

**Theorie und Numerik
von Mehrskalenmethoden für
die rotierenden Flachwassergleichungen**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
an der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt
von

Philip Craib
aus Hamburg

Hamburg, 2019

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg aufgrund
der Gutachten von:

Prof. Dr. Jens Struckmeier

Prof. Dr. Rupert Klein

Datum der Disputation: 10.06.2020

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich gern bei den Personen bedanken, die mich bei der Anfertigung und Fertigstellung dieser Arbeit unterstützt und begleitet haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Struckmeier für die Möglichkeit, an diesem Thema zu arbeiten, sowie für die ursprüngliche Forschungsidee und die Betreuung in den vergangenen Jahren. Seine konstruktiven Anregungen und Ermutigungen haben mir stets weitergeholfen. Außerdem danke ich Herrn Professor Klein für die Übernahme des zweiten Gutachtens.

Mein weiterer Dank gilt meinen Kolleginnen und Kollegen des Fachbereichs Mathematik für die positive Arbeitsatmosphäre, motivierende Gespräche und viele interessante Diskussionen.

Schließlich danke ich meiner Familie und meinen Freunden dafür, dass Sie in allen Phasen der Arbeit für mich da waren. Mein besonderer Dank gilt dabei meinen Eltern, die mich immer unterstützt haben und mir mit Liebe, Zuspruch und Trost zur Seite standen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Grundlagen	5
2.1	Asymptotische Entwicklungen	5
2.2	Rotierende Flachwassergleichungen	9
3	Einskalenentwicklungen	13
3.1	Gleichungen bezüglich verschiedener Skalen	14
3.1.1	Mesoskala	14
3.1.2	Submesoskala	16
3.1.3	Zwischenvariable	18
3.2	Gleichungen führender Ordnung als singulärer Grenzwert	21
4	Mehrskalenentwicklungen	33
4.1	Wachstumsbedingungen und asymptotische Gleichungen	34
4.2	Asymptotische Mehrskalenanalyse	46
5	Vollständig-impliziter Algorithmus	61
5.1	Mehrskalenentwicklungen für die Erhaltungsgleichungen	64
5.2	Asymptotische Korrektur	68
5.3	Diskretisierung	78
5.3.1	Diskretisierung des Hilfsproblems	79
5.3.2	Diskretisierung der asymptotischen Funktionen H_0 und H_1	80
5.3.3	Diskretisierung der räumlichen Ableitungen	84
5.3.4	Diskretisierung der zeitlichen Ableitung	85
5.4	Divergenzfreie Korrektur	88
6	Numerische Resultate	95
6.1	Erhaltung einer exakten, stationären Lösung eines isolierten Wirbels	96
6.2	Erhaltung eines Sees in Ruhe	100
6.3	Wechselwirkung eines Wirbelpaares	103
6.4	Entwicklung einer Scherströmung	108
7	Zusammenfassung und Ausblick	115

Anhang	119
A.1 Asymptotische Korrektur bezüglich δ_{Ro}	119
A.2 Diskrete Ableitungsoperatoren mittels bilinearer Ansatzfunktionen	121
A.3 Absolute Fehler und experimentelle Konvergenzordnungen für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels	125
A.4 Weitere Abbildungen für die relative potentielle Vortizität im Fall der Wechselwirkung eines Wirbelpaares	127
Literaturverzeichnis	129

1 Einleitung

Bei der Modellierung von geophysikalischen Prozessen in der Meteorologie und Ozeanographie wie Bewegungen in der Atmosphäre und der Ozeane treten partielle Differentialgleichungen mit sehr kleinen Parametern auf, die zu singular-gestörten Problemen führen können. Aufgrund dieser Parameter ist eine direkte numerische Realisierung zumeist nicht möglich, da ansonsten numerische Instabilitäten entstehen oder erwünschte Rechenzeiten beziehungsweise verfügbare Rechenleistungen überschritten werden können.

Da des Weiteren für solche Probleme im Allgemeinen keine analytischen Lösungen vorliegen, werden unter Verwendung asymptotischer Methoden numerisch stabile Modelle entwickelt, die das Verhalten der ursprünglichen Probleme näherungsweise wiedergeben.

Allerdings können bei singular-gestörten Problemen, dies sind Differentialgleichungen in Abhängigkeit eines kleinen Parameters ε , die im singularen Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ einen Ordnungsverlust innerhalb der Differentialgleichung aufweisen, bedingt durch Anfangs- oder Randbedingungen Prozesse auftreten, die durch verschiedene räumliche oder zeitliche Skalen beschrieben werden. Infolgedessen können aufgrund der Mehrskaligkeit solcher Probleme keine asymptotischen Einskalenentwicklungen verwendet werden.

Zudem können je nach Problemstellung Prozesse auftreten, die getrennt voneinander oder gemeinsam wirken. Dabei sind für Letzteres beispielsweise zwei Prozesse zu verstehen, die durch zwei verschiedene Raum- oder Zeitskalen beschrieben werden und miteinander wechselwirken. Insbesondere erzeugt der Prozess bezüglich der kleinen Skala einen nicht zu vernachlässigen Einfluss auf den Prozess der größeren Skala.

Für entsprechende Probleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann im ersten Fall unter Einsatz von Neuskalierungen die Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung und im zweiten Fall ein Mehrskalenansatz verwendet werden.

Im Gegensatz dazu ist die Verwendung asymptotischer Mehrskalenmethoden im Fall gemeinsam wirkender Prozesse bei partiellen Differentialgleichungen wie etwa Erhaltungsgleichungen mit Quelltermen schwieriger, da dann sowohl unterschiedliche räumliche als auch zeitliche Skalen auftreten können.

Im Fall der rotierenden Flachwassergleichungen wurden beispielsweise von Embid und Majda in [EM96], [EM98] und [ME98] asymptotische Einskalenentwicklungen im Raum und Zweiskalenentwicklungen in der Zeit verwendet, um das Verhalten der mesoskaligen Lösung im singularen Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ für allgemeine nicht wohl-erstellte Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Um allerdings räumliche Mehrskaligkeit, beispielsweise infolge entsprechender Anfangsbedingungen darstellen zu können, ist dieser Ansatz nicht geeignet. Hierfür müssen Mehrskalenent-

wicklungen im Raum verwendet werden.

Im Fall der eindimensionalen Euler-Gleichungen für hinreichend kleine Mach-Zahlen wurde von Klein in [Kle95] die räumliche Zweiskaligkeit mittels einer charakteristischen Analyse gezeigt und daher eine asymptotische Zweiskalenentwicklung im Raum und Einskalenentwicklung in der Zeit angewendet. Zudem konnte Klein mit den Ergebnissen der asymptotischen Analyse und einer entsprechenden diskreten Druckzerlegung ein für diesen Fall geeignetes numerisches Verfahren entwickeln.

Anschließend wurde dieser Ansatz in [SBGK99], [MRKG03] auf die zweidimensionalen Euler-Gleichungen für verschwindende Mach-Zahlen, in [Hof00], [Mei01] auf die eindimensionalen Euler-Gleichungen für alle Mach-Zahlen und in [Vat05], [VK09] und [Vat13] auf die zweidimensionalen Flachwassergleichungen für verschwindende Froude-Zahlen jeweils weiterentwickelt.

In der vorliegenden Arbeit werden die genannten Probleme bei kleinen Parametern an den rotierenden Flachwassergleichungen theoretisch und numerisch mit Mehrskalenmethoden untersucht. Dabei werden mittels dieser Gleichungen Bewegungen in der Atmosphäre und der Ozeane in den mittleren Breiten anhand der Höhe und der horizontalen Geschwindigkeit sowie den beiden dimensionslosen Parametern der Froude- und Rossby-Zahl modelliert. Demzufolge stellen diese Gleichungen im Gegensatz zu anderen Gleichungssystemen der Strömungsmechanik wie den kompressiblen Euler-Gleichungen ein weniger komplexes System dar und werden nicht zuletzt deshalb hier verwendet.

Des Weiteren können für diese Gleichungen verschiedene Längenskalen betrachtet werden, die bei entsprechenden Geschwindigkeitsskalen aufgrund des aus der Erdrotation folgenden linearen Quellterms zu Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ beziehungsweise $\mathcal{O}(\varepsilon)$ und gemeinsam mit sehr kleinen Froude-Zahlen infolgedessen zu verschiedenen singulären Grenzwerten führen. Für die Mesoskala sind dies die bekannten quasi-geostrophischen Gleichungen [Cha48], [Maj03] und für die kleinere Submesoskala ein verschwindender Gradient der Höhe sowie eine divergenzfreie Geschwindigkeit, sodass hiermit insgesamt unterschiedlich skalierte Prozesse vorliegen.

Um nun den Einfluss der Submesoskala auf die quasi-geostrophischen Gleichungen bezüglich der Mesoskala zu bestimmen, wird im theoretischen Teil der Arbeit ein Gleichungssystem ermittelt, das die Gleichungen der beiden Skalen jeweils enthält, und dieses mit Einskalen- und Mehrskalenentwicklungen untersucht. Dabei wird eine Zweiskalenentwicklung in Raum und Zeit zum Einsatz kommen, da dann das quasi-geostrophische Gleichgewicht durch Mittelungsoperatoren bezüglich des Raumes und der Zeit hergeleitet werden kann.

Im numerischen Teil der Arbeit ist die Zielsetzung, ein auf Asymptotik basierendes numerisches Verfahren für die rotierenden Flachwassergleichungen bei hinreichend kleinen Froude-Zahlen sowie beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$ herzuleiten. Mit diesem Vorgehen wird sichergestellt, dass die Gleichungen in den betrachteten Fällen numerisch korrekt wiedergegeben werden. Weiterhin wird dieser Algorithmus keine numerischen Instabilitäten wie unphysikalische Oszillationen und die Konsistenzordnung zwei aufweisen.

Im Einzelnen ist die Arbeit wie folgt aufgebaut:

In Kapitel 2 stellen wir die mathematischen Grundlagen der Arbeit vor. Hierfür geben wir eine

kurze Einführung zu asymptotischen Entwicklungen und eine Übersicht mit den unterschiedlichen Formen der rotierenden Flachwassergleichungen an.

Anschließend betrachten wir im theoretischen Teil der Arbeit asymptotische Einskalen- und Mehrskalentwicklungen für die rotierenden Flachwassergleichungen in angepasster einfacher Form. Als Erstes leiten wir in Kapitel 3 ein Gleichungssystem bezüglich der sogenannten Zwischenvariablen, das die Gleichungen der Mesoskala und der Submesoskala in Abhängigkeit eines zusätzlichen Parameters wiedergibt, her und beweisen die zu den bestehenden Existenz-, Eindeutigkeits- und Konvergenzaussagen im singulären Grenzwert bezüglich der Mesoskala entsprechenden Aussagen bezüglich der Zwischenvariablen und Submesoskala.

Als Zweites wenden wir in Kapitel 4 auf eine Verallgemeinerung dieser Gleichungen eine Zweiskalentwicklung in Raum und Zeit an. Anschließend analysieren wir das resultierende asymptotische System mithilfe der jeweiligen Mittelungsoperatoren und Wachstumsbedingungen bezüglich der Submesoskala.

Im numerischen Teil der Arbeit entwickeln wir in Kapitel 5 aufbauend auf den Ergebnissen der asymptotischen Analyse einen vollständig-impliziten Algorithmus zweiter Ordnung in Raum und Zeit für die rotierenden Flachwassergleichungen in Erhaltungsform bei hinreichend kleinen Froude-Zahlen sowie beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Daraufhin überprüfen wir in Kapitel 6 die Güte unseres entwickelten Algorithmus. Dazu testen wir diesen an zwei klassischen stationären Lösungen sowie zwei nichtlinearen Dynamiken und stellen die ermittelten numerischen Resultate vor.

Abschließend geben wir in Kapitel 7 eine Zusammenfassung der Arbeit sowie einen kurzen Ausblick an.

2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir die mathematischen Grundlagen der vorliegenden Arbeit vor. Wir beginnen in Kapitel 2.1 mit einer kurzen Einführung zu asymptotischen Entwicklungen. Dazu definieren wir asymptotische Einskalenentwicklungen und geben wichtige Hilfsmittel der asymptotischen Analyse an. Zudem diskutieren wir an einem Beispiel die Notwendigkeit von Mehrskalenentwicklungen.

Anschließend beschreiben wir in Kapitel 2.2 unterschiedliche Versionen der rotierenden Flachwassergleichungen. Dabei unterscheiden wir zwischen Gleichungen in einfacher Form und in Erhaltungform, nichtlinearen und linearen sowie dimensionsbehafteten und entdimensionalisierten Gleichungen.

2.1 Asymptotische Entwicklungen

In diesem Unterkapitel geben wir eine kurze Einführung zu asymptotischen Entwicklungen und wichtige Hilfsmittel der asymptotischen Analyse an. Diese basiert auf den Ausführungen in [Mei99] und [Mei01]. Für eine ausführliche Einführung mit Anwendungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen verweisen wir beispielsweise auf [Sch78], [Hin91], [Ili92] und [KC13]. Auch verschiedene Mehrskalenmethoden wie die Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung werden ebenda vorgestellt.

Um die asymptotische Einskalenentwicklung einer Funktion f , die einer nicht notwendigerweise konvergenten Reihe entspricht, zu definieren, werden im Folgenden mit den Landau-Symbolen Ordnungsrelationen für Funktionen und daraufhin asymptotische Folgen definiert.

Definition 2.1.1 (Landau-Symbole)

Sei \mathcal{G} ein Gebiet im \mathbb{R}^d und sei ferner $\tilde{\varepsilon} > 0$ gegeben.

Dann gilt für die Abbildungen $f, g : \mathcal{G} \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$

(i)

$$f(\mathbf{x}; \varepsilon) = \mathcal{O}(g(\mathbf{x}; \varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0,$$

falls für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ ein $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}; \varepsilon)}{g(\mathbf{x}; \varepsilon)} = h(\mathbf{x})$$

existiert. Die Ordnungsrelation heißt gleichmäßig gültig in $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, falls ein $k \in \mathbb{R}$ mit $|h(\mathbf{x})| \leq k$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}'$ existiert.

(ii)

$$f(\mathbf{x}; \varepsilon) = o(g(\mathbf{x}; \varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0,$$

falls für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}; \varepsilon)}{g(\mathbf{x}; \varepsilon)} = 0$$

gilt. Die Ordnungsrelation heißt gleichmäßig gültig in $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, falls

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{y}(\varepsilon); \varepsilon)}{g(\mathbf{y}(\varepsilon); \varepsilon)} = 0$$

für jede Abbildung $\mathbf{y} : (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathcal{G}'$ gilt.

Definition 2.1.2 (Asymptotische Folge)

Eine Funktionenfolge $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\phi_n : (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\varepsilon} > 0$, heißt asymptotische Folge, falls

$$\phi_{n+1}(\varepsilon) = o(\phi_n(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0,$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Infolgedessen lässt sich mit diesen beiden Definitionen die asymptotische Einskalenentwicklung einer Funktion f definieren.

Definition 2.1.3 (Asymptotische Einskalenentwicklung)

Sei $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine asymptotische Folge und sei ferner $f : \mathcal{G} \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}; \varepsilon) \mapsto f(\mathbf{x}; \varepsilon)$ gegeben. Des Weiteren sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, dann heißt

$$\sum_{n=0}^N \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{x})$$

eine asymptotische $(N + 1)$ -Term Einskalenentwicklung von f , falls

$$f(\mathbf{x}; \varepsilon) - \sum_{n=0}^N \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{x}) = o(\phi_N(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.1.1)$$

gilt. Die asymptotische Entwicklung heißt gleichmäßig gültig in $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, falls Gleichung (2.1.1) gleichmäßig in \mathcal{G}' gilt.

Eine erste wichtige Eigenschaft von asymptotischen Entwicklungen ist durch das folgende Lemma gegeben.

Lemma 2.1.4 (Satz 1.1.2 aus [Mei01])

Sei $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine asymptotische Folge und sei ferner $f_n : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, \dots, N$, gegeben, sodass

$$\sum_{n=0}^N \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{x})$$

eine asymptotische $(N+1)$ -Term Einskalenentwicklung der Funktion $f : \mathcal{G} \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$ darstellt.

Dann gilt

$$f(\mathbf{x}; \varepsilon) - \sum_{n=0}^k \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{x}) = o(\phi_k(\varepsilon)) \text{ f\"ur } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ und } k = 0, \dots, N$$

sowie

$$f(\mathbf{x}; \varepsilon) - \sum_{n=0}^k \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\phi_{k+1}(\varepsilon)) \text{ f\"ur } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ und } k = 0, \dots, N-1.$$

Anschließend lässt sich hierdurch für eine gegebene Funktion f eine eindeutige rekursive Bestimmungsvorschrift für die einzelnen Glieder der Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ einer asymptotischen Einskalenentwicklung herleiten.

Lemma 2.1.5 (Satz 1.1.3 aus [Mei01])

Sei $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine asymptotische Folge und sei ferner $f : \mathcal{G} \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}; \varepsilon) \mapsto f(\mathbf{x}; \varepsilon)$ gegeben. Dann stellt die Summe

$$\sum_{n=0}^N \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{x})$$

genau dann eine asymptotische $(N+1)$ -Term Einskalenentwicklung der Funktion f dar, wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$

$$f_n(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\phi_n(\varepsilon)} \left(f(\mathbf{x}; \varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(\varepsilon) f_k(\mathbf{x}) \right) \text{ f\"ur } n = 0, \dots, N$$

gilt.

Allerdings ist diese Bestimmungsvorschrift in vielen Anwendungsfällen wie beispielsweise im Bereich gewöhnlicher Differentialgleichungen ohne Lösungen in analytischer Form nicht nutzbar. Um dennoch in solchen Fällen mit asymptotischen Entwicklungen näherungsweise Lösungen bestimmen zu können, wird im Allgemeinen die folgende Bestimmungsvorschrift verwendet.

Lemma 2.1.6 (Lemma 3.1 aus [Mei99])

Sei $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine asymptotische Folge und seien ferner L_n , $n = 0, \dots, N$ beliebige Terme unabhängig von ε . Dann gilt die Aussage

$$\sum_{n=0}^N \phi_n(\varepsilon) L_n = o(\phi_N(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0,$$

genau dann, wenn $L_n = 0$, $n = 0, \dots, N$.

Dazu wird in eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren Lösung existiert und eindeutig ist, jedoch keine analytische Form aufweist, zu einer gegebenen asymptotischen Folge $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine asymptotische Einskalenentwicklung der Form

$$f(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{x}) + o(\phi_N(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

eingesetzt. Dies wird daraufhin so umgeformt, dass die Differentialgleichung die Form

$$\sum_{k=0}^M \psi_k(\varepsilon) L_k(f_0, \dots, f_n) = o(\psi_M(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

mit $M \in \mathbb{N}_0$ und einer asymptotischen Folge $\{\psi_k\}_{k=0, \dots, M}$ annimmt. Da die Lösungsoperatoren L_k , $k = 0, \dots, M$, keine Abhängigkeit von ε aufweisen, bestimmen sich die einzelnen Funktionen f_n , $n = 0, \dots, N$ nach Lemma 2.1.6 durch die Differentialgleichungen

$$L_k(f_0, \dots, f_n) = 0.$$

Wie das folgende Beispiel zeigt, weist nicht jede Funktion eine asymptotische Einskalenentwicklung auf.

Beispiel 2.1.7 (Beispiel und Satz 1.2.1 aus [Mei01])

Die eindeutige Lösung

$$f(x; \varepsilon) = \sin x + \varepsilon \cos \frac{x}{\varepsilon}$$

der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varepsilon^2 f''(x; \varepsilon) + f(x; \varepsilon) = (1 - \varepsilon^2) \sin x$$

für $x \in (0, \pi)$ und $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$ mit den Anfangsbedingungen

$$f(0; \varepsilon) = \varepsilon, \quad f'(0; \varepsilon) = 1$$

weist keine asymptotische Einskalenentwicklung nach Definition 2.1.3 auf, da die Lösung nicht durch Lemma 2.1.4 dargestellt werden kann. Folglich existieren gewöhnliche Differentialgleichungen, die nicht mittels asymptotischer Einskalenentwicklungen bearbeitet werden können.

Das in Beispiel 2.1.7 gezeigte Verhalten, liegt für gewöhnlich im Fall singular-gestörter Probleme vor. Dies sind Problem wie das obige, die im singulären Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ einen Ordnungsverlust innerhalb der Differentialgleichung aufweisen. In Abhängigkeit von Anfangs- oder Randbedingungen können dann Prozesse auf unterschiedlichen Skalen entstehen.

Um auch in solchen Fällen mit asymptotischen Entwicklungen näherungsweise Lösungen bestimmen zu können, werden asymptotische Mehrskalenentwicklungen definiert.

Definition 2.1.8 (Asymptotische Mehrskalentwicklung)

Sei $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine asymptotische Folge und seien ferner $f : \mathcal{G} \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{g} : \mathcal{G} \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathcal{G}'$ gegeben. Des Weiteren sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : \mathcal{G}' \rightarrow \mathbb{R}$, dann heißt

$$\sum_{n=0}^N \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{g}(\mathbf{x}; \varepsilon))$$

eine asymptotische $(N + 1)$ -Term Mehrskalentwicklung von f , falls

$$f(\mathbf{x}; \varepsilon) - \sum_{n=0}^N \phi_n(\varepsilon) f_n(\mathbf{g}(\mathbf{x}; \varepsilon)) = o(\phi_N(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.1.2)$$

gilt. Die asymptotische Entwicklung heißt gleichmäßig gültig in $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, falls Gleichung (2.1.2) gleichmäßig in \mathcal{G}' gilt.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wenden wir asymptotische Einskalen- und Mehrskalentwicklungen auf die rotierenden Flachwassergleichungen an. Dazu stellen wir zunächst diese Gleichungen im folgenden Unterkapitel vor.

2.2 Rotierende Flachwassergleichungen

In diesem Unterkapitel geben wir eine kurze Einführung zu den rotierenden Flachwassergleichungen an. Diese basiert auf den Ausführungen in [Maj03].

In der Strömungsmechanik werden einige wichtige zweidimensionale Bewegungen in der Atmosphäre und der Ozeane durch die rotierenden Flachwassergleichungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + f \mathbf{v}^\perp + g \nabla h = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) H + H \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.2.2)$$

beschrieben. Dabei bezeichnet $\mathbf{x} = (x, y)^T$ die horizontale Raumkoordinate, t die Zeitkoordinate, $\mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t))^T$ die horizontale Geschwindigkeitskomponente des Fluids, $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)^T$ die „orthogonale Geschwindigkeit“ und $h = H + h_B$ die Oberfläche des Fluids, die aus der Bodenhöhe h_B und der Gesamttiefe des Fluids H besteht. Zudem ist die Rotationsfrequenz, auch Coriolisparameter genannt, durch f und die Erdbeschleunigung durch g gegeben. Diese Gleichungen folgen mittels geeigneter Annahmen aus den dreidimensionalen inkompressiblen Euler-Gleichungen mit Rotationsterm. Demnach wird ein inkompressibles Fluid betrachtet und gefordert, dass die Rotationsachse mit der vertikalen Koordinatenachse z übereinstimmt. Außerdem wird für den Druck p das hydrostatische Gleichgewicht, das heißt $\partial p / \partial z = -g$, vorausgesetzt. Eine weitere Forderung bezieht sich auf das Größenverhältnis zwischen der Skala L der horizontalen und der Skala D der vertikalen Bewegung des Fluids, wofür die

Flachwasserannahme $D/L \ll 1$ verwendet wird. Die vollständige Herleitung ist beispielsweise in [Ped87] zu finden.

Des Weiteren lassen sich die rotierenden Flachwassergleichungen auch in Erhaltungsform

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\mathbf{v}) + \operatorname{div}(H\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + g\nabla\left(\frac{1}{2}H^2\right) = -fH\mathbf{v}^\perp - gH\nabla h_B \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}H + \operatorname{div}(H\mathbf{v}) = 0 \quad (2.2.4)$$

angegeben. Dabei wird, um insbesondere die Gleichung des Impulses (2.2.3) zu erhalten, die Gleichung der Geschwindigkeit (2.2.1) mit H multipliziert und dies zu der Gleichung der Höhe (2.2.2) addiert.

Als weitere physikalische Variablen für die rotierenden Flachwassergleichungen werden neben der Geschwindigkeit beziehungsweise dem Impuls und der Höhe die Wirbelstärke, auch Vortizität genannt,

$$\omega := \operatorname{curl} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}v_2 - \frac{\partial}{\partial y}v_1 = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(-v_2) + \frac{\partial}{\partial y}v_1\right) = -\operatorname{div} \mathbf{v}^\perp,$$

das heißt die zweidimensionale Rotation der Geschwindigkeit, und die potentielle Vortizität

$$q := \frac{\omega + f}{H}$$

sowie als weitere Gleichung für die rotierenden Flachwassergleichungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right)\left(\frac{\omega + f}{H}\right) = 0 \quad (2.2.5)$$

betrachtet. Diese Gleichung der Vortizität beziehungsweise potentiellen Vortizität folgt nach Anwendung des Rotationsoperators auf Gleichung (2.2.1) und geeigneter Kombination mit Gleichung (2.2.2).

Eine wichtige Vereinfachung des nichtlinearen Gleichungssystems (2.2.1) bis (2.2.2) mit $h_B = 0$ ist durch die linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen gegeben. Dazu wird der konstante Zustand der Form $H = H_0 = \operatorname{const.} \neq 0$ und $\mathbf{v} = 0$ leicht mittels

$$H = H_0 + \delta h, \quad \mathbf{v} = \delta \mathbf{v},$$

für $\delta \ll 1$, gestört und dies in die rotierenden Flachwassergleichungen eingesetzt. Es folgt für die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\delta)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + f\mathbf{v}^\perp + g\nabla h &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}h + H_0 \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

wodurch sogenannte Poincaré-Wellen und stationäre Wellen beschrieben werden, weitere Details siehe beispielsweise [Maj03].

Weiterhin werden im Allgemeinen in der Strömungsmechanik, um die Größenordnungen der einzelnen physikalischen Variablen zu beachten und infolgedessen das Verhalten einer Strömung zu verstehen, dimensionslose Gleichungen hergeleitet. Dazu wird jede physikalische Variable mit einer dimensionsbehafteten charakteristischen Größe skaliert.

Für die Geschwindigkeit der Strömung ist diese charakteristische Größe durch die Geschwindigkeitsskala U , für die Höhe durch die Hintergrundhöhe H_0 , für die Raumkoordinaten durch die horizontale Längenskala L und für die Zeitkoordinate durch die charakteristische Zeitskala $t_U = L/U$ gegeben.

Mit dieser Wahl der Skalen werden zudem die entdimensionalisierten Variablen

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' = \frac{t}{t_U}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad H' = \frac{H}{H_0}$$

und dimensionslosen Parameter

$$\text{Ro} = \frac{U}{Lf}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH_0}}$$

eingeführt. Dabei wird durch die Rossby-Zahl Ro das Verhältnis zwischen der Rotationszeit $t_R = 1/f$ und der Zeitskala t_U sowie durch die Froude-Zahl Fr das Verhältnis zwischen der charakteristischen Geschwindigkeitsskala U und der Geschwindigkeit der Schwerewelle $\sqrt{gH_0}$ beschrieben.

