left. - P \left\{ V_0^{(*,1)} > x \frac{u_n^*}{c_n} \text{ oder } V_0^{(*,2)} > y \frac{u_n^*}{c_n} \right\} \right). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Definiere des Weiteren für $j \in \{1, 2\}$

$$e_n^{(j,c_n)}(x) := (n v_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\frac{u_n^*}{n c_n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,j)} > x \frac{u_n^*}{c_n} \right\} - \frac{1}{x} \right), \quad x \in [x^*, \infty).$$

Die obigen Ausdrücke $V_{n,i}^{(*,U,c_n)}$, $V_{n,i}^{(*,j,c_n)}$ und $V_{n,i}^{(*,A,c_n)}$ sowie $v_{n,x}^{(*,U,c_n)}$ und $v_{n,x}^{(*,A,c_n)}$ unterscheiden sich von $V_{n,i}^{(*,U)}$, $V_{n,i}^{(*,j)}$ und $V_{n,i}^{(*,A)}$ beziehungsweise $v_{n,x}^{(*,U)}$ und $v_{n,x}^{(*,A)}$ aus Kapitel 7 nur durch die Schrankenwahl u_n^*/c_n anstelle von u_n . Für die Anwendung der entsprechenden Resultate aus diesem Kapitel reicht es also aus, in den Voraussetzungen (A1*)–(A5*) und (A1**)–(A4**) die oben angesprochenen Objekte zu ersetzen. Jene modifizierten Versionen (A1*(c_n)), (A2*(c_n)), (A3*(c_n)) und (A5*(c_n)) sowie (A1**(c_n)), (A2**(c_n)) und (A3**(c_n)) der Voraussetzungen (A1*), (A2*), (A3*), (A5*), (A1**), (A2**) und (A3**) sind im Anhang A.2 angegeben.

Für das nachfolgende Theorem wird benötigt, dass die folgenden zwei Bias-Bedingungen gelten: Es existiert ein $a \in (x^*, \infty)$, so dass für $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x,y \in [x^*, a]} \left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > xu_n^*/c_n, V_0^{(*,2)} > yu_n^*/c_n\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u_n^*/c_n\}} - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)) \right| = o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}), \quad (8.11)$$

$$\sup_{x,y \in [x^*, a]} \left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > xu_n^*, V_0^{(*,2)} > yu_n^*\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u_n^*\}} - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)) \right| = o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}). \quad (8.12)$$

Darüber hinaus wird eine Bedingung an die Rate der regulären Variation von $\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\}$ gefordert: Es existiert eine regulär variierende Funktion q_1 mit Index $\tau < 0$, so dass für alle $x \in [1, \infty)$

$$\left| \frac{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > xu\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} - x^{-1/\eta} \right| = O(q_1(u)), \quad u \rightarrow \infty, \quad (8.13)$$

gilt. Wir bezeichnen für ein beliebiges $\varepsilon \in (0, x^*/2)$ mit

$$a_j := \left(\frac{x^* + 2\varepsilon}{d_j} \right)^{\gamma_j} \quad \text{und} \quad b_j := \left(\frac{a - 2\varepsilon}{d_j} \right)^{\gamma_j}$$

die Schranke des Intervalls $[a_j, b_j]$, wobei $j \in \{1, 2\}$ und $d_1 = 1$ und $d_2 = d$.

Theorem 8.1. Sei $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ eine strikt stationäre Zeitreihe mit Marginalverteilungsfunktionen F_1 und F_2 , die stetig und streng monoton wachsend auf $[u_0, \infty)$ für ein $u_0 > 0$ sind. Sei des Weiteren $(V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)})_{t \in \mathbb{Z}}$ regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß ν_0^* , welches Voraussetzung (PD) erfüllt und homogen vom Grad $-1/\eta$ mit $\eta \in (0, 1]$ ist. Es gelten die Voraussetzungen

- $(A1^*(c_n))$, $(A2^*(c_n))$, $(A3^*(c_n))$, $(A4^*)$ und $(A5^*(c_n))$, wenn $V_0^{(1)} \perp V_0^{(2)}$, und
- $(A1^{**}(c_n))$, $(A2^{**}(c_n))$, $(A3^{**}(c_n))$ und $(A4^{**})$ sonst.

Angenommen es existieren Folgen $m_n, m_{n,1}, m_{n,2}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\min\{m_n, m_{n,1}, m_{n,2}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, so dass die schwache Konvergenz

$$\left(\begin{array}{c} m_n^{1/2}(\hat{\eta}_n - \eta) \\ m_{n,1}^{1/2} \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{F_1^*(u_{n,1})} - x^{1/\gamma_1} \right)_{x \in [a_1, b_1]} \\ m_{n,2}^{1/2} \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{F_2^*(u_{n,2})} - y^{1/\gamma_2} \right)_{y \in [a_2, b_2]} \end{array} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c} X \\ (e_1(x))_{x \in [a_1, b_1]} \\ (e_2(y))_{y \in [a_2, b_2]} \end{array} \right) \quad (8.14)$$

und die gleichmäßige Konvergenz

$$\sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{F_j^*(xu_{n,j})}{F_j^*(u_{n,j})} - x^{1/\gamma_j} \right| = o(m_{n,j}^{-1/2}) \quad (8.15)$$

gelten, wobei $(X, (e_1(x))_{x \in [a_1, b_1]}, (e_2(y))_{y \in [a_2, b_2]})$ einen Grenzprozess in $\mathbb{R} \times l^\infty([a_1, b_1]) \times l^\infty([a_2, b_2])$ bezeichnet. Ferner sei angenommen, dass die Gleichungen (8.5), (8.11), (8.12) und (8.13) erfüllt sind, und $c_n = o(u_n^*)$ und $q_1(u_n^*/c_n) = o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})$ für $n \rightarrow \infty$ gelten.

Sei $\beta_n := \min\{\eta^4 m_n \log^{-2}(c_n), m_{n,1}, m_{n,2}, nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\}$ und $A := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Dann gilt in den nachfolgenden drei Fällen die schwache Konvergenz

$$\beta_n^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_n, \hat{\eta}_n(x, y)}{p_n(x, y)} \right)_{(x, y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z(x, y))_{(x, y) \in A} :$$

1. Fall: $m_n \log^{-2}(c_n) = o(\min\{m_{n,1}, m_{n,2}, nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$ mit

$$Z(x, y) = X.$$

2. Fall: $\min\{m_{n,1}, m_{n,2}\} = o(\min\{m_n \log^{-2}(c_n), nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$ mit

a)

$$Z(x, y) = \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} e_1(x),$$

wenn $m_{n,1} = o(m_{n,2})$ gilt,

b)

$$Z(x, y) = \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} de_2(y),$$

wenn $m_{n,2} = o(m_{n,1})$ gilt, und

c)

$$Z(x, y) = \kappa_1(l) \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} e_1(x) + \kappa_2(l) \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} de_2(y),$$

wenn $m_{n,1} = lm_{n,2}(1 + o(1))$ für ein $l > 0$ gilt, wobei $\kappa_1(l) := \mathbf{1}\{l \geq 1\} + l^{-1}\mathbf{1}\{l < 1\}$ und $\kappa_2(l) := l\mathbf{1}\{l \geq 1\} + \mathbf{1}\{l < 1\}$.

3. Fall: $nv_{n,1}^{(*,U,c_n)} = o(\min\{m_{n,1}, m_{n,2}, m_n \log^{-2}(c_n)\})$ mit

a)

$$Z(x, y) = \frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})},$$

wenn $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ asymptotisch unabhängig sind, und

b)

$$Z(x, y) = \frac{(2\lambda^{-1} - 1)^{1/2}}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left([1 - \lambda c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) x^{2/\gamma_1}] Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}^{(or)}) \right. \\ \left. + [1 - \lambda c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) d^2 y^{2/\gamma_2}] Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) \right),$$

wenn $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ asymptotisch abhängig sind.

Hierbei bezeichnen $\lambda > 0$ den Parameter aus (7.18), $Z^{(*,U)}$ den zentrierten Gaußprozess aus Proposition 7.4 und $Z^{(*,A)}$ den zentrierten Gaußprozess aus Proposition 7.9.

Bemerkung 8.2. 1. Bei Betrachtung des Grenzprozesses $(Z(x, y))_{(x,y) \in A}$ fällt auf, dass dessen Verteilung in den ersten beiden Fällen vollständig durch die Verteilung der postulierten Grenzzufallsvariable und -prozesse X , $(e_1(x))_{x \in [a_1, b_1]}$ und $(e_2(y))_{y \in [a_2, b_2]}$ aus (8.14) festgelegt wird. Im dritten Fall ist die Verteilung des Grenzprozesses durch die Verteilung von $(Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}))_{(x,y) \in A}$, wenn $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ asymptotisch unabhängig sind, beziehungsweise durch die Verteilung von $(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{(x,y) \in A}$, $(Z^{(*,A)}(\phi_{x,\infty}^{(or)}))_{x \in [a_1, b_1]}$ und $(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty,y}^{(or)}))_{y \in [a_2, b_2]}$, wenn $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ asymptotisch abhängig sind, bestimmt. Im dritten Fall ist also der Grenzprozess ein zentrierter Gaußprozess. Nach Gleichung (6.8) gilt für diesen

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(Z(x, y), Z(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ &= \frac{1}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})c(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})} \left[c(\max\{x^{1/\gamma_1}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}\}, d\max\{y^{1/\gamma_2}, \tilde{y}^{1/\gamma_2}\}) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{t=1}^{\infty} \left(c_t(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}) + c_t(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) \right) \right], \end{aligned} \quad (8.16)$$

wenn $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ asymptotisch unabhängig sind, wobei $c_t(z) = \nu_t^*((z_1, \infty) \times (z_2, \infty) \times (z_3, \infty) \times (z_4, \infty))$ für $z = (z_1, \dots, z_4) \in (0, \infty)^4$.

Im Fall der asymptotischen Abhängigkeit von $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ kann die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses $(Z(x, y))_{(x,y) \in A}$ mit Hilfe der Gleichungen in (7.63)–(7.71) bestimmt werden. Diese ist in Gleichung (8.47) angegeben. Erwähnenswert ist hierzu, dass der multiplikative Vorfaktor $(2\lambda^{-1} - 1)^{1/2}$ des Grenzprozesses $(Z(x, y))_{(x,y) \in A}$ wegen (7.20) verschwindet, wenn $\log(\hat{p}_{n, \hat{\eta}_n}(x, y)/p_n(x, y))$ mit $nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}/(nv_{n,1}^{(*,A,c_n)})^{1/2}$ anstelle von $\beta_n^{1/2}$ multipliziert wird.

2. Die Fälle 1–3 in Theorem 8.1 betrachten jeweils Situationen, in denen genau ein Schätzfehler, entweder ausgelöst durch $\hat{\eta}_n$, $\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})$, $\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})$ oder der Schätzmethode, die restlichen Schätzfehler dominiert. Dabei ist der Schätzfehler der Schätzmethode gerade jener, der nicht durch das Schätzen von η oder der marginaltransformierten Verteilungsfunktionen verursacht wird. Dieser Schätzfehler ist im Wesentlichen auf den Schätzer $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ für $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ zurückzuführen.

Der erste Fall in Theorem 8.1 beschreibt dann gerade die Situation, in der $\hat{\eta}_n$ den asymptotisch größten Schätzfehler verursacht, welcher von stochastischer Ordnung $m_n^{1/2} \log^{-1}(c_n)$ ist. Im zweiten Fall wird die Situation betrachtet, in der das Schätzen von $F_1^*(xu_{n,1})$ beziehungsweise $F_2^*(yu_{n,2})$ asymptotisch den größten Einfluss auf den Schätzfehler von $\hat{p}_{n, \hat{\eta}_n}(x, y)$ besitzt. Dieser ist dann von stochastischer Ordnung $\min\{m_{n,1}^{1/2}, m_{n,1}^{1/2}\}$. Dabei unterscheidet sich der Grenzprozess je nach asymptotischer Ordnung zwischen $m_{n,1}$ und $m_{n,2}$. Mit $nv_{n,1}^{(*,U,c_n)} = o(\min\{m_{n,1}, m_{n,2}, m_n \log^{-2}(c_n)\})$ wird im dritten Fall die Situation betrachtet, dass der Schätzfehler von $\hat{\eta}_n$, $\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})$ und $\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})$ asymptotisch

vernachlässigbar gegenüber dem Schätzfehler der Schätzmethode ist. Dieser ist von stochastischer Ordnung $(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2}$. Hierbei unterscheidet sich der zugehörige Grenzprozess im Fall der asymptotischen Unabhängigkeit beziehungsweise Abhängigkeit von $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$.

Im Beweis von Theorem 8.1 wird gezeigt, dass

$$\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x,y)}{p_n(x,y)} = T_n^{(1)} + T_n^{(2)}(x,y) + T_n^{(3)}(x,y) + o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})$$

für geeignete Summanden gilt (siehe Gleichung (8.21)). Die entsprechenden Grenzprozesse von $T_n^{(1)}$, $T_n^{(2)}$ und $T_n^{(3)}$ beschreiben dann gerade den Grenzprozess Z im Fall 1, 2 und 3. Nun sind nach Annahme (8.14) die Schätzer $\hat{\eta}_n$, $\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})$ und $\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})$ gemeinsam (schwach) konvergent. Wenn also die Raten der Summanden $T_n^{(1)}$ und $T_n^{(2)}$ asymptotisch übereinstimmen und von kleinerer Ordnung als die Raten von $T_n^{(3)}$ und $(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2}$ sind, dann setzt sich der Grenzprozess von $\beta_n^{1/2} \log(\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x,y)/p_n(x,y))$ wegen obiger Zerlegung additiv aus den Grenzprozessen von $T_n^{(1)}$ und $T_n^{(2)}$ zusammen. Das bedeutet dann beispielsweise im Fall $m_{n,1} = o(\min\{m_{n,2}, nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$ mit $m_{n,1}^{1/2} = m_n^{1/2} \log^{-1}(c_n)(1 + o(1))$

$$\beta_n^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x,y)}{p_n(x,y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(X + \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} e_1(x) \right)_{(x,y) \in A}$$

schwach.

◇

Bemerkung 8.3. 1. Mit den Bedingungen (8.11), (8.12), (8.13) und der Annahme $q_1(u_n^*/c_n) = o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})$ wird vorausgesetzt, dass der systematische Fehler, welcher durch die Approximation in (8.2) entsteht, von kleiner Ordnung als $(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}$ ist. Diese Rate entspricht gerade der stochastischen Ordnung des zufälligen Schätzfehlers von $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}((x, \infty) \times (y, \infty))$ für $\nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$. Tatsächlich bleibt Theorem 8.1 unter Annahme $q_1(u_n^*/c_n) = o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})$ auch dann bestehen, wenn die Bedingungen (8.11), (8.12) und (8.13) durch die folgende Bedingung ersetzt werden: Es existiert eine regulär variierenden Funktion q_1 mit Index $\tau < 0$, so dass

$$\left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > xu, V_0^{(*,2)} > yu\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} - \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)) \right| = O(q_1(u)), \quad u \rightarrow \infty,$$

für alle $x, y \in [x^*, \infty)$ und gleichmäßig für $(x, y) \in A$. Dabei folgt (8.12) gerade aus der regulären Variation von q_1 , die $q_1(u_n^*) = o(q_1(u_n^*/c_n))$ wegen $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ impliziert. Diese Annahme beschreibt eine Bedingung an die Rate der regulären Variation von $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auf $(0, \infty)^2$.

2. Durch eine moderate Wahl des Skalierungsfaktors c_n lässt sich sicherstellen, dass die Annahme $q_1(u_n^*/c_n) = o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})$ gilt. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ wird nämlich der Term $q_1(u_n^*/c_n)$ wegen des negativen Indexes der regulären Variation von q_1 umso kleiner, je größer der Quotient u_n^*/c_n wird. Derweil bewirkt ein steigender Quotient u_n^*/c_n insbesondere,

dass $(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}$ größer wird. Dieses Zusammenspiel führt also dazu, dass bei hinreichend kleiner Wahl von c_n , $n \in \mathbb{N}$, die Annahme $q_1(u_n^*/c_n) = o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})$ erfüllt ist.

3. Die Tail-Balance-Bedingung (8.5) spielt im Hinblick auf die reguläre Variation des marginaltransformierten Zufallsvektors $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ auf $(0, \infty)^2$ eine entscheidende Rolle. Die marginaltransformierte Ausfallmenge $(F_1^*(xu_{n,1}), \infty) \times (F_2^*(yu_{n,2}), \infty)$ ist nach geeigneter Normierung im Fall $n \rightarrow \infty$ genau dann eine nicht leere Menge, die von beiden Achsen weg beschränkt ist, wenn die Tail-Balance-Bedingung (8.5) erfüllt ist. Nach Definition 5.1 ist die reguläre Variation auf $(0, \infty)^2$ nur für Mengen zulässig, die von beiden Achsen weg beschränkt sind.
4. Bei Betrachtung des Grenzprozesses $(Z(x, y))_{(x,y) \in A}$ im zweiten Fall wird ersichtlich, dass das Grenzmaß der regulären Variation von $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ auf $(0, \infty)^2$ unabhängig von der (asymptotischen) Abhängigkeitsbeziehung zwischen $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ die Annahme (PD) erfüllen muss. Im zweiten Fall setzt sich nämlich der Grenzprozess unter anderem aus den partiellen Ableitungen c_x und c_y zusammen.
5. Die Annahme (8.15) beschreibt neben (8.11) und (8.12) eine weitere Bias-Bedingung. Diese soll sicherstellen, dass $\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})$ einen geeigneten Schätzer für die marginaltransformierte Schranke $F_j^*(xu_{n,j})$ darstellt.

◇

8.2. Wahl von c_n

Die Wahl eines geeigneten Skalierungsfaktors c_n für $\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)$ kann mit Hilfe eines graphischen Verfahrens bewerkstelligt werden. Dabei ist der Vorgang derselbe wie in Abschnitt 3.3.2 von Müller (2008).

Für $j \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir

$$c_n(j) := \inf \left\{ c > 0 \mid \sum_{i=1}^n \mathbf{1} \left\{ V_i^{(n,1)} > \frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{c}, V_i^{(n,2)} > \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{c} \right\} > j \right\}.$$

Mit der Wahl $c_n = c_n(j)$ gilt dann $\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y) = (c_n(j))^{-1/\hat{\eta}_n} j/n$. Das heißt, die Zahl $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt gerade die Anzahl an Beobachtungen an, die vom Schätzer $\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)$ (unabhängig von $\hat{\eta}_n$) gewichtet werden. Um nun ein geeignetes $c_n(j)$, $1 \leq j \leq n$, auszuwählen, werden die Punkte

$$\left(j, (c_n(j))^{-1/\hat{\eta}_n} \frac{1}{n} j \right), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (8.17)$$

in einem Plot visualisiert. In der Extremwerttheorie bezeichnet man Plots dieser Form als Hill-Plot.

Nun kommt folgende Heuristik zu tragen: Typischerweise ist der Verlauf der Punkte in (8.17) mit starken Schwankungen verbunden, wenn die Anzahl an Beobachtungen, die gewichtet werden, gering ist. In dieser Situation macht sich der stochastische Anteil des Schätzfehlers von $\hat{p}_{n, \hat{\eta}_n}(x, y)$ bemerkbar. Diese Schwankung wird mit zunehmender Anzahl an Beobachtungen geringer, jedoch nimmt dann der Anteil des systematischen Schätzfehlers zu. Im Plot wird das durch einen relativ schwankungsfreien monotonen Anstieg oder Abstieg der Punktkurve sichtbar. Der Skalierungsfaktor $c_n(j)$ respektive j wird deshalb in einem dazwischenliegenden Bereich gewählt, in dem sich die Punktkurve stabil verhält. In diesem Bereich wird die Summe des systematischen und zufälligen Schätzfehlers minimal.