Anschließend transformieren sich unter Verwendung dieser neuen Variablen, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Prime-Zeichen weggelassen werden, und der beiden dimensionslosen Parameter die Gleichungen (2.2.3) bis (2.2.4) zu den entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen in Erhaltungsform

$$\frac{\partial}{\partial t} (H\mathbf{v}) + \text{div} (H\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\text{Fr}^2} \nabla \left(\frac{1}{2} H^2 \right) = -\frac{1}{\text{Ro}} H\mathbf{v}^\perp - \frac{1}{\text{Fr}^2} H \nabla \left(\frac{h_B}{H_0} \right), \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H + \text{div} (H\mathbf{v}) = 0. \quad (2.2.7)$$

Da die Eigenwerte der Jacobi-Matrizen dieses quasi-linearen Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung jeweils durch

$$\lambda_{1,j} = v_j - \frac{1}{\text{Fr}} \sqrt{H}, \quad \lambda_{2,j} = v_j, \quad \lambda_{3,j} = v_j + \frac{1}{\text{Fr}} \sqrt{H},$$

für $j = 1, 2$, gegeben sind, liegt für die rotierenden Flachwassergleichungen ferner ein hyperbolisches System vor.

Eine andere Version der entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen folgt mit der Höhenskalierung nach [Maj03]. Hierfür wird

$$H = H_0 + h - h_B$$

gesetzt und die Höhenvariation h durch die charakteristische Größe N_0 , das heißt $h' = h/N_0$,

skaliert, sodass durch $\theta = N_0/H_0$ ein zusätzlicher dimensionsloser Parameter entsteht.

Daraufhin werden unter Verwendung der obigen Skalierungen mit der neuen Höhe, wobei auch hier aus Gründen der Übersichtlichkeit die Prime-Zeichen weggelassen werden, und der drei dimensionslosen Parameter die Gleichungen (2.2.1), (2.2.2) und (2.2.5) zu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{v}^\perp + \frac{\Theta}{\text{Fr}^2} \nabla h = 0, \quad (2.2.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) h - \frac{1}{\Theta} \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{h_B}{H_0}\right) + \frac{1}{\Theta} \left(1 + \Theta h - \frac{h_B}{H_0}\right) \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.2.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\frac{1 + \text{Ro} \omega}{1 + \Theta h - \frac{h_B}{H_0}}\right) = 0. \quad (2.2.10)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wenden wir im theoretischen Teil asymptotische Entwicklungen auf die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen in einfacher Form (2.2.8) bis (2.2.10) an und leiten im numerischen Teil einen vollständig-impliziten Algorithmus für die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen in Erhaltungsform (2.2.6) bis (2.2.7) her.

3 Einskalenentwicklungen

In diesem Kapitel betrachten wir die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen (2.2.8) bis (2.2.10) für drei verschiedene Kombinationen von charakteristischen Größen mit hinreichend kleinen Parametern ε und weisen die Konvergenz dieser Gleichungen im singulären Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die jeweiligen Gleichungen führender Ordnung, die mittels asymptotischer Einskalenentwicklungen entstehen, nach.

Die erste Kombination von charakteristischen Größen

$$\text{Ro} = \varepsilon, \quad \text{Fr} = F^{1/2}\varepsilon, \quad \Theta = F\varepsilon,$$

für $\varepsilon \ll 1$ und $F = \mathcal{O}(1)$, beschreibt für die genannten Gleichungen nach Charney [Cha48] mesoskalige Bewegungen in der Atmosphäre und der Ozeane in den mittleren Breiten, die Mesoskala weist in Abhängigkeit des Fluids die horizontale Länge $L = 1000$ km beziehungsweise $L = 100$ km auf, und ist durch ein Gleichgewicht zwischen Rotationsterm und Höhengradienten gegeben. Da hierdurch ein singular-gestörtes Problem vorliegt, können die im asymptotischen Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ entstehenden Gleichungen aufgrund verschwindender Ableitungsoperatoren den Einfluss kleinerer Raumskalen auf das Gesamtproblem nicht vollständig erfassen. Um diese dennoch mithilfe der asymptotischen Analyse zu beschreiben, betrachten wir hier in Analogie mit der Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung zwei Neuskalierungen der charakteristischen Größen, die kleinere horizontale Längen aufweisen.

Diese stellen wir neben den Gleichungen der Mesoskala in Kapitel 3.1 vor. Zum einen betrachten wir mit der zweiten Kombination

$$\text{Ro} = 1, \quad \text{Fr} = F^{1/2}\varepsilon, \quad \Theta = F\varepsilon,$$

für $\varepsilon \ll 1$ und $F = \mathcal{O}(1)$, submesoskalige Bewegungen in der Atmosphäre und der Ozeane in den mittleren Breiten, die Submesoskala weist in Abhängigkeit des Fluids die horizontale Länge $L = 100$ km beziehungsweise $L = 10$ km auf, und zum anderen mittels der Zwischenvariablen ein Gleichungssystem, das in Abhängigkeit eines zusätzlichen Parameters die beiden Kombinationen jeweils wiedergibt.

Allerdings ist es auch möglich andere Neuskalierungen zu betrachten. Zum Beispiel ist ein erster Ansatz mit asymptotischen Einskalen- und Mehrskalenerwicklungen für die Kombination $\text{Ro} = 1$, $\text{Fr} = F^{1/2}\varepsilon$, $\Theta = F\varepsilon^2$, für $\varepsilon \ll 1$ und $F = \mathcal{O}(1)$, in [Bac14] zu finden.

Anschließend zeigen wir in Kapitel 3.2 für die Gleichungen der Zwischenvariablen unter geeigneten Voraussetzungen die Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz der Lösungen im Fall $\varepsilon \rightarrow 0$. Dabei verwenden wir die Beweisstrategie nach Klainerman und Majda [KM81], [KM82] für symmetrisch-hyperbolische Systeme, insbesondere haben die Autoren damit in der zitierten Literatur unter geeigneten Voraussetzungen an die Anfangsbedingungen gezeigt, dass die Lösung der kompressiblen Euler-Gleichungen im Fall verschwindender Mach-Zahlen gegen die Lösung der inkompressiblen Euler-Gleichungen konvergiert, und passen demzufolge die Ausführungen in [Maj03] für die rotierenden Flachwassergleichungen der Mesoskala auf unsere Situation an. Die weitere Betrachtung einer asymptotischen Approximation der mesoskaligen Lösung wie eine geeignete Summation der drei Lösungen führender Ordnung in Analogie mit der Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung wird nicht Teil der vorliegenden Arbeit sein und bleibt somit zukünftigen Arbeiten vorbehalten.

3.1 Gleichungen bezüglich verschiedener Skalen

In diesem Unterkapitel betrachten wir die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen (2.2.8) bis (2.2.10) für drei verschiedene Kombinationen von charakteristischen Größen mit hinreichend kleinen dimensionslosen Parametern und geben die jeweiligen asymptotischen Grenzwerte an. Dabei unterscheiden sich diese Kombinationen durch die gewählten Längenskalen. Ausgehend von der sogenannten Mesoskala in Kapitel 3.1.1 verwenden wir zudem die kleinere Submesoskala in Kapitel 3.1.2 und die intermediäre Zwischenvariable in Kapitel 3.1.3.

3.1.1 Mesoskala

Als Erstes betrachten wir mit einer klassischen Kombination von charakteristischen Größen die quasi-geostrophischen Gleichungen. Diese wurden von Charney in [Cha48] entwickelt und beschreiben mesoskalige Bewegungen der Atmosphäre und der Ozeane in den mittleren Breiten. Dabei erfolgt die mathematische Herleitung dieses Gleichungssystems über einen asymptotischen Grenzwert der entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen und ist beispielsweise in [Maj03] zu finden. Die dortigen Ausführungen geben wir im Folgenden aus Gründen der Vollständigkeit wieder.

Im Allgemeinen sind die charakteristischen Größen für mesoskalige Bewegungen der Atmosphäre durch die Windgeschwindigkeit $U = 10 \text{ m s}^{-1}$, der horizontalen Längenskala $L = 1000 \text{ km}$ sowie der mittleren Höhe $H_0 = 10 \text{ km}$ und für mesoskalige Bewegungen der Ozeane durch die Strömungsgeschwindigkeit $U = 1 \text{ m s}^{-1}$, der horizontalen Längenskala $L = 100 \text{ km}$ sowie der mittleren Höhe $H_0 = 100 \text{ m}$ gegeben, wobei in beiden Fällen die verwendete Längenskala als jeweilige Mesoskala bezeichnet wird.

Dann gilt mit der Rotationsfrequenz $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, die einem mittleren Breitengrad entspricht,

$$\text{Ro} = \frac{U}{Lf} = 0.1, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH_0}} \approx 0.03,$$

sodass die Rossby- beziehungsweise Froude-Zahl für mesoskalige Bewegungen sehr klein ist. Hieraus ergeben sich für die Herleitung der quasi-geostrophischen Gleichungen mehrere mathematische und geophysikalische Voraussetzungen.

Damit die beiden dimensionslosen Parameter hinreichend klein sind, wird dies für die Rossby-Zahl mit

$$\text{Ro} = \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1$$

vorausgesetzt und für die Froude-Zahl aus der Annahme des geostrophischen Gleichgewichts mit hinreichend starken Rotationseffekten hergeleitet.

Da der Höhengradient aufgrund des angenommenen Gleichgewichts durch die Rotationseffekte ausgeglichen wird, gilt für die entsprechenden Vorfaktoren

$$\frac{\Theta}{\text{Fr}^2} = \frac{1}{\text{Ro}}$$

und daher

$$N_0 = H_0 \cdot \frac{U^2}{gH_0} \cdot \frac{Lf}{U} = \frac{fUL}{g}.$$

Außerdem wird um die Stärke der Rotationseffekte zu bestimmen unter Verwendung des Rossby-Radius

$$L_R = \frac{\sqrt{gH_0}}{f},$$

definiert als Verhältnis zwischen Schwerewelle und Rotationsfrequenz,

$$\left(\frac{L}{L_R} \right)^2 = F = \mathcal{O}(1)$$

gesetzt. Dies bedeutet, dass die Längenskala L mit dem Rossby-Radius L_R vergleichbar ist und infolgedessen Rotationseffekte auftreten.

Schließlich gilt

$$\left(\frac{L}{L_R} \right)^2 = \frac{L^2 f^2}{gH_0} = \left(\frac{Lf}{U} \right)^2 \cdot \frac{U^2}{gH_0} = \frac{\text{Fr}^2}{\text{Ro}^2},$$

und mit dem Parameter ε

$$\text{Fr} = F^{1/2} \text{Ro} = F^{1/2} \varepsilon, \quad \Theta = \frac{\text{Fr}^2}{\text{Ro}} = F \varepsilon.$$

Darüber hinaus muss die charakteristische Größe der Bodenhöhe h_B mit der charakteristischen Größe N_0 übereinstimmen. Somit wird

$$\tilde{h}_B = \frac{h_B}{N_0}$$

gesetzt.

Zusammenfassend folgt mit den obigen Größenordnungen für die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen (2.2.8) bis (2.2.10)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}^\perp + \frac{1}{\varepsilon} \nabla h = 0, \quad (3.1.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) h - \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{h}_B + \frac{1}{\varepsilon F} \left(1 + \varepsilon F h - \varepsilon F \tilde{h}_B\right) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\frac{1 + \varepsilon \omega}{1 + \varepsilon F h - \varepsilon F \tilde{h}_B}\right) = 0. \quad (3.1.3)$$

Für die weitere Herleitung werden anschließend die asymptotischen Entwicklungen nach Potenzen in ε der physikalischen Funktionen \mathbf{v} , h und ω

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$h(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = h_0(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\omega(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \omega_0(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

wobei $\omega_0 = \operatorname{curl} \mathbf{v}_0$ gilt, in die rotierenden Flachwassergleichungen der Mesoskala (3.1.1) bis (3.1.3) eingesetzt. Folglich liefert ein Koeffizientenvergleich nach Potenzen in ε für die asymptotischen Funktionen führender Ordnung

$$\mathbf{v}_0^\perp + \nabla h_0 = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \quad (3.1.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\right) (\omega_0 - F h_0 + F \tilde{h}_B) = 0. \quad (3.1.6)$$

Da die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit in führender Ordnung \mathbf{v}_0 bereits durch Gleichung (3.1.4) gegeben ist, wird zur Schließung dieses Gleichungssystems statt der Rotation die Divergenz auf ebendiese Gleichung angewendet. Es folgt

$$\omega_0 = \Delta h_0, \quad (3.1.7)$$

sodass insgesamt mit den Gleichungen (3.1.4), (3.1.6) und (3.1.7) die sogenannten quasi-geostrophischen Gleichungen vorliegen.

3.1.2 Submesoskala

Als Nächstes bestimmen wir für submesoskalige Bewegungen der Atmosphäre und der Ozeane in den mittleren Breiten, die nach [TTM08] Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ aufweisen, aus den rotierenden Flachwassergleichungen der Mesoskala ein entsprechendes Gleichungssystem der Submesoskala und betrachten den daraus folgenden asymptotischen Grenzwert. Dabei beschreibt diese Skala im Gegensatz zu der Mesoskala L_M aus Kapitel 3.1.1 eine kleinere Skala

und ist mit einem hinreichend kleinen Parameter ε durch $L = \varepsilon L_M$ gegeben.

Da ferner das Gleichungssystem aus [TTM08] aufgrund unterschiedlicher physikalischer Variablen und Raumdimensionen mit unserer zweidimensionalen Darstellung nicht vereinbar ist, kommt es hier nicht zum Einsatz.

Stattdessen setzen wir für das Verhältnis beider Skalen $\varepsilon = 0.1$ und nehmen an, dass dieser Parameter mit dem aus Kapitel 3.1.1 übereinstimmt. Dann sind die charakteristischen Größen für submesoskalige Bewegungen der Atmosphäre durch die Windgeschwindigkeit $U = 10 \text{ m s}^{-1}$, der horizontalen Längenskala $L = 100 \text{ km}$ sowie der mittleren Höhe $H_0 = 10 \text{ km}$ und für submesoskalige Bewegungen der Ozeane durch die Strömungsgeschwindigkeit $U = 1 \text{ m s}^{-1}$, der horizontalen Längenskala $L = 10 \text{ km}$ sowie der mittleren Höhe $H_0 = 100 \text{ m}$ gegeben.

Dann gilt mit der bekannten Rotationsfrequenz $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

$$\text{Ro} = \frac{U}{Lf} = 1, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH_0}} \approx 0.03,$$

woraus sich für die weitere Herleitung mehrere mathematische und geophysikalische Voraussetzungen ergeben.

Um die genannten dimensionslosen Parameter zu erhalten, setzen wir für die Rossby-Zahl

$$\text{Ro} = 1$$

und nehmen für die Froude-Zahl einen dominierenden Höhengradienten an. Dies bedeutet mit dem Parameter ε und der Konstanten $F = \mathcal{O}(1)$ aus Kapitel 3.1.1

$$\text{Fr} = F^{1/2}\varepsilon, \quad \Theta = F\varepsilon.$$

Darüber hinaus muss die charakteristische Größe der Bodenhöhe h_B mit der charakteristischen Größe N_0 übereinstimmen. Somit wird

$$\tilde{h}_B = \frac{h_B}{N_0}$$

gesetzt.

Zusammenfassend erhalten wir mit den obigen Größenordnungen für die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen (2.2.8) bis (2.2.10)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp + \frac{1}{\varepsilon} \nabla h = 0, \quad (3.1.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) h - \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{h}_B + \frac{1}{\varepsilon F} \left(1 + \varepsilon F h - \varepsilon F \tilde{h}_B \right) \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.1.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \left(\frac{1 + \omega}{1 + \varepsilon F h - \varepsilon F \tilde{h}_B} \right) = 0. \quad (3.1.10)$$

Für die weitere Herleitung setzen wir die asymptotischen Entwicklungen nach Potenzen in ε

der physikalischen Funktionen \mathbf{v} , h und ω

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$h(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = h_0(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\omega(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \omega_0(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

wobei $\omega_0 = \text{curl } \mathbf{v}_0$ gilt, in die rotierenden Flachwassergleichungen der Submesoskala (3.1.8) bis (3.1.10) ein. Folglich liefert ein Koeffizientenvergleich nach Potenzen in ε für die asymptotischen Funktionen führender Ordnung

$$\nabla h_0 = 0, \tag{3.1.11}$$

$$\text{div } \mathbf{v}_0 = 0, \tag{3.1.12}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \omega_0 = 0. \tag{3.1.13}$$

Dabei bezeichnen wir dieses Gleichungssystem als Gleichungen führender Ordnung der Submesoskala.

3.1.3 Zwischenvariable

Abschließend leiten wir mittels der Zwischenvariablen ein Gleichungssystem her, das in Abhängigkeit eines zusätzlichen Parameters α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ im Fall $\alpha = 0$ die rotierenden Flachwassergleichungen der Mesoskala und im Fall $\alpha = 1$ die rotierenden Flachwassergleichungen der Submesoskala wiedergibt.

Dazu stellen wir zuerst die direkte Überführung zwischen den Gleichungen der Mesoskala (3.1.1) bis (3.1.3) und den Gleichungen der Submesoskala (3.1.8) bis (3.1.10), die Herleitung erfolgt in der nachstehenden Bemerkung 3.1.1, vor. Dabei bezeichnen wir im Weiteren aus Gründen der Unterscheidbarkeit alle Größen, Koordinaten, Ableitungsoperatoren und physikalischen Funktionen bezüglich der Mesoskala aus Kapitel 3.1.1 mit der Tiefstellung M , bezüglich der Submesoskala aus Kapitel 3.1.2 mit der Tiefstellung S und bezüglich der Zwischenvariablen mit der Tiefstellung α .

Die gesuchte Überführung ist durch die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x}_S = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{x}_M, \quad t_S = \frac{1}{\varepsilon} t_M$$

mit den Ableitungsoperatoren

$$\nabla_S = \varepsilon \nabla_M, \quad \frac{\partial}{\partial t_S} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_M}$$

und den transformierten physikalischen Funktionen

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_S(\mathbf{x}_S, t_S) &= \mathbf{v}_M(\mathbf{x}_M, t_M), \\ h_S(\mathbf{x}_S, t_S) &= h_M(\mathbf{x}_M, t_M), \\ \tilde{h}_{B,S}(\mathbf{x}_S, t_S) &= \tilde{h}_{B,M}(\mathbf{x}_M, t_M)\end{aligned}$$

mit der Vortizität

$$\omega_S = \operatorname{curl}_S \mathbf{v}_S = \varepsilon \operatorname{curl}_M \mathbf{v}_M = \varepsilon \omega_M$$

gegeben. Demzufolge erhalten wir die Gleichungen der Submeso- beziehungsweise Mesoskala, wenn wir diese Überführung in die Gleichungen der Meso- beziehungsweise Submesoskala einsetzen.

Bemerkung 3.1.1

Um die einzelnen ε -Skalierungen der obigen Überführung zwischen den Gleichungen der Meso- und Submesoskala zu bestimmen, setzen wir den allgemeinen Ansatz

$$\begin{aligned}x_S &= \varepsilon^{-\delta_1} x_M, & y_S &= \varepsilon^{-\delta_2} y_M, & t_S &= \varepsilon^{-\delta_3} t_M, \\ v_{1,S} &= \varepsilon^{-\delta_4} v_{1,M}, & v_{2,S} &= \varepsilon^{-\delta_5} v_{2,M}, & h_S &= \varepsilon^{-\delta_6} h_M, & \tilde{h}_{B,S} &= \varepsilon^{-\delta_7} \tilde{h}_{B,M},\end{aligned}$$

mit $\delta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 7$, in die Gleichungen der Mesoskala (3.1.1) bis (3.1.3) ein.

Daraufhin können wir durch einen Vergleich mit den Gleichungen der Submesoskala (3.1.8) bis (3.1.10) die benötigten Exponenten der ε -Potenzen ermitteln. Es folgt als einzige Möglichkeit

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 1, \quad \delta_4 = 0, \quad \delta_5 = 0, \quad \delta_6 = 0, \quad \delta_7 = 0$$

in Übereinstimmung mit der obigen Transformation.

Für die drei Exponenten δ_j , $j = 1, 2, 3$, der einzelnen Koordinaten erhalten wir diese Möglichkeit bereits aus den beiden Längenskalen L_M und L_S der Kapitel 3.1.1 und 3.1.2 mit der Transformation $L_S = \varepsilon L_M$, $U_S = U_M$ und

$$x_S = \frac{1}{L_S} x = \frac{1}{\varepsilon L_M} x = \frac{1}{\varepsilon} x_M, \quad t_S = \frac{U_S}{L_S} t = \frac{U_M}{\varepsilon L_M} t = \frac{1}{\varepsilon} t_M$$

unter Verwendung zweier Entdimensionalisierungen bezüglich der dimensionsbehafteten Koordinaten (\mathbf{x}, t) (siehe Kapitel 2.2).

Weiterhin verallgemeinern wir diese Überführung mittels der Zwischenvariablen $(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha)$, die für $0 \leq \alpha \leq 1$ durch die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x}_\alpha = \varepsilon^{-\alpha} \mathbf{x}_M = \varepsilon^{1-\alpha} \mathbf{x}_S, \quad t_\alpha = \varepsilon^{-\alpha} t_M = \varepsilon^{1-\alpha} t_S,$$

mit den Ableitungsoperatoren

$$\nabla_\alpha = \varepsilon^\alpha \nabla_M = \varepsilon^{\alpha-1} \nabla_S, \quad \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = \varepsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial t_M} = \varepsilon^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial t_S},$$

wobei $\mathbf{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)^T$ und $\nabla_\alpha = (\partial/\partial x_\alpha, \partial/\partial y_\alpha)^T$ gilt, gegeben ist, und den transformierten physikalischen Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) &= \mathbf{v}_M(\mathbf{x}_M, t_M) = \mathbf{v}_S(\mathbf{x}_S, t_S), \\ h_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) &= h_M(\mathbf{x}_M, t_M) = h_S(\mathbf{x}_S, t_S), \\ \tilde{h}_{B,\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) &= \tilde{h}_{B,M}(\mathbf{x}_M, t_M) = \tilde{h}_{B,S}(\mathbf{x}_S, t_S) \end{aligned}$$

mit der Vortizität

$$\omega_\alpha = \text{curl}_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \varepsilon^\alpha \text{curl}_M \mathbf{v}_M = \varepsilon^{\alpha-1} \text{curl}_S \mathbf{v}_S.$$

Diesen allgemeinen Ansatz setzen wir sowohl in die Gleichungen der Mesoskala (3.1.1) bis (3.1.3) als auch in die Gleichungen der Submesoskala (3.1.8) bis (3.1.10) ein. Dann erhalten wir in beiden Fällen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) \mathbf{v}_\alpha + \varepsilon^{\alpha-1} \mathbf{v}_\alpha^\perp + \varepsilon^{-1} \nabla_\alpha h_\alpha = 0, \quad (3.1.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) h_\alpha - \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha} + \frac{1}{\varepsilon F} \left(1 + \varepsilon F h_\alpha - \varepsilon F \tilde{h}_{B,\alpha} \right) \text{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad (3.1.15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) \left(\frac{1 + \varepsilon^{1-\alpha} \omega_\alpha}{1 + \varepsilon F h_\alpha - \varepsilon F \tilde{h}_{B,\alpha}} \right) = 0, \quad (3.1.16)$$

das heißt, für $\alpha = 0$ entspricht dieses Gleichungssystem den Gleichungen der Mesoskala (3.1.1) bis (3.1.3) und für $\alpha = 1$ den Gleichungen der Submesoskala (3.1.8) bis (3.1.10).

Im Fall $0 < \alpha < 1$ setzen wir die asymptotischen Entwicklungen nach Potenzen in ε der physikalischen Funktionen \mathbf{v}_α , h_α und ω_α

$$\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha; \varepsilon) = \mathbf{v}_{\alpha,0}(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$h_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha; \varepsilon) = h_{\alpha,0}(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\omega_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha; \varepsilon) = \omega_{\alpha,0}(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

wobei $\omega_{\alpha,0} = \text{curl}_\alpha \mathbf{v}_{\alpha,0}$ gilt, in die rotierenden Flachwassergleichungen der Zwischenvariablen (3.1.14) bis (3.1.16) ein. Folglich liefert ein Koeffizientenvergleich nach Potenzen in ε für die asymptotischen Funktionen führender Ordnung

$$\nabla_\alpha h_{\alpha,0} = 0, \quad (3.1.17)$$

$$\text{div}_\alpha \mathbf{v}_{\alpha,0} = 0, \quad (3.1.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_{\alpha,0} \cdot \nabla_\alpha \right) \omega_{\alpha,0} = 0. \quad (3.1.19)$$

Dabei bezeichnen wir dieses Gleichungssystem als Gleichungen führender Ordnung der Zwischenvariablen. Zudem ist es unter geeigneten Voraussetzungen möglich, die Konvergenz $\mathbf{v}_\alpha \rightarrow \mathbf{v}_{\alpha,0}$, $h_\alpha \rightarrow h_{\alpha,0}$ und $\omega_\alpha \rightarrow \omega_{\alpha,0}$ im singulären Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ mathematisch zu beweisen. Dies zeigen wir im folgenden Unterkapitel.

3.2 Gleichungen führender Ordnung als singulärer Grenzwert

Mit der Beweisstrategie nach Klainerman und Majda [KM81], [KM82] wird in [Maj03] unter geeigneten Voraussetzungen die Konvergenz der Gleichungen der Mesoskala gegen die quasi-geostrophischen Gleichungen im singulären Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ bewiesen.

In diesem Unterkapitel zeigen wir dies für die Gleichungen der Zwischenvariablen mit $\mathbf{v}_\alpha \rightarrow \mathbf{v}_{\alpha,0}$, $h_\alpha \rightarrow h_{\alpha,0}$ und $\omega_\alpha \rightarrow \omega_{\alpha,0}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Dazu folgen wir den Ausführungen in [Maj03] und passen die dortigen Vereinfachungen, Definitionen, Lemmata und Sätze auf unsere Situation an. Insbesondere bedeutet dies, dass wir im Folgenden für $\alpha = 0$ die genannten Ausführungen in [Maj03] direkt wiedergeben, wobei bereits in [ME98] die Konvergenz im Fall $\alpha = 0$ beziehungsweise $\alpha = 1$ kurz diskutiert wurde.

Wir beginnen mit einer Anpassung der rotierenden Flachwassergleichungen der Zwischenvariablen (3.1.14) bis (3.1.16). Zum einen wird, da $\varepsilon \ll 1$ gilt,

$$1 + \varepsilon F h_\alpha - \varepsilon F \tilde{h}_{B,\alpha} \approx 1$$

gesetzt und zum anderen die Bodenhöhe durch $\tilde{h}_{B,\alpha} \equiv F \tilde{h}_{B,\alpha}$ neu skaliert.

Dann vereinfachen sich die ersten beiden Gleichungen der Zwischenvariablen zu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) \mathbf{v}_\alpha + \varepsilon^{\alpha-1} \mathbf{v}_\alpha^\perp + \varepsilon^{-1} \nabla_\alpha h_\alpha = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) (F h_\alpha) - \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha} + \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad (3.2.2)$$

woraus mit einer geeigneten Kombination die angepasste Gleichung der Vortizität

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) \omega_\alpha + \omega_\alpha \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha - \varepsilon^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) (F h_\alpha - \tilde{h}_{B,\alpha}) = 0 \quad (3.2.3)$$

folgt.

Da wir weiterhin im singulären Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ für dieses Gleichungssystem in Abhängigkeit von $0 \leq \alpha \leq 1$ die jeweiligen Gleichungen führender Ordnung (3.1.4) bis (3.1.7), (3.1.11) bis (3.1.13), beziehungsweise (3.1.17) bis (3.1.19) erhalten, weisen wir hierfür die Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz der Lösungen im Fall $\varepsilon \rightarrow 0$ nach.

Anschließend betrachten wir zur weiteren Vorbereitung des Konvergenzbeweises die angepassten

rotierenden Flachwassergleichungen der Zwischenvariablen (3.2.1) bis (3.2.2) mit Quelltermen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) \mathbf{v}_\alpha + \varepsilon^{\alpha-1} \mathbf{v}_\alpha^\perp + \varepsilon^{-1} \nabla_\alpha h_\alpha = \mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha}, \quad (3.2.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \right) (Fh_\alpha) - \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha} + \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mathcal{F}_{h_\alpha}, \quad (3.2.5)$$

für $\mathbf{u}_\alpha = (\mathbf{v}_\alpha, h_\alpha)^T$ sowie $\mathcal{F}_{\mathbf{u}_\alpha} = (\mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha}, \mathcal{F}_{h_\alpha})^T$, und leiten mit der zu definierenden Energiedichte die differentiale Form der Energieerhaltung her.

Definition 3.2.1

Die Energiedichte \mathcal{E}_α bezüglich \mathbf{v}_α und h_α ist durch

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha + \frac{1}{2} F h_\alpha^2$$

gegeben.

Lemma 3.2.2 (Differenziale Form der Energieerhaltung)

Sei $\mathbf{u}_\alpha = (\mathbf{v}_\alpha, h_\alpha)^T$ eine Lösung der Gleichungen (3.2.4) und (3.2.5). Dann genügt die Energiedichte \mathcal{E}_α der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial t_\alpha} = \mathcal{E}_\alpha \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha - \operatorname{div}_\alpha (\mathcal{E}_\alpha \mathbf{v}_\alpha) - \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha (h_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + h_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha} + h_\alpha \mathcal{F}_{h_\alpha}.$$

Beweis:

Der Beweis des Lemmas 4.5 aus [Maj03] lässt sich direkt auf unsere Situation übertragen.

Die Behauptung folgt mit den Gleichungen (3.2.4) und (3.2.5), da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial t_\alpha} &= \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{v}_\alpha + h_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} (Fh_\alpha) \\ &= \mathbf{v}_\alpha \cdot \left(-\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \mathbf{v}_\alpha - \varepsilon^{\alpha-1} \mathbf{v}_\alpha^\perp - \varepsilon^{-1} \nabla_\alpha h_\alpha + \mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha} \right) \\ &\quad + h_\alpha \left(-\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha (Fh_\alpha) + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha} - \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \mathcal{F}_{h_\alpha} \right) \\ &= -\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \mathcal{E}_\alpha - \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha (h_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + h_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha} + h_\alpha \mathcal{F}_{h_\alpha} \\ &= \mathcal{E}_\alpha \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha - \operatorname{div}_\alpha (\mathcal{E}_\alpha \mathbf{v}_\alpha) - \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha (h_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + h_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha} + h_\alpha \mathcal{F}_{h_\alpha}. \end{aligned}$$

gilt. □

Ausgehend von den Gleichungen (3.2.4) bis (3.2.5) müssen im Fall eines Grenzwerts $\varepsilon \rightarrow 0$ die Terme mit ε -Vorfaktoren kontrolliert werden, da diese die Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ aufweisen. Wie der Beweis des Lemmas 3.2.2 zeigt, verschwindet der Term mit dem Vorfaktor $\varepsilon^{\alpha-1}$ durch ein orthogonales Produkt und es verbleibt $\varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha (h_\alpha \mathbf{v}_\alpha)$. Letzteres wird nach einer geeigneten Integration ebenfalls verschwinden.

Hierfür bestimmen wir als Nächstes die integrale Form der Energieerhaltung. Dazu definieren wir die Gesamtenergie über den zweidimensionalen Torus \mathbb{T}_α^2 bezüglich der Zwischenvariablen \mathbf{x}_α ,

womit wir im Raum periodische Randbedingungen voraussetzen. Dies ist eine übliche Annahme, um im Folgenden Randterme zu vermeiden und die weiteren Ausführungen zu vereinfachen.

Definition 3.2.3

Die Gesamtenergie $E_\alpha(t_\alpha)$ über den zweidimensionalen Torus \mathbb{T}_α^2 bezüglich \mathbf{v}_α und h_α ist durch

$$E_\alpha(t_\alpha) \equiv E_\alpha(\mathbf{u}(t_\alpha)) = \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha + \frac{1}{2} F h_\alpha^2 \right) d\mathbf{x}_\alpha$$

gegeben.

Lemma 3.2.4 (Integrale Form der Energieerhaltung)

Sei $\mathbf{u}_\alpha = (\mathbf{v}_\alpha, h_\alpha)^T$ eine Lösung der Gleichungen (3.2.4) und (3.2.5). Dann genügt die Gesamtenergie $E_\alpha(t_\alpha)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dE_\alpha}{dt_\alpha} = \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} \mathcal{E}_\alpha \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha d\mathbf{x}_\alpha + \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} h_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha} d\mathbf{x}_\alpha + \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha} d\mathbf{x}_\alpha + \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} h_\alpha \mathcal{F}_{h_\alpha} d\mathbf{x}_\alpha.$$

Beweis:

Der Beweis des Lemmas 4.6 aus [Maj03] lässt sich direkt auf unsere Situation übertragen.

Die Behauptung folgt mittels Integration der differentialen Form der Energieerhaltung aus Lemma 3.2.2. Nach dem Gaußschen Integralsatz verschwinden dabei die Integrale von $\operatorname{div}_\alpha (\mathcal{E}_\alpha \mathbf{v}_\alpha)$ und $\varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha (h_\alpha \mathbf{v}_\alpha)$ aufgrund der periodischen Randbedingungen. \square

Als direkte Folgerung des vorangegangenen Lemmas erhalten wir mittels einer Differentialgleichung eine Abschätzung für die Gesamtenergie, wodurch ein wesentliches Hilfsmittel für den Konvergenzbeweis gegeben ist.

Satz 3.2.5 (Energieabschätzung)

Sei $\mathbf{u}_\alpha = (\mathbf{v}_\alpha, h_\alpha)^T$ eine Lösung der Gleichungen (3.2.4) und (3.2.5). Dann genügt die Gesamtenergie $E_\alpha(t_\alpha)$ der Differentialungleichung

$$\frac{dE_\alpha}{dt_\alpha} \leq \|\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha\|_\infty E_\alpha(t_\alpha) + C_\alpha \|\mathcal{F}_{\mathbf{u}_\alpha}\|_2 (E_\alpha(t_\alpha))^{1/2} + C_\alpha \|\nabla_\alpha \tilde{h}_{B,\alpha}\|_\infty E_\alpha(t_\alpha),$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die L^2 -Norm, $\|\cdot\|_\infty$ die L^∞ -Norm und C_α eine positive Konstante unabhängig von ε bezeichnet.

Beweis:

Der Beweis der Proposition 4.7 aus [Maj03] lässt sich direkt auf unsere Situation übertragen.

Die Behauptung folgt mittels der Hölder- und Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie der Normäquivalenz zwischen $\|\mathbf{u}_\alpha\|_2$ und $(E_\alpha(\mathbf{u}_\alpha))^{1/2}$. Dabei werden diese Ungleichungen auf die rechte Seite der integralen Form der Energieerhaltung aus Lemma 3.2.4 in Abhängigkeit des jeweiligen Summanden angewendet. \square

Darüber hinaus sind für den Konvergenzbeweis neben der Energieabschätzung aus Satz 3.2.5 für die Lösung \mathbf{u}_α , auch Abschätzungen für die höheren Ableitungen von \mathbf{u}_α erforderlich. Demzufolge geben wir im Folgenden die Definition des Sobolev-Raumes sowie den Sobolevschen Einbettungssatz an. Für grundlegende Eigenschaften von Sobolev-Räumen und ihren Anwendungen im Bereich partieller Differentialgleichungen verweisen wir beispielsweise auf das Lehrbuch [Eva10] von Evans.

Definition 3.2.6

Der Sobolev-Raum $H^s(\mathbb{T}^d)$ der periodischen Funktionen über den d -dimensionalen Torus ist definiert als Menge aller Funktionen $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{T}^d)$, sodass die Ableitungen $D^\beta \mathbf{u}$ für alle $|\beta| \leq s$ in $L^2(\mathbb{T}^d)$ sind.

Weiterhin ist die Sobolev-Norm der Ordnung s definiert als

$$\|\mathbf{u}\|_{H^s(\mathbb{T}^d)}^2 = \sum_{|\beta| \leq s} \int_{\mathbb{T}^d} D^\beta \mathbf{u} \cdot D^\beta \mathbf{u} \, d\mathbf{x},$$

wobei

$$D^\beta := \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial^{\beta_d}}{\partial x_d^{\beta_d}}$$

die abkürzende Schreibweise für Ableitungen höherer Ordnung bezüglich eines Multiindex $\beta := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ darstellt.

Satz 3.2.7 (Sobolevscher Einbettungssatz)

Falls $s > \frac{d}{2} + k$, so gilt für jede Funktion $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{T}^d)$ auch $\mathbf{u} \in C^k(\mathbb{T}^d)$. Außerdem folgt

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} \sum_{|\beta| \leq k} |D^\beta \mathbf{u}(\mathbf{x})| \leq C_s \|\mathbf{u}\|_{H^s(\mathbb{T}^d)},$$

wobei C_s eine positive Konstante in Abhängigkeit von s und \mathbb{T}^d darstellt.

Mithilfe der beiden folgenden Ungleichungen nach Klainerman und Majda [KM81], [KM82] lassen sich die späteren Abschätzungen herleiten.

Satz 3.2.8 (Ungleichungen)

Seien f und g zwei Funktionen aus $H^s(\mathbb{T}^d)$ und sei ferner $s > \frac{d}{2}$. Dann gelten für $|\beta| \leq s$ die beiden folgenden Abschätzungen

$$\left\| D^\beta (fg) \right\|_2 \leq C_s \left(\|f\|_\infty \|g\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} + \|g\|_\infty \|f\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} \right), \quad (3.2.6)$$

$$\left\| D^\beta (fg) - f D^\beta g \right\|_2 < C_s \left(\|\nabla f\|_\infty \|g\|_{H^{s-1}(\mathbb{T}^d)} + \|g\|_\infty \|f\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} \right). \quad (3.2.7)$$

Abschließend wird für den Konvergenzbeweis noch ein Kompaktheitskriterium für eine Folge $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ von Funktionen in $C([0, T], H^s(\mathbb{T}^d))$ benötigt. Dieses Kriterium ist durch den Satz von Lions-Aubin, eine Verallgemeinerung des Satzes von Arzela-Ascoli für Funktionenfolgen in $C([0, T], \mathbb{R}^d)$, gegeben und wird beispielsweise in [Tem77] bewiesen.

Satz 3.2.9 (Lions-Aubin)

Sei $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ eine Folge von Funktionen in $C([0, T], H^s(\mathbb{T}^d))$ mit $s > 0$, sodass gilt

(i) $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ ist gleichmäßig beschränkt in $C([0, T], H^s(\mathbb{T}^d))$, das heißt

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} \leq M_0.$$

(ii) Die Folge der Zeitableitungen $\{\mathbf{u}_t^\varepsilon\}$ ist gleichmäßig beschränkt in $C([0, T], H^q(\mathbb{T}^d))$, für $0 \leq q < s$, das heißt

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_t^\varepsilon\|_{H^q(\mathbb{T}^d)} \leq M_1.$$

Dann existiert eine Teilfolge von $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$, die in $C([0, T], H^r(\mathbb{T}^d))$, für $0 \leq r < s$, konvergiert.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Konvergenz der angepassten rotierenden Flachwassergleichungen (3.2.1) bis (3.2.3) in Abhängigkeit von $0 \leq \alpha \leq 1$ gegen die jeweiligen Gleichungen führender Ordnung im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ beweisen.

Dazu setzen wir zur weiteren Vereinfachung der folgenden Ausführungen $\tilde{h}_{B, \alpha} = 0$ und passen das aus zwei Teilen bestehende Theorem 4.12 aus [Maj03] auf unsere Situation an.

Der erste Teil ist in Satz 3.2.10 mit vereinfachten Anfangsbedingungen, eine Erweiterung erfolgt in der Bemerkung 3.2.11, zu finden und zeigt, dass unter geeigneten Voraussetzungen der Satz von Lions-Aubin angewendet werden kann. Im anschließenden zweiten Teil wird dann mit Satz 3.2.12 der eigentliche Konvergenzbeweis ausgeführt.

Satz 3.2.10

Es seien für $\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon = (\mathbf{v}_\alpha^\varepsilon, h_\alpha^\varepsilon)^T$ die Gleichungen (3.2.1) bis (3.2.3) mit $\tilde{h}_{B, \alpha} = 0$, das heißt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon + \varepsilon^{\alpha-1} \mathbf{v}_\alpha^{\varepsilon \perp} + \varepsilon^{-1} \nabla_\alpha h_\alpha^\varepsilon = 0, \quad (3.2.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) (Fh_\alpha^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) \omega_\alpha^\varepsilon + \omega_\alpha^\varepsilon \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) (Fh_\alpha^\varepsilon) = 0, \quad (3.2.10)$$

und den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{v}_\alpha^\varepsilon(\mathbf{x}_\alpha, 0) = \mathbf{v}_{\alpha, 0}^\varepsilon(\mathbf{x}_\alpha), \quad h_\alpha^\varepsilon(\mathbf{x}_\alpha, 0) = h_{\alpha, 0}^\varepsilon(\mathbf{x}_\alpha),$$

für $\mathbf{v}_{\alpha, 0}^\varepsilon, h_{\alpha, 0}^\varepsilon$ in $H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)$, gegeben.

Dann folgt für jedes feste $0 \leq \alpha \leq 1$:

(i) Falls $s \geq 3$, so existieren die Lösungen $\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon$ der Gleichungen (3.2.8) bis (3.2.10) auf einem gemeinsamen Zeitintervall $[0, T_\alpha]$, $T_\alpha > 0$, unabhängig von ε und genügen der

gleichmäßigen Abschätzung

$$\max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \|\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha)\|_{H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)} \leq C_\alpha, \quad (3.2.11)$$

wobei C_α eine positive Konstante unabhängig von ε bezeichnet.

(ii) Falls $s \geq 3$ und

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(0) \right\|_2 \leq C_\alpha \quad (3.2.12)$$

gilt, so genügt die Zeitableitung $\partial \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon / \partial t_\alpha$ der Lösung $\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon$ der gleichmäßigen Abschätzung

$$\max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \left\| \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) \right\|_2 \leq C_\alpha, \quad (3.2.13)$$

wobei C_α eine positive Konstante unabhängig von ε bezeichnet.

Beweis:

Der folgende Beweis basiert auf den Beweisschritten 1 und 2 des Theorems 4.12 aus [Maj03]. Um den ersten Teil unserer Behauptung zu zeigen, wenden wir den Ableitungsoperator D_α^β bezüglich \mathbf{x}_α und dem Multiindex β auf die Gleichungen (3.2.8) sowie (3.2.9) an und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) \left(D_\alpha^\beta \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right) + \varepsilon^{\alpha-1} \left(D_\alpha^\beta \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right)^\perp + \varepsilon^{-1} \nabla_\alpha \left(D_\alpha^\beta h_\alpha^\varepsilon \right) &= \mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha}^\beta, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) \left(D_\alpha^\beta (F h_\alpha^\varepsilon) \right) + \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha \left(D_\alpha^\beta \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right) &= \mathcal{F}_{h_\alpha}^\beta, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{v}_\alpha}^\beta &= \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \left(D_\alpha^\beta \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right) - D_\alpha^\beta \left(\mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right), \\ \mathcal{F}_{h_\alpha}^\beta &= \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \left(F D_\alpha^\beta h_\alpha^\varepsilon \right) - D_\alpha^\beta \left(\mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha (F h_\alpha^\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

gilt. Hieraus folgt für $E_\alpha^\beta := E_\alpha(D_\alpha^\beta \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon)$ mit Satz 3.2.5

$$\frac{d}{dt_\alpha} E_\alpha^\beta(t_\alpha) \leq \|\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon\|_\infty E_\alpha^\beta(t_\alpha) + C_\alpha \left\| \mathcal{F}_{\mathbf{u}_\alpha}^\beta \right\|_2 \left(E_\alpha^\beta(t_\alpha) \right)^{1/2}$$

und demzufolge auch

$$\frac{d}{dt_\alpha} \left(E_\alpha^\beta(t_\alpha) \right)^{1/2} \leq C_\alpha \|\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon\|_\infty \left(E_\alpha^\beta(t_\alpha) \right)^{1/2} + C_\alpha \left\| \mathcal{F}_{\mathbf{u}_\alpha}^\beta \right\|_2.$$

Dabei werden hier und im Folgenden generische positive Konstanten unabhängig von ε jeweils durch C_α bezeichnet.

Weiterhin erhalten wir für die L^2 -Norm der Quellterme mithilfe der Ungleichung (3.2.7) aus Satz 3.2.8

$$\left\| \mathcal{F}_{\mathbf{u}_\alpha}^\beta \right\|_2 \leq C_\alpha \|\nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_\infty \|\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)}.$$

Dies wird nach einer Summation über $|\beta| \leq s$ sowie unter Verwendung der Normäquivalenz zwischen $\|\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)}$ und $(\sum_{|\beta| \leq s} E_\alpha^\beta(t_\alpha))^{1/2}$ zu

$$\sum_{|\beta| \leq s} \left\| \mathcal{F} \mathbf{u}_\alpha^\beta \right\|_2 \leq C_\alpha \|\nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_\infty \sum_{|\beta| \leq s} \left(E_\alpha^\beta(t_\alpha) \right)^{1/2}.$$

Daraufhin liefert eine Kombination mit der obigen Differentialungleichung

$$\frac{d}{dt_\alpha} \sum_{|\beta| \leq s} \left(E_\alpha^\beta(t_\alpha) \right)^{1/2} \leq C_\alpha \|\nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_\infty \sum_{|\beta| \leq s} \left(E_\alpha^\beta(t_\alpha) \right)^{1/2},$$

woraus schließlich die Integralungleichung

$$\sum_{|\beta| \leq s} \left(E_\alpha^\beta(t_\alpha) \right)^{1/2} \leq \sum_{|\beta| \leq s} \left(E_\alpha^\beta(0) \right)^{1/2} + \int_0^{t_\alpha} C_\alpha \|\nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_\infty \sum_{|\beta| \leq s} \left(E_\alpha^\beta(t_\alpha) \right)^{1/2} dt_\alpha$$

resultiert.

Infolgedessen erhalten wir unter Verwendung der Normäquivalenz zwischen $\|\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)}$ und $(\sum_{|\beta| \leq s} E_\alpha^\beta(t_\alpha))^{1/2}$, der unabhängig von ε gleichmäßigen Beschränktheit der Startwerte und des Sobolevschen Einbettungssatzes bezüglich $\|\nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_\infty$

$$\|\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha)\|_{H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)} \leq C_\alpha + C_\alpha \int_0^{t_\alpha} \|\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha)\|_{H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)}^2 dt_\alpha.$$

Anschließend folgt mit der Bihari–LaSalle-Ungleichung, einer nichtlinearen Verallgemeinerung des Lemmas von Gronwall, die lokale Existenz einer Lösung sowie deren gleichmäßige Beschränktheit. Durch Fortsetzungsmethoden, vergleiche [Maj84], erweitert sich die Existenzaussage auf ein von ε unabhängiges Intervall $[0, T_\alpha]$, $T_\alpha > 0$, und es gilt die gleichmäßige Abschätzung

$$\max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \|\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha)\|_{H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)} \leq C_\alpha,$$

womit wir den ersten Teil der Behauptung gezeigt haben.

Um den zweiten Teil unserer Behauptung zu zeigen, wenden wir die Zeitableitung $\partial/\partial t_\alpha$ auf die Gleichungen (3.2.8) sowie (3.2.9) an und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right) + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right)^\perp + \varepsilon^{-1} \nabla_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} h_\alpha^\varepsilon \right) &= - \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right) \cdot \nabla_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} F h_\alpha^\varepsilon \right) + \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right) &= - \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right) \cdot \nabla_\alpha h_\alpha^\varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für $E_\alpha(\partial \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon / \partial t_\alpha)$ mit Satz 3.2.5

$$\frac{d}{dt_\alpha} E_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) \right) \leq \|\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon\|_\infty E_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) \right) + C_\alpha \|\nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_\infty E_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) \right).$$

Somit gilt, da im Intervall $[0, T_\alpha]$ nach Gleichung (3.2.11) die Terme $\|\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon\|_\infty$ und $\|\nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\|_\infty$

gleichmäßig beschränkt sind,

$$\frac{d}{dt_\alpha} E_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) \right) \leq C_\alpha E_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) \right).$$

Anschließend folgt mit dem Lemma von Gronwall unter Verwendung der Voraussetzung

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(0) \right\|_2 \leq C_\alpha$$

und der Normäquivalenz zwischen $(E_\alpha (\partial \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon / \partial t_\alpha))^{1/2}$ und $\|\partial \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon / \partial t_\alpha\|_2$

$$\max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \left\| \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) \right\|_2 \leq C_\alpha.$$

Insgesamt haben wir damit unsere Behauptung gezeigt. \square

Bemerkung 3.2.11

Um den Beweis des Satzes 3.2.10 möglichst übersichtlich zu gestalten, wurde als vereinfachende Annahme für jedes feste $0 \leq \alpha \leq 1$ die gleichmäßige Abschätzung (3.2.12) vorausgesetzt. Nach [Maj03] erfolgt im Fall der Mesoskala eine Abschwächung dieser Annahme unter Verwendung von asymptotisch-entwickelten Anfangsbedingungen der Form

$$\mathbf{v}_M^\varepsilon(\mathbf{x}_M, 0) = \mathbf{v}_{M,0}(\mathbf{x}_M) + \varepsilon \mathbf{v}_{M,1}(\mathbf{x}_M), \quad h_M^\varepsilon(\mathbf{x}_M, 0) = h_{M,0}(\mathbf{x}_M) + \varepsilon h_{M,1}(\mathbf{x}_M),$$

für $\mathbf{v}_{M,0}, \mathbf{v}_{M,1}, h_{M,0}, h_{M,1}$ in $H^s(\mathbb{T}_M^2)$, mit

$$\mathbf{v}_{M,0}^\perp + \nabla_M h_{M,0} = 0$$

bezüglich der Anfangsbedingungen in führender Ordnung, die damit das geostrophische Gleichgewicht erfüllen und nach [KM81], [KM82] als wohl-erstellte Anfangsbedingungen bezeichnet werden. Die initiale gleichmäßige Abschätzung (3.2.12) folgt dann direkt aus den Gleichungen (3.2.8) bis (3.2.10) zum Zeitpunkt $t_M = 0$.

Ein analoges Vorgehen ist auch für die beiden anderen Fälle möglich. Hierfür betrachten wir die asymptotisch-entwickelten Anfangsbedingungen der Form

$$\mathbf{v}_\alpha^\varepsilon(\mathbf{x}_\alpha, 0) = \mathbf{v}_{\alpha,0}(\mathbf{x}_\alpha) + \varepsilon \mathbf{v}_{\alpha,1}(\mathbf{x}_\alpha), \quad h_\alpha^\varepsilon(\mathbf{x}_\alpha, 0) = h_{\alpha,0}(\mathbf{x}_\alpha) + \varepsilon h_{\alpha,1}(\mathbf{x}_\alpha),$$

für jedes feste $0 < \alpha \leq 1$ und $\mathbf{v}_{\alpha,0}, \mathbf{v}_{\alpha,1}, h_{\alpha,0}, h_{\alpha,1}$ in $H^s(\mathbb{T}_\alpha^2)$, mit den wohl-erstellten Anfangsbedingungen

$$\nabla_\alpha h_{\alpha,0} = 0, \quad \mathbf{v}_{\alpha,0} = 0$$

im Fall der Zwischenvariablen, und mit den wohl-erstellten Anfangsbedingungen

$$\nabla_S h_{S,0} = 0, \quad \operatorname{div}_S \mathbf{v}_{S,0} = 0$$

im Fall der Submesoskala, vergleiche [ME98].

Satz 3.2.12

Es seien die Voraussetzungen aus Satz 3.2.10 gegeben. Dann existiert für jedes feste $0 \leq \alpha \leq 1$ eine Funktion $\mathbf{u}_\alpha^0(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) = (\mathbf{v}_\alpha^0(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha), h_\alpha^0(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha))^T$ in $C([0, T_\alpha], H^s(\mathbb{T}_\alpha^2))$ mit $s \geq 3$, sodass

$$\max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \left(\left\| \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) - \mathbf{u}_\alpha^0(t_\alpha) \right\|_\infty + \left\| \nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) - \nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^0(t_\alpha) \right\|_\infty \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

gilt und \mathbf{u}_α^0 im Fall der Submesoskala, das heißt $\alpha = 1$, den Gleichungen

$$\nabla_S h_S^0 = 0, \quad (3.2.14)$$

$$\operatorname{div}_S \mathbf{v}_S^0 = 0, \quad (3.2.15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_S^0 \cdot \nabla_S \right) \omega_S^0 = 0, \quad (3.2.16)$$

im Fall der Zwischenvariablen, das heißt $0 < \alpha < 1$, den Gleichungen

$$\nabla_\alpha h_\alpha^0 = 0, \quad (3.2.17)$$

$$\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^0 = 0, \quad (3.2.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^0 \cdot \nabla_\alpha \right) \omega_\alpha^0 = 0, \quad (3.2.19)$$

und im Fall der Mesoskala, das heißt $\alpha = 0$, nach [Maj03] den Gleichungen

$$\mathbf{v}_M^0 \cdot \perp + \nabla_M h_M^0 = 0, \quad (3.2.20)$$

$$\omega_M^0 = \Delta_M h_M^0, \quad (3.2.21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_M^0 \cdot \nabla_M \right) (\omega_M^0 - F h_M^0) = 0 \quad (3.2.22)$$

genügt.

Beweis:

Die Beweisschritte 3 und 4 des Theorems 4.12 aus [Maj03] lassen sich direkt auf unsere Situation übertragen.

Nach Satz 3.2.10 ist die Folge $\{\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\}$ gleichmäßig in $C([0, T_\alpha], H^s(\mathbb{T}_\alpha^2))$ und die Folge der Zeitableitungen $\{\partial \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon / \partial t\}$ gleichmäßig in $C([0, T_\alpha], H^0(\mathbb{T}_\alpha^2))$ beschränkt. Folglich existiert unter Verwendung des Satzes von Lions-Aubin eine konvergente Teilfolge, die in $C([0, T_\alpha], H^r(\mathbb{T}_\alpha^2))$, $0 \leq r < s$, gegen $\{\mathbf{u}_\alpha^0\}$ konvergiert.

Weiterhin folgt für $2 < r < s$ mit dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \left(\left\| \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) - \mathbf{u}_\alpha^0(t_\alpha) \right\|_\infty + \left\| \nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) - \nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha^0(t_\alpha) \right\|_\infty \right) &\leq \\ \max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \left\| \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon(t_\alpha) - \mathbf{u}_\alpha^0(t_\alpha) \right\|_{H^r(\mathbb{T}_\alpha^2)} &\rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

womit wir die Konvergenz für eine Teilfolge gezeigt haben. Die Eindeutigkeit einer glatten Lösung folgt mithilfe von bekannten Energiemethoden. Infolgedessen konvergiert jede Teilfolge

gegen denselben Grenzwert und die ursprüngliche Folge $\{\mathbf{u}_\alpha^\varepsilon\}$ muss gegen \mathbf{u}_α^0 konvergieren.