8.3. Der Spezialfall: $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}) = (X_0, X_h)$

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine univariate strikt stationäre Zeitreihe, die regulär variierend ist. Wir nehmen nun wie im Unterkapitel 7.2 an, dass für ein beliebiges Lag $h \in \mathbb{N}$ der marginaltransformierte Zufallsvektor (X_0^*, X_h^*) regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ mit Index $-1/\eta \leq -1$ ist. Man beachte, dass wegen der strikten Stationarität der marginaltransformierte Zeitreihe $(X_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ die Tail-Balance-Bedingung (8.5) für $u_n := u_{n,1} = u_{n,2}$ trivial ist. Der Tail-Balance-Koeffizient d ist dann gleich 1. Ferner wird auch hier der Fall berücksichtigt, in dem die Marginalverteilungsfunktion F_{X_0} unbekannt ist. Damit werden also für das Schätzen der gemeinsamen Überschreitungswahrscheinlichkeit $p_n^{(h)}(x, y) := P\{X_0 > xu_n, X_h > yu_n\}$ rangtransformierte Beobachtungen basierend auf der Stichprobe X_1, \dots, X_{n+h} herangezogen (anstelle von marginaltransformierten Zufallsvariablen). Wir bezeichnen die rangtransformierten Beobachtungen mit

$$X_i^{(R,1)} := \frac{n+1}{n+1-R_{i:n}^{(1)}} \quad \text{und} \quad X_j^{(R,2)} := \frac{n+1}{n+1-R_{j:n}^{(2)}},$$

$1 \leq i \leq n$, $1+h \leq j \leq n+h$, wobei $R_{i:n}^{(1)}$ den Rang von X_i in X_1, \dots, X_n und $R_{n,j}^{(2)}$ den Rang von X_j in X_{1+h}, \dots, X_{n+h} bezeichnet.

Sei des Weiteren $\hat{\eta}_n$ ein geeigneter Schätzer für den unbekannt Parameter η . Da X_0 und X_h dasselbe Tailverhalten besitzen, können die marginaltransformierten Schranken $1/(1-F_{X_0}(xu_n))$ beziehungsweise $1/(1-F_{X_0}(yu_n))$ mit Hilfe desselben Typs von Schätzers geschätzt werden. Bezeichne $\hat{G}_{n,1}(xu_n)$ diesen Schätzer für $1/(1-F_{X_0}(xu_n))$ basierend auf den Beobachtungen X_1, \dots, X_n und $\hat{G}_{n,2}(yu_n)$ ebenjenes Schätzer für $1/(1-F_{X_0}(yu_n))$ basierend auf den Beobachtungen X_{1+h}, \dots, X_{n+h} . Nach Theorem 8.1 kann dann die Überschreitungswahrscheinlichkeit $p_n^{(h)}(x, y)$ unter den entsprechenden Annahmen aus ebendiesem Theorem geeignet mit Hilfe von

$$\hat{p}_{n, \hat{\eta}_n}^{(h)}(x, y) := c_n^{-1/\hat{\eta}_n} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbb{1} \left\{ X_t^{(R,1)} > c_n^{-1} \hat{G}_{n,1}(xu_n), X_{t+h}^{(R,2)} > c_n^{-1} \hat{G}_{n,2}(yu_n) \right\}$$

geschätzt werden. Das heißt, es gilt

$$\beta_n^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}^{(h)}(x,y)}{p_n^{(h)}(x,y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Z^{(h)}(x,y))_{(x,y) \in A} \quad (8.18)$$

für einen Grenzprozess $(Z^{(h)}(x,y))_{(x,y) \in A}$ in $l^\infty(A)$.

Wie in Theorem 8.1 festgehalten, ist die Verteilung des Grenzprozesses $(Z^{(h)}(x,y))_{(x,y) \in A}$ zum einen davon abhängig, welcher Schätzfehler asymptotisch den größten Einfluss hat, und zum anderen, in welcher (asymptotischen) Abhängigkeitsbeziehung X_0 und X_h zueinander stehen, das heißt, entweder asymptotisch unabhängig oder asymptotisch abhängig sind. Darüber hinaus ist nur im dritten Fall die exakte Verteilung des Grenzprozesses bestimmt, also in dem Fall, in dem der durch $\hat{\eta}_n$, $\hat{G}_{n,1}(x)$ und $\hat{G}_{n,2}(y)$ verursachte Schätzfehler asymptotisch vernachlässigbar ist. Hier setzt sich der Grenzprozess $(Z^{(h)}(x,y))_{(x,y) \in A}$ gerade aus den Gaußprozessen aus Proposition 7.4 respektive Proposition 7.9 zusammen. Dessen Kovarianzstruktur ist in Bemerkung 8.2 mit $d = 1$ festgehalten.

8.3.1. Konfidenzbereiche für $p_n^{(h)}$ im SV-Modell

Wenn die zugrunde liegende Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Lösung des SV-Modells in Definition 6.3 darstellt, vereinfacht sich unter den Bedingungen aus Theorem 6.4 die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses $(Z^{(h)}(x,y))_{(x,y) \in A}$ im Fall von $(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}) = o(\min\{m_{n,1}, m_{n,2}, m_n \log^{-2}(c_n)\})$ und der asymptotischen Unabhängigkeit von X_0^* und X_h^* entscheidend mit Hinblick auf die Konstruktion von punktwisen und globalen Konfidenzbereichen. Unter ebenjenen Bedingungen ist nämlich das Zufallspaar (X_0, X_h) regulär variierend mit einem Grenzmaß $\nu_0^{(h)}$. Ferner sind die zugehörigen Marginalverteilungsfunktionen, welche wegen der strikten Stationarität von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ identisch sind, regulär variierend mit einem negativen Index $-1/\gamma$. Die Tail-Balance-Bedingung (7.3) ist dann trivialerweise mit $d = 1$ erfüllt. Unter der Annahme, dass die Marginalverteilungsfunktion stetig und streng monoton fallend auf $[u_0, \infty)$ auf $u_0 > 0$ ist, folgt dann nach Lemma 7.1, dass der marginaltransformierte Zufallsvektor (X_0^*, X_h^*) regulär variierend auf $(0, \infty)^2$ mit Grenzmaß

$$\nu_0^{(*,h)}((x, \infty) \times (y, \infty)) = \nu_0^{(h)}((x^{1/\gamma}, \infty) \times (y^{1/\gamma}, \infty)) =: c^{(h)}(x, y)$$

ist. Nach Theorem 6.4 und Gleichung (8.16) gilt dann für die Grenzzufallsvariable

$$Z^{(h)}(x, y) = \frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}})}{c^{(h)}(x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma})}$$

die Gleichung

$$\text{Cov}(Z^{(h)}(x, y), Z^{(h)}(\tilde{x}, \tilde{y})) = \frac{c^{(h)}(\max\{x^{1/\gamma}, \tilde{x}^{1/\gamma}\}, \max\{y^{1/\gamma}, \tilde{y}^{1/\gamma}\})}{c^{(h)}(x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma})c^{(h)}(\tilde{x}^{1/\gamma}, \tilde{y}^{1/\gamma})}$$

für alle $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in A$.

Konfidenzintervalle für $p_n^{(h)}(x, y)$

Mit derselben Herangehensweise wie in Abschnitt 6.2 lassen sich nun asymptotische Konfidenzintervalle für die gemeinsame Überschreitungswahrscheinlichkeit $p_n^{(h)}(x, y)$ zum Niveau $1 - \tau \in (0, 1)$ konstruieren. Die Grenzzufallsvariable $Z^{(h)}(x, y)$ ist nach obiger Diskussion zentriert normalverteilt mit Varianz $\sigma_Z^2(x, y) := 1/c^{(h)}(x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma})$. Nach Theorem 7.7 konvergiert

$$\hat{\sigma}_{n,Z}^2 := \frac{1}{\hat{\nu}_n^{(\text{tr},h)}((x^{1/\gamma}, \infty) \times (y^{1/\gamma}, \infty))}$$

stochastisch gegen $\sigma_Z^2(x, y)$, wobei $\hat{\nu}_n^{(\text{tr},h)}$ in (7.29) definiert ist. Mit Hilfe des Lemmas von Slutsky und (8.18) folgt dann die schwache Konvergenz

$$\frac{(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2}}{\hat{\sigma}_{n,Z}(x, y)} \log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}^{(h)}(x, y)}{p_n^{(h)}(x, y)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{S} S \quad (8.19)$$

für $(x, y) \in A$ mit $S \sim \mathcal{N}(0, 1)$, wobei $v_{n,1}^{(*,U,c_n)} := P\{\min\{X_0^*, X_h^*\} > u_n/c_n\}$. Wird $v_{n,1}^{(*,U,c_n)}$ in der obigen Gleichung (8.19) durch einen geeigneten Schätzer $\hat{v}_n^{(c_n)}$ ersetzt, der $\hat{v}_n^{(c_n)}/v_{n,1}^{(*,U,c_n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{1}$ in Wahrscheinlichkeit erfüllt, bleibt die obige Konvergenzaussage (8.19) weiterhin erhalten. Damit stellt

$$\left[\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y) \exp\left(-\frac{\hat{\sigma}_{n,Z}(x, y)}{(n\hat{v}_n^{(c_n)})^{1/2}} \Psi^{-1}(1 - \tau/2)\right), \hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y) \exp\left(\frac{\hat{\sigma}_{n,Z}(x, y)}{(n\hat{v}_n^{(c_n)})^{1/2}} \Psi^{-1}(1 - \tau/2)\right) \right]$$

ein Konfidenzintervall für $p_n^{(h)}(x, y)$ zum asymptotischen Niveau $1 - \tau$ dar, wobei Ψ^{-1} die Inverse der Standardnormalverteilungsfunktion bezeichnet.

Globale Konfidenzbereiche für $(p_n^{(h)}(x, y))_{(x,y) \in A}$

Zur Konstruktion eines (globalen) asymptotischen Konfidenzbereiches für $(\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}^{(h)}(x, y))_{(x,y) \in A}$ bietet es sich an, a priori Form und Struktur des Konfidenzbereiches je nach Zweckmäßigkeit vorzugeben. Sei $g : A \rightarrow [0, \infty)$ eine (beschränkte und stetige) Abbildung, die im Folgenden die gewünschte Form des entsprechenden Konfidenzbereiches vorgibt. Diese gewichtet dann bestimmte Abschnitte in A stärker, um in diesen Bereichen eine höhere Genauigkeit des Konfidenzbereiches zu erzielen.

Nach dem Lemma von Slutsky, Gleichung (8.18) und Theorem 7.7 gilt

$$(n\hat{v}_n^{(c_n)})^{1/2} \left(\frac{g(x, y)}{\hat{\sigma}_{n,Z}(x, y)} \log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}^{(h)}(x, y)}{p_n^{(h)}(x, y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \left(g(x, y) \frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}})}{(c^{(h)}(x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}))^{1/2}} \right)_{(x,y) \in A}$$

schwach, wenn $\hat{v}_n^{(c_n)}/v_{n,1}^{(*,U,c_n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{1}$ in Wahrscheinlichkeit gilt. Man beachte, dass der obige Grenzprozess zentriert ist und

$$\text{Var} \left(g(x, y) \frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}})}{(c^{(h)}(x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}))^{1/2}} \right) = g^2(x, y).$$

gilt. Das Continuous-Mapping-Theorem (Kosorok, 2008, Theorem 7.7) liefert dann

$$(n\hat{v}_n^{(c_n)})^{1/2} \sup_{(x,y) \in A} \left| \frac{g(x,y)}{\hat{\sigma}_{n,Z}(x,y)} \log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}^{(h)}(x,y)}{p_n^{(h)}(x,y)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{(x,y) \in A} \left| g(x,y) \frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}})}{(c^{(h)}(x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}))^{1/2}} \right| \quad (8.20)$$

schwach. Da A separabel ist, beschreibt (8.20) gerade eine Konvergenz in Verteilung. Demzufolge existiert zu jedem $\tau \in (0, 1)$ eine Schranke $K_\tau > 0$, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ (n\hat{v}_n^{(c_n)})^{1/2} \sup_{(x,y) \in A} \left| \frac{g(x,y)}{\hat{\sigma}_{n,Z}(x,y)} \log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}^{(h)}(x,y)}{p_n^{(h)}(x,y)} \right| \leq K_\tau \right\} \geq 1 - \tau$$

gilt. Folglich stellt

$$\left\{ z : A \rightarrow [0, 1] \left| \sup_{(x,y) \in A} \left| \frac{g(x,y)}{\hat{\sigma}_{n,Z}(x,y)} \log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}^{(h)}(x,y)}{z(x,y)} \right| \leq \frac{K_\tau}{(n\hat{v}_n^{(c_n)})^{1/2}} \right\}$$

einen asymptotischen Konfidenzbereich für $(p_n^{(h)}(x,y))_{(x,y) \in A}$ zum Niveau $1 - \tau$ dar, wenn K_τ eine Stetigkeitsstelle der Verteilungsfunktion der Grenzzufallsvariablen in (8.20) ist.

Da die Verteilung der Grenzzufallsvariable in (8.20) im Allgemeinen unbekannt ist, kann K_τ nicht direkt bestimmt werden. Jedoch kann mit Hilfe von Resultaten über das Supremum von Gaußprozessen die Wahrscheinlichkeit

$$P \left\{ \sup_{(x,y) \in A} \left| g(x,y) \frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}})}{(c^{(h)}(x^{1/\gamma}, y^{1/\gamma}))^{1/2}} \right| \leq K_\tau \right\}$$

derart abgeschätzt werden, dass ein geeignetes $K_\tau > 0$ gewählt werden kann. Jedoch sind diese Abschätzungen für gewöhnlich derart grob, dass die entsprechenden Konfidenzbereiche höhere Überdeckungswahrscheinlichkeiten aufweisen als ursprünglich vorgesehen. Werden hingegen konkrete Zeitreihenmodelle betrachtet, so kann mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen K_τ bestimmt werden.

8.4. Beweis von Theorem 8.1

Nach dem Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4) existieren Versionen von $(\hat{\eta}_n, \hat{G}_{n,1}, \hat{G}_{n,2})$, $n \in \mathbb{N}$, und (X, e_1, e_2) , für die (8.14) fast sicher gilt. Wir betrachten in diesem Beweis die fast sicheren Versionen, wobei wir der Übersichtlichkeit halber zwischen den Bezeichnungen nicht unterscheiden. Sei dann $\delta > 0$ beliebig.

Anhand analoger Rechnung wie in (7.7) ergibt sich

$$V_i^{(n,j)} > c_n^{-1} \hat{G}_{n,j}(xu_{n,j}) \iff V_i^{(*,j)} > V_{\lfloor (n+1)(1-c_n/\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})) \rfloor}^{(*,j)}$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, 2\}$. Bezeichne

$$\begin{aligned} S_{n,c_n}^*(s, t) &:= \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,1)} > s \frac{u_n^*}{c_n}, V_i^{(*,2)} > t \frac{u_n^*}{c_n} \right\}, \\ t_{n,j}^*(s) &:= \frac{c_n}{u_n^*} V_{\lfloor (n+1)(1-c_n/(su_n^*)) \rfloor : n}^{(*,j)}, \\ \tilde{t}_{n,j}^*(x) &:= t_{n,j}^* \left(\frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{u_n^*} \right) = \frac{c_n}{u_n^*} V_{\lfloor (n+1)(1-c_n/\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})) \rfloor : n}^{(*,j)}. \end{aligned}$$

Mit der obigen Äquivalenz folgt also

$$\begin{aligned} \hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y) &= \frac{c_n^{-1/\hat{\eta}_n}}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,1)} > V_{\lfloor (n+1)(1-c_n/\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})) \rfloor : n}^{(*,1)}, V_i^{(*,2)} > V_{\lfloor (n+1)(1-c_n/\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})) \rfloor : n}^{(*,2)} \right\} \\ &= \frac{c_n^{-1/\hat{\eta}_n}}{n} S_{n,c_n}^*(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} &= \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\hat{\eta}_n} \right) \log(c_n) + \log \left(\frac{c(\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/u_n^*, \hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/u_n^*)}{c(F_1^*(xu_{n,1})/u_n^*, F_2^*(yu_{n,2})/u_n^*)} \right) \\ &\quad + \log \left(\frac{n^{-1} S_{n,c_n}^*(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y))}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)} c(\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/u_n^*, \hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/u_n^*)} \right) \\ &\quad + \log \left(c_n^{-1/\eta} c(F_1^*(xu_{n,1})/u_n^*, F_2^*(yu_{n,2})/u_n^*) \frac{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}}{p_n(x, y)} \right) \\ &=: T_n^{(1)} + T_n^{(2)}(x, y) + T_n^{(3)}(x, y) + T_n^{(4)}(x, y). \end{aligned} \tag{8.21}$$

Asymptotik von $T_n^{(1)}$: Mit der Annahme (8.14) folgt

$$T_n^{(1)} = \eta^{-2}(\hat{\eta}_n - \eta) \log(c_n)(1 + o_P(1)) = \eta^{-2} m_n^{-1/2} \log(c_n) X(1 + o_P(1)).$$

Im Fall $m_{n,j} = o(m_n \log^{-2}(c_n)) \iff m_n^{-1/2} \log(c_n) = o(m_{n,j}^{-1/2})$ gilt dann

$$T_n^{(1)} = O_P(m_n^{-1/2} \log(c_n)) = o_P(m_{n,j}^{-1/2}), \quad j \in \{1, 2\}.$$

Asymptotik von $(T_n^{(2)}(x, y))_{(x,y) \in A}$: Eine Taylorentwicklung der Funktion $z \mapsto 1/z$ im Punkt x^{1/γ_j} liefert zunächst

$$\frac{F_j^*(u_{n,j})}{F_j^*(xu_{n,j})} = \frac{1}{F_j^*(xu_{n,j})/F_j^*(u_{n,j})} = \frac{1}{x^{1/\gamma_j}} - \frac{1}{x^{2/\gamma_j}} \left(\frac{F_j^*(xu_{n,j})}{F_j^*(u_{n,j})} - x^{1/\gamma_j} \right) (1 + o(1))$$

gleichmäßig für $x \in [a_j, b_j]$. In Verbindung mit Annahme (8.15) gilt also

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{F_j^*(u_{n,j})}{F_j^*(xu_{n,j})} - x^{-1/\gamma_j} \right| &= \sup_{x \in [a_j, b_j]} \frac{1}{x^{2/\gamma_j}} \left| \frac{F_j^*(xu_{n,j})}{F_j^*(u_{n,j})} - x^{1/\gamma_j} \right| \\ &= \max\{a_j^{-2/\gamma_j}, b_j^{-2/\gamma_j}\} \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{F_j^*(xu_{n,j})}{F_j^*(u_{n,j})} - x^{1/\gamma_j} \right| \\ &= o(m_{n,j}^{-1/2}). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Demnach gilt wegen der Annahme (8.14) und dem Lemma von Slutsky

$$\begin{aligned} m_{n,j}^{1/2} \left(\frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{F_j^*(xu_{n,j})} - 1 \right) &= m_{n,j}^{1/2} \left(\frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{F_j^*(u_{n,j})} x^{-1/\gamma_j} (1 + o(m_{n,j}^{-1/2})) - 1 \right) \\ &= m_{n,j}^{1/2} \left(\frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{x^{1/\gamma_j} F_j^*(u_{n,j})} - 1 \right) + o_P(1) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{e_j(x)}{x^{1/\gamma_j}} \end{aligned} \quad (8.23)$$

gleichmäßig für $x \in [a_j, b_j]$ und $j \in \{1, 2\}$.