Im zweiten Teil des Beweises zeigen wir, dass die Funktionen $\mathbf{v}_\alpha^0, h_\alpha^0$ und ω_α^0 den obigen Gleichungen genügen. Wie im vierten Beweisschritt des Theorems 4.12 aus [Maj03] dargelegt wird, folgen für $\alpha = 0$ die quasi-geostrophischen Gleichungen. Diese Ausführungen passen wir im Folgenden auf den Fall $0 < \alpha \leq 1$ an.

Es gilt unter Verwendung der Gleichung (3.2.8) beziehungsweise (3.2.9) mit den gleichmäßigen Abschätzungen (3.2.11) und (3.2.13)

$$\max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \|\nabla_\alpha h_\alpha^\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon \max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right\|_2 + \varepsilon^\alpha \max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \|\mathbf{v}_\alpha^{\varepsilon \perp}\|_2 \leq C_\alpha \varepsilon + C_\alpha \varepsilon^\alpha$$

beziehungsweise

$$\max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \|\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon\|_2 = \varepsilon \max_{0 \leq t_\alpha \leq T_\alpha} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) h_\alpha^\varepsilon \right\|_2 \leq C_\alpha \varepsilon,$$

sodass im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\nabla_\alpha h_\alpha^0 = 0$$

beziehungsweise

$$\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^0 = 0$$

folgt.

Da wir über den Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial \mathbf{u}_\alpha^\varepsilon / \partial t$ keine Aussage treffen können, müssen wir, um die fehlende Gleichung der Vortizität herzuleiten, mit Distributionen arbeiten. Dazu multiplizieren wir Gleichung (3.2.10) mit Testfunktionen $\phi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha)$ aus $C_0^\infty(\mathbb{T}_\alpha^2 \times [0, T_\alpha])$ und integrieren anschließend über Raum und Zeit.

Dann liefert diese Formulierung mittels Distributionen

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_\alpha + \operatorname{div}_\alpha(\phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon) \right) (\omega_\alpha^\varepsilon - \varepsilon^\alpha F h_\alpha^\varepsilon) \, d\mathbf{x}_\alpha \, dt_\alpha = \int_0^\infty \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} \phi_\alpha \omega_\alpha^\varepsilon \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \, d\mathbf{x}_\alpha \, dt_\alpha,$$

woraufhin wir im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ mit dem Satz von Lebesgue

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_\alpha + \operatorname{div}_\alpha(\phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha^0) \right) \omega_\alpha^0 \, d\mathbf{x}_\alpha \, dt_\alpha = \int_0^\infty \int_{\mathbb{T}_\alpha^2} \phi_\alpha \omega_\alpha^0 \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^0 \, d\mathbf{x}_\alpha \, dt_\alpha$$

und folglich die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^0 \cdot \nabla_\alpha \right) \omega_\alpha^0 = -\omega_\alpha^0 \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^0 = 0$$

erhalten. Insgesamt haben wir damit unsere Behauptung gezeigt. \square

Nach Satz 3.2.12 weisen für $0 < \alpha \leq 1$ die jeweiligen Gleichungssysteme keine Kopplung bezüglich der Höhe auf und die einzelnen Funktionen $h_\alpha^0, \mathbf{v}_\alpha^0$ sowie ω_α^0 lassen sich demzufolge nicht eindeutig bestimmen. Allerdings können wir mittels einer zusätzlichen Bedingung an die Höhe

eine direkte Gleichung für die Vortizität, die im Fall der Mesoskala mit Gleichung (3.2.21) bereits vorliegt, herleiten. Dies diskutieren wir in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 3.2.13

Es seien die Voraussetzungen aus den Sätzen 3.2.10 und 3.2.12 gegeben. Ferner fordern wir für $0 < \alpha \leq 1$ die zusätzliche Bedingung $\nabla_\alpha h_\alpha^\varepsilon = 0$, die jeweils durch Gleichung (3.2.14) beziehungsweise (3.2.17) motiviert wird.

Dann erhalten wir mit der Divergenz bezüglich Gleichung (3.2.8)

$$\omega_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^{1-\alpha} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \cdot \nabla_\alpha \right) \operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon + (\operatorname{div}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mathbf{v}_\alpha^\varepsilon \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \mathbf{v}_\alpha^{\varepsilon \perp} \right) \right)$$

und können hierfür mittels Distributionen analog zum Beweis des Satzes 3.2.12 den singulären Grenzwert $\omega_\alpha^\varepsilon \rightarrow \omega_\alpha^0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ bestimmen.

Es folgt im Fall der Submesoskala, das heißt $\alpha = 1$,

$$\omega_S^0 = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_S} \mathbf{v}_S^0 \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_S} \mathbf{v}_S^{0 \perp} \right)$$

und im Fall der Zwischenvariablen, das heißt $0 < \alpha < 1$,

$$\omega_\alpha^0 = 0.$$

Insgesamt liegt hiermit ein erster Ansatz vor, um in Analogie mit der Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung den Einfluss der Submesoskala auf die Gleichungen der Mesoskala zu bestimmen. Dabei kann dieser Einfluss beispielsweise durch entsprechende zweiskalige Anfangsbedingungen oder Bodenhöhen entstehen.

Mit den Begriffen dieser Methode, die wir hier auch ohne Existenz von Grenzschichten verwenden, bedeutet dies, dass wir die rotierenden Flachwassergleichungen der Mesoskala (3.1.1) bis (3.1.3) als singulär-gestörtes Ausgangsproblem betrachten, dessen Lösung mittels einer asymptotischen Approximation näherungsweise bestimmt werden soll. Demnach lassen sich die quasi-geostrophischen Gleichungen (3.1.4) bis (3.1.7) als führende Ordnung einer „äußeren Entwicklung“, die Gleichungen führender Ordnung der Submesoskala (3.1.11) bis (3.1.13) als führende Ordnung einer „inneren Entwicklung“ und die Gleichungen führender Ordnung der Zwischenvariablen (3.1.17) bis (3.1.19) als führende Ordnung einer „gemeinsamen Entwicklung“ auffassen.

Demnach stellt sich zukünftig die Frage, inwiefern die Lösung \mathbf{u}_M der Gleichungen der Mesoskala näherungsweise durch die zusammengesetzte asymptotische Lösung $\mathbf{u}_M^0 + \mathbf{u}_S^0 - \mathbf{u}_\alpha^0$, für $0 < \alpha < 1$, die aus den Lösungen der drei obigen Gleichungssysteme führender Ordnung besteht, bestimmt werden kann. Das heißt, wir können uns ebenso fragen, ob in diesem Fall eine Fehlerabschätzung der Form

$$\left\| \mathbf{u}_M - \left(\mathbf{u}_M^0 + \mathbf{u}_S^0 - \mathbf{u}_\alpha^0 \right) \right\| \leq C\varepsilon,$$

wobei $\|\cdot\|$ eine geeignete Norm und C eine positive Konstante unabhängig von ε bezeichnet, existiert.

Hierfür sollten wir zudem die jeweiligen wohl-erstellten Anfangsbedingungen aus Bemerkung 3.2.11 durch schwächere Annahmen ersetzen, da ansonsten keine beliebigen Anfangsbedingungen betrachtet werden können. Um dies zu zeigen, bietet es sich an das Vorgehen aus [Uka86] beziehungsweise [Asa87] auf unseren Fall zu übertragen. Dabei wurden in den genannten Arbeiten die Ergebnisse aus [KM81], [KM82] bezüglich der Euler-Gleichungen im singulären Grenzwert jeweils durch schwächere Annahmen an die Anfangsbedingungen verbessert.

Nachdem wir in diesem Kapitel ausschließlich Einskalenentwicklungen betrachtet haben, wenden wir im Folgenden asymptotische Mehrskalentwicklungen auf die rotierenden Flachwassergleichungen an.

4 Mehrskalentwicklungen

In diesem Kapitel betrachten wir die rotierenden Flachwassergleichungen ohne Bodenhöhe der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} + \frac{\delta}{\varepsilon} \mathbf{v}^\perp + \frac{1}{\varepsilon} \nabla h = 0, \quad (4.0.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) h + \frac{1}{\varepsilon F} (1 + \varepsilon F h) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.0.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\frac{1 + \frac{\varepsilon}{\delta} \omega}{1 + \varepsilon F h}\right) = 0, \quad (4.0.3)$$

für die Parameter $\varepsilon \ll 1$ und $\delta \equiv \delta(\varepsilon) \neq 0$ sowie der Konstanten $F = \mathcal{O}(1)$ aus Kapitel 3.1.1, und wenden hierauf eine asymptotische Zweiskalenentwicklung in Raum und Zeit an. Dabei stellt dieses Gleichungssystem unter Verwendung von $\delta = \varepsilon^\alpha$ eine Verallgemeinerung der rotierenden Flachwassergleichungen der Zwischenvariablen (3.1.14) bis (3.1.16) mit $\tilde{h}_{B,\alpha} = 0$ dar.

Asymptotische Mehrskalentwicklungen wurden in der Vergangenheit in einer Reihe von Arbeiten, einige stellen wir im Folgenden kurz vor, auf die rotierenden Flachwassergleichungen angewendet. Unter Verwendung einer Zweiskalenentwicklung in der Zeit und Einskalenentwicklung im Raum sowie der von Schochet in [Sch94] eingeführten Methode zur Mittelung über schnelle Wellen konnten Embid und Majda in [EM96], [EM98] und [ME98] das Verhalten der mesoskaligen Lösung im singulären Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ für allgemeine nicht wohl-erstellte Anfangsbedingungen bestimmen. Darüber hinaus zeigten die Autoren in den genannten Arbeiten das entsprechende Verhalten für die rotierenden Boussinesq-Gleichungen.

Auch zusätzliche Annahmen und Beobachtungen aus der Geophysik wurden zur Herleitung asymptotischer Systeme für die rotierenden Flachwassergleichungen eingesetzt, beispielsweise in [RZB01] mit einem Zweiskalenansatz in der Zeit und Einskalenansatz im Raum. Anders als in den genannten Arbeiten wurden die Gleichungen mit einer anderen zeitlichen Skalierung betrachtet und die physikalischen Funktionen in geostrophische sowie nicht-geostrophische Terme unterteilt.

Da andere physikalische Dynamiken wie zum Beispiel räumliche Zweiskalenabhängigkeit nicht mit diesen Ansätzen dargestellt werden können, sind zu diesem Zweck andere Entwicklungen erforderlich. So verwendete zur Darstellung dieser Skalenabhängigkeit im Fall der Euler-Gleichungen im Bereich kleiner Mach-Zahlen Klein in [Kle95] eine Einskalenentwicklung in der Zeit und Zweiskalenentwicklung im Raum. Dieser Ansatz wurde später von Meister in [Mei99] streng mathematisch untersucht.

Um in unserer Situation mit asymptotischen Mehrskalentwicklungen den Einfluss der Submesoskala auf die quasi-geostrophischen Gleichungen zu bestimmen, wenden wir in Kapitel 4.1 eine Zweiskalenerweiterung in Raum und Zeit auf die obigen Gleichungen an. Hierfür wird insbesondere die Vortizität, da diese physikalische Variable aus der Geschwindigkeit folgt, in Abhängigkeit eines geeigneten Vorfaktors entwickelt, damit wir ein konsistentes asymptotisches System ermitteln können. Zudem bestimmen wir die sublinearen Wachstumsbedingungen und Mittelungsoperatoren, sowohl im Raum als auch in der Zeit.

Anschließend analysieren wir in Kapitel 4.2 das resultierende asymptotische System unter Verwendung der beiden Mittelungsoperatoren mit dem Ziel wichtige Eigenschaften der rotierenden Flachwassergleichungen bezüglich mehrerer Skalen zu identifizieren.

Im Gegensatz zu [Kle95] und [Mei99] betrachten wir hier allerdings keine Gleichungen in Erhaltungform, dazu verweisen wir auf unsere Ausführungen in Kapitel 5.1, sondern eine Verallgemeinerung der drei Gleichungssysteme aus Kapitel 3, sodass mit unserer Zweiskalenerweiterung eine Erweiterung der Einskalerweiterung bezüglich der Mesoskala beziehungsweise Submesoskala vorliegt.

Dessen ungeachtet wird die Existenz der Zweiskaligkeit analog zu [Kle95] motiviert. Da wir nach einer charakteristischen Analyse unserer Ausgangsgleichungen einen Eigenwert der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ und zwei Eigenwerte der Größenordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ erhalten, verwenden wir, um beiden Eigenwerten zu genügen, eine entsprechende Zweiskalenerweiterung mit Entwicklungsparameter ε sowie Raum- und Zeitskalen, die jeweils ein Größenverhältnis von ε aufweisen.

4.1 Wachstumsbedingungen und asymptotische Gleichungen

In diesem Unterkapitel wenden wir auf die rotierenden Flachwassergleichungen (4.0.1) bis (4.0.3) eine asymptotische Zweiskalenerweiterung in Raum und Zeit an. Dazu folgen wir zunächst den Ausführungen in [Mei99] für räumliche Zweiskalenerweiterungen und passen diese auf unsere Situation an.

Um im Allgemeinen eine Zweiskaligkeit in Raum und Zeit zu erreichen, benötigen wir zwei verschiedene Skalen (\mathbf{x}_S, t_S) und (\mathbf{x}_M, t_M) , die $(\mathbf{x}_M, t_M) = \varepsilon(\mathbf{x}_S, t_S)$, $\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_S \in \mathbb{R}^d$, $t_M, t_S \in \mathbb{R}_0^+$, $\varepsilon \ll 1$ erfüllen. Damit auf der Skala (\mathbf{x}_M, t_M) außerdem langwellige Phänomene auftreten können, betrachten wir die einzelnen physikalischen Variablen in einem hinreichend großen Gebiet G , das folglich durch $G = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ gegeben ist oder von ε abhängt. Zusätzlich fordern wir die Existenz einer Zahl $\tilde{\varepsilon} > 0$, sodass

$$B_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \times \left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right) \subset G$$

für alle $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, wobei $B_{\mathbf{x}}(r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\mathbf{x}\| < r\}$ die d -dimensionale Kugel mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^d$ und Radius $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnet, gilt.

Weiterhin realisieren wir im Allgemeinen die Erweiterung auf zwei Raum- und Zeitskalen mittels

einer Abbildung

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \tilde{\varepsilon}) \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$$

und betrachten für die physikalischen Variablen Φ eine in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ gültige und in $G_s \times G_T$, für zwei nicht-negative reelle Zahlen s und T mit

$$G_s := \begin{cases} \mathbb{R}^d \setminus B_{\mathbf{x}}(s), & \text{für } s > 0, \\ \mathbb{R}^d, & \text{für } s = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad G_T := \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ \setminus [0, T), & \text{für } T > 0, \\ \mathbb{R}_0^+, & \text{für } T = 0, \end{cases}$$

gleichmäßig gültige asymptotische Mehrskalentwicklung der Form

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j \Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) + o(\varepsilon^k), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2$$

mit den asymptotischen Funktionen

$$\begin{aligned} \Phi_j : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, \\ (\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) &\longmapsto \Phi_j(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M). \end{aligned}$$

Im Fall der rotierenden Flachwassergleichungen (4.0.1) bis (4.0.3) bedeutet dies, dass jede physikalische Variable der obigen asymptotischen Mehrskalentwicklung für $d = 2$ mit einer geeigneten Abbildung \mathbf{g} genügt. Die dabei zum Einsatz kommende Abbildung stellen wir im Folgenden vor. Wie wir später sehen werden, erhalten wir dadurch asymptotische Gleichungen, die vom Vorfaktor δ unabhängig sind.

Bemerkung 4.1.1

Für die rotierenden Flachwassergleichungen (4.0.1) bis (4.0.3) betrachten wir eine asymptotische Mehrskalentwicklung für $d = 2$ mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \tilde{\varepsilon}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+, \\ (x, y, t; \varepsilon) &\longmapsto \left(\frac{\delta}{\varepsilon}x, \frac{\delta}{\varepsilon}y, \frac{\delta}{\varepsilon}t, \delta x, \delta y, \delta t \right), \end{aligned}$$

wobei wir

$$(x, y, t) = \frac{\varepsilon}{\delta} (x_S, y_S, t_S) = \frac{1}{\delta} (x_M, y_M, t_M)$$

setzen und die Kürzel M beziehungsweise S in der Tiefstellung zur Unterscheidung unterschiedlicher Skalen in Anlehnung an die Meso- beziehungsweise Submesoskala verwenden.

Die Verwendung dieser Bezeichnungen erklärt sich, wenn wir die Zwischenvariable aus Kapitel 3.1.3 betrachten. Für $\delta = \varepsilon^\alpha$ und jedem festem $0 \leq \alpha \leq 1$ ist dann die Erweiterung auf zwei Skalen durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \tilde{\varepsilon}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+, \\ (x_\alpha, y_\alpha, t_\alpha; \varepsilon) &\longmapsto \left(\varepsilon^{\alpha-1}x_\alpha, \varepsilon^{\alpha-1}y_\alpha, \varepsilon^{\alpha-1}t_\alpha, \varepsilon^\alpha x_\alpha, \varepsilon^\alpha y_\alpha, \varepsilon^\alpha t_\alpha \right) \end{aligned}$$

gegeben, wobei nach Kapitel 3.1.3

$$(x_\alpha, y_\alpha, t_\alpha) = \varepsilon^{1-\alpha}(x_S, y_S, t_S) = \varepsilon^{-\alpha}(x_M, y_M, t_M)$$

gilt. Demzufolge bilden wir mittels der angegebenen Mehrskalentwicklung von der Zwischenvariablen auf die kleinere Submesoskala und die größere Mesoskala ab.

Als Nächstes stellen wir mit der sogenannten sublinearen Wachstumsbedingung, auch Säkularbedingung oder Lösungsbedingung genannt, für die asymptotischen Funktionen ein wichtiges Hilfsmittel der Mehrskalanalyse vor.

Um die Wichtigkeit dieser Bedingung bei Mehrskalentwicklungen anschaulich zu erklären, vergleiche [Sch78] und [Maj03], betrachten wir für eine physikalische Variable Φ die asymptotische Mehrskalentwicklung der Form

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \sim \Phi_0(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) + \varepsilon \Phi_1(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M)$$

und nehmen an, dass die asymptotische Funktion Φ_1 linear in den kleinen Variablen wächst, das heißt $\Phi_1 \sim \|\mathbf{x}_S\| + |t_S|$ für $\|\mathbf{x}_S\| + |t_S| \rightarrow \infty$.

Dann weist der Term $\varepsilon \Phi_1 = \varepsilon(\|\mathbf{x}_S\| + |t_S|) = \|\mathbf{x}_M\| + |t_M|$ die gleiche Größenordnung wie die asymptotische Funktion führender Ordnung Φ_0 , im Widerspruch zu $\varepsilon \Phi_1 \ll \Phi_0$, auf. Folglich wird durch die sublineare Wachstumsbedingung für die asymptotische Funktion Φ_1

$$\lim_{\|\mathbf{x}_S\| + |t_S| \rightarrow \infty} \frac{|\Phi_1(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M)|}{\|\mathbf{x}_S\| + |t_S|} = 0$$

das gezeigte Verhalten verhindert und sichergestellt, dass mit Φ_0 die asymptotische Funktion führender Ordnung beschrieben wird.

Im Folgenden zeigen wir, wie im Fall einer asymptotischen Zweiskalenentwicklung in Raum und Zeit mittels der Abbildung \mathbf{g} die sublinearen Wachstumsbedingungen für die asymptotischen Funktionen Φ_1 und Φ_2 aus den obigen Voraussetzungen hergeleitet werden können. Um zusätzlich eine Wachstumsbedingung für die asymptotische Funktion in führender Ordnung Φ_0 zu erhalten, wird die gleichmäßige Beschränktheit der physikalischen Variablen vorausgesetzt, wobei dies eine geeignete Voraussetzung darstellt, da im Fall der rotierenden Flachwassergleichungen (4.0.1) bis (4.0.3) die Lösungen eindeutig und gleichmäßig beschränkt sind.

Insgesamt erweitern wir damit Lemma 3.5 aus [Mei99] auf asymptotische Zweiskalenentwicklungen in Raum und Zeit.

Lemma 4.1.2

Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig beschränkte Funktion bezüglich \mathbf{x}, t und ε , seien ferner s und T zwei nicht-negative reelle Zahlen und sei die asymptotische Mehrskalentwicklung

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j \Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) + (\varepsilon^k), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

gültig in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ und gleichmäßig gültig in $G_s \times G_T$ für jedes $k = 0, 1, 2$.

Dann gilt für die asymptotische Funktion führender Ordnung

$$\Phi_0(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o((\|\mathbf{x}\| + |t|)^\alpha), \quad \|\mathbf{x}\| + |t| = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.1.1)$$

für alle $\alpha > 0$. Des Weiteren erfüllen die asymptotischen Funktionen erster und zweiter Ordnung jeweils

$$\Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o(\|\mathbf{x}\| + |t|), \quad \|\mathbf{x}\| + |t| = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = 1, 2. \quad (4.1.2)$$

Beweis:

Wir folgen dem Beweis von Lemma 3.5 aus [Mei99] und passen die einzelnen Schritte auf unsere Voraussetzungen an.

Da die asymptotische Entwicklung gleichmäßig gültig ist, haben wir

$$\Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.1.3)$$

gleichmäßig in $G_s \times G_T$ für $j = 1, 2$. Seien $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei gegebene Nullfolgen. Zu diesen Folgen definieren wir zwei beliebige Vektorfolgen $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit den jeweiligen Eigenschaften $\|\mathbf{x}_n\| = \sigma_n^{-1}$ und $|t_n| = \tau_n^{-1}$. Zudem setzen wir $\varepsilon_n := (\sigma_n^{-1} + \tau_n^{-1})^{-1}$. Anschließend definieren wir die Nullfolge $\{\tilde{\sigma}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als Teilfolge von $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus Elementen, die $0 \leq s < \tilde{\sigma}_n^{-1}$ erfüllen, und die zugehörige Vektorfolge $\{\tilde{\mathbf{x}}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als Teilfolge von $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|\tilde{\mathbf{x}}_n\| = \tilde{\sigma}_n^{-1}$, sowie die Nullfolge $\{\tilde{\tau}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als Teilfolge von $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus Elementen, die $0 \leq T < \tilde{\tau}_n^{-1}$ erfüllen, und die zugehörige Vektorfolge $\{\tilde{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als Teilfolge von $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|\tilde{t}_n| = \tilde{\tau}_n^{-1}$. Zudem setzen wir $\tilde{\varepsilon}_n := (\tilde{\sigma}_n^{-1} + \tilde{\tau}_n^{-1})^{-1}$.

Da nun nach dem Majorantenkriterium $0 < \min(\sigma_n, \tau_n) \leq 2\varepsilon_n \leq \max(\sigma_n, \tau_n)$ auch $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge bildet, folgt mit Gleichung (4.1.3)

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_j(\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}_n, \tilde{t}_n; \tilde{\varepsilon}_n))}{\tilde{\varepsilon}_n^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_j(\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}_n, \tilde{t}_n; \tilde{\varepsilon}_n))}{\|\tilde{\mathbf{x}}_n\| + |\tilde{t}_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}_n, t_n; \varepsilon_n))}{\|\mathbf{x}_n\| + |t_n|}.$$

Damit haben wir Gleichung (4.1.2) gezeigt.

Zum Nachweis der Gleichung (4.1.1) verwenden wir die gleichmäßige Beschränktheit der Funktion Φ , das heißt

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = o(r^\alpha), \quad \|\mathbf{x}\| + |t| = r, \quad r \rightarrow \infty,$$

für alle $\alpha > 0$, und die in $G_s \times G_T$ gleichmäßig gültige asymptotische Entwicklung

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \Phi_0(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Gemeinsam ergeben die beiden vorangegangenen Gleichungen schließlich

$$\Phi_0(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = \Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) + o(1) = o(\varepsilon^{-\alpha}) + o(1) = o((\|\mathbf{x}\| + |t|)^\alpha)$$

für $\|\mathbf{x}\| + |t| = \varepsilon^{-1}$ und $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Um des Weiteren Wachstumsbedingungen zu erhalten, die im Gegensatz zum vorangegangenen Lemma, in welchem das Wachstum der asymptotischen Funktionen gemeinsam durch die Raum- und Zeitkoordinaten ermittelt wird, nur durch die Raumkoordinaten beziehungsweise Zeitkoordinate bestimmt werden, setzen wir $T = 0$ beziehungsweise $s = 0$. Im Allgemeinen wird der erste Fall zusammen mit einer Zweiskalalentwicklung im Raum und Einskalalentwicklung in der Zeit, das heißt $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_0^+$, vergleiche [Mei99], und der zweite Fall zusammen mit einer Einskalalentwicklung im Raum und Zweiskalalentwicklung in der Zeit, das heißt $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, verwendet.

Diese beiden wichtigen Spezialfälle geben wir im Folgenden als Korollare zu Lemma 4.1.2 an.

Korollar 4.1.3 (Lemma 3.5 aus [Mei99])

Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig beschränkte Funktion bezüglich \mathbf{x} und ε , sei ferner s eine nicht-negative reelle Zahl und sei die asymptotische Mehrskalalentwicklung

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j \Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) + o(\varepsilon^k), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

gültig in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ und gleichmäßig gültig in $G_s \times \mathbb{R}_0^+$ für jedes $k = 0, 1, 2$.

Dann gilt für die asymptotische Funktion führender Ordnung

$$\Phi_0(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o(\|\mathbf{x}\|^\alpha), \quad \|\mathbf{x}\| \in \partial B_{\mathbf{x}}(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

für alle $\alpha > 0$. Des Weiteren erfüllen die asymptotischen Funktionen erster und zweiter Ordnung jeweils

$$\Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o(\|\mathbf{x}\|), \quad \|\mathbf{x}\| \in \partial B_{\mathbf{x}}(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = 1, 2.$$

Korollar 4.1.4

Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig beschränkte Funktion bezüglich t und ε , sei ferner T eine nicht-negative reelle Zahl und sei die asymptotische Mehrskalalentwicklung

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j \Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) + o(\varepsilon^k), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

gültig in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ und gleichmäßig gültig in $\mathbb{R}^d \times G_T$ für jedes $k = 0, 1, 2$.

Dann gilt für die asymptotische Funktion führender Ordnung

$$\Phi_0(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o(|t|^\alpha), \quad |t| = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

für alle $\alpha > 0$. Des Weiteren erfüllen die asymptotischen Funktionen erster und zweiter Ordnung jeweils

$$\Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o(|t|), \quad |t| = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = 1, 2.$$

Anschließend betrachten wir für die rotierenden Flachwassergleichungen (4.0.1) und (4.0.2) eine asymptotische Mehrskalentwicklung mit der Abbildung \mathbf{g}_δ aus Bemerkung 4.1.1. Folglich erhalten wir gemeinsam mit den aus der Kettenregel folgenden Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_j \circ \mathbf{g}_\delta)(x, y, t; \varepsilon) &= \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t_S} \Phi_j(\mathbf{g}_\delta(x, y, t; \varepsilon)) + \delta \frac{\partial}{\partial t_M} \Phi_j(\mathbf{g}_\delta(x, y, t; \varepsilon)), \\ \nabla(\Phi_j \circ \mathbf{g}_\delta)(x, y, t; \varepsilon) &= \frac{\delta}{\varepsilon} \nabla_S \Phi_j(\mathbf{g}_\delta(x, y, t; \varepsilon)) + \delta \nabla_M \Phi_j(\mathbf{g}_\delta(x, y, t; \varepsilon)),\end{aligned}$$

jeweils für $j = 0, 1, 2$, wobei $\nabla_S = (\partial/\partial x_S, \partial/\partial y_S)^T$ beziehungsweise $\nabla_M = (\partial/\partial x_M, \partial/\partial y_M)^T$ gilt, für die Gleichung der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t_S} + \delta \frac{\partial}{\partial t_M} + \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \mathbf{v}_j + o(\varepsilon^2) \right) \cdot \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \nabla_S + \delta \nabla_M \right) \right) \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \mathbf{v}_j + o(\varepsilon^2) \right) \\ &\quad + \frac{\delta}{\varepsilon} \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \mathbf{v}_j + o(\varepsilon^2) \right)^\perp + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \nabla_S + \delta \nabla_M \right) \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j h_j + o(\varepsilon^2) \right) \\ &= \delta \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_S h_0 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^\perp + \nabla_S h_1 + \nabla_M h_0 \right) + \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) \mathbf{v}_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M \right) \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1^\perp + \nabla_S h_2 + \nabla_M h_1 \right) + o(1) \right),\end{aligned}\quad (4.1.4)$$

und für die Gleichung der Höhe

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t_S} + \delta \frac{\partial}{\partial t_M} + \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \mathbf{v}_j + o(\varepsilon^2) \right) \cdot \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \nabla_S + \delta \nabla_M \right) \right) \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j h_j + o(\varepsilon^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon F} \left(1 + \varepsilon F \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j h_j + o(\varepsilon^2) \right) \right) \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \operatorname{div}_S + \delta \operatorname{div}_M \right) \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \mathbf{v}_j + o(\varepsilon^2) \right) \\ &= \delta \left(\frac{1}{\varepsilon^2 F} \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) h_0 + \frac{1}{F} (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0) + h_0 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) h_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M \right) h_0 + \frac{1}{F} (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_2 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h_0 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 + h_1 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 + h_0 \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0 \right) + o(1) \right),\end{aligned}\quad (4.1.5)$$

jeweils für $\varepsilon \rightarrow 0$ in

$$\tilde{D} := \left\{ (\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \mid (\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = \mathbf{g}_\delta(\mathbf{x}, t; \varepsilon), (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \right\}$$

mit $\mathbf{x}_S = (x_S, y_S)^T$, $\mathbf{x}_M = (x_M, y_M)^T$ beziehungsweise $\mathbf{x} = (x, y)^T$, sodass insbesondere diese beiden Gleichungen unabhängig von δ sind. Demzufolge ist die δ -Abhängigkeit der Ausgangsgleichungen (4.0.1) bis (4.0.3) nur noch in den betrachteten Skalen und der Gleichung (4.0.3) zu finden.

Wie wir in Kapitel 3 gezeigt haben, wird im Allgemeinen die Gleichung der Vortizität, wobei

diese aus den anderen beiden Ausgangsgleichungen unter geeigneter Verwendung der Rotation entsteht, benötigt, um im Fall eines singulären Grenzwerts die resultierenden Gleichungen zu schließen. Damit sich diese Eigenschaften möglichst auch auf die asymptotischen Gleichungen übertragen, müssen wir Gleichung (4.0.3) ebenfalls von der δ -Abhängigkeit lösen.

Dazu entwickeln wir die Vortizität geeignet. Da diese der Rotation der Geschwindigkeit entspricht, ist dabei eine direkte Anwendung der obigen Mehrskalentwicklung aufgrund des Ableitungsoperators nicht möglich. Stattdessen betrachten wir, unter Verwendung der asymptotischen Mehrskalentwicklung mit der Abbildung \mathbf{g}_δ für die Geschwindigkeit,

$$\begin{aligned}\omega(x, y, t; \varepsilon) &= \operatorname{curl} \mathbf{v}(x, y, t; \varepsilon) \\ &= \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \operatorname{curl}_S + \delta \operatorname{curl}_M \right) \left(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2 + o(\varepsilon^2) \right) \\ &= \frac{\delta}{\varepsilon} \left(\operatorname{curl}_S \mathbf{v}_0 + \varepsilon \operatorname{curl}_S \mathbf{v}_1 + \varepsilon \operatorname{curl}_M \mathbf{v}_0 + \varepsilon^2 \operatorname{curl}_S \mathbf{v}_2 + \varepsilon^2 \operatorname{curl}_M \mathbf{v}_1 + o(\varepsilon^2) \right),\end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ in $\tilde{\mathcal{D}}$, welches zudem mit

$$\omega_0 := \operatorname{curl}_S \mathbf{v}_0, \quad \omega_1 := \operatorname{curl}_S \mathbf{v}_1 + \operatorname{curl}_M \mathbf{v}_0, \quad \omega_2 := \operatorname{curl}_S \mathbf{v}_2 + \operatorname{curl}_M \mathbf{v}_1$$

zu

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \omega(x, y, t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j \omega_j(\mathbf{g}_\delta(x, y, t; \varepsilon)) + o(\varepsilon^k), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ in } \tilde{\mathcal{D}}, \quad k = 0, 1, 2$$

wird. Somit entwickeln wir die Vortizität nicht direkt asymptotisch, sondern gemeinsam mit dem Vorfaktor $\varepsilon \delta^{-1}$, der im Übrigen auch Teil der Gleichung (4.0.3) ist.

Um nun schließlich diese Gleichung asymptotisch zu entwickeln, stehen uns zwei Möglichkeiten zur Verfügung, die wir im Folgenden vorstellen und wie wir später sehen werden, zu denselben asymptotischen Gleichungen führen.

Für die erste Möglichkeit verwenden wir zusätzlich zu den obigen asymptotischen Mehrskalentwicklungen, da $|\varepsilon F h| \ll 1$ gilt, die geometrische Reihe für den Term $1/(1 + \varepsilon F h)$, sodass wir insgesamt für Gleichung (4.0.3)

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t_S} + \delta \frac{\partial}{\partial t_M} + \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \mathbf{v}_j + o(\varepsilon^2) \right) \cdot \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \nabla_S + \delta \nabla_M \right) \right) \\ &\quad \left(\left(1 + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \omega_j + o(\varepsilon^2) \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\varepsilon F \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j h_j + o(\varepsilon^2) \right) \right)^k \right) \\ &= \delta \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) \omega_0 + \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) (\omega_1 - (\omega_0 + 1) (F h_0)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S \right) \omega_0 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S \right) (\omega_1 - (\omega_0 + 1) (F h_0)) \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) (\omega_2 - (\omega_1 - (\omega_0 + 1)(Fh_0))(Fh_0) - (\omega_0 + 1)(Fh_1)) \\
& + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla_S \omega_0 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_M \omega_0 \Big) + o(\varepsilon), \tag{4.1.6}
\end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ in $\tilde{\mathcal{D}}$, erhalten.

Für die zweite Möglichkeit betrachten wir für die potentielle Vortizität

$$q = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\delta} \omega}{1 + \varepsilon Fh}, \tag{4.1.7}$$

Gleichung (4.0.3) wird dadurch zu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) q = 0, \tag{4.1.8}$$

eine geeignete asymptotische Mehrskalenerwicklung. Dazu nehmen wir an, dass diese durch

$$q(x, y, t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j q_j(\mathbf{g}_\delta(x, y, t; \varepsilon)) + o(\varepsilon^k), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ in } \tilde{\mathcal{D}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

gegeben ist.

Mit den einzelnen Mehrskalenerwicklungen folgt dann für Gleichung (4.1.7), da $1 + \varepsilon Fh > 0$ gilt,

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + \frac{\varepsilon}{\delta} \omega - q(1 + \varepsilon Fh) \\
&= 1 + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \omega_j + o(\varepsilon^2) - \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j q_j + o(\varepsilon^2) \right) \left(1 + \varepsilon F \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j h_j + o(\varepsilon^2) \right) \right) \\
&= (1 + \omega_0 - q_0) + \varepsilon (\omega_1 - q_1 - q_0(Fh_0)) \\
&\quad + \varepsilon^2 (\omega_2 - q_2 - q_1(Fh_0) - q_0(Fh_1)) + o(\varepsilon^2), \tag{4.1.9}
\end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ in $\tilde{\mathcal{D}}$, und für Gleichung (4.1.8)

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t_S} + \delta \frac{\partial}{\partial t_M} + \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \mathbf{v}_j + o(\varepsilon^2) \right) \cdot \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \nabla_S + \delta \nabla_M \right) \right) \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j q + o(\varepsilon^2) \right) \\
&= \delta \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) q_0 + \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) q_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M \right) q_0 \right. \\
&\quad + \varepsilon \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) q_2 + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M \right) q_1 \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla_S q_0 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_M q_0 \right) + o(\varepsilon) \right), \tag{4.1.10}
\end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ in $\tilde{\mathcal{D}}$, sodass für beide Möglichkeiten die Gleichungen unabhängig von δ sind. Demzufolge ist die δ -Abhängigkeit der Ausgangsgleichungen (4.0.1) bis (4.0.3) vollständig in

den betrachteten Skalen zu finden.

Im Gegensatz zum Vorgehen bei asymptotischen Einskalenentwicklungen ist es nun nicht direkt möglich einen Koeffizientenvergleich nach Potenzen in ε auszuführen, da die Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathcal{D}}$ aufgrund der Funktion \mathbf{g}_δ vom Parameter ε abhängt, vergleiche [Mei99]. Um dennoch auch bei asymptotischen Mehrskalentwicklungen einen Koeffizientenvergleich ausführen zu können, werden in unserem Fall die obigen Gleichungen in

$$\mathcal{D} := \left\{ (\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \mid x_M < \tilde{\varepsilon} x_S, y_M < \tilde{\varepsilon} y_S, t_S < \tilde{\varepsilon} t_M \right\}$$

anstatt in $\tilde{\mathcal{D}}$ betrachtet. Zudem müssen die einzelnen asymptotischen Funktionen Φ_j , $j = 0, 1, 2$, die sublinearen Wachstumsbedingungen im Raum

$$\Phi_0(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = o(\|\mathbf{x}_S\|^\alpha), \quad \mathbf{x}_S \in \partial B_{\mathbf{x}_S}(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.1.11)$$

für alle $\alpha > 0$, und

$$\Phi_j(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = o(\|\mathbf{x}_S\|), \quad \mathbf{x}_S \in \partial B_{\mathbf{x}_S}(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = 1, 2 \quad (4.1.12)$$

sowie die sublinearen Wachstumsbedingungen in der Zeit

$$\Phi_0(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = o(|t_S|^\beta), \quad t_S = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.1.13)$$

für alle $\beta > 0$, und

$$\Phi_j(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = o(|t_S|), \quad t_S = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = 1, 2 \quad (4.1.14)$$

erfüllen.

Weiterhin definieren wir, wie es in der Strömungsmechanik verbreitet ist (siehe beispielsweise [CA89], [Maj07a], [Maj07b] und [Yan12]), für eine physikalische Variable Φ in Abhängigkeit der beiden Raum- und Zeitskalen, sowohl eine Mittelung im Raum

$$\bar{\Phi}(t_S, \mathbf{x}_M, t_M) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B_{\mathbf{x}_S}(\varepsilon^{-1}))} \int_{B_{\mathbf{x}_S}(\varepsilon^{-1})} \Phi(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) \, d\mathbf{x}_S, \quad (4.1.15)$$

wobei hier $\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_M \in \mathbb{R}^d$ gilt und $\lambda(B_{\mathbf{x}_S}(\varepsilon^{-1}))$ das Volumen der d -dimensionalen Kugel $B_{\mathbf{x}_S}(\varepsilon^{-1})$ bezeichnet, als auch eine Mittelung in der Zeit

$$\langle \Phi \rangle(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_M, t_M) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{-1}} \int_0^{\varepsilon^{-1}} \Phi(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) \, dt_S. \quad (4.1.16)$$

Da diese linearen und additiven Mittelungsoperatoren konsistent zu den einzelnen Wachstumsbedingungen (4.1.11) bis (4.1.14) sind, erfüllen sie die folgenden Aussagen für gemittelte, bezüglich der Skala \mathbf{x}_S beziehungsweise t_S differenzierte Größen. Die Herleitung der Aussagen für die Raummittelung sind in [Mei99] zu finden. Diese geben wir aus Gründen der Übersichtlichkeit

in Form von Lemma 4.1.5 und Korollar 4.1.6 an. Das darauffolgende Lemma 4.1.7 beschreibt die analoge Aussage für die Zeitmittelung. Außerdem halten wir weitere wichtige Eigenschaften der beiden Mittelungsoperatoren in den Bemerkungen 4.1.8 bis 4.1.10 fest.

Lemma 4.1.5

Sei

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^d, \\ (\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) &\longmapsto (\psi_1(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M), \dots, \psi_d(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M))^T \end{aligned}$$

eine Funktion, deren Komponenten ψ_1, \dots, ψ_d jeweils der Wachstumsbedingung (4.1.12) genügen. Dann gilt

$$\overline{\operatorname{div}_S \Psi} = 0.$$

Beweis:

Wir setzen $r := \varepsilon^{-1}$ und $\Omega_r := B_{\mathbf{x}_S}(r)$. Dann erhalten wir nach [Mei99] mit dem Gaußschen Integralsatz und der Wachstumsbedingung (4.1.12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(\Omega_r)} \int_{\Omega_r} \operatorname{div}_S \Psi(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) \, d\mathbf{x}_S &= \frac{1}{\lambda(\Omega_r)} \int_{\partial\Omega_r} \Psi(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_S) \, dS \\ &= \mathcal{O}(r^{-d}) \mathcal{O}(r^{d-1}) o(r), \quad r \rightarrow \infty \\ &= o(1), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{n}(\mathbf{x}_S)$ den äußeren Normalenvektor zu $\partial\Omega_r$ bezeichnet, unsere Behauptung. \square

Die beiden folgenden Aussagen lassen sich mit einer analogen Beweisstrategie nachweisen.

Korollar 4.1.6

Sei $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die der Wachstumsbedingung (4.1.12) genügt. Dann gilt

$$\overline{\nabla_S \psi} = 0.$$

Lemma 4.1.7

Sei $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die der Wachstumsbedingung (4.1.14) genügt und beschränkte Startwerte $\psi(\mathbf{x}_S, 0, \mathbf{x}_M, t_M) = o(\varepsilon^{-1})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, aufweist.

Dann gilt

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t_S} \psi \right\rangle = 0.$$

Bemerkung 4.1.8

Mit Lemma 4.1.5, Korollar 4.1.6 und Lemma 4.1.7 haben wir beschrieben, wie sich die beiden Wachstumsbedingungen (4.1.12) und (4.1.14) bezüglich der asymptotischen Funktionen erster und zweiter Ordnung verwenden lassen.

Da wir des Weiteren in der Wachstumsbedingung (4.1.11) beziehungsweise (4.1.13) bezüglich

der asymptotischen Funktion führender Ordnung $\alpha = 1$ beziehungsweise $\beta = 1$ setzen können, erhalten wir auch in diesem Fall die obigen Aussagen

$$\overline{\operatorname{div}_S \Psi} = 0, \quad \overline{\nabla_S \psi} = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t_S} \psi \right\rangle = 0.$$

Bemerkung 4.1.9

Unter Verwendung der Raummittelung ist es im Allgemeinen üblich (siehe beispielsweise [Yan12]) die Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mittels

$$\varphi(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = \bar{\varphi}(t_S, \mathbf{x}_M, t_M) + \varphi'(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M)$$

aufzuteilen, sodass aufgrund des Integraloperators

$$\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi}, \quad \bar{\varphi}' = 0$$

gilt.

Mit der Separation

$$\varphi(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = \langle \varphi \rangle(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_M, t_M) + \tilde{\varphi}(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M)$$

gelten analoge Eigenschaften ebenso für die Zeitmittelung.

Bemerkung 4.1.10

In den Wachstumsbedingungen (4.1.11) und (4.1.12), der Mittelung (4.1.15), dem Lemma 4.1.5 sowie dem Korollar 4.1.6 ist es auch möglich, anstatt der d -dimensionalen Kugel und der euklidischen Norm, andere zusammengehörige Mengen und Normen zu betrachten. Beispielsweise erhalten wir mit dem d -dimensionalen Würfel und der Maximumnorm die in [Maj07a], [Maj07b] beziehungsweise [Yan12] verwendete Raummittelung.

Die geforderten Wachstumsbedingungen (4.1.11) bis (4.1.14) erhalten wir nach den Korollaren 4.1.3 und 4.1.4 nur für eine in ganz $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ gleichmäßig gültige asymptotische Mehrskalentwicklung, da ansonsten die Voraussetzungen beider Korollare nicht gemeinsam erfüllt sind. Wie oben ausgeführt, werden diese allerdings benötigt um, sowohl eine von den Zeitskalen unabhängige Raummittelung, als auch eine von den Raumskalen unabhängige Zeitmittelung zu erhalten.

Im weiteren Verlauf setzen wir innerhalb der Raumskalen $d = 2$ und fordern, dass die Mittelungsoperatoren miteinander sowie jeweils mit allen Ableitungsoperatoren bezüglich \mathbf{x}_M beziehungsweise t_M vertauschbar sind. Zudem soll die Vertauschung zwischen Raummittelung und $\frac{\partial}{\partial t_S}$ sowie Zeitmittelung und ∇_S möglich sein. Diese Bedingungen sind bei hinreichender Glätte der beteiligten Funktionen, die wir hiermit voraussetzen, erfüllt.

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir für die Gleichungen (4.1.4) bis (4.1.6) mit einem Koeffizientenvergleich nach Potenzen in ε die folgenden asymptotischen Gleichungen. Diese

sind für die Gleichung der Geschwindigkeit durch

$$\nabla_S h_0 = 0, \quad (4.1.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^\perp + \nabla_S h_1 + \nabla_M h_0 = 0, \quad (4.1.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) \mathbf{v}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M \right) \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1^\perp + \nabla_S h_2 + \nabla_M h_1 = 0, \quad (4.1.19)$$

in \mathcal{D} , für die Gleichung der Höhe durch

$$\frac{1}{F} \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 = 0, \quad (4.1.20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) h_0 + \frac{1}{F} (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0) + h_0 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 = 0, \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) h_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M \right) h_0 + \frac{1}{F} (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_2 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_1) \\ + h_0 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 + h_1 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 + h_0 \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0 = 0, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

in \mathcal{D} , und für die Gleichung der Vortizität durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) \omega_0 = 0, \quad (4.1.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) (\omega_1 - (\omega_0 + 1)(Fh_0)) + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S \right) \omega_0 = 0, \quad (4.1.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) (\omega_2 - (\omega_1 - (\omega_0 + 1)(Fh_0))(Fh_0) - (\omega_0 + 1)(Fh_1)) \\ + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S \right) (\omega_1 - (\omega_0 + 1)(Fh_0)) + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla_S \omega_0 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_M \omega_0 = 0, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

in \mathcal{D} , gegeben.

Da des Weiteren ein Koeffizientenvergleich für Gleichung (4.1.9)

$$q_0 = \omega_0 + 1, \quad (4.1.26)$$

$$q_1 = \omega_1 - q_0(Fh_0) = \omega_1 - (\omega_0 + 1)(Fh_0), \quad (4.1.27)$$

$$q_2 = \omega_2 - q_1(Fh_0) - q_0(Fh_1) = \omega_2 - (\omega_1 - (\omega_0 + 1)(Fh_0))(Fh_0) - (\omega_0 + 1)(Fh_1), \quad (4.1.28)$$

in \mathcal{D} , ergibt, stimmen die aus Gleichung (4.1.10) folgenden asymptotischen Gleichungen mit den Gleichungen (4.1.23) bis (4.1.25) überein. Folglich führen für die Vortizität beide Möglichkeiten zum selben Ergebnis.

Darüber hinaus können die asymptotischen Gleichungen der Vortizität mittels geeigneter Anwendung der Ableitungsoperatoren curl_S und curl_M sowie den Definitionen der einzelnen asymptotischen Funktionen der Vortizität $\omega_j, j = 0, 1, 2$, wie beabsichtigt, aus den Gleichungen (4.1.17) bis (4.1.22) hergeleitet werden. Dabei erhalten wir als alternative Schreibweise

ohne Verwendung der Höhe für Gleichung (4.1.24)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) \omega_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S \right) \omega_0 \\ + (\omega_0 + 1) (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

und für Gleichung (4.1.25)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_S} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \right) \omega_2 + \left(\frac{\partial}{\partial t_M} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_S \right) \omega_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla_S \omega_0 \\ + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_M \omega_0 + \omega_1 (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0) + (\omega_0 + 1) (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_2 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_1) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Um nun wichtige Eigenschaften der rotierenden Flachwassergleichungen bezüglich mehrerer Skalen zu identifizieren, analysieren wir im folgenden Unterkapitel die asymptotischen Gleichungen (4.1.17) bis (4.1.28), in seiner Gesamtheit auch asymptotisches System genannt, unter Verwendung der beiden Mittelungsoperatoren.

4.2 Asymptotische Mehrskalanalyse

In diesem Unterkapitel analysieren wir das asymptotische System (4.1.17) bis (4.1.28) unter Verwendung der beiden Mittelungsoperatoren mit dem Ziel, wichtige Eigenschaften der asymptotischen Funktionen und damit der rotierenden Flachwassergleichungen bezüglich mehrerer Skalen zu identifizieren. Dabei kommen wiederholt die Ergebnisse aus Lemma 4.1.5, Korollar 4.1.6, Lemma 4.1.7, Bemerkung 4.1.8 und Bemerkung 4.1.9 zum Einsatz.

Zunächst stellen wir fest, dass im Fall der Abbildung \mathbf{g}_α für $\delta = \varepsilon^\alpha$ unser asymptotisches System die jeweiligen Gleichungen der Meso- beziehungsweise Submesoskala wiedergibt und folglich eine zweiskalige Erweiterung dieser Gleichungen beschreibt.

Um dies zu zeigen, betrachten wir in unserem System die asymptotischen Funktionen ohne (\mathbf{x}_M, t_M) - beziehungsweise (\mathbf{x}_S, t_S) -Abhängigkeit. Dies entspricht für die Gleichungen (4.0.1) bis (4.0.3) mit $\delta = \varepsilon$ beziehungsweise $\delta = 1$ jeweils einer Einskalenentwicklung in Raum und Zeit mit Entwicklungsparameter ε . Infolgedessen stimmt das jeweilige asymptotische System führender Ordnung im ersten Fall mit den Gleichungen der Submesoskala (3.1.11) bis (3.1.13) und im zweiten Fall, unter Verwendung einer Indexverschiebung mit $\omega_0 = \operatorname{curl}_S \mathbf{v}_0 = 0$ für die asymptotischen Funktionen der Vortizität, mit den Gleichungen der Mesoskala (3.1.4) bis (3.1.4) überein.

Im weiteren Verlauf der Analyse betrachten wir nun für alle asymptotischen Funktionen eine vollständige Skalenabhängigkeit. Diese beginnen wir mit den Gleichungen führender Ordnung (4.1.17), (4.1.20), (4.1.23) und (4.1.26).

Nach Gleichung (4.1.17) weist die Höhe in führender Ordnung h_0 keine Abhängigkeit von der

Raumskala \mathbf{x}_S auf. Es gilt somit unter Verwendung der Raummittelung

$$h_0(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = \overline{h_0}(t_S, \mathbf{x}_M, t_M). \quad (4.2.1)$$

Weiterhin ist aufgrund von Gleichung (4.1.20) die Geschwindigkeit in führender Ordnung \mathbf{v}_0 bezüglich der Skala \mathbf{x}_S divergenzfrei. Insgesamt erhalten wir mit diesen verschwindenden Ableitungen für diese asymptotischen Funktionen im Vergleich zu Bemerkung 4.1.8 stärkere Aussagen.

Bevor wir die anderen beiden Gleichungen betrachten, können wir die Vortizität direkt allgemein untersuchen. Da jede Komponente der asymptotischen Funktionen \mathbf{v}_0 und \mathbf{v}_1 beziehungsweise \mathbf{v}_2 die Wachstumsbedingungen (4.1.11) und (4.1.12) erfüllen, gilt nach Bemerkung 4.1.8 und Lemma 4.1.5 mit $\text{curl}_S \mathbf{v}_j = -\text{div}_S \mathbf{v}_j^\perp$, $j = 0, 1, 2$, auch

$$\overline{\text{curl}_S \mathbf{v}_j} = -\overline{\text{div}_S \mathbf{v}_j^\perp} = 0,$$

für $j = 0, 1, 2$. Hierdurch erhalten wir für die gemittelten asymptotischen Funktionen der Vortizität

$$\overline{\omega_0} = 0, \quad \overline{\omega_1} = \overline{\text{curl}_M \mathbf{v}_0} = \text{curl}_M \overline{\mathbf{v}_0}, \quad \overline{\omega_2} = \overline{\text{curl}_M \mathbf{v}_1} = \text{curl}_M \overline{\mathbf{v}_1},$$

da nach Annahme die Vertauschbarkeit von Raummittelung und ∇_M möglich ist. Demnach stimmen diese für $j = 1, 2$ mit der Rotation bezüglich \mathbf{x}_M der gemittelten asymptotischen Funktionen der Geschwindigkeit $\overline{\mathbf{v}_{j-1}}$ überein. In führender Ordnung verschwindet die gemittelte Vortizität, sodass wir darüber hinaus nach Gleichung (4.1.26)

$$\overline{q_0} = \overline{\omega_0} + 1 = 1$$

eine konstante gemittelte potentielle Vortizität in führender Ordnung erhalten.

In Übereinstimmung mit der Wachstumsbedingung (4.1.11) für die Vortizität beziehungsweise potentielle Vortizität gilt, ohne diese Bedingung direkt zu verwenden, zudem nach einer Mittelung von Gleichung (4.1.23)

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_S} \overline{\omega_0} + \overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \omega_0} = \overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \omega_0} + \overline{\omega_0 \text{div}_S \mathbf{v}_0} = \overline{\text{div}_S(\omega_0 \mathbf{v}_0)},$$

unter Verwendung von $\overline{\omega_0} = 0$ und $\text{div}_S \mathbf{v}_0 = 0$, beziehungsweise

$$0 = \overline{\text{div}_S(q_0 \mathbf{v}_0)}$$

mit einem entsprechenden Vorgehen.