Eine Taylorentwicklung der Funktion $(x, y) \mapsto c(x, y)$ im Punkt $(F_1^*(xu_{n,1})/u_n^*, F_2^*(yu_{n,2})/u_n^*)$ liefert des Weiteren

$$\begin{aligned} &c\left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \\ &= c\left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) + c_x\left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*} - \frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}\right) \\ &\quad + c_y\left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} - \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) + o_P(\max_{j \in \{1,2\}} m_{n,j}^{-1/2}) \\ &= c\left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) + c_x\left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{F_1^*(xu_{n,1})} - 1\right) \frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*} \\ &\quad + c_y\left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{F_2^*(yu_{n,2})} - 1\right) \frac{F_2^*(u_{n,2})}{u_n^*} \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{F_2^*(u_{n,2})} + o_P(\max_{j \in \{1,2\}} m_{n,j}^{-1/2}) \end{aligned}$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} T_n^{(2)}(x, y) &= \log \left(1 + \frac{c_x(F_1^*(xu_{n,1})/u_n^*, F_2^*(yu_{n,2})/u_n^*)}{c(F_1^*(xu_{n,1})/u_n^*, F_2^*(yu_{n,2})/u_n^*)} \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{F_1^*(xu_{n,1})} - 1\right) \frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*} \right. \\ &\quad + \frac{c_y(F_1^*(xu_{n,1})/u_n^*, F_2^*(yu_{n,2})/u_n^*)}{c(F_1^*(xu_{n,1})/u_n^*, F_2^*(yu_{n,2})/u_n^*)} \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{F_2^*(yu_{n,2})} - 1\right) \frac{F_2^*(u_{n,2})}{u_n^*} \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{F_2^*(u_{n,2})} \\ &\quad \left. + o_P(\max_{j \in \{1,2\}} m_{n,j}^{-1/2}) \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}(1 + o(1)), dy^{1/\gamma_2}(1 + o(1)))}{c(x^{1/\gamma_1}(1 + o(1)), dy^{1/\gamma_2}(1 + o(1)))} \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{F_1^*(xu_{n,1})} - 1\right) x^{1/\gamma_1}(1 + o_P(1)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}(1 + o(1)), dy^{1/\gamma_2}(1 + o(1)))}{c(x^{1/\gamma_1}(1 + o(1)), dy^{1/\gamma_2}(1 + o(1)))} \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{F_2^*(yu_{n,2})} - 1\right) dy^{1/\gamma_2}(1 + o_P(1)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + o_P\left(\max_{j \in \{1,2\}} m_{n,j}^{-1/2}\right) \\
= & \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{F_1^*(xu_{n,1})} - 1 \right) x^{1/\gamma_1} \\
& + \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{F_2^*(yu_{n,2})} - 1 \right) dy^{1/\gamma_2} + o_P\left(\max_{j \in \{1,2\}} m_{n,j}^{-1/2}\right)
\end{aligned} \tag{8.24}$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$. Wegen (8.14) gilt also

$$T_n^{(2)}(x, y) = \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{F_1^*(xu_{n,1})} - 1 \right) x^{1/\gamma_1} + o_P(m_{n,1}^{-1/2})$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$, wenn $m_{n,1} = o(m_{n,2})$ erfüllt ist,

$$T_n^{(2)}(x, y) = \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{F_2^*(yu_{n,2})} - 1 \right) dy^{1/\gamma_2} + o_P(m_{n,2}^{-1/2})$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$, wenn $m_{n,2} = o(m_{n,1})$ erfüllt ist, und im Fall $m_{n,2} = lm_{n,1}(1 + o(1))$ für ein $l > 0$ bleibt die Entwicklung von $T_n^{(2)}(x, y)$ in (8.24) unverändert.

Asymptotik von $(T_n^{(3)}(x, y))_{(x,y) \in A}$: Wir betrachten zunächst den Fall, in dem $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch unabhängig sind. Nach Proposition 7.4 gilt dann unter den Annahmen (A1* (c_n)), (A2* (c_n)), (A3* (c_n)), (A4*) und (A5* (c_n)), dass $(\tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ schwach gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}$ mit Kovarianzstruktur in (6.8) konvergiert. Ferner folgt aus Gleichung (8.9)

$$S_{n,c_n}^*(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) = (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}) + nd_n^*(x, y),$$

wobei

$$d_n^*(x, y) := P\left\{V_0^{(*,1)} > s \frac{u_n^*}{c_n}, V_0^{(*,2)} > t \frac{u_n^*}{c_n}\right\} \Big|_{(s,t)=(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y))}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
& (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}} S_{n,c_n}^*(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) - c\left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \right) \\
& = \tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}) + (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\frac{d_n^*(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c\left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \right). \tag{8.25}
\end{aligned}$$

Um das asymptotische Verhalten der rechten Seite von (8.25) zu bestimmen, analysieren wir zunächst das Grenzverhalten von $(\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})/u_n^*)_{x \in [a_j, b_j]}$, $(t_{n,j}^*(x))_{x \in [a_j, b_j]}$ und $(\tilde{t}_{n,j}^*(x))_{x \in [a_j, b_j]}$, $j \in \{1, 2\}$. Nun folgt aus (8.5) und (8.14)

$$\sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{u_n^*} - d_j x^{1/\gamma_j} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in [a_j, b_j]} \frac{F_j^*(u_{n,j})}{u_n^*} \left| \frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{F_j^*(u_{n,j})} - x^{1/\gamma_j} \right| + \sup_{x \in [a_j, b_j]} x^{1/\gamma_j} \left| \frac{F_j^*(u_{n,j})}{u_n^*} - d_j \right| \\ &= o_P(1). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Demnach gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in [a_j, b_j]} \frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{u_n^*} \in [d_j a_j^{1/\gamma_j} - \varepsilon, d_j b_j^{1/\gamma_j} + \varepsilon] = [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon] \quad (8.27)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$.

Lemma 7.5 liefert wegen der Annahmen $(A1^*(c_n))$, $(A2^*(c_n))$, $(A3^*(c_n))$, $(A4^*)$ und $(A5^*(c_n))$

$$\sup_{\tilde{x} \in [x^*, a]} |t_{n,j}^*(\tilde{x}) - \tilde{x}| = o_P((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}). \quad (8.28)$$

Derweil gilt wegen (8.27) die folgende Abschätzung mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in [a_j, b_j]} |\tilde{t}_{n,j}^*(x) - d_j x^{1/\gamma_j}| \\ &\leq \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \tilde{t}_{n,j}^*(x) - \frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{u_n^*} \right| + \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{u_n^*} - d_j x^{1/\gamma_j} \right| \\ &\leq \sup_{\tilde{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,j}^*(\tilde{x}) - \tilde{x}| + \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{u_n^*} - d_j x^{1/\gamma_j} \right|. \end{aligned} \quad (8.29)$$

In Kombination mit (8.26) und (8.28) gilt also

$$\sup_{x \in [a_j, b_j]} |\tilde{t}_{n,j}^*(x) - d_j x^{1/\gamma_j}| = o_P(1). \quad (8.30)$$

Mit derselben Herangehensweise wie in Theorem 7.7 bestimmen wir nun das asymptotische Verhalten des ersten Summanden der rechten Seite von (8.25). Nach dem Lemma von Slutsky (Kosorok, 2008, Theorem 7.15) gilt die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} &\left((\tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}, (\tilde{t}_{n,1}^*(x))_{x \in [a_1, b_1]}, (\tilde{t}_{n,2}^*(y))_{y \in [a_2, b_2]} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left((Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}))_{x,y \in [x^*, \infty)}, (x^{1/\gamma_1})_{x \in [a_1, b_1]}, (dy^{1/\gamma_2})_{y \in [a_2, b_2]} \right). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Ferner gilt nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4), dass Versionen von $(\tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{x,y}), \tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y))$, $n \in \mathbb{N}$, und $(Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}), x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})$ existieren, so dass die obige Konvergenz (8.31) fast sicher gilt. Der Übersichtlichkeit halber unterscheiden wir zwischen den Bezeichnungen dieser Versionen nicht. Da $(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y))$ mit einer gegen 1 konvergierenden Wahrscheinlichkeit in $[x^{1/\gamma_1} - \varepsilon, x^{1/\gamma_1} + \varepsilon] \times [dy^{1/\gamma_2} - \varepsilon, dy^{1/\gamma_2} + \varepsilon]$ liegt, kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass die folgende

Abschätzung mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \sup_{(x,y) \in A} \left| \tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^*) - Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}) \right| \\
& \leq \sup_{(x,y) \in A} \left| \tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^*) - Z^{(*,U)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^*) \right| \\
& \quad + \sup_{(x,y) \in A} \left| Z^{(*,U)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^*) - Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}) \right| \\
& \leq \sup_{x,y \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \tilde{Z}_n^{(*,U,c_n)}(\phi_{x,y}) - Z^{(*,U)}(\phi_{x,y}) \right| \\
& \quad + \sup_{(x,y) \in A} \left| Z^{(*,U)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^*) - Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}) \right|. \tag{8.32}
\end{aligned}$$

Der erste Summand der rechten Seite von (8.32) konvergiert wegen (8.31) fast sicher gegen 0. Nach Theorem 7.19 von Kosorok (2008) besitzt der Grenzprozess $Z^{(*,U)}$ fast sicher gleichmäßig stetig Pfade bezüglich ρ^* (definiert in (7.32)). Ferner gilt wegen (8.30): Zu jedem $\delta > 0$ kann $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden, so dass

$$\sup_{x \in [a_j, b_j]} |\tilde{t}_{n,j}^*(x) - d_j x^{1/\gamma_j}| < \varepsilon$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ gilt. Nach Lemma 7.14 gilt dann für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \sup_{(x,y) \in A} \rho^*(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^*, \phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}) \\
& = x^* \sup_{(x,y) \in A} \left(\nu_0^*((\min\{\tilde{t}_{n,1}^*(x), x^{1/\gamma_1}\}, \max\{\tilde{t}_{n,1}^*(x), x^{1/\gamma_1}\}] \times (x^*, \infty)) \right. \\
& \quad \left. + \nu_0^*((x^*, \infty) \times (\min\{\tilde{t}_{n,2}^*(y), dy^{1/\gamma_2}\}, \max\{\tilde{t}_{n,2}^*(y), dy^{1/\gamma_2}\})) \right) \\
& = x^* \sup_{(x,y) \in A} \left(c(\min\{\tilde{t}_{n,1}^*(x), x^{1/\gamma_1}\}, x^*) - c(\max\{\tilde{t}_{n,1}^*(x), x^{1/\gamma_1}\}, x^*) \right. \\
& \quad \left. + c(x^*, \min\{\tilde{t}_{n,2}^*(y), dy^{1/\gamma_2}\}) - c(x^*, \max\{\tilde{t}_{n,2}^*(y), dy^{1/\gamma_2}\}) \right) \\
& \leq x^* \left(\sup_{x \in [a_1, b_1]} \left| c(x^{1/\gamma_1} - \sup_{\tilde{x} \in [a_1, b_1]} |\tilde{t}_{n,1}^*(\tilde{x}) - \tilde{x}^{1/\gamma_1}|, x^*) - c(x^{1/\gamma_1}, x^*) \right| \right. \\
& \quad + \sup_{x \in [a_1, b_1]} \left| c(x^{1/\gamma_1} + \sup_{\tilde{x} \in [a_1, b_1]} |\tilde{t}_{n,1}^*(\tilde{x}) - \tilde{x}^{1/\gamma_1}|, x^*) - c(x^{1/\gamma_1}, x^*) \right| \\
& \quad + \sup_{y \in [a_2, b_2]} \left| c(x^*, dy^{1/\gamma_2} - \sup_{\tilde{y} \in [a_2, b_2]} |\tilde{t}_{n,2}^*(\tilde{y}) - d\tilde{y}^{1/\gamma_2}|) - c(x^*, dy^{1/\gamma_2}) \right| \\
& \quad \left. + \sup_{y \in [a_2, b_2]} \left| c(x^*, dy^{1/\gamma_2} + \sup_{\tilde{y} \in [a_2, b_2]} |\tilde{t}_{n,2}^*(\tilde{y}) - d\tilde{y}^{1/\gamma_2}|) - c(x^*, dy^{1/\gamma_2}) \right| \right) \\
& \leq 2x^* K \left(\sup_{\tilde{x} \in [a_1, b_1]} |\tilde{t}_{n,1}^*(\tilde{x}) - \tilde{x}^{1/\gamma_1}| + \sup_{\tilde{y} \in [a_2, b_2]} |\tilde{t}_{n,2}^*(\tilde{y}) - d\tilde{y}^{1/\gamma_2}| \right)
\end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$, wobei $K > 0$ eine geeignete Konstante bezeichnet.

In Kombination mit (8.30) gilt also

$$\sup_{(x,y) \in A} \rho^*(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}, \phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}) = o_P(1),$$

so dass der zweite Summand der rechten Seite von (8.32) stochastisch vernachlässigbar ist.

Wegen (8.27) gilt die folgende Abschätzung mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \sup_{(x,y) \in A} \left| \frac{d_n^*(x,y)}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c\left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \right| \\ & \leq \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \frac{d_n(\tilde{x}, \tilde{y})}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \right| \\ & \leq \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \frac{d_n(\tilde{x}, \tilde{y})}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c(t_{n,1}^*(\tilde{x}), t_{n,2}^*(\tilde{y})) \right| + \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |c(t_{n,1}^*(\tilde{x}), t_{n,2}^*(\tilde{y})) - c(\tilde{x}, \tilde{y})|, \end{aligned} \quad (8.33)$$

wobei

$$d_n(x,y) := P\left\{V_0^{(*,1)} > s \frac{u_n^*}{c_n}, V_0^{(*,2)} > t \frac{u_n^*}{c_n}\right\} \Big|_{(s,t)=(t_{n,1}^*(x), t_{n,2}^*(y))}.$$

Aus (8.28) folgt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in [x^*, a]} |t_{n,j}^*(x) - x| < \varepsilon \quad (8.34)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$. Folglich gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \frac{d_n(\tilde{x}, \tilde{y})}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c(t_{n,1}^*(\tilde{x}), t_{n,2}^*(\tilde{y})) \right| \\ & \leq \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in [x^*, a]} \left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > \bar{x}u_n^*/c_n, V_0^{(*,2)} > \bar{y}u_n^*/c_n\}}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c(\bar{x}, \bar{y}) \right| \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$, wobei die rechte Seite obiger Ungleichung wegen der Bias-Bedingung (8.11) von kleiner Ordnung als $(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}$ ist. Des Weiteren folgt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ aus der Monotonie des Grenzmaßes ν_0^* und den Ungleichungen (8.34) und (7.38)

$$\begin{aligned} & \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |c(t_{n,1}^*(\tilde{x}), t_{n,2}^*(\tilde{y})) - c(\tilde{x}, \tilde{y})| \\ & \leq \max \left\{ \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| c\left(\tilde{x} + \sup_{\bar{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}^*(\bar{x}) - \bar{x}|, \tilde{y} + \sup_{\bar{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}^*(\bar{y}) - \bar{y}|\right) - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \right|, \right. \\ & \quad \left. \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| c\left(\tilde{x} - \sup_{\bar{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}^*(\bar{x}) - \bar{x}|, \tilde{y} - \sup_{\bar{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}^*(\bar{y}) - \bar{y}|\right) - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \right| \right\} \end{aligned}$$

$$\leq K_\varepsilon \left(\sup_{\bar{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,1}^*(\bar{x}) - \bar{x}| + \sup_{\bar{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} |t_{n,2}^*(\bar{y}) - \bar{y}| \right)$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$, wobei $K_\varepsilon > 0$ eine geeignete Konstante bezeichnet. Nach Gleichung (8.28) ist die rechte Seite obiger Ungleichung stochastisch von kleinerer Ordnung als $(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}$. Wegen (8.33) ist damit auch der zweite Summand der rechten Seite von (8.25) asymptotisch vernachlässigbar, das heißt

$$\sup_{(x,y) \in A} (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left| \frac{d_n^*(x,y)}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right| = o_P(1). \quad (8.35)$$

Nun liefert die gleichmäßige Stetigkeit von c auf Kompakta in Verbindung mit Annahme (8.14)

$$\sup_{(x,y) \in A} \left| c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) - c(x^{1/\gamma_1}, dy^{\gamma_2}) \right| = o_P(1). \quad (8.36)$$

Mit dem Lemma von Slutsky ergibt sich also

$$\begin{aligned} (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} & \left(\frac{n^{-1} S_{n,c_n}^*(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y))}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)} c(\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/u_n^*, \hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/u_n^*)} - 1 \right)_{(x,y) \in A} \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \right)_{(x,y) \in A} \end{aligned}$$

in Wahrscheinlichkeit. Insgesamt erhalten wir dann

$$\begin{aligned} T_n^{(3)}(x,y) &= \log \left(1 + (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} + o_P(1) \right) \right) \\ &= (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} + o_P(1) \right), \end{aligned}$$

wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch unabhängig sind.

Wir betrachten nun den Fall, in dem $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind. Nach Proposition 7.9 gilt dann unter den Annahmen (A1**(c_n)), (A2**(c_n)), (A3**(c_n)) und (A4**), dass $(\tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\psi))_{\psi \in \Phi^{(or)}}$ schwach gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z^{(*,A)}(\psi))_{\psi \in \Phi^{(or)}}$ konvergiert. Ferner gilt nach Gleichung (7.86) für $j \in \{1, 2\}$ und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{1} \left\{ V_i^{(*,j)} > V_{\lfloor (n+1)(1-c_n/\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})) \rfloor : n}^{(*,j)} \right\} = \left\lceil \frac{n+1}{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})/c_n} \right\rceil - 1$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$. In Verbindung mit (8.10) ergibt sich damit die Darstellung

$$S_{n,c_n}^*(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,1)} > V_{[(n+1)(1-c_n/\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1}))]:n}^{(*,1)}, V_i^{(*,2)} > V_{[(n+1)(1-c_n/\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2}))]:n}^{(*,2)} \right\} \\
&= \left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/c_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/c_n} \right\rfloor - 2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \left\{ V_i^{(*,1)} > \tilde{t}_{n,1}^*(x) \frac{u_n^*}{c_n} \text{ oder } V_i^{(*,2)} > \tilde{t}_{n,2}^*(y) \frac{u_n^*}{c_n} \right\} \\
&= \left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/c_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/c_n} \right\rfloor - 2 \\
&\quad - (nv_{n,1}^{(*,A,c_n)})^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^{(or)}) - nd_n^{(*,or)}(x, y), \tag{8.37}
\end{aligned}$$

wobei

$$d_n^{(*,or)}(x, y) := P \left\{ V_0^{(*,1)} > s \frac{u_n^*}{c_n} \text{ oder } V_0^{(*,2)} > t \frac{u_n^*}{c_n} \right\} \Big|_{(s,t)=(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y))}.$$

Gleichung (7.82) liefert für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$d_n^{(*,or)}(x, y) = \frac{c_n}{u_n^*} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{n,1}^*(x)} + \frac{1}{\tilde{t}_{n,2}^*(y)} \right) - d_n^*(x, y). \tag{8.38}$$

Wegen (8.37) und (8.38) gilt also

$$\begin{aligned}
&(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}} S_{n,c_n}^*(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) - c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right) \\
&= (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/c_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/c_n} \right\rfloor - 2 - nd_n^{(*,or)}(x, y) \right) \\
&\quad - \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A,c_n)}}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} \right)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^{(or)}) - (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \\
&= (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/c_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/c_n} \right\rfloor - 2 \right. \\
&\quad \left. - n \left[\frac{c_n}{u_n^*} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{n,1}^*(x)} + \frac{1}{\tilde{t}_{n,2}^*(y)} \right) - d_n^*(x, y) \right] \right) \\
&\quad - \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A,c_n)}}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} \right)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^{(or)}) - (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \\
&= (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/c_n} \right\rfloor - \frac{n}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/c_n} \right. \\
&\quad \left. + \left\lfloor \frac{n+1}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/c_n} \right\rfloor - \frac{n}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/c_n} - 2 \right. \\
&\quad \left. - n \frac{c_n}{u_n^*} \left[\frac{1}{\tilde{t}_{n,1}^*(x)} - \frac{u_n^*}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})} + \frac{1}{\tilde{t}_{n,2}^*(y)} - \frac{u_n^*}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})} \right] + nd_n^*(x, y) \right) \\
&\quad - \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A,c_n)}}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} \right)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^{(or)}) - (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A,c_n)}}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} \right)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^{(or)}) \\
&\quad - \left(\frac{c_n/u_n^*}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} \right)^{1/2} (nc_n/u_n^*)^{1/2} \left[\frac{1}{\tilde{t}_{n,1}^*(x)} - \frac{u_n^*}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})} + \frac{1}{\tilde{t}_{n,2}^*(y)} - \frac{u_n^*}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})} \right] \\
&\quad + (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\frac{d_n^*(x,y)}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right) + o_P(1)
\end{aligned} \tag{8.39}$$

für $n \rightarrow \infty$.

Um das asymptotische Verhalten der rechten Seite von (8.39) zu bestimmen, analysieren wir zunächst das Grenzwverhalten von $(\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})/u_n^*)_{x \in [a_j, b_j]}$, $(t_{n,j}^*(x))_{x \in [a_j, b_j]}$ und $(\tilde{t}_{n,j}^*(x))_{x \in [a_j, b_j]}$, $j \in \{1, 2\}$. Nun ist das asymptotische Verhalten von $(\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})/u_n^*)_{x \in [a_j, b_j]}$ unabhängig vom Abhängigkeitsverhalten zwischen $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$. Damit bleiben (8.26) und (8.27) bestehen. Lemma 7.10 liefert wegen der Annahmen $(A1^{**}(c_n))$, $(A2^{**}(c_n))$, $(A3^{**}(c_n))$ und $(A4^{**})$ die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{l} (\tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ (nc_n/u_n^*)^{1/2} (t_{n,j}^*(x) - x)_{x \in [x^*, a]} \\ (nc_n/u_n^*)^{1/2} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{n,j}^*(x)} - \frac{1}{x} \right)_{x \in [x^*, a]} \end{array} \right)_{j \in \{1,2\}} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{l} (Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}))_{x,y \in [x^*, \infty)} \\ ((2-\lambda)^{1/2} x^2 Z^{(*,A)}(\phi_{h_{1,j}(x), h_{2,j}(x)}^{(or)}))_{x \in [x^*, a]} \\ (- (2-\lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{h_{1,j}(x), h_{2,j}(x)}^{(or)}))_{y \in [x^*, a]} \end{array} \right)_{j \in \{1,2\}}, \tag{8.40}
\end{aligned}$$

wobei

$$h_{i,j}(x) := \begin{cases} x, & \text{wenn } i = j, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem allgemeinen Darstellungssatz von Skorokhod (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 1.10.4) existieren Versionen von $(\tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)}(\phi_{x,y}^{(or)}), t_{n,1}^*(x), t_{n,2}^*(y))$, $n \in \mathbb{N}$, und dem Grenzprozess $(Z^{(*,A)}(\phi_{x,y}^{(or)}), x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})$, so dass die obige Konvergenz (8.40) fast sicher gilt. Der Übersichtlichkeit halber unterscheiden wir zwischen den Bezeichnungen dieser Versionen nicht. Folglich gilt mit analoger Rechnung wie in (8.29)

$$\sup_{x \in [a_j, b_j]} |\tilde{t}_{n,j}^*(x) - d_j x^{1/\gamma_j}| = o_P(1).$$

Demnach gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in [a_j, b_j]} \tilde{t}_{n,j}^*(x) \in [d_j a_j^{1/\gamma_j} - \varepsilon, d_j b_j^{1/\gamma_j} + \varepsilon] = [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon] \tag{8.41}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$. Genauer noch ergibt sich wegen (8.27)

$$\begin{aligned} B_n &:= \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| (nc_n/u_n^*)^{1/2} \left(\tilde{t}_{n,j}^*(x) - \frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{u_n^*} \right) \right. \\ &\quad \left. - (2 - \lambda)^{1/2} \left(\frac{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})}{u_n^*} \right)^2 Z^{(*,A)}(\phi_{h_{1,j}(\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})/u_n^*), h_{2,j}(\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})/u_n^*)}^{(or)}) \right| \\ &\leq \sup_{\tilde{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| (nc_n/u_n^*)^{1/2} (t_{n,j}^*(\tilde{x}) - \tilde{x}) - (2 - \lambda)^{1/2} \tilde{x}^2 Z^{(*,A)}(\phi_{h_{1,j}(\tilde{x}), h_{2,j}(\tilde{x})}^{(or)}) \right| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{B}_n &:= \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| (nc_n/u_n^*)^{1/2} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{n,j}^*(x)} - \frac{u_n^*}{\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})} \right) \right. \\ &\quad \left. + (2 - \lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{h_{1,j}(\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})/u_n^*), h_{2,j}(\hat{G}_{n,j}(xu_{n,j})/u_n^*)}^{(or)}) \right| \\ &\leq \sup_{\tilde{x} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| (nc_n/u_n^*)^{1/2} \left(\frac{1}{t_{n,j}^*(\tilde{x})} - \frac{1}{\tilde{x}} \right) + (2 - \lambda)^{1/2} Z^{(*,A)}(\phi_{h_{1,j}(\tilde{x}), h_{2,j}(\tilde{x})}^{(or)}) \right| \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - 2\delta$. In Verbindung mit (8.40) gilt also

$$\max\{B_n, \bar{B}_n\} = o_P(1). \quad (8.42)$$

Nach Annahme (PD) ist die Abbildung c stetig partiell differenzierbar. Nach (8.42) gilt dann die folgende Taylorentwicklung von c im Punkt $(\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/u_n^*, \hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/u_n^*)$:

$$\begin{aligned} &c(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) \\ &= c\left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) + c_x\left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \left(\tilde{t}_{n,1}^*(x) - \frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}\right) \\ &\quad + c_y\left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \left(\tilde{t}_{n,2}^*(y) - \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) + o_P((nc_n/u_n^*)^{-1/2}). \end{aligned} \quad (8.43)$$

Ferner gilt wegen (8.41)

$$\begin{aligned} &\sup_{(x,y) \in A} \left| \frac{d_n^*(x,y)}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) \right| \\ &\leq \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > \tilde{x}u_n^*/c_n, V_0^{(*,2)} > \tilde{y}u_n^*/c_n\}}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \right| \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \delta$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Nach der Bias-Annahme (8.11) gilt also

$$\sup_{(x,y) \in A} \left| \frac{d_n^*(x,y)}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) \right| = o_P((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}). \quad (8.44)$$

Aus (8.43), (8.44) und der Tatsache, dass die asymptotische Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ die Entwicklung $v_{n,1}^{(*,U,c_n)} = \lambda c_n / u_n^* (1 + o(1))$ impliziert, ergibt sich also für den dritten Summanden der rechten Seite von (8.39)

$$\begin{aligned} & (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\frac{d_n^*(x,y)}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} - c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right) \\ &= (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(c(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) - c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right) + o_P(1) \\ &= (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(c_x \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \left(\tilde{t}_{n,1}^*(x) - \frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*} \right) \right. \\ &\quad \left. + c_y \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \left(\tilde{t}_{n,2}^*(y) - \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right) + o_P(1) \end{aligned}$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$. Nach Gleichung (8.39) gilt folglich

$$\begin{aligned} & (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}} S_{n,c_n}^* (\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) - c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right) \\ &= - \left(\frac{v_{n,1}^{(*,A,c_n)}}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} \right)^{1/2} \tilde{Z}_n^{(*,A,c_n)} (\phi_{\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)}^{(or)}) \tag{8.45} \\ &\quad - \left(\frac{v_{n,1}^{(*,1,c_n)}}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}} \right)^{1/2} (nv_{n,1}^{(*,1,c_n)})^{1/2} \left[(\tilde{t}_{n,1}^*(x))^{-1} - \frac{u_n^*}{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})} + (\tilde{t}_{n,2}^*(y))^{-1} - \frac{u_n^*}{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})} \right] \\ &\quad + (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(c_x \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \left(\tilde{t}_{n,1}^*(x) - \frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*} \right) \right. \\ &\quad \left. + c_y \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \left(\tilde{t}_{n,2}^*(y) - \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right) + o_P(1) \end{aligned}$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$.

Mit derselben Herangehensweise wie in Theorem 7.11 lässt sich unter den Voraussetzungen (A1**(c_n)), (A2**(c_n)), (A3**(c_n)), (A4**), (PD) und (8.11) durch Anwendung von Proposition 7.9, Lemma 7.10 und den Gleichungen (8.42) und (8.45) die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned} & (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\frac{1}{nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}} S_{n,c_n}^* (\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y)) - c \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-\lambda}{\lambda} \right)^{1/2} \left(-Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) + Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}^{(or)}) + Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) \right) \\ &\quad - \lambda^{1/2} (2-\lambda)^{1/2} \left(c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) x^{2/\gamma_1} Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}^{(or)}) \right. \\ &\quad \left. + c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) d^2 y^{2/\gamma_2} Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) \right) \\ &= \left(\frac{2-\lambda}{\lambda} \right)^{1/2} \left(Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}^{(or)}) + Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) \right) \\ &\quad - \lambda \left[c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) x^{2/\gamma_1} Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}^{(or)}) + c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) d^2 y^{2/\gamma_2} Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\lambda^{-1} - 1)^{1/2} \left([1 - \lambda c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) x^{2/\gamma_1}] Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}^{(or)}) \right. \\
&\quad \left. + [1 - \lambda c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) d^2 y^{2/\gamma_2}] Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) \right) \\
&=: W(x, y)
\end{aligned}$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$ nachweisen. Wir verzichten an dieser Stelle auf die explizite Ausführung.

Wegen Gleichung (8.36) folgt dann mit Anwendung des Lemmas von Slutsky die stochastische Konvergenz

$$\begin{aligned}
&(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\frac{n^{-1} S_{n,c_n}^*(\tilde{t}_{n,1}^*(x), \tilde{t}_{n,2}^*(y))}{v_{n,1}^{(*,U,c_n)} c(\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})/u_n^*, \hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})/u_n^*)} - 1 \right)_{(x,y) \in A} \\
&\quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{W(x, y)}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \right)_{(x,y) \in A}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
T_n^{(3)}(x, y) &= \log \left(1 + (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\frac{W(x, y)}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} + o_P(1) \right) \right) \\
&= (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\frac{W(x, y)}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} + o_P(1) \right),
\end{aligned}$$

wenn $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind.

Asymptotik von $(T_n^{(4)}(x, y))_{(x,y) \in A}$: Da F_1 und F_2 stetig und streng monoton wachsend auf $[u_0, \infty)$ sind, gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$p_n(x, y) = P\{V_0^{(*,1)} > F_1^*(xu_{n,1}), V_0^{(*,2)} > F_2^*(yu_{n,2})\}.$$

Aus (8.12), (8.15) und $v_{n,1}^{(*,U)} := P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u_n^*\}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
&\sup_{(x,y) \in A} \left| \frac{p_n(x, y)}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c\left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \right| \\
&\leq \sup_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [x^* + \varepsilon, a - \varepsilon]} \left| \frac{P\{V_0^{(*,1)} > \tilde{x}u_n^*, V_0^{(*,2)} > \tilde{y}u_n^*\}}{v_{n,1}^{(*,U)}} - c(\tilde{x}, \tilde{y}) \right| \\
&= o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$c\left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*}\right) \frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{p_n(x, y)} = 1 + o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}) \quad (8.46)$$

gleichmäßig in $(x, y) \in A$.

Nach Theorem 1.4.1 von Bingham et al. (1987) existiert zu $u \mapsto P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}$

eine langsam regulär variierende Funktion l , so dass $P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\} = u^{-1/\eta}l(u)$ gilt. Somit gilt

$$v_{n,1}^{(*,U)} = (u_n^*)^{-1/\eta}l(u_n^*) \quad \text{und} \quad v_{n,1}^{(*,U,c_n)} = (u_n^*/c_n)^{-1/\eta}l(u_n^*/c_n).$$

Ferner ergibt sich aus der Homogenität von c und Annahme (8.13) für alle $x \in [1, \infty)$

$$\left| \frac{l(xu)}{l(u)} - 1 \right| = x^{1/\eta} \left| \frac{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > xu\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} - x^{-1/\eta} \right| = O(q_1(u)), \quad u \rightarrow \infty.$$

Nun besitzt die Funktion q_1 den oberen Matuszewska-Index τ (siehe Definition auf Seite 68 von Bingham et al. (1987)), da q_1 regulär variierend mit Index τ ist. Nach Definition auf Seite 71 von Bingham et al. (1987) ist dann wegen $\tau < 0$ die Funktion q_1 positiv abnehmend (engl.: positive decrease). Aus dem Vorangegangenen folgt dann nach Korollar 3.12.3 von Bingham et al. (1987)

$$l(u) = C(1 + O(q_1(u))) \quad , u \rightarrow \infty,$$

wobei $C > 0$ eine geeignete Konstante ist. Daraus ergibt sich dann

$$c_n^{-1/\eta} \frac{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} = \frac{l(u_n^*/c_n)}{l(u_n^*)} = \frac{1 + O(q_1(u_n^*))}{1 + O(q_1(u_n^*/c_n))}.$$

In Kombination mit (8.46) und der Annahme $q_1(u_n^*/c_n) = o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} T_n^{(4)}(x, y) &= \log \left(c_n^{-1/\eta} \frac{v_{n,1}^{(*,U,c_n)}}{v_{n,1}^{(*,U)}} c \left(\frac{F_1^*(xu_{n,1})}{u_n^*}, \frac{F_2^*(yu_{n,2})}{u_n^*} \right) \frac{v_{n,1}^{(*,U)}}{p_n(x, y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 + O(q_1(u_n^*))}{1 + O(q_1(u_n^*/c_n))} (1 + o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})) \right) \\ &= \log(1 + O(q_1(u_n^*) + q_1(u_n^*/c_n)) + o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2})) \\ &= o((nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2}), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die aus der regulären Variation von q_1 folgende Ordnung $q_1(u_n^*) = o(q_1(u_n^*/c_n))$ für $n \rightarrow \infty$ ausgenutzt wurde.

Asymptotik von $(\log(\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)/p_n(x, y)))_{(x,y) \in A}$: Aus dem Vorangegangenen folgt

$$\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} = \eta^{-2} m_n^{-1/2} \log(c_n) X(1 + o_P(1))$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$, wenn $m_n \log^{-2}(c_n) = o(\min\{m_{n,1}, m_{n,2}, nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$,

$$\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} = \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{F_1^*(xu_{n,1})} - 1 \right) x^{1/\gamma_1} + o_P(m_{n,1}^{-1/2})$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$, wenn $m_{n,1} = o(\min\{m_{n,2}, m_n \log^{-2}(c_n), nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$,

$$\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} = \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{F_2^*(yu_{n,2})} - 1 \right) dy^{1/\gamma_2} + o_P(m_{n,2}^{-1/2})$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$, wenn $m_{n,2} = o(\min\{m_{n,1}, m_n \log^{-2}(c_n), nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$, und

$$\begin{aligned} \log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} &= \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left(\frac{\hat{G}_{n,1}(xu_{n,1})}{F_1^*(xu_{n,1})} - 1 \right) x^{1/\gamma_1} \\ &\quad + \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left(\frac{\hat{G}_{n,2}(yu_{n,2})}{F_2^*(yu_{n,2})} - 1 \right) dy^{1/\gamma_2} + o_P\left(\max_{j \in \{1,2\}} m_{n,j}^{-1/2}\right) \end{aligned}$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$, wenn $m_{n,1} = lm_{n,2}(1 + o(1)) = o(\min\{m_n \log^{-2}(c_n), nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$ für ein $l > 0$,

$$\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} = \begin{cases} (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} + o_P(1) \right), & \text{wenn } V_0^{(*,1)} \perp\!\!\!\perp V_0^{(*,2)}, \\ (nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{-1/2} \left(\frac{W(x, y)}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} + o_P(1) \right) & \text{sonst} \end{cases}$$

gleichmäßig für $(x, y) \in A$, wenn $nv_{n,1}^{(*,U,c_n)} = o(\min\{m_{n,1}, m_{n,2}, m_n \log^{-2}(c_n)\})$.

Demzufolge gilt im Fall $m_n \log^{-2}(c_n) = o(\min\{m_{n,1}, m_{n,2}, nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$ die schwache Konvergenz

$$\frac{\eta^2 m_n^{1/2}}{\log(c_n)} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (X)_{(x,y) \in A}$$

Aus (8.23) folgt im Fall $m_{n,1} = o(\min\{m_{n,2}, m_n \log^{-2}(c_n), nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$ die schwache Konvergenz

$$m_{n,1}^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} e_1(x) \right)_{(x,y) \in A},$$

im Fall $m_{n,2} = o(\min\{m_{n,1}, m_n \log^{-2}(c_n), nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$

$$m_{n,2}^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} de_2(y) \right)_{(x,y) \in A}$$

und im Fall $m_{n,1} = lm_{n,2}(1 + o(1)) = o(\min\{m_n \log^{-2}(c_n), nv_{n,1}^{(*,U,c_n)}\})$

$$m_{n,1}^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x, y)}{p_n(x, y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} e_1(x) + l \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} de_2(y) \right)_{(x,y) \in A},$$

wenn $l \geq 1$ ist, und

$$m_{n,2}^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x,y)}{p_n(x,y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{l} \frac{c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} e_1(x) + \frac{c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} de_2(y) \right)_{(x,y) \in A},$$

wenn $l < 1$ ist. Des Weiteren gilt im Fall $nv_{n,1}^{(*,U,c_n)} = o(\min\{m_{n,1}, m_{n,2}, m_n \log^{-2}(c_n)\})$ die schwache Konvergenz

$$(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x,y)}{p_n(x,y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Z^{(*,U)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}})}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \right)_{(x,y) \in A},$$

wenn $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ asymptotisch unabhängig sind, und

$$(nv_{n,1}^{(*,U,c_n)})^{1/2} \left(\log \frac{\hat{p}_{n,\hat{\eta}_n}(x,y)}{p_n(x,y)} \right)_{(x,y) \in A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{W(x,y)}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \right)_{(x,y) \in A}$$

sonst.

Kovarianzstruktur des Grenzprozesses

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Kovarianzen des Grenzprozesses $(Z(x,y))_{(x,y) \in A}$, wenn der dritte Fall vorliegt und $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ asymptotisch abhängig sind:

$$Z(x,y) = \frac{(2\lambda^{-1} - 1)^{1/2}}{c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})} \left([1 - \lambda c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) x^{2/\gamma_1}] Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}^{(or)}) \right. \\ \left. + [1 - \lambda c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) d^2 y^{2/\gamma_2}] Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) - Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}^{(or)}) \right).$$

(Die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses $(Z(x,y))_{(x,y) \in A}$ im dritten Fall und asymptotischer Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$ ist in Bemerkung 8.2 angegeben.) Wir greifen hierzu die Bezeichnungen aus dem Beweis von Theorem 7.11 auf. Sei $C(x,y, \tilde{x}, \tilde{y}) := I(x) \times I(y) \times I(\tilde{x}) \times I(\tilde{y})$ und $D(x,y) := I(x) \times I(y)$ für

$$I(x) := \begin{cases} (x, \infty), & \text{falls } x > 0, \\ [0, \infty), & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und $c_k(x,y, \tilde{x}, \tilde{y}) := \nu_k^*(C(x,y, \tilde{x}, \tilde{y}))$ für $x,y, \tilde{x}, \tilde{y} \in [0, \infty)$. Mit Hilfe der Gleichungen (7.63)–(7.71) folgt dann für $(x,y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in A$

$$\frac{(c(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}))^2}{2\lambda^{-1} - 1} \text{Cov}(Z(x,y), Z(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ = [1 - \lambda c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) x^{2/\gamma_1}] \left(-\text{Cov}(Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}}^{(or)})) \right) \\ + [1 - \lambda c_x(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}) \tilde{x}^{2/\gamma_1}] \text{Cov}(Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}^{1/\gamma_1}, \infty})) \\ + [1 - \lambda c_y(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}) d^2 \tilde{y}^{2/\gamma_2}] \text{Cov}(Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, \infty}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}}^{(or)})) \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned}
& + [1 - \lambda c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})d^2y^{2/\gamma_2}] \left(-Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}}^{(or)})) \right. \\
& + [1 - \lambda c_x(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})\tilde{x}^{2/\gamma_1}] Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}^{1/\gamma_1}, \infty})) \\
& + [1 - \lambda c_y(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})d^2\tilde{y}^{2/\gamma_2}] Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, dy^{1/\gamma_2}}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}}^{(or)})) \\
& + \left(Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}})) \right. \\
& - [1 - \lambda c_x(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})\tilde{x}^{2/\gamma_1}] Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}), Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}^{1/\gamma_1}, \infty})) \\
& \left. - [1 - \lambda c_y(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})d^2\tilde{y}^{2/\gamma_2}] Cov(Z^{(*,A)}(\phi_{\tilde{x}^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}}), Z^{(*,A)}(\phi_{\infty, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}}^{(or)})) \right) \\
= & \frac{1}{2\lambda^{-1} - 1} \left([1 - \lambda c_x(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})x^{2/\gamma_1}] \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0, x^{1/\gamma_1}, 0) \cup C(0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, x^{1/\gamma_1}, 0)) \right. \right. \right. \\
& + \nu_k^*(C(x^{1/\gamma_1}, 0, \tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0) \cup C(x^{1/\gamma_1}, 0, 0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}))) + c(\max\{x^{1/\gamma_1}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}\}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}) \\
& + [1 - \lambda c_x(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})\tilde{x}^{2/\gamma_1}] \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0, x^{1/\gamma_1}, 0) + c_k(x^{1/\gamma_1}, 0, \tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0)) \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{\lambda} \frac{x^*}{\max\{x^{1/\gamma_1}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}\}} \right) \right. \\
& + [1 - \lambda c_y(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})d^2\tilde{y}^{2/\gamma_2}] \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, x^{1/\gamma_1}, 0) + c_k(x^{1/\gamma_1}, 0, 0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})) \right. \\
& \left. \left. \left. + c(x^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}) \right) \right] \\
& + [1 - \lambda c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})d^2y^{2/\gamma_2}] \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0, 0, dy^{1/\gamma_2}) \cup C(0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, 0, dy^{1/\gamma_2})) \right. \right. \\
& + \nu_k^*(C(0, dy^{1/\gamma_2}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0) \cup C(0, dy^{1/\gamma_2}, 0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}))) + c(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d \max\{y^{1/\gamma_2}, \tilde{y}^{1/\gamma_2}\}) \\
& + [1 - \lambda c_x(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})\tilde{x}^{2/\gamma_1}] \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0, 0, dy^{1/\gamma_2}) + c_k(0, dy^{1/\gamma_2}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0)) \right. \\
& \left. \left. \left. + c(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) \right) \right. \\
& + [1 - \lambda c_y(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})d^2\tilde{y}^{2/\gamma_2}] \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k(0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, 0, dy^{1/\gamma_2}) + c_k(0, dy^{1/\gamma_2}, 0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})) \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{\lambda} \frac{x^*}{d \max\{y^{1/\gamma_2}, \tilde{y}^{1/\gamma_2}\}} \right) \right] \\
& + \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0, x^{1/\gamma_1}, 0) \cup C(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0, 0, dy^{1/\gamma_2}) \cup C(0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, x^{1/\gamma_1}, 0) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \cup C(0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, 0, dy^{1/\gamma_2})) \right. \right. \\
& + \nu_k^*(C(x^{1/\gamma_1}, 0, \tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0) \cup C(x^{1/\gamma_1}, 0, 0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}) \cup C(0, dy^{1/\gamma_2}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0) \\
& \left. \left. \left. \cup C(0, dy^{1/\gamma_2}, 0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})) \right) \right. \\
& + \nu_0^*(D(\max\{x^{1/\gamma_1}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}\}, 0) \cup D(x^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}) \cup D(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2}) \\
& \left. \left. \left. \cup D(0, d \max\{y^{1/\gamma_2}, \tilde{y}^{1/\gamma_2}\})) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [1 - \lambda c_x(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})\tilde{x}^{2/\gamma_1}] \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0, x^{1/\gamma_1}, 0) \cup C(\tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0, 0, dy^{1/\gamma_2})) \right. \\
& \quad \left. + \nu_k^*(C(x^{1/\gamma_1}, 0, \tilde{x}^{1/\gamma_1}, 0) \cup C(0, dy^{1/\gamma_2}, \tilde{x}^{1/\gamma_1})) + c(\max\{x^{1/\gamma_1}, \tilde{x}^{1/\gamma_1}\}, dy^{1/\gamma_2})) \right) \\
& - [1 - \lambda c_y(x^{1/\gamma_1}, dy^{1/\gamma_2})d^2y^{2/\gamma_2}] \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k^*(C(0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, x^{1/\gamma_1}, 0) \cup C(0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}, 0, dy^{1/\gamma_2})) \right. \\
& \quad \left. + \nu_k^*(C(x^{1/\gamma_1}, 0, 0, \tilde{y}^{1/\gamma_1}) \cup C(0, dy^{1/\gamma_2}, 0, d\tilde{y}^{1/\gamma_2})) + c(x^{1/\gamma_1}, \max\{dy^{1/\gamma_2}, d\tilde{y}^{1/\gamma_2}\}) \right) \Big].
\end{aligned}$$