Anschließend betrachten wir die Gleichungen erster Ordnung (4.1.18), (4.1.21), (4.1.24) beziehungsweise (4.1.29) und (4.1.27). Die Anwendung der Raummittelung auf die Gleichungen (4.1.18) und (4.1.21) führt unter anderem zu der Betrachtung des Terms $\overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \mathbf{v}_0}$. Aufgrund

der Wachstumsbedingung (4.1.11) für jede Komponente der asymptotischen Funktion führender Ordnung \mathbf{v}_0 mit $\alpha = 1/2$ erfüllt jede Komponente des dyadischen Produktes $\mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0$ die Wachstumsbedingung (4.1.12), sodass zusätzlich mit $\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 = 0$ und

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 = \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0$$

nach Lemma 4.1.5 ebenfalls

$$\overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \mathbf{v}_0} = \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0} = 0$$

gilt. Da des Weiteren h_1 und die beiden Komponenten von \mathbf{v}_1 jeweils der Wachstumsbedingung (4.1.12) genügen, verschwinden nach Korollar 4.1.6 und Lemma 4.1.5 sowohl $\overline{\nabla_S h_1}$ als auch $\overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1}$. Gemeinsam mit den Gleichungen führender Ordnung (4.1.17) und (4.1.20) sowie der Vertauschbarkeit von Grenzwertprozessen erfüllen die räumlich gemittelten Gleichungen erster Ordnung folglich

$$\frac{\partial}{\partial t_S} (F \overline{h_0}) + \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} = 0, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \overline{\mathbf{v}_0} + \overline{\mathbf{v}_0}^\perp + \nabla_M \overline{h_0} = 0. \quad (4.2.3)$$

Als Nächstes betrachten wir die gemittelte Gleichung der Vortizität. Um diese zu erhalten, wenden wir einerseits die räumliche Mittelung auf Gleichung (4.1.29) und andererseits die Rotation bezüglich \mathbf{x}_M auf Gleichung (4.2.3) an. Dann folgt im ersten Fall unter Verwendung von $\overline{\omega_0} = 0$, $\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 = 0$ sowie $\overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1} = 0$ nach Lemma 4.1.5

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \overline{\omega_1} + \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} + \overline{\operatorname{div}_S(\omega_0 \mathbf{v}_1)} + \overline{\operatorname{div}_S(\omega_1 \mathbf{v}_0)} + \operatorname{div}_M(\overline{\omega_0 \mathbf{v}_0}) = 0 \quad (4.2.4)$$

und im zweiten Fall direkt

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \overline{\omega_1} + \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} = 0. \quad (4.2.5)$$

Somit ergibt eine Differenz der Gleichungen (4.2.4) und (4.2.5)

$$\overline{\operatorname{div}_S(\omega_0 \mathbf{v}_1)} + \overline{\operatorname{div}_S(\omega_1 \mathbf{v}_0)} + \operatorname{div}_M(\overline{\omega_0 \mathbf{v}_0}) = 0.$$

Da unter Verwendung der folgenden Gleichheit

$$\mathbf{v}_0 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0^\perp + \mathbf{v}_0^\perp \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0^\perp \cdot \nabla_S \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \mathbf{v}_0^\perp$$

zusätzlich

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \operatorname{div}_S(\mathbf{v}_0^\perp \otimes \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0^\perp) &= -\frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_0 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0^\perp + \mathbf{v}_0^\perp \cdot \nabla_S \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^\perp \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \mathbf{v}_0^\perp \right) \\ &= -\mathbf{v}_0 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0^\perp - \mathbf{v}_0^\perp \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \\ &= \omega_0 \mathbf{v}_0, \end{aligned}$$

gilt, folgt mittels der räumlichen Mittelung und der Wachstumsbedingung (4.1.11) für jede Komponente der asymptotischen Funktion führender Ordnung \mathbf{v}_0 mit $\alpha = 1/2$ nach Lemma 4.1.5

$$\overline{\omega_0 \mathbf{v}_0} = -\frac{1}{2} \overline{\operatorname{div}_S(\mathbf{v}_0^\perp \otimes \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0^\perp)} = 0$$

und daher auch $\overline{\operatorname{div}_S(\omega_0 \mathbf{v}_1)} + \overline{\operatorname{div}_S(\omega_1 \mathbf{v}_0)} = 0$.

Außerdem erhalten wir für die räumlich gemittelte Gleichung (4.1.27) mithilfe von $\overline{\omega_0} = 0$ und den Eigenschaften der Raummittelung aus Bemerkung 4.1.9

$$\overline{q_1} = \overline{\omega_1} - F\overline{h_0} + \overline{\omega_0 h_0} = \overline{\omega_1} - F\overline{h_0} + \overline{\omega_0} \overline{h_0} = \overline{\omega_1} - F\overline{h_0}, \quad (4.2.6)$$

sodass eine Kombination der Gleichungen (4.2.2) und (4.2.6) in

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \overline{q_1} = \frac{\partial}{\partial t_S} (\overline{\omega_1} - F\overline{h_0}) = 0 \quad (4.2.7)$$

resultiert. Demzufolge ist die gemittelte potentielle Vortizität erster Ordnung $\overline{q_1}$ unabhängig von t_S .

Insgesamt sind die räumlich gemittelten Gleichungen (4.2.2), (4.2.3), (4.2.5) und (4.2.6) linear. Dabei hängen die einzelnen räumlich gemittelten asymptotischen Funktionen von der räumlichen Skala x_M und den zeitlichen Skalen t_S und t_M ab. Da des Weiteren in diesen Gleichungen keine Ableitungsoperatoren nach t_M auftreten, haben wir demnach in Abhängigkeit dieser Zeitskala mehrere Möglichkeiten um mit unserer Analyse fortzufahren.

Bevor wir die zeitliche Mittelung auf diese Gleichungen anwenden werden, stellen wir im Folgenden zwei Möglichkeiten der Literatur, die danach nicht weiter betrachtet werden, kurz vor.

Bemerkung 4.2.1

Die erste Möglichkeit, um mit unserer Analyse fortzufahren, folgt mit den Ausführungen in [Kle95] beziehungsweise [Mei99]. Dort wird für die Euler-Gleichungen nachgewiesen, dass bei einer Zweiskalinentwicklung im Raum und Einkalinentwicklung in der Zeit die asymptotische Druckfunktion erster Ordnung den linearisierten Euler-Gleichungen genügt und infolge durch eine Wellengleichung bestimmt werden kann.

Dies entspricht in unserem Fall der asymptotischen Höhenfunktion führender Ordnung h_0 , die Indexverschiebung erfolgt aufgrund der in Kapitel 2.2 vorgestellten unterschiedlichen Versionen der rotierenden Flachwassergleichungen (vergleiche Kapitel 5.1), die den linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen genügt. Mit den Eigenschaften dieser Gleichungen (siehe beispielsweise [Maj03]) liefert eine Anwendung des Ableitungsoperators div_M auf Gleichung (4.2.2) unter Einsatz von Gleichung (4.2.3)

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_S} \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} - \operatorname{curl}_M \overline{\mathbf{v}_0} + \Delta_M \overline{h_0} = -\frac{\partial^2}{\partial t_S^2} (F\overline{h_0}) - \overline{\omega_1} + \Delta_M \overline{h_0},$$

wobei Δ_M den Laplace-Operator bezüglich \mathbf{x}_M bezeichnet. Zudem erhalten wir mit einer

Differentiation nach t_S und mit Gleichung (4.2.7) für $\partial\bar{h}_0/\partial t_S$ die Klein-Gordon Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t_S^2} \left(F \left(\frac{\partial}{\partial t_S} \bar{h}_0 \right) \right) + F \left(\frac{\partial}{\partial t_S} \bar{h}_0 \right) - \Delta_M \left(\frac{\partial}{\partial t_S} \bar{h}_0 \right) = 0.$$

Die zweite Möglichkeit folgt mit den Ausführungen in [EM96] beziehungsweise [Maj03]. Dort wird für die rotierenden Flachwassergleichungen nachgewiesen, dass bei einer Einskalenentwicklung im Raum und Zweiskalenentwicklung in der Zeit unter Verwendung der Formel nach Duhamel über schnelle Wellen gemittelt werden kann.

Mit dem linearen Operator

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}_0, \bar{h}_0) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_0^\perp + \nabla_M \bar{h}_0 \\ \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_0 \end{pmatrix}$$

ist diese Fortsetzung auch in unserem Fall möglich, allerdings wird nach einer Integration der Gleichung (4.1.19) über t_S unser gemitteltas asymptotisches System eine \mathbf{x}_S -Abhängigkeit, die in [EM96] nicht vorliegt, aufweisen.

Um schließlich die Gleichungen (4.2.2) und (4.2.3) von der t_S -Abhängigkeit zu lösen, wenden wir im weiteren Verlauf die zeitliche Mittelung an. Da die beiden Mittelungsoperatoren unabhängig voneinander sind, erfüllen die räumlich gemittelten asymptotischen Funktionen $\bar{\mathbf{v}}_0$ und \bar{h}_0 ebenfalls die Wachstumsbedingung (4.1.13) in der Zeit jeweils mit $\beta = 1$, sodass wir für diese Gleichungen mittels der zeitlichen Mittelung und der Vertauschbarkeit von Grenzwertprozessen

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle^\perp + \nabla_M \langle \bar{h}_0 \rangle = 0, \quad (4.2.8)$$

$$\operatorname{div}_M \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle = 0 \quad (4.2.9)$$

erhalten. Folglich liegen die räumlich und zeitlich gemittelten asymptotischen Funktionen $\langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle$ und $\langle \bar{h}_0 \rangle$ im quasi-geostrophischen Gleichgewicht. Weiterhin erhalten wir mit der räumlich und zeitlich gemittelten Vortizität erster Ordnung

$$\langle \bar{\omega}_1 \rangle = \langle \operatorname{curl}_M \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle = \operatorname{curl}_M \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle = -\operatorname{div}_M \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle^\perp$$

aus Gleichung (4.2.8)

$$\langle \bar{\omega}_1 \rangle = \Delta_M \langle \bar{h}_0 \rangle. \quad (4.2.10)$$

Zur Schließung dieses Gleichungssystems benötigen wir darüber hinaus Aussagen über

$$\frac{\partial}{\partial t_M} \left(\langle \bar{\omega}_1 \rangle - F \langle \bar{h}_0 \rangle \right),$$

wofür wir die Gleichungen zweiter Ordnung (4.1.19) und (4.1.22) verwenden werden.

Zunächst betrachten wir unter Verwendung von $\nabla_S h_0 = 0$ und $\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 = 0$ die Differenz

zwischen den beiden Gleichungen (4.1.21) und (4.2.2). Es folgt

$$\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0 = \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_0, \quad (4.2.11)$$

womit Gleichung (4.1.22) zu

$$\frac{\partial}{\partial t_S} h_1 + \frac{\partial}{\partial t_M} \bar{h}_0 + \frac{1}{F} (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_2 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_1) + \operatorname{div}_S (h_1 \mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M \bar{h}_0 + \bar{h}_0 \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_0 = 0$$

wird. Dann erhalten wir mittels einer anschließenden räumlichen Mittelung unter Verwendung von $\overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_2} = 0$ nach Lemma 4.1.5 und den Eigenschaften der Raummittelung aus Bemerkung 4.1.9

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \bar{h}_1 + \frac{\partial}{\partial t_M} \bar{h}_0 + \frac{1}{F} \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_1 + \overline{\operatorname{div}_S (h_1 \mathbf{v}_0)} + \bar{\mathbf{v}}_0 \cdot \nabla_M \bar{h}_0 + \bar{h}_0 \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_0 = 0. \quad (4.2.12)$$

Des Weiteren addieren wir zu Gleichung (4.1.19) die beiden folgenden Terme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 (\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0 - \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_0) &= 0, \\ \mathbf{v}_1 \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 &= 0, \end{aligned}$$

die nach Gleichung (4.2.11) beziehungsweise (4.1.20) verschwinden, hinzu.

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \mathbf{v}_1 + \frac{\partial}{\partial t_M} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1^\perp + \nabla_S h_2 + \nabla_M h_1 + \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_1 + \operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_0 + \operatorname{div}_M \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0 \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_0 = 0.$$

Demzufolge erhalten wir mittels einer nachfolgenden räumlichen Mittelung unter Ausnutzung von $\overline{\nabla_S h_0} = 0$ nach Korollar 4.1.6 und den Eigenschaften der Raummittelung aus Bemerkung 4.1.9

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_S} \bar{\mathbf{v}}_1 + \frac{\partial}{\partial t_M} \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{v}}_1^\perp + \nabla_M \bar{h}_1 + \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0} - \bar{\mathbf{v}}_0 \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_0 \\ + \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_1} + \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, verwenden wir die aus Bemerkung 4.1.9 bekannte Differenz

$$\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}_0, \quad (4.2.14)$$

sodass wir

$$\mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0 \otimes \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{v}}_0 \otimes \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_0 \otimes \bar{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{v}'_0 \otimes \mathbf{v}'_0$$

erhalten.

Da $\overline{\mathbf{v}'_0} = 0$ nach Bemerkung 4.1.9 gilt, folgt hierfür mittels einer räumlichen Mittelung

$$\overline{\mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0} = \bar{\mathbf{v}}_0 \otimes \bar{\mathbf{v}}_0 + \overline{\mathbf{v}'_0 \otimes \mathbf{v}'_0}.$$

Daraufhin erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0} - \overline{\mathbf{v}_0} \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} &= \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} \otimes \overline{\mathbf{v}_0} + \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}'_0 \otimes \mathbf{v}'_0} - \overline{\mathbf{v}_0} \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} \\ &= \overline{\mathbf{v}_0} \cdot \nabla_M \overline{\mathbf{v}_0} + \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}'_0 \otimes \mathbf{v}'_0}. \end{aligned}$$

und Gleichung (4.2.13) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_S} \overline{\mathbf{v}_1} + \frac{\partial}{\partial t_M} \overline{\mathbf{v}_0} + \overline{\mathbf{v}_0} \cdot \nabla_M \overline{\mathbf{v}_0} + \overline{\mathbf{v}_1}^\perp + \nabla_M \overline{h_1} + \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}'_0 \otimes \mathbf{v}'_0} \\ + \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_1} + \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, die fehlende Gleichung des räumlich und zeitlich gemittelten quasi-geostrophischen Gleichgewichts herzuleiten. Dazu setzen wir

$$\overline{\mathbf{N}_0}(t_S, \mathbf{x}_M, t_M) := \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}'_0 \otimes \mathbf{v}'_0} + \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_1} + \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_0}$$

sowie

$$\overline{\mathbf{v}_0}(t_S, \mathbf{x}_M, t_M) := \operatorname{curl}_M \overline{\mathbf{N}_0} - F \overline{\operatorname{div}_S (h_1 \mathbf{v}_0)}$$

und wenden die Rotation bezüglich \mathbf{x}_M auf Gleichung (4.2.15) an. Infolgedessen erhalten wir gemeinsam mit Gleichung (4.2.12) die Differenz

$$\frac{\partial}{\partial t_S} (\overline{\omega_2} - F \overline{h_1}) + \frac{\partial}{\partial t_M} (\overline{\omega_1} - F \overline{h_0}) + \overline{\mathbf{v}_0} \cdot \nabla_M (\overline{\omega_1} - F \overline{h_0}) + (\overline{\omega_1} - F \overline{h_0}) \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} + \overline{\nu_0} = 0,$$

die unabhängig von der räumlich gemittelten asymptotischen Funktion erster Ordnung $\overline{\mathbf{v}_1}$ ist. Da nach Gleichung (4.2.7)

$$\overline{\omega_1} - F \overline{h_0} = \langle \overline{\omega_1} - F \overline{h_0} \rangle = \langle \overline{\omega_1} \rangle - F \langle \overline{h_0} \rangle$$

und nach Lemma 4.1.7, die räumlich gemittelten asymptotischen Funktionen $\overline{\omega_2}$ und $\overline{h_1}$ erfüllen jeweils die Wachstumsbedingung (4.1.14),

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t_S} (\overline{\omega_2} - F \overline{h_1}) \right\rangle = 0$$

gilt, folgt mit der zeitlichen Mittelung und den entsprechenden Eigenschaften aus Bemerkung 4.1.9 die fehlende Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t_M} (\langle \overline{\omega_1} \rangle - F \langle \overline{h_0} \rangle) + \langle \overline{\mathbf{v}_0} \rangle \cdot \nabla_M (\langle \overline{\omega_1} \rangle - F \langle \overline{h_0} \rangle) + (\langle \overline{\omega_1} \rangle - F \langle \overline{h_0} \rangle) \operatorname{div}_M \langle \overline{\mathbf{v}_0} \rangle + \langle \overline{\nu_0} \rangle = 0.$$

Damit ist die Herleitung abgeschlossen und wir erhalten für die räumlich und zeitlich gemittelten asymptotischen Funktionen $\langle \overline{h_0} \rangle$, $\langle \overline{\mathbf{v}_0} \rangle$ und $\langle \overline{\omega_1} \rangle$ mit $\operatorname{div}_M \langle \overline{\mathbf{v}_0} \rangle = 0$ insgesamt das nicht-

geschlossene Gleichungssystem

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle^\perp + \nabla_M \langle \bar{h}_0 \rangle = 0, \quad (4.2.16)$$

$$\langle \bar{\omega}_1 \rangle = \Delta_M \langle \bar{h}_0 \rangle, \quad (4.2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_M} \left(\langle \bar{\omega}_1 \rangle - F \langle \bar{h}_0 \rangle \right) + \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle \cdot \nabla_M \left(\langle \bar{\omega}_1 \rangle - F \langle \bar{h}_0 \rangle \right) + \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle = 0. \quad (4.2.18)$$

Folglich bedeutet dies in Abhängigkeit der Mesoskala (\mathbf{x}_M, t_M) und Submesoskala (\mathbf{x}_S, t_S) , dass die zeitlich veränderte potentielle Vortizität des quasi-geostrophischen Gleichgewichts bezüglich der Mesoskala im Gegensatz zur bekannten Einkalenentwicklung aus [Maj03] um den Term $\langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle$ verschoben ist.

Wie die Herleitung gezeigt hat, entsteht dieser Term dabei durch die beiden Mittelungsoperatoren bezüglich der Submesoskala aufgrund der Nichtlinearität der Ausgangsgleichungen. Eine erste Interpretation des zusätzlichen Terms ist in der folgenden Bemerkung zu finden.

Bemerkung 4.2.2

Um den Einfluss des Terms $\langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle$ auf das räumlich und zeitlich gemittelte quasi-geostrophische Gleichgewicht (4.2.16) bis (4.2.18) bezüglich der Mesoskala anschaulich zu beschreiben, nehmen wir an, dass eine Funktion

$$\langle \bar{h}_\nu \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, (\mathbf{x}_M, t_M) \mapsto \langle \bar{h}_\nu \rangle (\mathbf{x}_M, t_M)$$

mit

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle = \frac{\partial}{\partial t_M} \left(F \langle \bar{h}_\nu \rangle \right) + \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle \cdot \nabla_M \left(F \langle \bar{h}_\nu \rangle \right)$$

existiert, woraufhin Gleichung (4.2.18) zu

$$\frac{\partial}{\partial t_M} \left(\langle \bar{\omega}_1 \rangle - F \langle \bar{h}_0 \rangle + F \langle \bar{h}_\nu \rangle \right) + \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle \cdot \nabla_M \left(\langle \bar{\omega}_1 \rangle - F \langle \bar{h}_0 \rangle + F \langle \bar{h}_\nu \rangle \right) = 0$$

wird.

Somit können wir die Funktion $\langle \bar{h}_\nu \rangle$ im Vergleich zu Gleichung (3.1.6) als artifizielle sich in der Zeit verändernde Bodenhöhe auffassen, die das quasi-geostrophische Gleichgewicht verschiebt. Allerdings verbleibt das Gleichungssystem (4.2.16) bis (4.2.18) auch mit dieser Darstellung nicht geschlossen.

Zur Schließung dieses Systems wird eine weitere Gleichung für den zusätzlichen Term $\langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle$ benötigt. Diese kann aus dem asymptotischen System (4.1.17) bis (4.1.28) hergeleitet werden, wobei diese Gleichung dann von Termen höherer Ordnung abhängt. Anschließend müssen für diese Terme wiederum neue Gleichungen, die von neuen Termen höherer Ordnung abhängen, ermittelt werden, sodass auf diesem Wege keine Schließung zu erreichen ist. Eine analoge Schlussfolgerung ist etwa für die Reynolds-Mittelung bei turbulenten Strömungen, siehe beispielsweise [Hin59] und [CA89], bekannt.

Demnach können nur zusätzliche Annahmen eine Schließung des Systems ermöglichen. Im Fall

von Mehrskalentwicklungen ist eine übersichtliche Darstellung von bekannten Schließungsansätzen, die wir für unser Gleichungssystem hier nicht verwenden werden, in [Yan12] und [PY15] zu finden.

Da die Darstellung des zusätzlichen Terms aus Bemerkung 4.2.2 mit der Gleichung führender Ordnung bezüglich der Submesoskala beziehungsweise Zwischenvariablen aus Kapitel 3 übereinstimmt, sollte zukünftig theoretisch oder numerisch untersucht werden, inwiefern tatsächlich ein Zusammenhang existiert.

Zwei weitere mögliche Ansätze zur Schließung dieses Gleichungssystems, die zukünftig ebenfalls genauer betrachtet werden sollten, stellen wir im Folgenden vor.

Mit dem ersten Ansatz zur Schließung des Gleichungssystems (4.2.16) bis (4.2.18) leiten wir aus unserem asymptotischen System eine Gleichung für den zusätzlichen Term her und können infolgedessen, obwohl hierdurch wie oben beschrieben keine Schließung erfolgen kann, einige Eigenschaften von $\langle \bar{v}_0 \rangle$ bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst die folgenden Terme

$$\overline{\operatorname{div}_S (h_1 \mathbf{v}_0)}, \quad \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_1}, \quad \overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_0}$$

aus den Gleichungen (4.2.12) und (4.2.15) genauer.

Beispielsweise gilt für den ersten Term mit $r := \varepsilon^{-1}$ und $\Omega_r := B_{\mathbf{x}_S}(r) \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A_r &:= \frac{1}{\lambda(\Omega_r)} \int_{\Omega_r} \operatorname{div}_S (h_1 \mathbf{v}_0) \, d\mathbf{x}_S = \frac{1}{\lambda(\Omega_r)} \int_{\partial\Omega_r} h_1 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_S) \, dS \\ &= \mathcal{O}(r^{-2})\mathcal{O}(r)o(r^{1+\alpha}), \quad r \rightarrow \infty, \\ &= o(r^\alpha), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

für alle $\alpha > 0$, wobei wir analog zum Beweis des Lemmas 4.1.5 den Gaußschen Integralsatz sowie die Wachstumsbedingungen (4.1.11) und (4.1.12) verwendet haben. Ein vergleichbares Vorgehen ist auch für die beiden anderen Terme möglich.

Demzufolge weist der Term A_r im Gegensatz zu Lemma 4.1.5 ein stärkeres Wachstum, das wir als *sublineares Wachstum höherer Ordnung* bezeichnen, auf. Da die Funktionen \bar{h}_0 , $\bar{\mathbf{v}}_0$, \bar{h}_1 , $\bar{\mathbf{v}}_1$ und $\overline{\mathbf{v}'_0 \otimes \mathbf{v}'_0}$ in den Gleichungen (4.2.12) und (4.2.15) physikalisch sinnvolle Lösungen beschreiben und $\lim_{r \rightarrow \infty} A_r = \overline{\operatorname{div}_S h_1 \mathbf{v}_0}$ gilt, müssen wir dieses Wachstum unterbinden. Hierfür setzen wir

$$\overline{\operatorname{div}_S (h_1 \mathbf{v}_0)} = 0, \tag{4.2.19}$$

$$\overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_1} = 0, \tag{4.2.20}$$

$$\overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_0} = 0, \tag{4.2.21}$$

wodurch zusätzliche Bedingungen an die asymptotischen Funktionen h_0 , h_1 und \mathbf{v}_0 gegeben sind.

Als Nächstes leiten wir die Schließungsgleichung her. Dazu multiplizieren wir Gleichung (4.1.18)

mit \mathbf{v}_0 zu

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 \right) + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 \right) + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S h_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_M h_0 = 0$$

und wenden daraufhin die räumliche Mittelung an. Da mit Gleichung (4.2.14) und Bemerkung 4.1.9

$$\overline{\mathbf{v}_0^2} = \overline{\mathbf{v}_0}^2 + \overline{\mathbf{v}'_0{}^2}$$

gilt und aus der Wachstumsbedingung (4.1.11) mit $\alpha = 1/3$ für jede Komponente der asymptotischen Funktion führender Ordnung \mathbf{v}_0 nach Lemma 4.1.5

$$\overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 \right)} = \overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 \right)} + \overline{\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 \right) \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0} = \overline{\operatorname{div}_S \left(\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 \right) \mathbf{v}_0 \right)} = 0$$

folgt, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \left(\frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}_0}^2 + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}'_0{}^2} \right) + \overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S h_1} + \overline{\mathbf{v}_0} \cdot \nabla_M \overline{h_0} = 0.$$

Dies reduziert sich gemeinsam mit Gleichung (4.2.3) zu

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_S} \overline{\mathbf{v}'_0{}^2} + \overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S h_1} = 0.$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der beiden Mittelungsoperatoren erfüllt jede Komponente der Funktion \mathbf{v}'_0 die Wachstumsbedingung (4.1.13) in der Zeit mit $\beta = 1/2$ und wir erhalten folglich mit einer anschließenden zeitlichen Mittelung

$$0 = \left\langle \overline{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S h_1} \right\rangle = \left\langle \overline{\operatorname{div}_S (h_1 \mathbf{v}_0)} \right\rangle.$$

Dies gilt unabhängig von Gleichung (4.2.19).

Weiterhin folgt aus den Gleichungen (4.1.18) und (4.2.14)

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_0{}^\perp + \nabla_S h_1 = 0,$$

das heißt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_S} v'_{0A} + v_{0A} \frac{\partial}{\partial x_S} v'_{0A} + v_{0B} \frac{\partial}{\partial y_S} v'_{0A} - v'_{0B} + \frac{\partial}{\partial x_S} h_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_S} v'_{0B} + v_{0A} \frac{\partial}{\partial x_S} v'_{0B} + v_{0B} \frac{\partial}{\partial y_S} v'_{0B} + v'_{0A} + \frac{\partial}{\partial y_S} h_1 &= 0 \end{aligned}$$

bezüglich der Komponentenschreibweise mit $\mathbf{v}_0 = (v_{0A}, v_{0B})^T$.

Eine Multiplikation dieser Gleichungen jeweils mit v'_{0A} beziehungsweise v'_{0B} resultiert dann in

$$v'_{0A} \frac{\partial}{\partial t_S} v'_{0A} + v'_{0A} v_{0A} \frac{\partial}{\partial x_S} v'_{0A} + v'_{0A} v_{0B} \frac{\partial}{\partial y_S} v'_{0A} - v'_{0A} v'_{0B} + v'_{0A} \frac{\partial}{\partial x_S} h_1 = 0, \quad (4.2.22)$$

$$v'_{0A} \frac{\partial}{\partial t_S} v'_{0B} + v'_{0A} v_{0A} \frac{\partial}{\partial x_S} v'_{0B} + v'_{0A} v_{0B} \frac{\partial}{\partial y_S} v'_{0B} + v'_{0A} v'_{0A} + v'_{0A} \frac{\partial}{\partial y_S} h_1 = 0, \quad (4.2.23)$$

$$v'_{0B} \frac{\partial}{\partial t_S} v'_{0A} + v'_{0B} v_{0A} \frac{\partial}{\partial x_S} v'_{0A} + v'_{0B} v_{0B} \frac{\partial}{\partial y_S} v'_{0A} - v'_{0B} v'_{0B} + v'_{0B} \frac{\partial}{\partial x_S} h_1 = 0, \quad (4.2.24)$$

$$v'_{0B} \frac{\partial}{\partial t_S} v'_{0B} + v'_{0B} v_{0A} \frac{\partial}{\partial x_S} v'_{0B} + v'_{0B} v_{0B} \frac{\partial}{\partial y_S} v'_{0B} + v'_{0B} v'_{0A} + v'_{0B} \frac{\partial}{\partial y_S} h_1 = 0. \quad (4.2.25)$$

und die Gleichungen (4.2.23) und (4.2.24) addieren sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t_S} (v'_{0A} v'_{0B}) + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_S (v'_{0A} v'_{0B}) + v'_{0A}{}^2 - v'_{0B}{}^2 + v'_{0A} \frac{\partial}{\partial y_S} h_1 + v'_{0B} \frac{\partial}{\partial x_S} h_1 = 0. \quad (4.2.26)$$

Infolgedessen vereinfachen sich die Gleichungen (4.2.22), (4.2.25) und (4.2.26) nach einer räumlichen und zeitlichen Mittelung unter Verwendung der angepassten Wachstumsbedingungen, sodass

$$\begin{aligned} \langle \overline{v'_{0A} v'_{0B}} \rangle &= \left\langle \overline{v'_{0A} \frac{\partial}{\partial x_S} h_1} \right\rangle, \\ -\langle \overline{v'_{0A} v'_{0B}} \rangle &= \left\langle \overline{v'_{0B} \frac{\partial}{\partial y_S} h_1} \right\rangle, \\ \langle \overline{v'_{0B}{}^2} \rangle - \langle \overline{v'_{0A}{}^2} \rangle &= \left\langle \overline{v'_{0A} \frac{\partial}{\partial y_S} h_1} \right\rangle + \left\langle \overline{v'_{0B} \frac{\partial}{\partial x_S} h_1} \right\rangle \end{aligned}$$

folgt. Da wir für den zusätzlichen Term $\langle \overline{v_0} \rangle$ mit den Gleichungen (4.2.19) bis (4.2.21) zudem

$$\begin{aligned} \langle \overline{v_0} \rangle &= \text{curl}_M \langle \overline{\mathbf{N}_0} \rangle = \text{curl}_M \left(\text{div}_M \langle \overline{\mathbf{v}'_0 \otimes \mathbf{v}'_0} \rangle \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_M^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_M^2} \right) \langle \overline{v'_{0A} v'_{0B}} \rangle + \frac{\partial^2}{\partial x_M \partial y_M} \left(\langle \overline{v'_{0B}{}^2} \rangle - \langle \overline{v'_{0A}{}^2} \rangle \right) \end{aligned}$$

erhalten, hängt dieser von der asymptotischen Funktion erster Ordnung h_1 ab.

Daher können wir nun untersuchen, inwiefern diese Funktion in Abhängigkeit der Submesoskala den Term $\langle \overline{v_0} \rangle$ und somit unsere gemittelten Gleichungen beeinflusst. Dazu betrachten wir die beiden folgenden Fälle.

Im ersten Fall setzen wir $\nabla_S h_1 = 0$, das heißt, die Höhe in erster Ordnung h_1 hängt nicht von der Skala \mathbf{x}_S ab. Dann gilt

$$\langle \overline{v'_{0A} v'_{0B}} \rangle = 0, \quad \langle \overline{v'_{0B}{}^2} \rangle = \langle \overline{v'_{0A}{}^2} \rangle$$

und im Weiteren

$$\langle \overline{v_0} \rangle = 0.$$

Demnach wird unser gemitteltes Gleichungssystem (4.2.16) bis (4.2.17) in Abhängigkeit von (\mathbf{x}_M, t_M) nicht von der Skala \mathbf{x}_S beeinflusst und stimmt mit dem klassischen quasi-geostrophischen Gleichgewicht überein.

Im zweiten Fall betrachten wir die schwächere Annahme

$$h_1(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = o(\|\mathbf{x}_S\|^\gamma), \quad \mathbf{x}_S \in \partial B_{\mathbf{x}_S}(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.2.27)$$

für alle $\gamma > 0$, das heißt, die Höhe in erster Ordnung h_1 erfüllt die sublineare Wachstumsbedingung (4.1.11). Demzufolge erhalten wir mit $r := \varepsilon^{-1}$ und $\Omega_r := B_{\mathbf{x}_S}(r) \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(\Omega_r)} \int_{\Omega_r} \operatorname{div}_S h_1 \mathbf{v}_0 \, d\mathbf{x}_S &= \frac{1}{\lambda(\Omega_r)} \int_{\partial\Omega_r} h_1 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_S) \, dS \\ &= \mathcal{O}(r^{-2}) \mathcal{O}(r) o(r^{\gamma+\alpha}), \quad r \rightarrow \infty, \\ &= o(1), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

für $\gamma = \alpha = 1/2$, in Übereinstimmung mit Gleichung (4.2.19).

Letzteres diskutieren wir in der folgenden Bemerkung zusammen mit einer Verallgemeinerung dieser Annahme genauer.

Bemerkung 4.2.3

Zunächst zeigen wir im Allgemeinen, wie die Wachstumsbedingung (4.2.27) als Erweiterung des Lemmas 4.1.2 formuliert werden kann. Dazu betrachten wir für eine gleichmäßig beschränkte Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich \mathbf{x} , t und ε mit nicht-negativen reellen Zahlen s und T die asymptotische Mehrskalenentwicklung

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j\gamma} \Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) + o(\varepsilon^{k\gamma}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

für jedes $k = 0, 1, \dots, n$ und alle $\gamma > 0$, die außerdem in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ gleichmäßig gültig ist.

Dann folgt mit dem Vorgehen aus Lemma 4.1.2 sowie Korollar 4.1.3 für die asymptotische Funktion führender Ordnung die Wachstumsbedingung

$$\Phi_0(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o(\|\mathbf{x}\|^\alpha), \quad \|\mathbf{x}\| = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

für alle $\alpha > 0$, und für die jeweiligen asymptotischen Funktionen höherer Ordnung die Wachstumsbedingung

$$\Phi_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)) = o(\|\mathbf{x}\|^\gamma), \quad \|\mathbf{x}\| = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

für alle $\gamma > 0$.

Daraufhin können wir diese Wachstumsbedingungen mit den Parametern α und γ so wählen, dass analog zu Lemma 4.1.5 beziehungsweise Korollar 4.1.6 räumlich gemittelte Terme der Form

$$\overline{\left(\prod_{\substack{j=1 \\ p(j) \in \{0, \dots, n\}}}^m \Phi_{p(j)} \right)} = 0,$$

für beliebige $m \in \mathbb{N}_0$ und alle Kombinationsmöglichkeiten p , siehe zum Beispiel die Bedingun-

gen (4.2.19) bis (4.2.21), unter Verwendung von $\alpha = \gamma = m^{-1}$ verschwinden. Dabei entstehen derartige Terme im Rahmen der Schließungsstrategie, sobald Gleichungen für

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \overline{\prod_{\substack{j=1 \\ p(j) \in \{0, \dots, n\}}}^{m-1} \Phi_{p(j)}}$$

ermittelt werden.

Darüber hinaus gilt $\gamma \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, das heißt, die Größe der Wachstumsparameter hängt von der Anzahl der asymptotischen Funktionen ab, und es folgt $\varepsilon^\gamma \rightarrow 1$, da $\varepsilon > 0$. Damit weist die hier verwendete Mehrskalenteilwicklung keinen kleinen Parameter ε mehr auf und kann infolgedessen die Lösung $\Phi(\mathbf{x}, t; \varepsilon)$ des eigentlichen Problems nicht mehr asymptotisch darstellen. Stattdessen wird hierdurch die asymptotische Lösung des Problems für $\varepsilon = 1$ beschrieben.

Diese Folgerung stimmt mit einem bekannten Vorgehen der asymptotischen Analyse überein. Obwohl die einzelnen Rechenschritte bei der Herleitung asymptotischer Systeme die Existenz eines kleinen Parameters ε voraussetzen, wird nichtsdestotrotz das gleiche System auch im Fall $\varepsilon = 1$ verwendet und der Erfolg dieses Vorgehens insbesondere als Kriterium für die Güte einer asymptotischen Approximation angesehen, vergleiche [Yan12]. Ein Beispiel hierfür ist nach Yano in [Yan92] zu finden.

Demnach stellt sich zukünftig die Frage, inwieweit ein Zusammenhang zwischen der verwendeten Mehrskalenteilwicklung und einer asymptotischen Approximation im Fall $\varepsilon = 1$ theoretisch oder numerisch nachgewiesen werden kann.

Der zweite Ansatz das Gleichungssystem (4.2.16) bis (4.2.18) zu schließen, besteht darin eine explizite Schließungsgleichung aufzustellen. Dazu suchen wir für die Größen $\langle \bar{h}_0 \rangle$, $\langle \bar{v}_0 \rangle$, $\langle \bar{\omega}_0 \rangle$ sowie $\langle \bar{\mathbf{N}}_0 \rangle$ beziehungsweise $\langle \bar{v}_0 \rangle$, die jeweils nur von der Skala (\mathbf{x}_M, t_M) abhängen, ein Gleichungssystem in Abhängigkeit der Größen $\langle \bar{h} \rangle^\varepsilon$, $\langle \bar{v} \rangle^\varepsilon$, $\langle \bar{\omega} \rangle^\varepsilon$ sowie $\langle \bar{\mathbf{N}} \rangle^\varepsilon$ beziehungsweise $\langle \bar{v} \rangle^\varepsilon$, das im singulären Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen unsere gemittelten Gleichungen (4.2.16) bis (4.2.18) mit $\langle \bar{h} \rangle^\varepsilon \rightarrow \langle \bar{h}_0 \rangle$, $\langle \bar{v} \rangle^\varepsilon \rightarrow \langle \bar{v}_0 \rangle$, $\langle \bar{\omega} \rangle^\varepsilon \rightarrow \langle \bar{\omega}_0 \rangle$ sowie $\langle \bar{\mathbf{N}} \rangle^\varepsilon \rightarrow \langle \bar{\mathbf{N}}_0 \rangle$ beziehungsweise $\langle \bar{v} \rangle^\varepsilon \rightarrow \langle \bar{v}_0 \rangle$ konvergiert und teilweise durch unsere asymptotische Mehrskalenteilwicklung motiviert wird.

Aufgrund dessen betrachten wir die Gleichungen der Mesoskala (3.2.1) bis (3.2.2) mit $\alpha = 0$. Dabei erweitern wir die Gleichung der Geschwindigkeit um einen zusätzlichen Term und verändern die Gleichung der Höhe nicht. Dies wird durch unsere asymptotische Mehrskalenteilwicklung motiviert, da der dortige zusätzliche Term vor allem aus Geschwindigkeitsanteilen besteht. Das heißt, wir betrachten

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{N} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}^\perp + \frac{1}{\varepsilon} \nabla h = 0, \quad (4.2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + \frac{1}{\varepsilon F} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.2.29)$$

wobei wir hier und im Weiteren aus Gründen der Übersichtlichkeit die Notation der Mittelungsoperatoren $\bar{\cdot}$ sowie $\langle \cdot \rangle$, die Hochstellung \cdot^ε und die Tiefstellung \cdot_M jeweils weglassen.

Folglich erhalten wir für die Gleichung der potentiellen Vortizität

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega - Fh) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\omega - Fh) + \nu = -\omega \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (4.2.30)$$

mit $\nu = \operatorname{curl} \mathbf{N}$.

Da dieses Gleichungssystem nicht geschlossen ist, benötigen wir eine weitere Gleichung für \mathbf{N} . Zu diesem Zweck wählen wir beispielsweise

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{N} + \mathbf{N}^\perp - \mathbf{v} = 0, \quad (4.2.31)$$

sodass für die Gleichungen (4.2.28) bis (4.2.31) im Fall des singulären Grenzwerts $\varepsilon \rightarrow 0$ mittels

$$\mathcal{E}_N = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} Fh^2 + \frac{1}{2} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}$$

die Beweisstrategie nach Klainerman und Majda [KM81], [KM82], die wir bereits in Kapitel 3.2 für die Gleichungen (3.2.1) bis (3.2.3) verwendet haben, nutzbar ist.

Demzufolge konvergieren unter geeigneten Voraussetzungen an die Anfangsbedingungen diese Gleichungen im singulären Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen

$$\mathbf{v}_0^\perp + \nabla h_0 = 0, \quad (4.2.32)$$

$$\omega_0 = \Delta h_0, \quad (4.2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_0 - Fh_0) + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla(\omega_0 - Fh_0) + \nu_0 = 0, \quad (4.2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_0^\perp - \mathbf{v}_0 = 0 \quad (4.2.35)$$

für $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_0$, $h \rightarrow h_0$, $\omega \rightarrow \omega_0$ sowie $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}_0$ beziehungsweise $\nu = \operatorname{curl} \mathbf{N} \rightarrow \operatorname{curl} \mathbf{N}_0 = \nu_0$. Somit stimmen die Gleichungen (4.2.32) bis (4.2.34) mit dem räumlich und zeitlich gemittelten quasi-geostrophischen Gleichgewicht bezüglich der Mesoskala (4.2.16) bis (4.2.18) überein.

Allerdings hat dieser Ansatz einen entscheidenden Nachteil. Im Gegensatz zu den Gleichungen (4.2.28) bis (4.2.30) beziehungsweise (4.2.32) bis (4.2.34) wird Gleichung (4.2.31) beziehungsweise (4.2.35) weder durch unsere asymptotische Mehrskalenanalyse motiviert noch weist sie eine geophysikalische Interpretation auf. Die obige Wahl der Schließungsgleichung erfolgte nur, um die genannte Beweisstrategie zu ermöglichen.

Wie in Zukunft eine sinnvolle Schließungsgleichung konstruiert werden könnte, diskutieren wir in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 4.2.4

Zur Konstruktion einer geophysikalisch sinnvollen Schließungsgleichung für die Gleichungen (4.2.16) bis (4.2.18) kann es gegebenenfalls hilfreich sein die semi-geostrophischen Gleichungen aus [Hos75], siehe beispielsweise auch [TTM08], zu betrachten.

Diese Gleichungen stellen ein geophysikalisches Modell zur Beschreibung von Prozessen und

Dynamiken bezüglich der Submesoskala dar und sind in dimensionsbehafteter Form durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_G + \mathbf{u}_{AG}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_G + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_{AG} &= 0, \\ g \frac{\theta}{\theta_0} &= \frac{\partial}{\partial z} \Phi, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_G + \mathbf{u}_{AG}) \cdot \nabla \right) \theta &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_{AG} &= 0, \\ f \mathbf{u}_G &= \mathbf{k} \times \nabla_h \Phi \end{aligned}$$

mit $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^T$, $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)^T$ sowie $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$ gegeben. Dabei beschreibt hier $\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \mathbf{u}_{AG}$ die dreidimensionale Geschwindigkeit, \mathbf{u}_G den geostrophischen und \mathbf{u}_{AG} den nicht-geostrophischen Anteil der Geschwindigkeit, θ die potentielle Temperatur, Φ das Geopotential, f den Coriolisparameter, g die Erdbeschleunigung sowie θ_0 die konstante potentielle Bezugstemperatur.

Da innerhalb der Modellierung unterschiedliche physikalische Variablen und Raumdimensionen zum Einsatz kommen, stimmen diese Gleichungen nicht mit den Gleichungen (4.2.16) bis (4.2.18) beziehungsweise (4.2.32) bis (4.2.34) aus unserer asymptotischen Mehrskalenganalyse überein. Allerdings beschreiben beide Gleichungssysteme das quasi-geostrophische Gleichgewicht und weisen unter Verwendung der Rotation mit dem Ansatz

$$\mathbf{N}_0 := \mathbf{u}_{AG} \cdot \nabla \mathbf{u}_G + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_{AG}$$

eine ähnliche Struktur auf.

Daher könnte es gegebenenfalls zielführend sein, eine asymptotische Mehrskalinentwicklung auf die rotierenden Euler-Gleichungen anzuwenden, um mittels Mittelungsoperatoren sowohl die quasi- als auch die semi-geostrophischen Gleichungen zu erhalten. Infolgedessen kann untersucht werden, inwiefern die zusätzlichen physikalischen Variablen in den semi-geostrophischen Gleichungen zur Schließung der Gleichungen (4.2.28) bis (4.2.29) beitragen.

Insgesamt ist damit der theoretische Teil dieser Arbeit abgeschlossen und wir wenden uns dem numerischen Teil zu.

5 Vollständig-impliziter Algorithmus

In diesem Kapitel leiten wir für die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen ohne Bodenhöhe in Erhaltungsform

$$\frac{\partial}{\partial t} H + \operatorname{div}(H\mathbf{v}) = 0, \quad (5.0.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\mathbf{v}) + \operatorname{div}(H\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\operatorname{Ro}} H\mathbf{v}^\perp + \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \nabla \left(\frac{1}{2} H^2 \right) = 0 \quad (5.0.2)$$

bei hinreichend kleinen Froude-Zahlen sowie beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$ mit den Ergebnissen der asymptotischen Mehrskalanalyse aus Kapitel 4.2 einen vollständig-impliziten Algorithmus zweiter Ordnung in Raum und Zeit her. Dazu diskutieren wir einleitend Grundsätzliches zu den Schwierigkeiten, dem Vorgehen und der Motivation bezüglich der numerischen Realisierung dieser Zielsetzung.

Bevor wir dies ausführen, geben wir jedoch eine Literaturübersicht mit einigen Arbeiten über numerische Verfahren für hyperbolische Systeme, die jeweils mithilfe von asymptotischen Entwicklungen hergeleitet wurden, an. Im Fall der eindimensionalen Euler-Gleichungen im Bereich kleiner Mach-Zahlen Ma wurde von Klein in [Kle95] mit einer gezielten Verwendung der Ergebnisse einer asymptotischen Analyse ein erster Algorithmus entwickelt.

Anschließend wurde dieser Ansatz in einer Vielzahl von Arbeiten wie zum Beispiel von Schneider et al. in [SBGK99], von Munz et al. in [MRKG03], von Hoffmann in [Hof00] und von Meister in [Mei01] weiterentwickelt. Dabei wurden in [Hof00] und [Mei01] mit einer Druckentwicklung der Form $p \sim p_0 + \operatorname{Ma} p_1 + \operatorname{Ma}^2 p_2$ die eindimensionalen Euler-Gleichungen für alle Mach-Zahlen und in [SBGK99] mit $p \sim p_0 + \operatorname{Ma}^2 p_2$ beziehungsweise in [MRKG03] mit $p \sim p_0 + \operatorname{Ma} p_1 + \operatorname{Ma}^2 p_2$ die zweidimensionalen Euler-Gleichungen für verschwindende Mach-Zahlen betrachtet. Weitere Unterschiede existieren in den jeweils verwendeten numerischen Verfahren. Eine übersichtliche Darstellung der unterschiedlichen Ansätze ist in [KBS⁺01] zu finden.

Im Fall der zweidimensionalen Flachwassergleichungen im Bereich kleiner Froude-Zahlen und einer Höhenentwicklung der Form $H \sim H_0 + \operatorname{Fr}^2 H_2$ wurde von Vater in [Vat05] sowie Vater und Klein in [VK09] der Ansatz aus [SBGK99] mit einer Kombination aus Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Verfahren mit bilinearen Ansatzfunktionen weiterentwickelt. Eine weitere Verbesserung des Verfahrens erreichte Vater mit einem Multilevelverfahren in [Vat13].

Für diese beiden hyperbolischen Gleichungen können asymptotische Methoden auch für andere Klassen numerischer Verfahren verwendet werden. Beispielsweise wurden von Noelle et al.

in [NBA⁺14] und von Bispen et al. in [BALN14] jeweils asymptotisch erhaltende Verfahren hergeleitet.

Im Fall der rotierenden Flachwassergleichungen im Bereich kleiner Froude- und Rossby-Zahlen ist ein erster Ansatz für ein auf Asymptotik basierendes numerisches Verfahren in [AKNV11] von Audusse et al. mit einer asymptotischen Einskalenentwicklung und einer aus der Vortizität folgenden Höhenkorrektur zu finden. Da wir hier allerdings asymptotische Mehrskalenentwicklungen verwenden, werden wir diesen Ansatz nicht weiter verfolgen.

Im Gegensatz dazu ist es auch in solchen Fällen möglich, ohne asymptotische Entwicklungen numerische Verfahren herzuleiten. Im Allgemeinen werden dann die dimensionsbehafteten Gleichungen betrachtet. Beispielsweise wurden von Giorgetta et al. in [GHK⁺09] für die (modifizierten) regularisierten rotierenden Flachwassergleichungen in dimensionsbehafteter Form unter Verwendung geophysikalischer Annahmen ein Finite-Differenzen-Verfahren sowie von Bauer und Gay-Balmaz in [BG17] für die rotierenden Flachwassergleichungen in dimensionsbehafteter Form ein Verfahren mit variationeller Diskretisierung entwickelt.

Auf diese beiden zuletzt genannten Arbeiten werden wir in Kapitel 6 zurückkommen, wenn wir unseren vollständig-impliziten Algorithmus auf geeignete numerische Testbeispiele wie die beiden nichtlinearen Dynamiken aus [GHK⁺09] anwenden.

Bei der numerischen Realisierung unserer obigen Problemstellung müssen einige Schwierigkeiten behandelt werden, die unter anderem aus der Existenz der beiden dimensionslosen Parameter resultieren.

Damit im Allgemeinen ein stabiles explizites numerisches Verfahren vorliegt, müssen die diskrete Zeitschrittweite Δt und diskreten Gitterweiten Δx sowie Δy so bestimmt werden, dass die CFL-Bedingung nach Courant, Friedrichs und Lewy [CFL28] erfüllt ist. Für die rotierenden Flachwassergleichungen ist diese Bedingung mit der CFL-Zahl

$$\text{cfl} := \Delta t \left(\min \left(\frac{\Delta x}{\max \left\{ |v_1|, \left| v_1 \pm \frac{\sqrt{H}}{\text{Fr}} \right| \right\}}, \frac{\Delta y}{\max \left\{ |v_2|, \left| v_2 \pm \frac{\sqrt{H}}{\text{Fr}} \right| \right\}} \right) \right)^{-1},$$

für $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, durch $0 < \text{cfl} \leq 1/2$ gegeben.

Da innerhalb eines Zeitschrittverfahrens die Zeitschrittweite aus der CFL-Bedingung ermittelt wird, folgt in diesem Fall $\Delta t \rightarrow 0$ für $\text{Fr} \rightarrow 0$. Demzufolge führen sehr kleine Froude-Zahlen zu hinreichend kleinen Zeitschrittweiten, die in der praktischen Anwendung aufgrund der Vielzahl von benötigten Zeitschritten einen sehr hohen Rechenaufwand erzeugen. Dieser geht im Allgemeinen über die verfügbare Rechenleistung und erwünschte Rechenzeit hinaus, weshalb in solchen Fällen explizite Verfahren nicht geeignet sind und auch nicht zum Einsatz kommen, siehe die genannten Arbeiten im Fall der Euler-Gleichungen beziehungsweise Flachwassergleichungen.

Die zweite Schwierigkeit besteht darin, den Quellterm ohne Ordnungsverlust im Rahmen eines numerischen Gesamtverfahrens zu diskretisieren. Dabei muss zum einen die Konsistenzordnung des Verfahrens bezüglich des Quellterms mit der Konsistenzordnung des Verfahrens bezüglich der Flussanteile übereinstimmen, vergleiche [TG07], und zum anderen beachtet werden, dass

durch die möglichen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ eine steife Differentialgleichung für den Quellterm vorliegt.

Weiterhin müssen die diskreten physikalischen Variablen für die entsprechenden Werte der dimensionslosen Parameter den Ergebnissen der asymptotischen Analyse aus Kapitel 4 wie zum Beispiel die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit in führender Ordnung genügen. Um diese Ergebnisse auf die rotierenden Flachwassergleichung in Erhaltungsform anzupassen, wenden wir in Kapitel 5.1 eine asymptotische Zweiskalenentwicklung in Raum und Zeit mit einer Höhenentwicklung der Form $H \sim H_0 + \text{Fr} H_1 + \text{Fr}^2 H_2$ auf diese Gleichungen an und führen eine kurze asymptotische Analyse durch.

Als Nächstes stellen wir die einzelnen Schritte der Herleitung des vollständig-impliziten Algorithmus vor. In Kapitel 5.2 trennen wir zunächst analog zu [Kle95] die Abhängigkeit der Zeitschrittweite von der Froude-Zahl. Hierzu werden die Terme der rotierenden Flachwassergleichungen, ohne dabei die Struktur der Erhaltungsform zu verlieren, jeweils in parameterunabhängige und parameterabhängige Terme aufgeteilt.

Infolgedessen beschreiben die parameterunabhängigen Terme die rotierenden Flachwassergleichungen für $\text{Fr} = 1$ und $\text{Ro} = 1$, die in diesem Zusammenhang als Hilfsproblem bezeichnet werden. Insbesondere ist die Zeitschrittweite dieses Problems nun von der Froude-Zahl unabhängig und folglich für eine praktische Anwendung geeignet. Zudem kann dieses Problem mit klassischen numerischen Verfahren zweiter Ordnung ermittelt werden.

Anschließend passen wir den asymptotischen Korrekturansatz mittels eines zweistufigen Runge-Kutta-Verfahrens zweiter Ordnung aus [Hof00], [Mei01] auf unsere Situation an. Dadurch wird im Gegensatz zu einer direkten expliziten Diskretisierung der Massenerhaltung sichergestellt, dass die Höhe zum Zeitpunkt t^{n+1} durch die parameterabhängigen Terme der Impulserhaltung beeinflusst wird.

Um des Weiteren das Verhalten der physikalischen Variablen bei sehr kleinen Froude-Zahlen korrekt wiederzugeben, ersetzen wir die Höhe durch eine asymptotische Entwicklung der Form $H \sim H_0 + \text{Fr} H_1 + \text{Fr}^2 H_2$ und bestimmen die einzelnen Höhenfunktionen durch die Ergebnisse der asymptotischen Analyse. Dabei müssen wir aufgrund des Quellterms vor allem die asymptotische Funktion erster Ordnung H_1 durch die linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen sowie diskreten Mittelungsoperatoren bestimmen und können daher keine asymptotische Entwicklung der Form $H \sim H_0 + \text{Fr}^2 H_2$ verwenden.

Ferner werden die einzelnen Schritte der Diskretisierung der asymptotischen Korrektur unter Verwendung von rechteckigen Rechengebieten mit periodischen Randbedingungen in Kapitel 5.3 vorgestellt. Diese bestehen aus der Diskretisierung des Hilfsproblems in Kapitel 5.3.1, der asymptotischen Funktionen H_0 und H_1 in Kapitel 5.3.2, der räumlichen Ableitungen in Kapitel 5.3.3 und der zeitlichen Ableitung in Kapitel 5.3.4.

Um ein numerisch-stabiles Verfahren zweiter Ordnung zu erhalten, verwenden wir für die räumlichen Ableitungen aus Stabilitätsgründen nach [VK09] eine Kombination aus Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Verfahren mit bilinearen Ansatzfunktionen und für die zeitlichen Ableitungen, da die asymptotische Korrektur eine starke Kopplung mit einem nicht-linearen Hö-

hengradienten aufweist, unter anderem das in [Hof00], [Mei01] verwendete vollständig-implizite Zeitintegrationsverfahren zweiter Ordnung. Darüber hinaus wird die genaue Diskretisierung des Quellterms angegeben.

Abschließend passen wir in Kapitel 5.4 die divergenzfreie Korrektur aus [Hof00], [Mei01] auf unsere Situation an, wobei wir hier aus Stabilitätsgründen ein versetztes Gitter verwenden. Mit diesem zusätzlichen Schritt sichert unser Algorithmus dann die Divergenzfreiheit bei verschwindenden Froude-Zahlen sowohl für konstante als auch gegen null konvergierende Rossby-Zahlen.

Insgesamt erhalten wir mit diesem Vorgehen einen vollständig-impliziten Algorithmus zweiter Ordnung in Raum und Zeit für die rotierenden Flachwassergleichungen in Erhaltungsform bei hinreichend kleinen Froude-Zahlen sowie beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Daneben liegt hiermit eine Grundlage vor, um die theoretischen Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln numerisch zu realisieren. Dies bleibt jedoch zukünftigen Arbeiten vorbehalten.