□

Anhang

A. Grundlegende Theorie und Bedingungen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Begriffe, Bedingungen und Grenzwertsätze für empirische Prozesse von sogenannten *Cluster-Funktionalen* angegeben. Des Weiteren sind hier die modifizierten Bedingungen für Theorem 8.1 definiert.

A.1. Empirische Prozess von Cluster-Funktionalen

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, eine messbare Menge, die den Nullvektor 0 enthält. Seien $X_{n,i}$, $1 \leq i \leq n$, identisch verteilte E -wertige Zufallsgrößen mit $n \in \mathbb{N}$, für die

$$v_n := P\{X_{n,1} \neq 0\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt. Der zu $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ gehörige β -Mischungskoeffizient ist definiert als

$$\beta_{n,k} := \sup_{1 \leq l \leq n-k-1} E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^n} |P(B | \mathcal{B}_{n,1}^l) - P(B)| \right],$$

wobei $\mathcal{B}_{n,i}^j = \sigma((X_{n,l})_{i \leq l \leq j})$. Es seien $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

(B1) $l_n = o(r_n)$, $l_n \rightarrow \infty$, $r_n = o(n)$, $r_n v_n \rightarrow 0$ und $nr_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

(B2) $\beta_{n,l_n} n / r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Diese Bedingungen stellen sicher, dass die sogenannte „big blocks, small blocks“-Technik angewandt werden kann. Hierbei werden die Zufallsvektoren $X_{n,i}$, $1 \leq i \leq n$, in große Blöcke der Länge r_n eingeteilt. Durch das Entfernen der letzten l_n Zufallsvektoren in jedem großen Block werden diese Blöcke voneinander separiert. In Kombination mit jener Mischungsannahme in (B2) verhalten sich diese Blöcke dann nahezu stochastisch unabhängig.

Sei nun $E_{\cup} := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E^l$ und \mathbb{E}_{\cup} die durch $\mathbb{B}(E^l)$, $l \in \mathbb{N}$, induziert σ -Algebra. Der *Kern* x^c eines Vektors $x \in E^l$, $l \in \mathbb{N}$, ist definiert als

$$x^c := (x_k)_{k_1 \leq k \leq k_2} \mathbf{1}\{x \neq 0\}$$

mit $k_1 := \min\{i \in \{1, \dots, l\} \mid x_i \neq 0\}$ und $k_2 := \max\{i \in \{1, \dots, l\} \mid x_i \neq 0\}$. Eine Abbildung $f : (E_{\cup}, \mathbb{E}_{\cup}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ heißt dann *Cluster-Funktional*, falls

1. $f(x) = f(x^c)$ für alle $x \in E_{\cup}$ und

2. $f(0) = 0$ gilt.

Sei \mathcal{F} eine Funktionenklasse bestehend aus Cluster-Funktionalen. Bezeichne für $m_n := \lfloor n/r_n \rfloor := \max\{j \in \mathbb{N}_0 \mid j \leq n/r_n\}$

$$Y_{n,j} := (X_{n,i})_{(j-1)r_n+1 \leq i \leq jr_n}, \quad 1 \leq j \leq m_n.$$

Der empirische Prozess $(Z_n(f))_{f \in \mathcal{F}}$ indiziert mit Cluster-Funktionalen aus \mathcal{F} ist dann definiert durch

$$Z_n(f) := (nv_n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_n} (f(Y_{n,j}) - E[f(Y_{n,j})]), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Bevor wir nun das asymptotische Verhalten von $(Z_n(f))_{f \in \mathcal{F}}$ festhalten, wiederholen wir kurz, unter welchen Voraussetzungen stochastische Prozesse schwach konvergent sind. Bezeichne M eine beliebige Menge. Sei dann $l^\infty(M)$ die Menge aller gleichmäßig beschränkten (reellwertigen) Funktionen auf M , das heißt, die Menge aller Abbildungen der Form $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, die

$$\|g\|_\infty := \sup_{x \in M} |g(x)| < \infty$$

erfüllen. Ferner definiert die Abbildung $d : M^2 \rightarrow [0, \infty)$, mit $d(g, f) := \|f - g\|_\infty$, eine Metrik auf $l^\infty(M)$, so dass $(l^\infty(M), d)$ ein metrischer Raum ist. Zur Erinnerung: Eine Menge M heißt *totalbeschränkt* hinsichtlich einer Semimetrik ρ , falls zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, existieren, so dass

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

mit $B_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $x \in M$, gilt. Des Weiteren heißt ein stochastischer Prozess $(W(x))_{x \in M}$ *straff* in $l^\infty(M)$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset l^\infty(M)$ existiert, so dass $P\{(W(x))_{x \in M} \in K\} \geq 1 - \varepsilon$ gilt.

Nach Theorem 2.1 von Kosorok (2008) konvergiert eine Folge von stochastischen Prozessen $(W_n(x))_{x \in M}$, $n \in \mathbb{N}$, in $l^\infty(M)$ genau dann schwach gegen einen straffen Prozess $(W(x))_{x \in M}$, wenn die folgenden zwei Bedingungen gelten:

1. Die endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(W_n(x))_{x \in M}$ konvergieren schwach gegen die endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(W(x))_{x \in M}$.
2. Es existiert eine Semimetrik ρ auf M , die M totalbeschränkt, und für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P^* \left\{ \sup_{x, y \in M, \rho(x, y) < \delta} |W_n(x) - W_n(y)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Der Prozess $(W_n(x))_{x \in M}$ heißt dann *asymptotisch (stochastisch) gleichstetig* bezüglich ρ .

Nach Theorem 7.19 von Kosorok (2008) sind dann fast alle Pfade des Grenzprozesses $(W(x))_{x \in M}$ gleichmäßig stetig bezüglich der Semimetrik ρ , das heißt

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{x, y \in M, \rho(x, y) < \delta} |W(x) - W(y)| = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Bezeichne nun für $f \in \mathcal{F}$

$$\Delta_n(f) := f(Y_{n,1}) - f((X_{n,i})_{1 \leq i \leq r_n - l_n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die folgenden Bedingungen aus Drees und Rootzén (2010) werden zum Nachweis der schwachen Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(Z_n(f))_{f \in \mathcal{F}}$ herangezogen:

(C1) Für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$\begin{aligned} E[(\Delta_n(f) - E[\Delta_n(f)])^2 \mathbf{1}\{|\Delta_n(f) - E[\Delta_n(f)]| \leq (nv_n)^{1/2}\}] &= o(r_n v_n), \\ P\{|\Delta_n(f) - E[\Delta_n(f)]| > (nv_n)^{1/2}\} &= o(r_n/n). \end{aligned}$$

(C2) Für alle $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$E[(f(Y_{n,1}) - E[f(Y_{n,1})])^2 \mathbf{1}\{|f(Y_{n,1}) - E[f(Y_{n,1})]| > \varepsilon(nv_n)^{1/2}\}] = o(r_n v_n).$$

(C3) Für alle $f, g \in \mathcal{F}$ gilt

$$\frac{1}{r_n v_n} \text{Cov}(f(Y_{n,1}), g(Y_{n,1})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c(f, g).$$

Nach Theorem 2.3 von Drees und Rootzén (2010) konvergieren unter den Bedingungen (B1), (B2), (C1), (C2) und (C3) die endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(Z_n(f))_{f \in \mathcal{F}}$ schwach gegen die endlich-dimensionalen Randverteilungen eines Gaußprozesses $(Z(f))_{f \in \mathcal{F}}$ mit Kovarianzfunktion c .

Die *Überdeckungszahl* $N(\varepsilon, \mathcal{F}, \rho)$ von \mathcal{F} ist die kleinste Anzahl an ε -Bällen hinsichtlich der Semimetrik ρ , die benötigt werden, um \mathcal{F} zu überdecken:

$$N(\varepsilon, \mathcal{F}, \rho) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(f_i) \right\}.$$

Der Logarithmus von $N(\varepsilon, \mathcal{F}, \rho)$ wird *Entropie* von \mathcal{F} genannt.

Die nachfolgenden Bedingungen aus Drees und Rootzén (2010) werden zum Nachweis der asymptotischen Gleichstetigkeit von $(Z_n(f))_{f \in \mathcal{F}}$ bezüglich einer Semimetrik ρ herangezogen. Bezeichne hierfür $P^*(A)$ die äußere Wahrscheinlichkeit einer beliebigen Teilmenge $A \subseteq \Omega$ hinsichtlich P und $E^*[f]$ den äußeren Erwartungswert einer beliebigen Funktion $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} P^*(A) &:= \inf \{ P(B) \mid A \subseteq B \in \mathcal{A} \}, \\ E^*[f] &:= \inf \{ E[g] \mid f \leq g, g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ messbar und } E[g] \text{ existiert} \}. \end{aligned}$$

(D1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $f \in \mathcal{F}$ gilt $E[f(Y_{n,1})] < \infty$, und die minimale Einhüllende f_{\max} von \mathcal{F} ist endlich:

$$f_{\max}(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| < \infty \quad \text{für alle } x \in E_{\cup}.$$

(D2) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$E^* [f_{\max}(Y_{n,1}) \mathbb{1}\{f_{\max}(Y_{n,1}) > \varepsilon(nv_n)^{1/2}\}] = o(r_n(v_n/n)^{1/2}).$$

(D2') Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$E^* [f_{\max}^2(Y_{n,1}) \mathbb{1}\{f_{\max}(Y_{n,1}) > \varepsilon(nv_n)^{1/2}\}] = o(r_n v_n).$$

(D3) Es existiert eine Semimetrik ρ auf \mathcal{F} , die \mathcal{F} totalbeschränkt und

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f, g \in \mathcal{F}, \rho(f, g) < \delta} \frac{1}{r_n v_n} E[(f(Y_{n,1}) - g(Y_{n,1}))^2] = 0.$$

(D5) Für alle $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $(e_i)_{1 \leq i \leq \lfloor m_n/2 \rfloor} \in \{-1, 0, 1\}^{\lfloor m_n/2 \rfloor}$ und $k \in \{1, 2\}$ ist die Abbildung

$$\omega \mapsto \sup_{f, g \in \mathcal{F}, \rho(f, g) < \delta} \sum_{j=1}^{\lfloor m_n/2 \rfloor} e_j (f(Y_{n,j}^*(\omega)) - g(Y_{n,j}^*(\omega)))^k$$

messbar.

(D6) Für alle $\tau > 0$ gilt

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P^* \left\{ \int_0^\delta (\log N(\varepsilon, \mathcal{F}, d_n))^{1/2} d\varepsilon > \tau \right\} = 0.$$

Nach Theorem 2.10 von Drees und Rootzén (2010) ist unter den Bedingungen (B1), (B2), (D1), (D2'), (D3), (D5) und (D6) der Prozess $(Z_n(f))_{f \in \mathcal{F}}$ asymptotisch gleichstetig bezüglich ρ . Unter den Bedingungen

- (B1), (B2),
- (C1), (C2), (C3),
- (D1), (D2'), (D3), (D5) und (D6)

konvergiert also der Prozess $(Z_n(f))_{f \in \mathcal{F}}$ in $l^\infty(\mathcal{F})$ schwach gegen einen zentrierten Gaußprozess $(Z(f))_{f \in \mathcal{F}}$ mit Kovarianzfunktion c (vergleiche Drees und Rootzén, 2010, Theorem 2.10). Ein Vergleich mit Theorem 2.11.1 von van der Vaart und Wellner (1996) zeigt, dass das obige Resultat von Drees und Rootzén (2010, Theorem 2.10) bestehen bleibt, wenn Bedingung (D6) auch durch

folgende Bedingung ersetzt wird: Für alle Folgen $\delta_n, n \in \mathbb{N}$, mit $\delta_n \downarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $\tau > 0$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P^* \left\{ \int_0^{\delta_n} (\log(N(\varepsilon, \mathcal{F}, d_n)))^{1/2} d\varepsilon > \tau \right\} = 0.$$

Der Nachweis der Entropie-Bedingung (D6) ist technisch häufig sehr anspruchsvoll. Hierfür kann die etablierte VC-Theorie, die nach Vapnik und Červonenkis benannt ist, hilfreich sein. Ein Mengensystem \mathcal{M} von Teilmengen in \mathcal{X} heißt *VC-Klasse*, falls

$$V(\mathcal{M}) := \inf \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \max_{A \subseteq \mathcal{X}, \#A=n} \#\{C \cap A \mid C \in \mathcal{M}\} < 2^n \right\}$$

endlich ist. In diesem Fall wird $V(\mathcal{M})$ als der VC-Index von \mathcal{M} bezeichnet. Man sagt, dass eine n -elementige Teilmenge $A \subset \mathcal{X}$ von dem Mengensystem \mathcal{M} *nicht zerschlagen* wird, wenn $\#\{C \cap A \mid C \in \mathcal{M}\} < 2^n$ gilt. Der *Subgraph* einer Funktion $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$M(g) := \{(x, t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \mid t < g(x)\}.$$

Eine Funktionenklasse \mathcal{G} bestehend aus reellwertigen Funktionen auf \mathcal{X} heißt dann VC-Klasse, wenn das Mengensystem der Subgraphen der Funktionen in \mathcal{G} eine VC-Klasse bildet, das heißt

$$V(\mathcal{G}) := V(\{M(g) \mid g \in \mathcal{G}\}) < \infty.$$

Nach Theorem 2.6.7 von van der Vaart und Wellner (1996) lässt sich die Überdeckungszahl einer VC-Klasse wie folgt abschätzen. Bezeichne für $r \in \mathbb{N}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathcal{X}, \mathbb{B}(\mathcal{X}))$

$$L_r(Q) := \left\{ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_{\mathcal{X}} |f|^r dQ < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|f\|_{Q,r} := \left(\int_{\mathcal{X}} |f|^r dQ \right)^{1/r}.$$

Theorem A.1 (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 2.6.7). *Sei \mathcal{G} eine VC-Klasse, die zugehörige Einhüllende g_{\max} messbar und $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathcal{X}, \mathbb{B}(\mathcal{X}))$, das $\|g_{\max}\|_{Q,r} > 0$ erfüllt, und jedes $\varepsilon \in (0, 1)$*

$$N(\varepsilon \|g_{\max}\|_{Q,r}, \mathcal{G}, L_r(Q)) \leq KV(\mathcal{G})(16e)^{V(\mathcal{G})} \varepsilon^{-r(V(\mathcal{G})-1)},$$

wobei $K > 0$ eine geeignete Konstante ist.

Nach Beispiel 2.6.1 von van der Vaart und Wellner (1996) sind linear geordnete Mengen beziehungsweise Funktionenklassen \mathcal{G} stets VC-Klassen mit Index gleich 2. In dem Fall gilt dann

$$N(\varepsilon \|g_{\max}\|_{Q,r}, \mathcal{G}, L_r(Q)) \leq K \varepsilon^{-r} \tag{A.1}$$

für eine hinreichend große Konstante $K > 0$.

Jene Grenzwertresultate für empirische Prozesse von Cluster-Funktionalen lassen sich auch auf

sogenannte *verallgemeinerte (standardisierte) Tail-Array-Sums* übertragen, die für eine messbare Funktion $\phi : (E, \mathbb{B}(E)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ mit $\phi(0) = 0$ wie folgt definiert sind:

$$\tilde{Z}_n(\phi) := (nv_n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\phi(X_{n,i}) - E[\phi(X_{n,i})]).$$

Sei Φ eine Funktionenklasse, die ausschließlich Funktionen des Typs ϕ enthält. Das folgende Resultat ist eine Zusammenfassung der Korollare 3.6 und 3.9 von Drees und Rootzén (2010).

Theorem A.2 (Drees und Rootzén, 2010, Korollar 3.6 und 3.9). *Sei Φ totalbeschränkt bezüglich einer Semimetrik ρ_Φ und $\phi_{\max} = \sup_{\phi \in \Phi} \phi$ messbar. Sei des Weiteren (B1), (B2) und $r_n = o((nv_n)^{1/2})$ erfüllt. Angenommen für $n \rightarrow \infty$ gilt*

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}_{\{X_{n,i} \neq 0\}} \right)^2 \right] = O(r_n v_n), \quad (\text{A.2})$$

wenn ϕ_{\max} beschränkt ist, und

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{\max}(X_{n,i}) \right)^{2+\delta} \right] = O(r_n v_n), \quad (\text{A.3})$$

für ein $\delta > 0$ sonst. Dann sind die Bedingungen (C1), (D1) und (D2') erfüllt und somit insbesondere (C2) und (D2). Des Weiteren gilt

$$\sup_{\phi \in \Phi} |\tilde{Z}_n(\phi) - Z_n(g_\phi)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{in äußerer Wahrscheinlichkeit.}$$

Darüber hinaus ergibt sich:

1. Wenn Bedingung (C3) erfüllt ist, konvergieren die endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(\tilde{Z}_n(\phi))_{\phi \in \Phi}$ schwach gegen die endlich-dimensionalen Randverteilung eines Gaußprozesses $(Z(\phi))_{\phi \in \Phi}$ mit Kovarianzfunktion c .
2. Wenn die Bedingungen (D3), (D5) und (D6) erfüllt sind, ist $(\tilde{Z}_n(\phi))_{\phi \in \Phi}$ asymptotisch gleichstetig bezüglich ρ_Φ .

Unter den Bedingungen aus 1. und 2. konvergiert die Folge der Prozesse der Tail-Array-Sums $(\tilde{Z}_n(\phi))_{\phi \in \Phi}$, $n \in \mathbb{N}$, schwach gegen $(Z(\phi))_{\phi \in \Phi}$.

Beweis. Siehe Beweis von Korollare 3.6 und 3.9 in Drees und Rootzén (2010). □

Addendum A.3. Angenommen ϕ_{\max} ist unbeschränkt und die Bedingungen (D1) und (D2') sind erfüllt. Dann bleibt das Resultat in Theorem A.2 insbesondere dann bestehen, wenn Momenten-Bedingung (A.3) durch

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \phi_{\max}(X_{n,i}) \right)^2 \right] = O(r_n v_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.4})$$

ersetzt wird.

Beweis. Dem Beweis von Korollar 3.9 beziehungsweise 3.6 von Drees und Rootzén (2010) lässt sich entnehmen, dass die Momenten-Bedingung (A.3) dazu genutzt wird, um zum einen Bedingung (D2') zu folgern und zum anderen die Momenten-Bedingung (A.4) als Zwischenresultat zu erhalten. \square

Das folgende Resultat von van der Vaart und Wellner (1996, Theorem 2.11.1) zeigt, unter welchen Bedingungen Summen von stochastisch unabhängigen Prozessen $Z_{n,1}, \dots, Z_{n,b_n}$, $n \in \mathbb{N}$, schwach konvergent sind.

Theorem A.4 (van der Vaart und Wellner, 1996, Theorem 2.11.1). *Es seien $Z_{n,1}, \dots, Z_{n,b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $b_n \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängige Prozesse, die durch einen totalbeschränkten semimetrischen Raum (\mathcal{F}, ρ) indiziert sind. Angenommen die folgenden Eigenschaften gelten:*

- (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $s \in \{1, 2\}$ und alle Vektoren $(a_1, \dots, a_{b_n}) \in \{-1, 0, 1\}^{b_n}$ ist die Abbildung $\sup_{\rho(f,g) < \delta} \left| \sum_{i=1}^{b_n} a_i (Z_{n,i}(f) - Z_{n,i}(g))^s \right|$ messbar.
- (ii) Für jedes $\tau > 0$ gilt $\sum_{i=1}^{b_n} E^* [\|Z_{n,i}\|_\infty^2 \mathbf{1}\{\|Z_{n,i}\|_\infty > \tau\}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (iii) Für jede Folge $\delta_n \downarrow 0$ gilt $\sup_{\rho(f,g) < \delta_n} \sum_{i=1}^{b_n} E[(Z_{n,i}(f) - Z_{n,i}(g))^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (iv) Für jede Folge $\delta_n \downarrow 0$ gilt $\int_0^{\delta_n} \sqrt{\log N(\varepsilon, \mathcal{F}, d_n)} \, d\varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in äußerer Wahrscheinlichkeit, wobei

$$d_n^2(f, g) := \sum_{i=1}^{b_n} (Z_{n,i}(f) - Z_{n,i}(g))^2$$

eine zufällige Semimetrik auf \mathcal{F} definiert.

Dann ist die Folge der Prozesse $(\sum_{i=1}^{b_n} (Z_{n,i}(f) - E[Z_{n,i}(f)]))_{f \in \mathcal{F}}$, $n \in \mathbb{N}$, asymptotisch gleichstetig bezüglich ρ . Des Weiteren konvergiert diese Folge in $l^\infty(\mathcal{F})$ schwach, wenn die Folge der entsprechenden Kovarianzfunktionen punktweise in $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ konvergiert.

Beweis. Siehe Beweis von Theorem 2.11.1 von van der Vaart und Wellner (1996). \square

A.2. Voraussetzungen für Theorem 8.1

Im Nachfolgenden sind jene Voraussetzung für Theorem 8.1 aufgeführt, die in Kapitel 8 nur heuristisch genannt wurden.

Asymptotische Unabhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$

Bezeichne

$$\beta_{n,k}^{(*,c_n)} := \sup_{1 \leq l \leq n-k-1} E \left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^{n,U}} |P(B | \mathcal{B}_{n,1}^{l,U}) - P(B)| \right]$$

den β -Mischungskoeffizienten von $((V_{n,i}^{(*,U,c_n)})_{1 \leq i \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $\mathcal{B}_{n,i}^{h,U} = \sigma((V_{n,l}^{(*,U,c_n)})_{i \leq l \leq h})$. Wir fordern nun, dass Folgen $(l_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n^*, r_n^* \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ existieren, so dass zu demselben $x^* \in (0, 1]$ wie in (8.6) die folgenden Voraussetzungen gelten:

(A1* (c_n)) Für $n \rightarrow \infty$ gilt $l_n^* = o(r_n^*)$, $r_n^* = o((nv_n^{(*,U,c_n)})^{1/2})$, $r_n^* v_n^{(*,U,c_n)} \rightarrow 0$, $\beta_{n,l_n^*}^{(*,c_n)} n/r_n^* \rightarrow 0$.

(A2* (c_n)) Für alle $k \in \{0, \dots, r_n^*\}$ existieren Konstanten

$$s_n^{(*,c_n)}(k) \geq P\left(\min\{V_k^{(*,1)}, V_k^{(*,2)}\} > x^* \frac{u_n^*}{c_n} \mid \min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* \frac{u_n^*}{c_n}\right),$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n^*} s_n^{(*,c_n)}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} s_{\infty}^{(*,c_n)}(k) < \infty$ mit $s_{\infty}^{(*,c_n)}(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(*,c_n)}(k)$ erfüllen.

(A3* (c_n)) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{r_n^*} \mathbb{1}\{V_{n,i}^{(*,U,c_n)} \neq 0\}\right)^{2+\delta}\right] = O(r_n^* v_n^{(*,U,c_n)}), \quad n \rightarrow \infty.$$

(A4* (c_n)) Zu jedem $t \in \mathbb{N}$ existiert ein Maß ν_t^* auf $((1, \infty)^4, \mathbb{B}((1, \infty)^4))$, so dass

$$\frac{P\{u^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}, V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)}) \in B\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \nu_t^*(B) < \infty$$

für alle ν_t^* -randlosen Borelmengen $B \in \mathbb{B}((1, \infty)^4)$ gilt.

(A5* (c_n)) Für $j \in \{1, 2\}$ gilt

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{r_n^*} \mathbb{1}\{V_i^{(*,j,c_n)} > x^* u_n^*\}\right)^2\right] = O\left(\frac{r_n^*}{u_n^*/c_n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

◇

Asymptotische Abhängigkeit von $V_0^{(*,1)}$ und $V_0^{(*,2)}$

Bezeichne

$$\beta_{n,k}^{(**,c_n)} := \sup_{1 \leq l \leq n-k-1} E\left[\sup_{B \in \mathcal{B}_{n,l+k+1}^{l,A}} |P(B \mid \mathcal{B}_{n,1}^{l,A}) - P(B)|\right]$$

den β -Mischungskoeffizienten von $((V_{n,i}^{(*,A,c_n)})_{1 \leq i \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $\mathcal{B}_{n,i}^{h,A} = \sigma((V_{n,l}^{(*,A,c_n)})_{i \leq l \leq h})$. Wir fordern nun, dass Folgen $(l_n^{**})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n^{**})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n^{**}, r_n^{**} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ existieren, so dass zu demselben $x^* \in (0, 1]$ wie in (8.7) und (8.8) die folgenden Voraussetzungen gelten:

(A1 (c_n))** Für $n \rightarrow \infty$ gilt $l_n^{**} = o(r_n^{**})$, $r_n^{**} = o((nv_n^{(*,A,c_n)})^{1/2})$, $r_n^{**} v_n^{(*,A,c_n)} \rightarrow 0$ und $\beta_{n,l_n^{**}}^{(**,c_n)} n/r_n^{**} \rightarrow 0$.

(A2 (c_n))** Für alle $k \in \{0, \dots, r_n^{**}\}$ existieren Konstanten

$$s_n^{(**,c_n)}(k) \geq \frac{1}{v_n^{(*,A,c_n)}} \max \left\{ P \left\{ \min\{V_k^{(*,1)}, V_0^{(*,1)}\} > x^* \frac{u_n^*}{c_n} \right\}, P \left\{ \min\{V_k^{(*,2)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* \frac{u_n^*}{c_n} \right\}, \right. \\ \left. P \left\{ \min\{V_k^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > x^* \frac{u_n^*}{c_n} \right\}, P \left\{ \min\{V_k^{(*,2)}, V_0^{(*,1)}\} > x^* \frac{u_n^*}{c_n} \right\} \right\},$$

die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n^{**}} s_n^{(**,c_n)}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} s_{\infty}^{(**,c_n)}(k) < \infty$ mit $s_{\infty}^{(**,c_n)}(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(**,c_n)}(k)$ erfüllen.

(A3 (c_n))** Es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{1}\{V_{n,i}^{(*,A,c_n)} \neq 0\} \right)^{2+\delta} \right] = O(r_n^{**} v_n^{(*,A,c_n)}), \quad n \rightarrow \infty.$$

(A4)** Zu jedem $t \in \mathbb{N}$ existiert ein Maß ν_t^{**} auf $([0, \infty)^4 \setminus \{0\}, \mathbb{B}([0, \infty)^4 \setminus \{0\}))$, so dass

$$\frac{P\{u^{-1}(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}, V_t^{(*,1)}, V_t^{(*,2)}) \in B\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \nu_t^{**}(B) < \infty$$

für alle ν_t^{**} -randlosen Borelmengen $B \in \mathbb{B}([0, \infty)^4 \setminus \{0\})$ gilt, die von 0 weg beschränkt sind.

(PD) Die Abbildung $(x, y) \mapsto \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty))$ ist stetig partiell differenzierbar auf $[x^*, \infty)^2$.

◇

B. Tabellen zur Simulationsstudie aus Kapitel 4

In diesem Abschnitt sind die in Kapitel 4 genannten Tabellen angegeben.

Modell	β	
	0,9	0,95
nGARCH	3,3931 ($1,6 \times 10^{-4}$)	4,3695 ($2,7 \times 10^{-4}$)
tGARCH	2,6349 ($1,5 \times 10^{-4}$)	3,7005 ($2,7 \times 10^{-4}$)
Copula	2,1318	2,7764

Tabelle B.1. Approximierte Quantile $F_{|X|}^{\leftarrow}(\beta)$ für $\beta = 90\%$ oder 95% (mit den geschätzten Standardabweichungen in Klammern). In den Copula-Markov-Modellen ist $F_{|X|}^{\leftarrow}(\beta)$ vollständig durch die t -Verteilung mit 4 Freiheitsgraden bestimmt.

Modell		$P\{\Theta_1 > 1\}$	$P\{\Theta_1 > 1/2\}$
nGARCH		0,0549	0,2022
tGARCH		0,0450	0,1415
tCopula mit	$\rho = 0,25$	0,0445	0,1831
	$\rho = 0,50$	0,0662	0,2623
	$\rho = 0,75$	0,1096	0,3929
gumCopula mit	$\theta = 1,2$	0,0546	0,2145
	$\theta = 1,5$	0,1031	0,3756
	$\theta = 2,0$	0,1464	0,4688

Tabelle B.2. $P\{\Theta_1 > 1\}$ und $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ in den entsprechenden Modellen.

Modell	β	nGARCH		tGARCH	
		0,9	0,95	0,9	0,95
$p_\beta(1)$	SFS mit OS	0,0763 (3×10^{-5})	0,0683 (5×10^{-5})	0,0663 (3×10^{-5})	0,0575 (4×10^{-5})
$e_\beta(1)$	SBS mit OS	0,0740 (3×10^{-5})	0,0669 (5×10^{-5})	0,0704 (3×10^{-5})	0,0610 (4×10^{-5})
$p_\beta(1/2)$	SFS mit OS	0,2283 (4×10^{-5})	0,2189 (6×10^{-5})	0,1820 (4×10^{-5})	0,1668 (6×10^{-5})
$e_\beta(1/2)$	SBS mit OS	0,2300 (7×10^{-5})	0,2188 (10^{-4})	0,1842 (5×10^{-5})	0,1681 (9×10^{-5})

Tabelle B.3. Approximierte Werte von $p_\beta(x)$ und $e_\beta(x)$ für $x \in \{1, 1/2\}$ (mit den geschätzten Standardabweichung in Klammern).

C. Weitere Simulationsergebnisse aus Kapitel 4

Wir führen in diesem Abschnitt die Simulationsstudie aus Kapitel 4 fort, in der die Performance der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_t > x\}$ bei Verwendung von theoretischen Quantilen $F_{|X|}^{\leftarrow}(1 - k/n)$ versus den entsprechenden Ordnungsstatistiken $|X|_{n-k:n}$ bei endlichem Stichprobenumfang miteinander verglichen werden. Betrachtet werden die in Kapitel 4 beschriebenen nGARCH-, tGARCH-, gumCopula- (mit $\theta \in \{1, 2; 1, 5; 2\}$) und tCopula-Modell (mit $\rho \in \{0, 25; 0, 5; 0, 75\}$) für Lags $t \in \{1, 5\}$ und Argumente $x \in \{1/2, 1\}$. Der Stichprobenumfang, die Anzahl an Simulationen pro Modell und die Aufmachung der Graphiken, die die nachfolgenden QQ-Plots beinhalten, bleibt dieselbe wie im Abschnitt 4.2. Die Hauptdiagonale ist wie zuvor als gestrichelte rote Linie dargestellt.

Die Abbildungen C.1 und C.2 zeigen die QQ-Plots der Forward- und Backward-Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1\}$ beziehungsweise für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ im nGARCH-Modell. Diese stellen die Pendanten zu den Abbildungen 4.1 und 4.3 aus Kapitel 4 zum Lag 5 anstelle Lag 1 dar. Die Diagramme sind ähnlich zu denen in Abbildungen 4.1 und 4.3. Die meisten Punkte liegen ziemlich dicht an der Hauptdiagonalen. Jedoch schneiden die Versionen der Schätzer, die auf Exzedenten oberhalb von Ordnungsstatistiken basieren, etwas besser als zuvor ab, da extreme Schätzfehler seltener auftreten.

Die Abbildungen C.3, C.4, C.5 und C.6 zeigen die QQ-Plots im tGARCH-Modell mit $x \in \{1/2, 1\}$ und $t \in \{1, 5\}$. Die QQ-Plots fallen im Wesentlichen ähnlich zu denen im nGARCH-Modell aus, wobei starke Abweichungen der TQ-Version des Backward-Schätzers, die in wenigen Simulationen im nGARCH-Modell bei hohen Werten beobachtet wurden (siehe Abbildung 4.3), hier nicht weiter auftreten.

Die Abbildungen C.7 und C.8 zeigen die QQ-Plots der Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ beziehungsweise $P\{\Theta_5 > 1\}$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$, während die Abbildungen C.8, C.9 und C.10 die QQ-Plots der Schätzer für $P\{\Theta_5 > 1\}$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$, $\rho = 0,5$ und $\rho = 0,75$ anzeigen. Der Parameter $\rho \in (-1,1)$ im tCopula-Modell bestimmt den Grad der seriellen Abhängigkeit der Copula-Markov-Zeitreihe, so dass diese Abbildungen einen Einblick darüber liefern, welchen Einfluss die serielle Abhängigkeit beziehungsweise ein hoher Wert von $P\{\Theta_5 > 1\}$ beim Verteilungsvergleich der beiden Versionen besitzt. Die Punkte der QQ-Plots liegen in diesen tCopula-Modellen dichter an der Hauptdiagonalen als in den GARCH-Modellen. Tatsächlich sind für den Backward-Schätzer die Stichproben-Verteilungen der beiden Versionen in allen Fällen fast identisch. Da die OS-Version des Forward-Schätzer nur Werte auf dem Gitter $\{i/k \mid 0 \leq i \leq k\}$ annehmen, lässt sich dieses Verhalten für die Versionen des Forward-Schätzers nicht erkennen. Die diskrete Struktur der Graphen zu den Forward-Schätzern ist sogar umso ausgeprägter, je kleiner der Abhängigkeitsparameter ρ ist. Das liegt daran, dass die zu schätzende Wahrscheinlichkeit $P\{\Theta_5 > 1\}$ kleiner wird und es damit weniger Werte gibt, die der Schätzer in der Nähe der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit erreichen kann.

Abschließend betrachten wir das gumCopula-Modell. In den Abbildungen C.11, C.12 und C.13 werden für die Modellparameter $\theta \in \{1, 2; 1, 5; 2\}$ die QQ-Plots der Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1\}$ angezeigt. Dabei führt ein höherer Parameter $\theta \in [1, \infty)$ ebenfalls zu einer höheren seriellen Abhängigkeit der Copula-Markov-Zeitreihe. Die Abbildungen C.14 und C.15 zeigen die QQ-Plots der Schätzer für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ und $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ für den Parameter $\theta = 2$. Insgesamt ähneln die QQ-Plots jenen aus den tCopula-Modellen. In wenigen Fällen liegen die Punkte bei hohen Werten unterhalb der Hauptdiagonalen, so dass der TQ-Versionen etwas besser als die entsprechenden OS-Versionen performen.

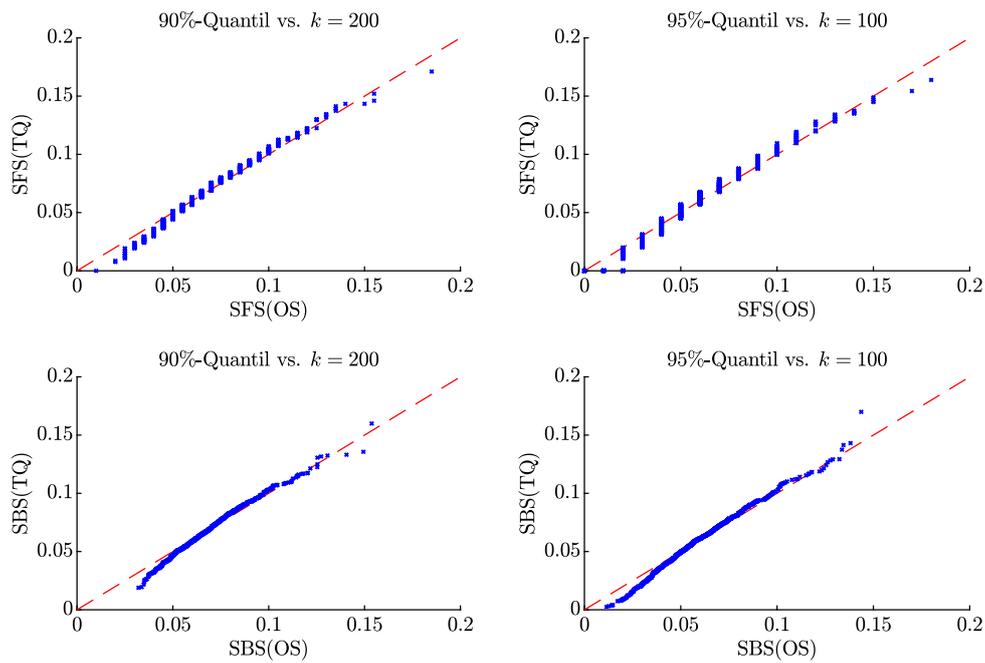


Abbildung C.1. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1\}$ im nGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

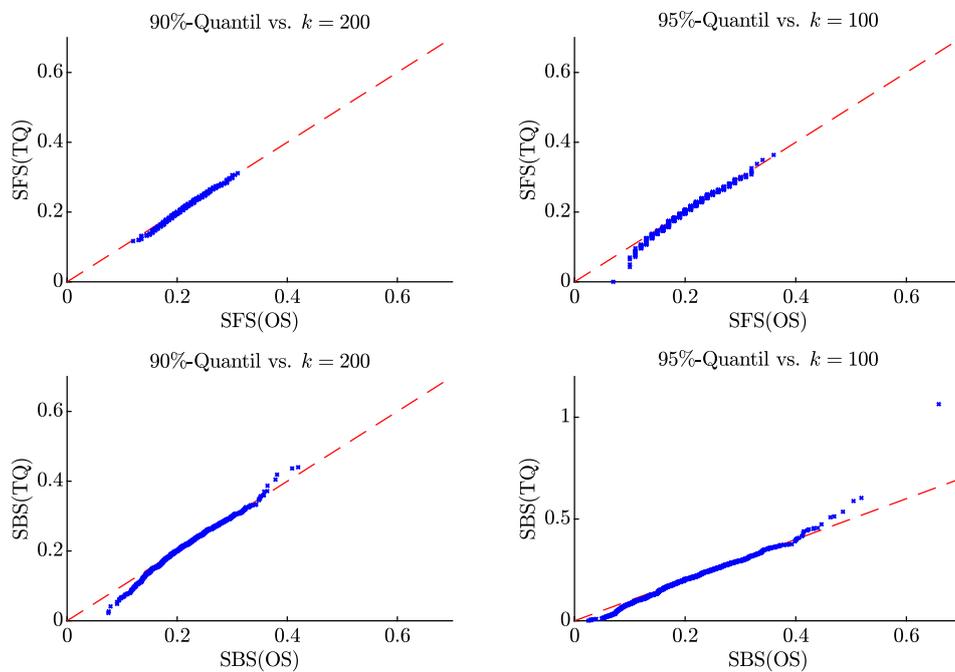


Abbildung C.2. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ im nGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

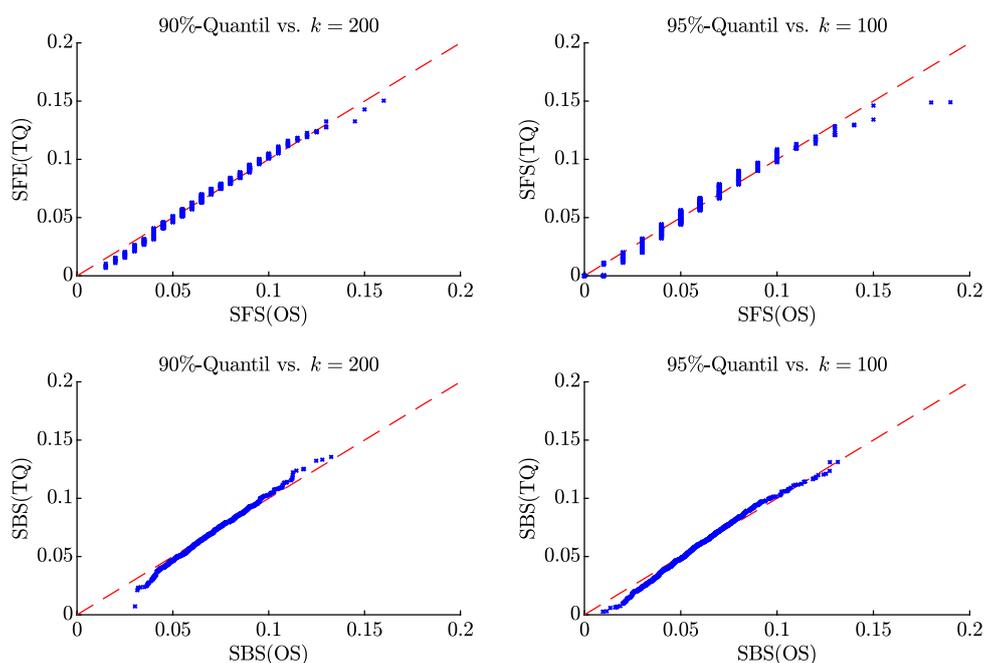


Abbildung C.3. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1\}$ im tGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

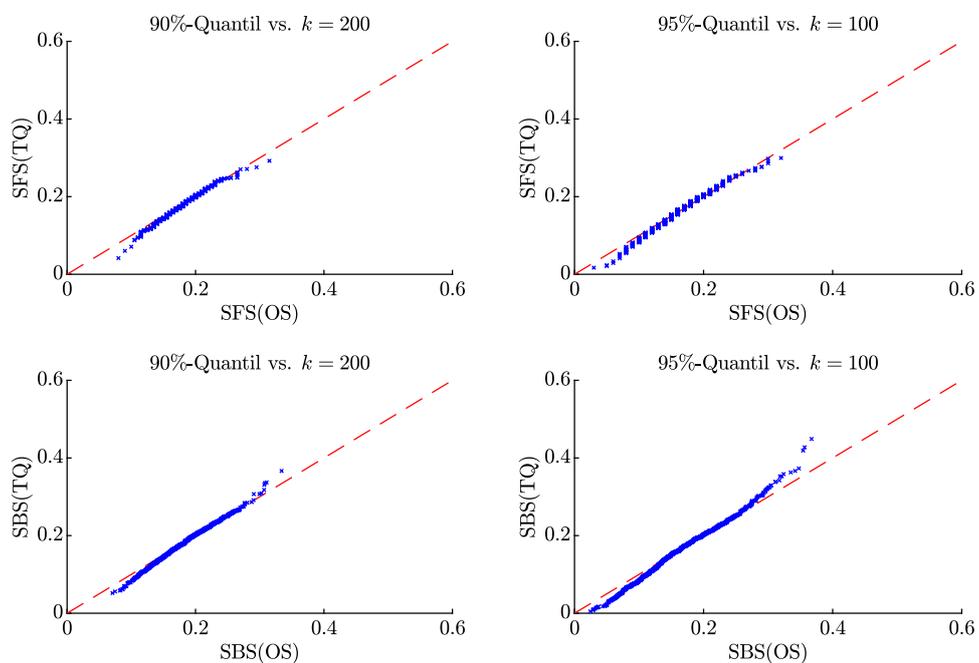


Abbildung C.4. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ im tGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

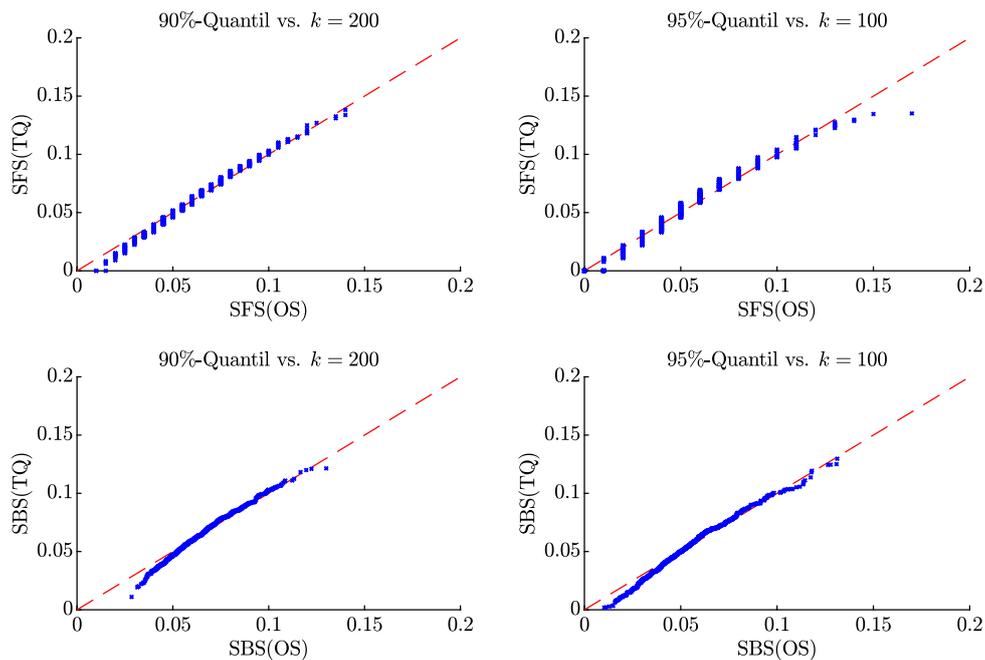


Abbildung C.5. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1\}$ im tGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

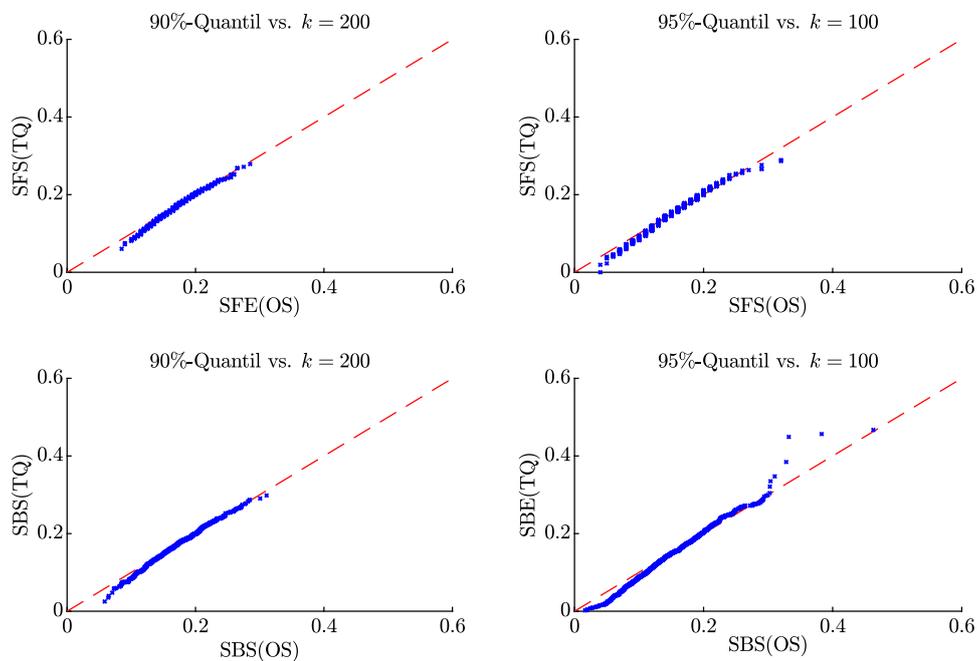


Abbildung C.6. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ im tGARCH-Modell bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

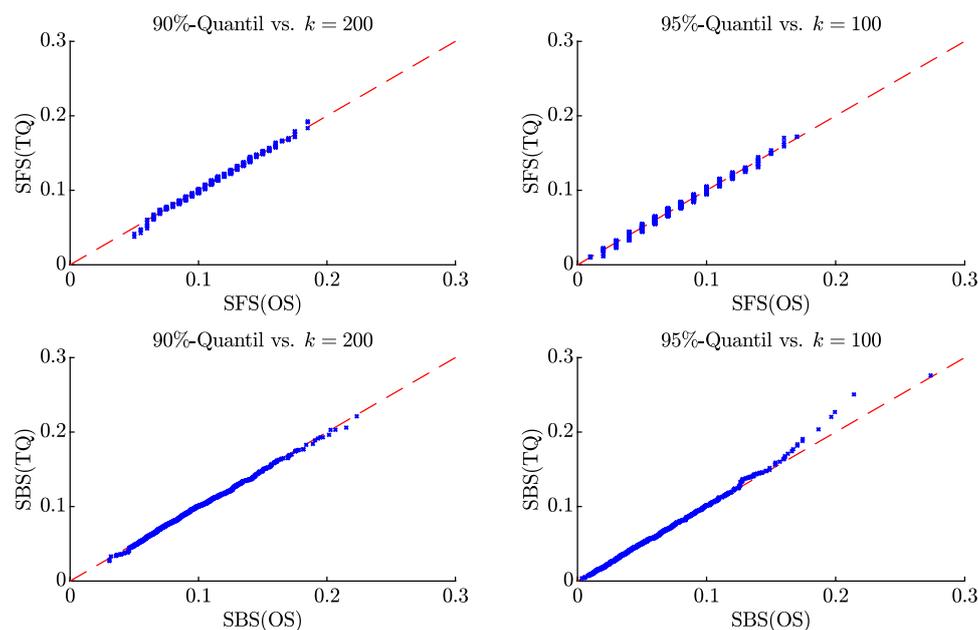


Abbildung C.7. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

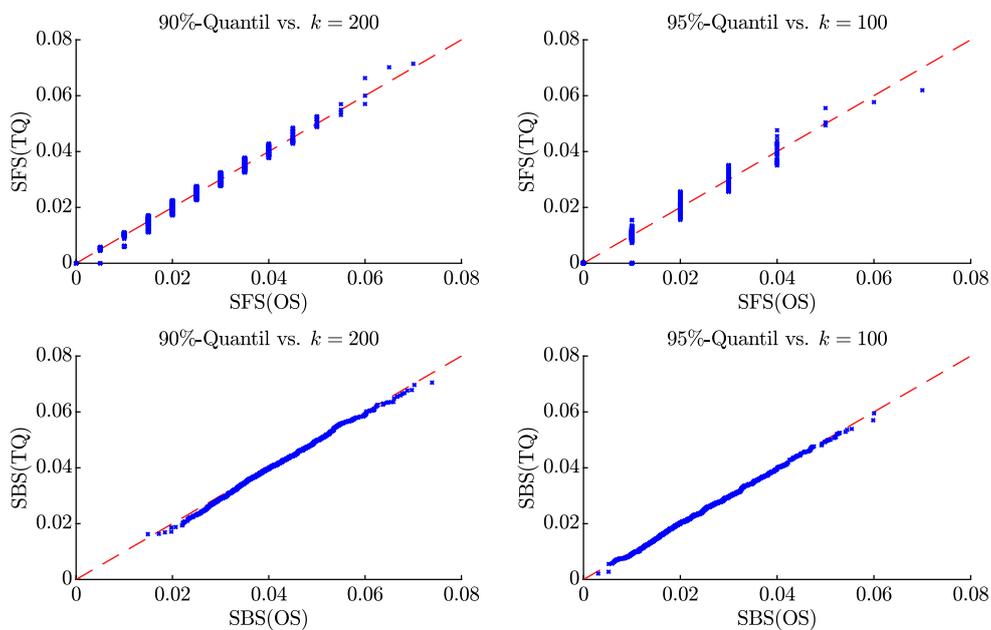


Abbildung C.8. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1\}$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,25$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

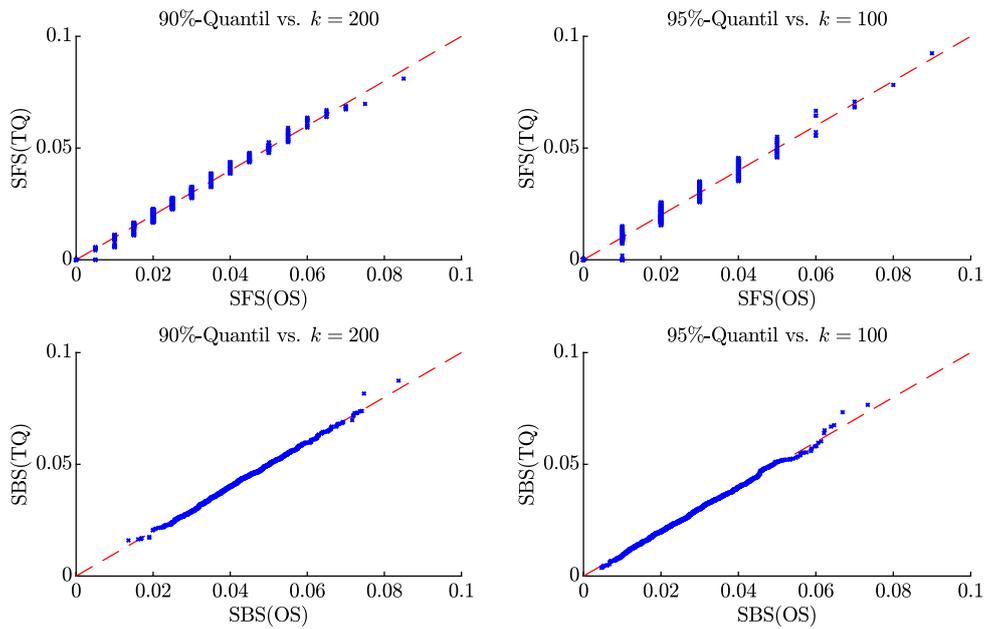


Abbildung C.9. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1\}$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,5$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

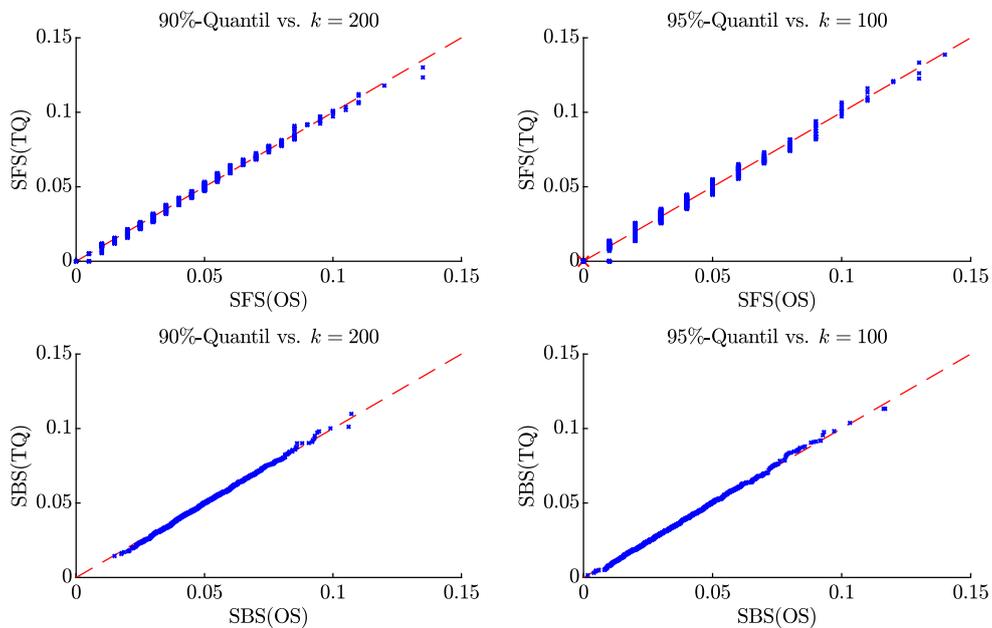


Abbildung C.10. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1\}$ im tCopula-Modell mit $\rho = 0,75$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

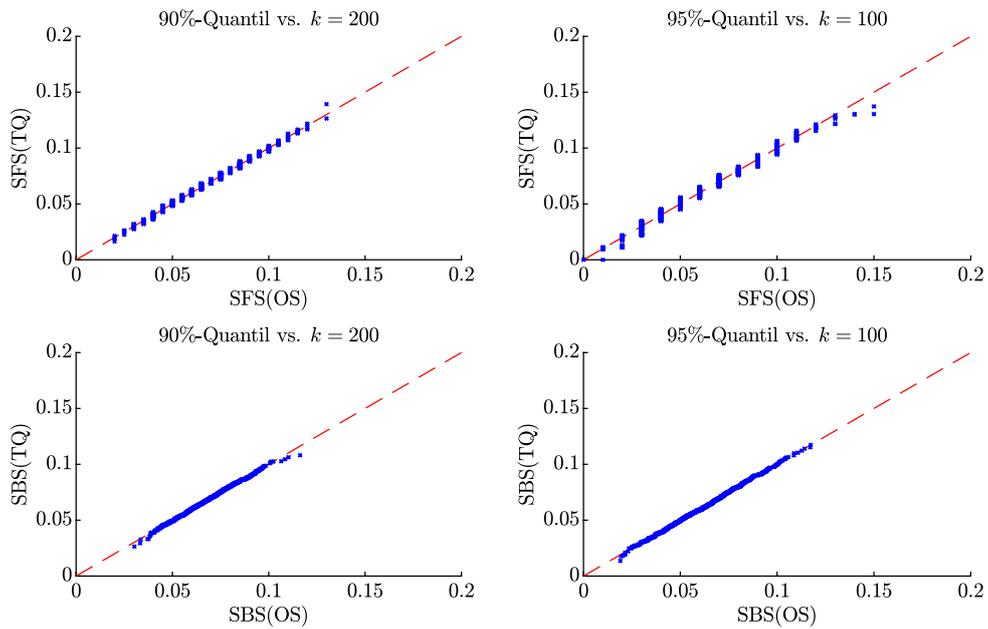


Abbildung C.11. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1\}$ im gumCopula-Modell mit $\theta = 1, 2$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

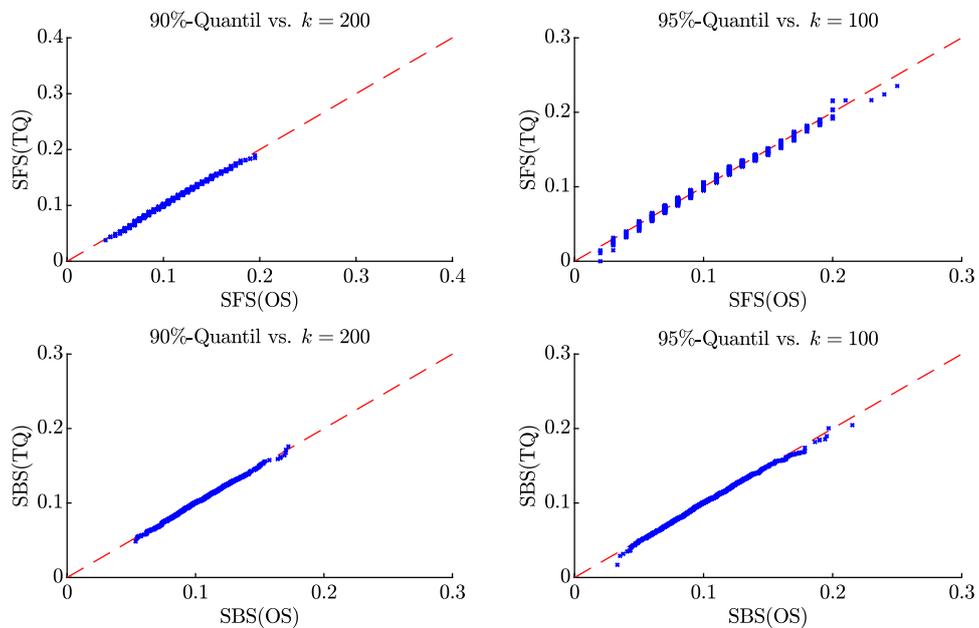


Abbildung C.12. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1\}$ im gumCopula-Modell mit $\theta = 1, 5$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

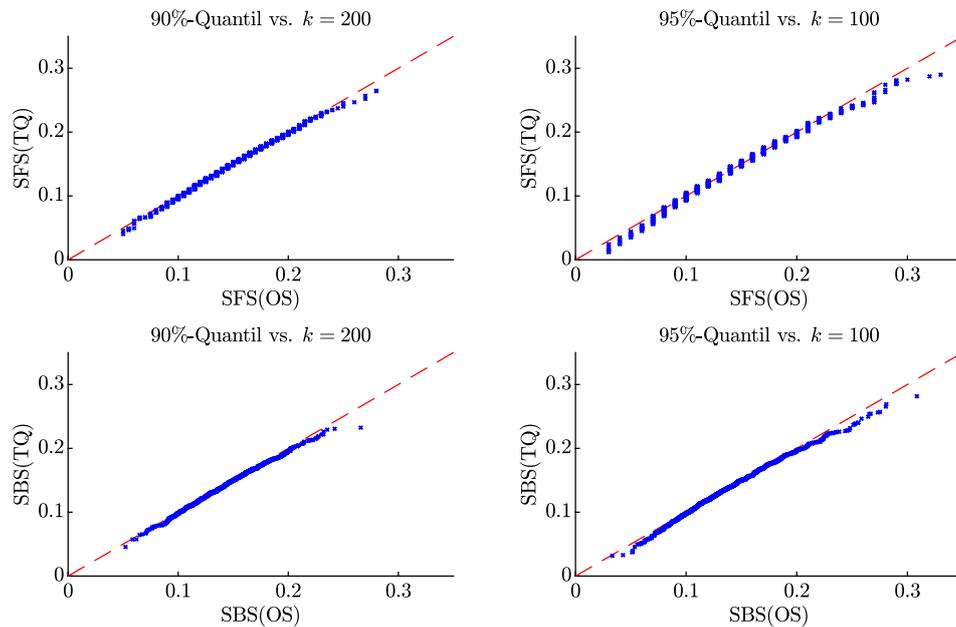


Abbildung C.13. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1\}$ im gumCopula-Modell mit $\theta = 2$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

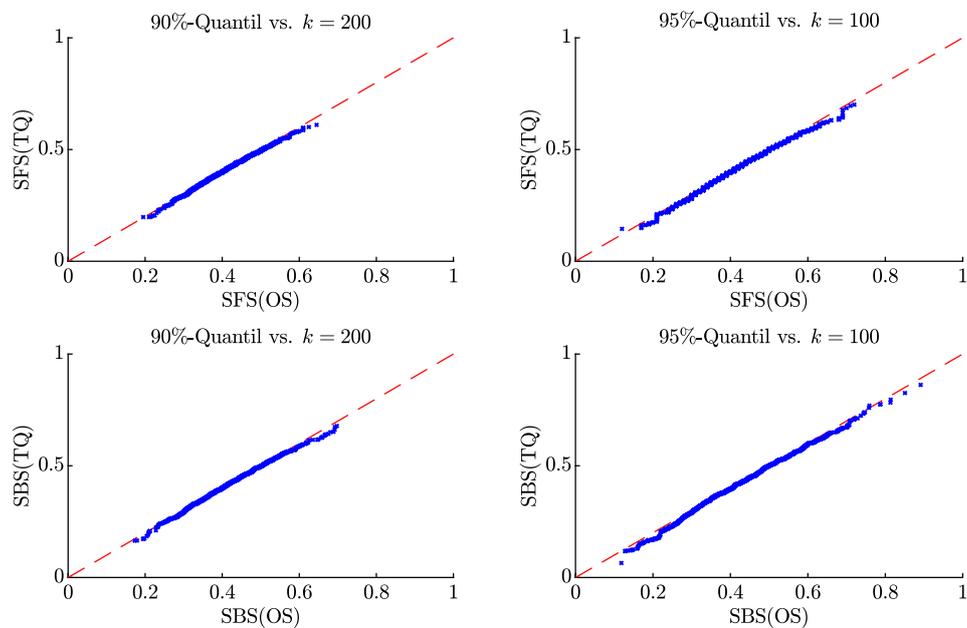


Abbildung C.14. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_1 > 1/2\}$ im gumCopula-Modell mit $\theta = 2$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

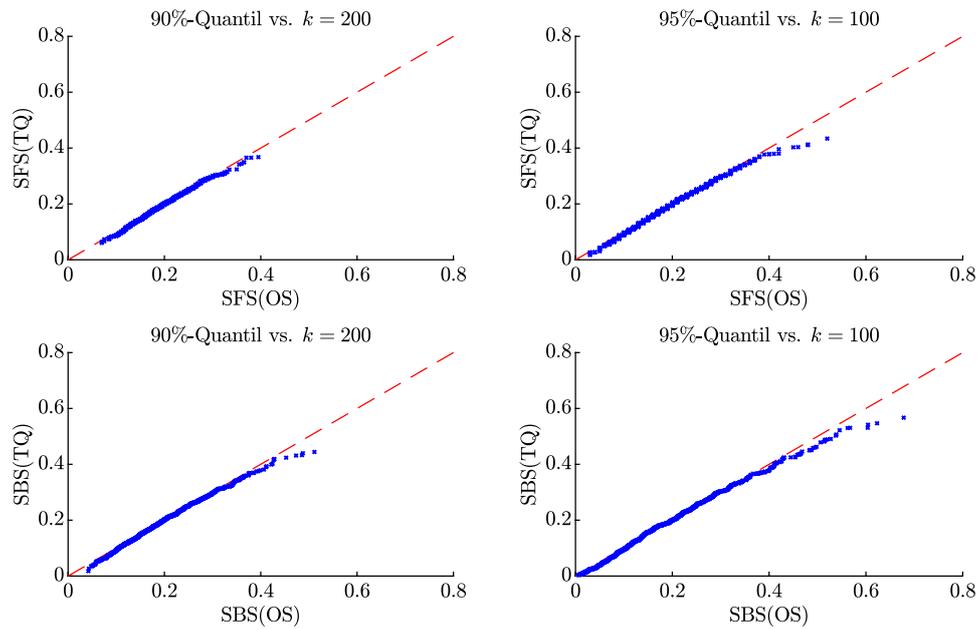


Abbildung C.15. QQ-Plot der Forward- (oben) bzw. Backward-Schätzwerte (unten) für $P\{\Theta_5 > 1/2\}$ im gumCopula-Modell mit $\theta = 2$ bei Verwendung von OS (x-Achse) versus TQ (y-Achse) als Schranke.

Ausblick

Der zweite Teil dieser Arbeit basiert auf der theoretischen Annahme, dass der bivariate Zufallsvektor $(V_0^{(1)}, V_0^{(2)})$ beziehungsweise dessen marginaltransformierte Variante $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ ist. Aus diesem Grund ist die Anwendung der Schätzer $\hat{\nu}_n^{\text{tr}}$ und $\hat{p}_{n, \hat{\eta}_n}$ auf rangtransformierte Stichproben $(V_1^{(n,1)}, V_1^{(n,2)}), \dots, (V_n^{(n,1)}, V_n^{(n,2)})$ nur dann sinnvoll, wenn statistisch überprüft werden kann, ob die zugrunde liegende Stichprobe dieser Annahme genügt.

Wir hatten in Lemma 5.4 gesehen, dass es ausreicht, sich auf Mengen B der Form $(x, \infty) \times (y, \infty)$ für die reguläre Variation auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ zu beschränken. Einen ersten Ansatz liefert dann die Homogenität des Grenzmaßes ν_0^* : Für $s > 0$ gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\{V_0^{(*,1)} > sxu, V_0^{(*,2)} > syu\}}{P\{\min\{V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)}\} > u\}} = s^{-1/\eta} \nu_0^*((x, \infty) \times (y, \infty)).$$

Aus diesem Grenzverhalten ergibt sich

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \log \frac{P\{V_0^{(*,1)} > sxu, V_0^{(*,2)} > syu\}}{P\{V_0^{(*,1)} > xu, V_0^{(*,2)} > yu\}} = -\frac{1}{\eta} \log s. \quad (\star)$$

Ein möglicher Schätzer für $-\log(s)/\eta$ ist demnach

$$\hat{S}_{n,s} := \log \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(n,1)} > sxu_n, V_i^{(n,1)} > syu_n\}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{V_i^{(n,1)} > xu_n, V_i^{(n,2)} > yu_n\}}$$

für eine hinreichend hohe Schranke u_n . In Hinblick auf die Konstruktion eines Tests für die Hypothese, dass $(V_0^{(*,1)}, V_0^{(*,2)})$ regulär variierend auf dem Kegel $(0, \infty)^2$ ist, bietet es sich an, den Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit η durch einen geeigneten Schätzer $\hat{\eta}_n$ zu schätzen. Die entsprechende Teststatistik T_n lautet dann

$$T_n := \left| \hat{S}_{n,s} - \frac{1}{\hat{\eta}_n} \log s \right|.$$

Eine Fragestellung ist, ob die Teststatistik T_n asymptotisch normal ist. Die Kovarianzstruktur wird sich in den Fällen der asymptotischen Unabhängigkeit und der asymptotischen Abhängigkeit der zugrunde liegenden Zufallsvariablen $V_0^{(1)}$ und $V_0^{(2)}$ unterscheiden. Es ist demnach naheliegend, das asymptotische Verhalten von T_n für diese Fälle gesondert zu betrachten. Drees und Müller (2008) haben für unabhängig und identisch verteilte Zufallsvektoren (U_i, W_i) , $i \in \mathbb{N}$, eine analoge Teststatistik untersucht. Im Gegensatz zu der dort betrachteten Situation wird nun aber die

Grenzverteilung von T_n nicht nur vom geschätzten Grenzmaß ν_0^* abhängen, sondern auch von der gesamten seriellen Abhängigkeitsstruktur der bivariaten Zeitreihe $(V_i^{(1)}, V_i^{(2)})_{i \in \mathbb{Z}}$. Kritische Werte des Tests sollen daher mit Hilfe geeigneter Bootstrap-Verfahren bestimmt werden.

Der konstruierte Test zielt im Wesentlichen darauf ab zu prüfen, ob das Regularitätsverhalten in Gleichung (\star) für eine gegebene hohe Schranke u als eine hinreichend gute Approximation für $\log(s)/\eta$ verwendet werden kann. Wie in den vorherigen Kapiteln dieser Arbeiten gesehen, spielt die Wahl der Schranke u eine tragende Rolle für die Güte des Schätzers. So erhöht sich bei zu hoher Wahl von u der stochastische Fehler und bei zu niedriger Wahl der deterministische Fehler des Schätzers. Ein Vorschlag aus der Literatur zur Wahl einer geeigneten Schranke ist, die Schranke möglichst klein zu wählen, solange der Test die Hypothese nicht ablehnt. Es ist zu erwarten, dass eine so gewählte Schranke zu klein und damit nicht geeignet für die Anwendung des Schätzers ist, da der Test nach Konstruktion nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit irrtümlich ablehnt. Bei einem vergleichbaren Problem in der univariaten Extremwertstatistik ist alternativ vorgeschlagen worden, die Schranke u so zu wählen, dass die Teststatistik minimiert wird.

Literatur

- Basrak, B., Davis, R. A. und Mikosch, T. (2002). Regular variation of GARCH processes. *Stochastic Processes and their Applications* **99**(1), S. 95–115.
- Basrak, B. und Segers, J. (2009). Regularly varying multivariate time series. *Stochastic Processes and their Applications* **119**(4), S. 1055–1080.
- Bilayi-Biakana, C., Kulik, R. und Soulier, P. (2020). Statistical inference for heavy tailed series with extremal independence. *Extremes* **23**(1), S. 1–33.
- Billingsley, P. (1995). Probability and Measure. 3. Aufl. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: Wiley.
- Billingsley, P. (1999). Convergence of Probability Measures. 2. Aufl. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: Wiley.
- Bingham, N.H., Goldie, C.M. und Teugels, J.L. (1987). Regular Variation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press.
- Boussama, F. (1998). Ergodicité, mélange et estimation dans les modèles GARCH. Diss. Université Paris 7.
- Buraczewski, D., Damek, E. und Mikosch, T. (2016). Stochastic Models with Power–Law Tails: The Equation $X = AX + B$. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer International Publishing.
- Chen, X., Wu, W.B. und Yi, Y. (2009). Efficient estimation of copula-based semiparametric Markov models. *The Annals of Statistics* **37**(6B), S. 4214–4253.
- Das, B., Mitra, A. und Resnick, S. (2013). Living on the multidimensional edge: seeking hidden risks using regular variation. *Advances in Applied Probability* **45**(1), S. 139–163.
- Davis, R. A., Drees, H., Segers, J. und Warchoł, M. (2018). Inference on the tail process with application to financial time series modeling. *Journal of Econometrics* **205**(2), S. 508–525.
- Davis, R. A. und Mikosch, T. (2009). The extremogram: a correlogram for extreme events. *Bernoulli* **15**(4), S. 977–1009.

- Davis, R. A., Mikosch, T. und Cribben, I. (2012). Towards estimating extremal serial dependence via the bootstrapped extremogram. *Journal of Econometrics* **170**(1), S. 142–152.
- de Haan, L. und Ferreira, A. (2006). *Extreme Value Theory: An Introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York: Springer Science + Business Media LLC.
- Doukhan, P. (1994). *Mixing: Properties and Examples*. Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag New York.
- Draisma, G., Drees, H., Ferreira, A. und De Haan, L. (2004). Bivariate tail estimation: dependence in asymptotic independence. *Bernoulli* **10**(2), S. 251–280.
- Drees, H. (2000). Weighted approximations of tail processes for β -mixing random variables. *Annals of Applied Probability* **10**(4), S. 1274–1301.
- Drees, H. (2003). Extreme quantile estimation for dependent data, with applications to finance. *Bernoulli* **9**(4), S. 617–657.
- Drees, H. (2015). *Bootstrapping empirical processes of cluster functionals with application to extremograms*. arXiv: 1511.00420.
- Drees, H., Ferreira, A. und Haan, L. de (2004). On maximum likelihood estimation of the extreme value index. *Annals of Applied Probability* **14**(3), S. 1179–1201.
- Drees, H. und Knežević, M. (2020). Peak-over-threshold estimators for spectral tail processes: random vs deterministic thresholds. *Extremes* **23**(3), S. 465–491.
- Drees, H. und Müller, P. (2008). Fitting and validation of a bivariate model for large claims. *Insurance: Mathematics and Economics* **42**(2), S. 638–650.
- Drees, H. und Rootzén, H. (2010). Limit theorems for empirical processes of cluster functionals. *The Annals of Statistics* **38**(4), S. 2145–2186.
- Drees, H. und Rootzén, H. (2016). Correction note to limit theorems for empirical processes of cluster functionals. *The Annals of Statistics* **44**(3), S. 1360–1361.
- Drees, H., Segers, J. und Warchoł, M. (2015). Statistics for tail processes of Markov chains. *Extremes* **18**(3), S. 369–402.
- Eberlein, E. (1984). Weak convergence of partial sums of absolutely regular sequences. *Statistics and Probability Letters* **2**(5), S. 291–293.
- Ehlert, A. (2010). *Characteristics for Dependence in Time Series of Extreme Values*. Diss. Georg-August-Universität Göttingen.

- Ehlert, A., Fiebig, U.-R., Janßen, A. und Schlather, M. (2015). Joint extremal behavior of hidden and observable time series with applications to GARCH processes. *Extremes* **18**(1), S. 109–140.
- Hult, H. und Lindskog, F. (2006). Regular variation for measures on metric spaces. *Publications de l'Institut Mathématique* **80**(94), S. 121–140.
- Janßen, A. (2010). On Some Connections between Light Tails, Regular Variation and Extremes. Diss. Georg-August-Universität Göttingen.
- Janßen, A. (2019). Spectral tail processes and max-stable approximations of multivariate regularly varying time series. *Stochastic Processes and their Applications* **129**(6), S. 1993–2009.
- Janßen, A. und Drees, H. (2018). Joint exceedances of random products. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* **54**(1), S. 437–465.
- Janßen, A. und Segers, J. (2014). Markov Tail Chains. *Journal of Applied Probability* **51**(4), S. 1133–1153.
- Janssen, A. und Drees, H. (2016). A stochastic volatility model with flexible extremal dependence structure. *Bernoulli* **22**(3), S. 1448–1490.
- Kosorok, M. R. (2008). Introduction to Empirical Processes and Semiparametric Inference. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag New York.
- Kulik, R. und Soulier, P. (2015). Heavy tailed time series with extremal independence. *Extremes* **18**(2), S. 273–299.
- Kulik, R. und Soulier, P. (2020). Heavy-Tailed Time Series. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer-Verlag New York.
- Leadbetter, M.R. (1983). Extremes and local dependence in stationary sequences. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **65**(2), S. 291–306.
- Ledford, A. W. und Tawn, J. A. (1996). Statistics for near independence in multivariate extreme values. *Biometrika* **83**(1), S. 169–187.
- Ledford, A. W. und Tawn, J. A. (1997). Modelling dependence within joint tail regions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* **59**(2), S. 475–499.
- Ledford, A. W. und Tawn, J. A. (1998). Concomitant tail behaviour for extremes. *Advances in Applied Probability* **30**(1), S. 197–215.

- Lindner, A. M. (2009). Stationarity, mixing, distributional properties and moments of GARCH(p,q)-processes. *Handbook of Financial Time Series*. Hrsg. von T. G. Andersen, R. A. Davis, J.-P. Kreiß und T. Mikosch. Springer Verlag, S. 43–70.
- Lindskog, F., Resnick, S. I. und Roy, J. (2014). Regularly varying measures on metric spaces: Hidden regular variation and hidden jumps. *Probability Surveys* **11**, S. 270–314.
- Müller, P. (2008). Modeling Dependencies in Large Insurance Claims. Diss. Universität Hamburg.
- Planinić, H. und Soulier, P. (2018). The tail process revisited. *Extremes* **21**(4), S. 551–579.
- Pratt, J. W. (1960). On interchanging limits and integrals. *The Annals of Mathematical Statistics* **31**(1), S. 74–77.
- Resnick, S. I. (1971). Tail equivalence and its applications. *Journal of Applied Probability* **8**(1), S. 136–156.
- Resnick, S. I. (2002). Hidden regular variation, second order regular variation and asymptotic independence. *Extremes* **5**(4), S. 303–336.
- Resnick, S. I. (2007). Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York: Springer Science+Business Media LLC.
- Rüschendorf, L. (2013). Mathematical Risk Analysis: Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Sibuya, M. (1960). Bivariate extreme statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **11**(3), S. 195–210.
- Smith, R. L. (1987). Estimating tails of probability distributions. *Annals of Statistics* **15**(3), S. 1174–1207.
- van der Vaart, A. W. und Wellner, J. (1996). Weak Convergence and Empirical Processes: With Applications to Statistics. Springer Series in Statistics. New York: Springer.
- Vervaat, W. (1972). Functional central limit theorems for processes with positive drift and their inverses. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **23**(4), S. 245–253.

Vorveröffentlichungen

Ein Zusammenschnitt des ersten Teils dieser Dissertation ist in Zusammenarbeit mit Holger Drees im folgenden Artikel veröffentlicht:

- Drees, H. und Knežević, M. (2020). Peak-over-threshold estimators for spectral tail processes: random vs deterministic thresholds. *Extremes* **23**(3), S. 465–491.

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertationsschrift selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Miran Knežević

Hamburg, den 13. November 2020