5.1 Mehrskalentwicklungen für die Erhaltungsgleichungen

In diesem Unterkapitel wenden wir auf die rotierenden Flachwassergleichungen in Erhaltungsform (5.0.1) und (5.0.2) eine asymptotische Zweiskalenerwicklung in Raum und Zeit an. Da dies eine Erweiterung unserer Ausführungen in Kapitel 4 darstellt, stellen wir hier nur die wichtigsten Schritte der Herleitung und die relevanten Ergebnisse der Mehrskalenerwicklung für den vollständig-impliziten Algorithmus vor.

Aufgrund der einleitenden charakteristischen Analyse verwenden wir hier die Froude-Zahl als Entwicklungsparameter der asymptotischen Mehrskalenerwicklung und betrachten die beiden verschiedenen Skalen (\mathbf{x}_S, t_S) und (\mathbf{x}_M, t_M) mit $(\mathbf{x}_M, t_M) = \text{Fr}(\mathbf{x}_S, t_S)$, $\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_S \in \mathbb{R}^2$, $t_M, t_S \in \mathbb{R}_0^+$, $\text{Fr} \ll 1$.

Weiterhin realisieren wir die Erweiterung auf zwei Raum- und Zeitskalen mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\text{Ro}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \tilde{\text{Fr}}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+, \\ (\mathbf{x}, t; \text{Fr}) &\longmapsto \left(\frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{x}, \frac{1}{\text{Ro}} t, \frac{\text{Fr}}{\text{Ro}} \mathbf{x}, \frac{\text{Fr}}{\text{Ro}} t \right) \end{aligned}$$

mit

$$(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) = \left(\frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{x}, \frac{1}{\text{Ro}} t, \frac{\text{Fr}}{\text{Ro}} \mathbf{x}, \frac{\text{Fr}}{\text{Ro}} t \right)$$

und betrachten für die physikalischen Variablen der Höhe und Geschwindigkeit eine asymptotische Mehrskalenerwicklung der Form

$$\Phi(\mathbf{x}, t; \text{Fr}) = \sum_{j=0}^k \text{Fr}^j \Phi_j(\mathbf{g}_{\text{Ro}}(\mathbf{x}, t; \text{Fr})) + o(\text{Fr}^k), \quad \text{Fr} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

mit den asymptotischen Funktionen

$$\begin{aligned}\Phi_j : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, \\ (\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) &\longmapsto \Phi_j(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M).\end{aligned}$$

Anschließend setzen wir diese Entwicklungen unter Verwendung der folgenden Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_j \circ \mathbf{g}_{\text{Ro}})(\mathbf{x}, t; \text{Fr}) &= \frac{1}{\text{Ro}} \frac{\partial}{\partial t_S} \Phi_j(\mathbf{g}_{\text{Ro}}(\mathbf{x}, t; \text{Fr})) + \frac{\text{Fr}}{\text{Ro}} \frac{\partial}{\partial t_M} \Phi_j(\mathbf{g}_{\text{Ro}}(\mathbf{x}, t; \text{Fr})), \\ \nabla(\Phi_j \circ \mathbf{g}_{\text{Ro}})(\mathbf{x}, t; \text{Fr}) &= \frac{1}{\text{Ro}} \nabla_S \Phi_j(\mathbf{g}_{\text{Ro}}(\mathbf{x}, t; \text{Fr})) + \frac{\text{Fr}}{\text{Ro}} \nabla_M \Phi_j(\mathbf{g}_{\text{Ro}}(\mathbf{x}, t; \text{Fr})),\end{aligned}$$

für $j = 0, 1, 2$, die Mithilfe der Kettenregel entstehen, in die Gleichungen (5.0.1) und (5.0.2) ein, sodass insbesondere diese Gleichungen unabhängig von der Rossby-Zahl sind und infolgedessen die Ro-Abhängigkeit der Ausgangsgleichungen vollständig in den betrachteten Skalen zu finden ist. Gemeinsam mit den sublinearen Wachstumsbedingungen (4.1.11) bis (4.1.14) bezüglich der Froude-Zahl für die asymptotischen Funktionen erhalten wir mit einem Koeffizientenvergleich nach Potenzen in Fr die asymptotischen Gleichungen. Diese sind für die Gleichung der Höhe durch

$$\frac{\partial}{\partial t_S} H_0 + \text{div}_S(H_0 \mathbf{v}_0) = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_S} H_1 + \frac{\partial}{\partial t_M} H_0 + \text{div}_S(H_0 \mathbf{v}_1) + \text{div}_S(H_1 \mathbf{v}_0) + \text{div}_M(H_0 \mathbf{v}_0) = 0, \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_S} H_2 + \frac{\partial}{\partial t_M} H_1 + \text{div}_S(H_0 \mathbf{v}_2) + \text{div}_S(H_1 \mathbf{v}_1) + \text{div}_S(H_2 \mathbf{v}_0) \\ + \text{div}_M(H_0 \mathbf{v}_1) + \text{div}_M(H_1 \mathbf{v}_0) = 0\end{aligned} \quad (5.1.3)$$

und für die Gleichung des Impulses durch

$$H_0 \nabla_S H_0 = 0, \quad (5.1.4)$$

$$H_1 \nabla_S H_0 + H_0 \nabla_S H_1 + H_0 \nabla_M H_0 = 0, \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_S}(H_0 \mathbf{v}_0) + \text{div}_S(H_0 \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0) + H_0 \mathbf{v}_0^\perp + H_0 \nabla_S H_2 + H_1 \nabla_S H_1 + H_2 \nabla_S H_0 \\ + H_0 \nabla_M H_1 + H_1 \nabla_M H_0 = 0\end{aligned} \quad (5.1.6)$$

gegeben.

Bevor wir mit der asymptotischen Mehrskalanalyse beginnen, zeigen wir im Folgenden, wie die beiden asymptotischen Systeme (5.1.1) bis (5.1.6) und (4.1.17) bis (4.1.22) zusammenhängen.

Bemerkung 5.1.1

In dieser Bemerkung zeigen wir, dass die beiden asymptotischen Systeme (5.1.1) bis (5.1.6) und (4.1.17) bis (4.1.22) übereinstimmen. Dazu betrachten wir zunächst die jeweiligen Systeme bezüglich der obigen Mehrskalentwicklung mit Abbildung \mathbf{g}_{Ro} der rotierenden Flachwasserglei-

chungen in Erhaltungsform (5.0.1) und (5.0.2) sowie in einfacher Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H + \mathbf{v} \cdot \nabla H + H \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\operatorname{Ro}}\mathbf{v}^\perp + \frac{1}{\operatorname{Fr}^2}\nabla H &= 0.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der asymptotischen Mehrskalentwicklung für den Impuls

$$(H\mathbf{v})(\mathbf{x}, t; \operatorname{Fr}) = \sum_{j=0}^k \operatorname{Fr}^j (H\mathbf{v})_j(\mathbf{g}_{\operatorname{Ro}}(\mathbf{x}, t; \operatorname{Fr})) + o(\operatorname{Fr}^k), \quad \operatorname{Fr} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

mit

$$(H\mathbf{v})_j(\mathbf{g}_{\operatorname{Ro}}(\mathbf{x}, t; \operatorname{Fr})) = \sum_{i=0}^j H_i(\mathbf{g}_{\operatorname{Ro}}(\mathbf{x}, t; \operatorname{Fr})) \mathbf{v}_{j-i}(\mathbf{g}_{\operatorname{Ro}}(\mathbf{x}, t; \operatorname{Fr})),$$

überträgt sich dann auch die Äquivalenz beider Formen auf die jeweiligen asymptotischen Systeme.

Da ferner in Kapitel 4 nicht diese Entwicklung für die rotierenden Flachwassergleichungen in einfacher Form, sondern die asymptotische Mehrskalentwicklung mit Entwicklungsparameter ε und Abbildung \mathbf{g}_δ für die Gleichungen (4.0.1) und (4.0.2) betrachtet wurde, müssen wir außerdem die dadurch entstehenden Unterschiede beachten.

Aufgrund der in Kapitel 2.2 vorgestellten unterschiedlichen Versionen der rotierenden Flachwassergleichungen und der Parameterwahl in Kapitel 3 stimmen die jeweiligen Gleichungen mittels

$$H(\mathbf{x}, t) = 1 + \varepsilon F \tilde{h}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{Fr} = \varepsilon \sqrt{F}, \quad \operatorname{Ro} = \frac{\varepsilon}{\delta},$$

wobei wir zur Unterscheidung die physikalischen Variablen aus Kapitel 4 mit zusätzlichen Tilde-Zeichen kennzeichnen, überein.

Eine anschließende Transformation der Skalen

$$\mathbf{x}_S = \tilde{\mathbf{x}}_S, \quad t_S = \tilde{t}_S, \quad \mathbf{x}_M = \sqrt{F} \tilde{\mathbf{x}}_M, \quad t_M = \sqrt{F} \tilde{t}_M$$

und der asymptotischen Funktionen

$$\begin{aligned}H_0 &= 1, \\ H_{k+1}(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) &= \sqrt{F}^{1-k} \tilde{h}_k(\tilde{\mathbf{x}}_S, \tilde{t}_S, \tilde{\mathbf{x}}_M, \tilde{t}_M), \\ \mathbf{v}_k(\mathbf{x}_S, t_S, \mathbf{x}_M, t_M) &= \sqrt{F}^{-k} \tilde{\mathbf{v}}_k(\tilde{\mathbf{x}}_S, \tilde{t}_S, \tilde{\mathbf{x}}_M, \tilde{t}_M),\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, ebenfalls mit zusätzlichen Tilde-Zeichen für die Skalen und asymptotischen Funktionen aus Kapitel 4, zeigt schließlich die Übereinstimmung der beiden asymptotischen Systeme (5.1.1) bis (5.1.6) und (4.1.17) bis (4.1.22) unter der Voraussetzung, dass aus der folgenden asymptotischen Mehrskalanalyse $H_0 = 1$ folgt. Letzteres wird, wie wir gleich sehen werden, der Fall sein.

Die für unseren Algorithmus relevanten Ergebnisse der asymptotischen Mehrskalanalyse folgen bereits aus einer Zweiskalenerwicklung im Raum mit den Skalen \mathbf{x}_S sowie \mathbf{x}_M und einer Einkalenerwicklung in der Zeit mit der Skala t_S und beziehen sich auf die asymptotischen Höhenfunktionen H_0 und H_1 .

In [Kle95] beziehungsweise [Mei99] wird für die Euler-Gleichungen nachgewiesen, dass bei einer Zweiskalenerwicklung im Raum und Einkalenerwicklung in der Zeit der Druck in führender Ordnung konstant ist und die asymptotische Druckfunktion erster Ordnung den linearisierten Euler-Gleichungen genügt. Die entsprechenden Aussagen für die Höhe im Fall der Flachwassergleichungen sind in [Vat05] zu finden.

Darauf aufbauend wird hier die asymptotische Höhenfunktion führender Ordnung H_0 keine Abhängigkeit von den Skalen aufweisen und die asymptotische Höhenfunktion erster Ordnung H_1 die linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen erfüllen. Dabei werden zur Herleitung dieser Ergebnisse die Mittelungsoperatoren (4.1.15) und (4.1.16) bezüglich der Froude-Zahl und wie in Kapitel 4.2 die Resultate aus Lemma 4.1.5, Korollar 4.1.4, Lemma 4.1.7 und Bemerkung 4.1.8 verwendet.

Wir beginnen die Analyse mit den Gleichungen (5.1.4), (5.1.5) und (5.1.1). Da nach Voraussetzung $H_0 \neq 0$ gilt, weist die Höhe in führender Ordnung H_0 nach Gleichung (5.1.4) keine Abhängigkeit von der Raumskala \mathbf{x}_S auf. Infolgedessen wird Gleichung (5.1.5) zu

$$\nabla_S H_1 + \nabla_M H_0 = 0,$$

sodass eine räumliche Mittelung dieser Gleichung, unter Verwendung von $\overline{\nabla_S H_1} = 0$ nach Korollar 4.1.6, in $\nabla_M H_0 = 0$ beziehungsweise $H_0 \equiv H_0(t_S, t_M)$ und $\nabla_S H_1 = 0$ resultiert.

Weiterhin folgt, da H_0 nur noch von den Zeitskalen abhängt, für Gleichung (5.1.1)

$$-\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial t_S} H_0 = \operatorname{div}_S \mathbf{v}_0. \quad (5.1.7)$$

Mithilfe der Raummittelung führt dies, unter Verwendung von $\overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0} = 0$ nach Bemerkung 4.1.8, zu $H_0 \equiv H_0(t_M)$ und

$$\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 = 0. \quad (5.1.8)$$

Somit folgt die bezüglich \mathbf{x}_S divergenzfreie Geschwindigkeit in führender Ordnung aus der asymptotischen Höhenfunktion H_0 .

Anschließend betrachten wir die Gleichungen (5.1.2) und (5.1.6). Gemeinsam mit den obigen Ergebnissen erhalten wir für die räumlich gemittelte Gleichung (5.1.2), unter Verwendung von $\overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_1} = 0$ nach Lemma 4.1.5,

$$\frac{\partial}{\partial t_S} H_1 + \frac{\partial}{\partial t_M} H_0 + H_0 \operatorname{div}_M \overline{\mathbf{v}_0} = 0.$$

Mit einer zusätzlichen Zeitmittelung wird dies, unter Verwendung von $\langle \partial H_1 / \partial t_S \rangle = 0$ nach

Lemma 4.1.7, zu

$$-\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial t_M} H_0 = \operatorname{div}_M \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle. \quad (5.1.9)$$

Nun bestimmen wir mit Gleichung (5.1.6) ebenfalls $\operatorname{div}_M \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle$. Zunächst erhalten wir mit den obigen Ergebnissen, sowie unter Verwendung von $\overline{\operatorname{div}_S \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0} = 0$ nach Lemma 4.1.5, da jede Komponente der asymptotischen Funktion führender Ordnung \mathbf{v}_0 die Wachstumsbedingung (4.1.11) mit $\alpha = 1/2$ erfüllt, und $\overline{\nabla_S H_2} = 0$ nach Korollar 4.1.6,

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{v}}_0^\perp + \nabla_M H_1 = 0.$$

Diese Gleichung wird mit einer zeitlichen Mittelung, unter Verwendung von $\langle \partial \mathbf{v}_0 / \partial t_S \rangle = 0$ nach Bemerkung 4.1.8, zu

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle^\perp + \nabla_M \langle H_1 \rangle = 0, \quad (5.1.10)$$

sodass auch

$$\operatorname{div}_M \langle \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle = 0. \quad (5.1.11)$$

gilt. Zusammen mit Gleichung (5.1.9) folgt hiermit $H_0 = \text{const.} \neq 0$ in Übereinstimmung mit Bemerkung 5.1.1.

Infolgedessen erhalten wir für die räumlich gemittelten Gleichungen (5.1.2) und (5.1.6) die linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t_S} H_1 + H_0 \operatorname{div}_M \bar{\mathbf{v}}_0 = 0, \quad (5.1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{v}}_0^\perp + \nabla_M H_1 = 0, \quad (5.1.13)$$

wodurch sogenannte Poincaré-Wellen und stationäre Wellen beschrieben werden.

Die weitere Mehrskalenanalyse erfolgt dann analog zu Kapitel 4.2.

Insgesamt haben wir mit diesen Ausführungen die wichtigsten Ergebnisse der Mehrskalenanalyse für die numerische Realisierung der rotierenden Flachwassergleichungen in Erhaltungsform (5.0.1) und (5.0.2) bei hinreichend kleinen Froude-Zahlen sowie beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$ vorgestellt.

Im folgenden Unterkapitel beginnen wir mit der Herleitung des ersten Schritts unseres vollständig-impliziten Algorithmus.

5.2 Asymptotische Korrektur

In diesem Unterkapitel leiten wir die asymptotische Korrektur her. Dazu folgen wir den Ausführungen in [Hof00] und [Mei01] für die eindimensionalen Euler-Gleichungen und passen diese auf unsere zweidimensionale Situation mit zwei dimensionslosen Parametern an.

Als Ausgangspunkt der folgenden Herleitung betrachten wir die rotierenden Flachwassergleichungen (5.0.1) bis (5.0.2) in der äquivalenten Form

$$\frac{\partial}{\partial t} H + \operatorname{div}(H \mathbf{v}) = 0, \quad (5.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (H \mathbf{v}) + \operatorname{div}(H \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + H \mathbf{v}^\perp + H \nabla H = \left(\frac{\operatorname{Ro} - 1}{\operatorname{Ro}} \right) H \mathbf{v}^\perp + \left(\frac{\operatorname{Fr}^2 - 1}{\operatorname{Fr}^2} \right) H \nabla H. \quad (5.2.2)$$

Mit den physikalischen Variablen

$$\mathbf{Q} = (H, M, N)^T = (H, (Hv_1), (Hv_2))^T = \left(H, (H\mathbf{v})^T \right)^T$$

und den Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_H, F_M, F_N)^T, & \mathbf{S}_F &= (0, S_{F_M}, S_{F_N})^T, \\ \mathbf{A} &= (0, A_M, A_N)^T, & \mathbf{S}_A &= (0, S_{A_M}, S_{A_N})^T \end{aligned}$$

in der Darstellung

$$\begin{aligned} F_H(\mathbf{Q}) &= \partial_x M + \partial_y N, \\ F_M(\mathbf{Q}) &= \partial_x \left(\frac{M^2}{H} + \frac{1}{2} H^2 \right) + \partial_y \left(\frac{MN}{H} \right), & S_{F_M}(\mathbf{Q}) &= -N, \\ F_N(\mathbf{Q}) &= \partial_x \left(\frac{MN}{H} \right) + \partial_y \left(\frac{N^2}{H} + \frac{1}{2} H^2 \right), & S_{F_N}(\mathbf{Q}) &= M, \\ A_M(\mathbf{Q}) &= - \left(\frac{\operatorname{Fr} - 1}{\operatorname{Fr}} \right) H \partial_x H, & S_{A_M}(\mathbf{Q}) &= \left(\frac{\operatorname{Ro} - 1}{\operatorname{Ro}} \right) N, \\ A_N(\mathbf{Q}) &= - \left(\frac{\operatorname{Fr} - 1}{\operatorname{Fr}} \right) H \partial_y H, & S_{A_N}(\mathbf{Q}) &= - \left(\frac{\operatorname{Ro} - 1}{\operatorname{Ro}} \right) M \end{aligned}$$

sind diese Gleichungen (5.2.1) bis (5.2.2) durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + \mathbf{S}_F(\mathbf{Q}) = -\mathbf{A}(\mathbf{Q}) - \mathbf{S}_A(\mathbf{Q}) \quad (5.2.3)$$

gegeben.

Dabei wählen wir diese Form, um zwischen den Termen auf beiden Seiten der Gleichung (5.2.3) zu unterscheiden. Da die Funktionen \mathbf{A} und \mathbf{S}_A der rechten Seite eine direkte Abhängigkeit von der Froude- und Rossby-Zahl besitzen, bezeichnen wir diese als asymptotische Terme. Die Funktionen der linken Seite \mathbf{F} und \mathbf{S}_F hingegen weisen keine Parameterabhängigkeit auf, sondern stimmen mit den rotierenden Flachwassergleichungen für $\operatorname{Fr} = 1$ sowie $\operatorname{Ro} = 1$ überein und werden somit als klassische Terme bezeichnet.

Des Weiteren definieren wir mit diesen Termen das sogenannte Hilfsproblem (engl. *auxiliary problem*) durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + \mathbf{S}_F(\mathbf{Q}) = 0 \quad (5.2.4)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H + \operatorname{div}(H\mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(H\mathbf{v}) + \operatorname{div}(H\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + (H\mathbf{v})^\perp + H\nabla H &= 0. \end{aligned}$$

Da nun dieses Problem unabhängig von der Froude- und Rossby-Zahl ist, insbesondere weist die Zeitschrittweite mittels der zugehörigen CFL-Bedingung keine Abhängigkeit von der Froude-Zahl auf, kann es mit bekannten numerischen Verfahren (siehe Kapitel 5.3.1) explizit ermittelt werden. Unter der Bedingung, dass die asymptotischen Terme implizit realisiert werden, stellt dann diese Zeitschrittweite zudem eine geeignete Wahl innerhalb eines numerischen Verfahrens für das Gesamtproblem (5.2.3) dar. Demzufolge bestimmen wir in unserem Algorithmus innerhalb eines Zeitschritts zunächst das Hilfsproblem und infolgedessen das Gesamtproblem.

Allerdings ist dieses Vorgehen nur möglich, wenn durch das Hilfsproblem wohl-erstellte (engl. *well prepared*) Anfangsbedingungen höchstens linear in der Zeit anwachsen, vergleiche dazu [Del10] und [NBA⁺14] im Fall der Euler-Gleichungen, wobei unter solchen Anfangsbedingungen nach [KM81], [KM82] Gleichgewichte, die aus singulären Grenzwerten resultieren, zu verstehen sind.

Wie im folgenden Lemma für die beiden Gleichgewichte aus Kapitel 3.2 gezeigt wird, genügt unser Hilfsproblem dieser Bedingung.

Lemma 5.2.1

(i) Für die wohl-erstellte Anfangsbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \nabla H = 0,$$

erfüllt die Lösung des Hilfsproblems zum Zeitpunkt $t + \Delta t$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \mathcal{O}(\Delta t), \quad \nabla H(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

(ii) Für die wohl-erstellte Anfangsbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}^\perp + \nabla H = 0,$$

erfüllt die Lösung des Hilfsproblems zum Zeitpunkt $t + \Delta t$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \mathcal{O}(\Delta t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t + \Delta t)^\perp + \nabla H(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \mathcal{O}(\Delta t).$$

Beweis:

(i) Der Beweis erfolgt analog zu den Ausführungen in [Vat05] für die Flachwassergleichungen beziehungsweise in [NBA⁺14] für die Euler-Gleichungen, wobei zusätzlich eine Anpassung hinsichtlich des Quellterms benötigt wird.

Mit der Taylorentwicklung bezüglich der Zeitkomponente gilt für die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

und die Höhe

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= H(\mathbf{x}, t) + \Delta t \partial_t H(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= H(\mathbf{x}, t) - \Delta t \operatorname{div}(H(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= H(\mathbf{x}, t) - \Delta t (H(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla H(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= H(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt unter Verwendung der entsprechenden Ableitungen und Anfangsbedingungen.

(ii) Der Beweis erfolgt analog zum ersten Teil, wobei für die Höhe zusätzlich

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla H(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot (-\mathbf{v}(\mathbf{x}, t))^\perp = 0$$

verwendet wird. □

Anschließend setzen wir die Herleitung unseres Algorithmus fort. Wir beginnen mit geeigneten Zeitintegrationsverfahren zweiter Ordnung. Dazu bestimmen wir aus den physikalischen Variablen zum Zeitpunkt t^n durch einen Zeitentwicklungsschritt $t^n \rightarrow t^{n+1}$ mit der Zeitschrittweite Δt aus dem Hilfsproblem unsere physikalischen Variablen zu den Zeitpunkten $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$ und $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

Nach [Hof00] und [Mei01] verwenden wir für die beiden Probleme ein zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung, wobei innerhalb der ersten Stufe die klassischen Terme explizit und die asymptotischen Terme aufgrund der kleinen Parameter implizit realisiert werden. Folglich ist für das Hilfsproblem (5.2.4) das Verfahren durch

$$\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} = \mathbf{Q}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{Q}^n) + \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}^n)) \quad (5.2.5)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1} = \mathbf{Q}^n - \Delta t (\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}) + \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2})) \quad (5.2.6)$$

und für das Gesamtproblem (5.2.3) durch

$$\mathbf{Q}^{n+1/2} = \mathbf{Q}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{Q}^n) + \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}^n) + \mathbf{A}(\mathbf{Q}^{n+1/2}) + \mathbf{S}_{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}^{n+1/2})) \quad (5.2.7)$$

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n - \Delta t (\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{n+1/2}) + \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}^{n+1/2}) + \mathbf{A}(\mathbf{Q}^{n+1/2}) + \mathbf{S}_{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}^{n+1/2})) \quad (5.2.8)$$

gegeben.

Um den Einfluss der asymptotischen Terme für unser Gesamtproblem, die sogenannte asymptotische Korrektur, zu ermitteln, betrachten wir mit dem Vorgehen aus [Hof00] und [Mei01]

zunächst die Differenz zwischen den beiden Gleichungen (5.2.7) und (5.2.5) und geben $\mathbf{Q}^{n+1/2}$ in Abhängigkeit der Hilfwerte $\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}$ an. Daraufhin setzen wir diese in die klassischen Terme der Gleichung (5.2.8) ein und bestimmen infolgedessen die physikalischen Größen zum Zeitpunkt t^{n+1} über eine weitere Trennung zwischen klassische und asymptotische Anteile.

Für die Differenz der beiden Probleme gilt

$$\mathbf{Q}^{n+1/2} = \mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{A} \left(\mathbf{Q}^{n+1/2} \right) + \mathbf{S}_A \left(\mathbf{Q}^{n+1/2} \right) \right)$$

mit den drei Komponenten

$$H^{n+1/2} = H_{\text{aux}}^{n+1/2} \tag{5.2.9}$$

und

$$M^{n+1/2} = M_{\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{n+1/2} \partial_x H^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) N^{n+1/2}, \tag{5.2.10}$$

$$N^{n+1/2} = N_{\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{n+1/2} \partial_y H^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) M^{n+1/2}. \tag{5.2.11}$$

Demzufolge stimmt $H^{n+1/2}$ mit dem Hilfwert $H_{\text{aux}}^{n+1/2}$ überein und wir verwenden diese Gleichheit im Folgenden durchgehend, ohne direkt darauf hinzuweisen.

Weiterhin bilden die beiden Gleichungen (5.2.10) und (5.2.11) gemeinsam ein lineares Gleichungssystem für $M^{n+1/2}$ und $N^{n+1/2}$ in Abhängigkeit der Hilfwerte $H_{\text{aux}}^{n+1/2}$, $M_{\text{aux}}^{n+1/2}$ und $N_{\text{aux}}^{n+1/2}$. Da $\text{Ro} > 0$ gilt, ist dieses System für alle $\Delta t > 0$ lösbar. Daraufhin erfüllt der Impuls zum Zeitpunkt $t^{n+1/2}$

$$\begin{aligned} M^{n+1/2} = & \delta_{\text{Ro}} M_{\text{aux}}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) N_{\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{n+1/2} \partial_x H^{n+1/2} \\ & - \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{n+1/2} \partial_y H^{n+1/2}, \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

$$\begin{aligned} N^{n+1/2} = & \delta_{\text{Ro}} N_{\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) M_{\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{n+1/2} \partial_y H^{n+1/2} \\ & + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{n+1/2} \partial_x H^{n+1/2} \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

mit

$$\delta_{\text{Ro}} := \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \right)^2}.$$

Als Nächstes ermitteln wir die beiden Geschwindigkeitskomponenten zum Zeitpunkt $t^{n+1/2}$,

indem wir die Gleichungen (5.2.12) und (5.2.13) jeweils durch $H^{n+1/2}$ teilen. Folglich gilt

$$v_1^{n+1/2} = \frac{M^{n+1/2}}{H^{n+1/2}} = \delta_{\text{Ro}} v_{1\text{aux}}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) v_{2\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_x H^{n+1/2} - \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_y H^{n+1/2}, \quad (5.2.14)$$

$$v_2^{n+1/2} = \frac{N^{n+1/2}}{H^{n+1/2}} = \delta_{\text{Ro}} v_{2\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) v_{1\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_y H^{n+1/2} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_x H^{n+1/2}. \quad (5.2.15)$$

Bevor wir mit der Herleitung der asymptotischen Korrektur fortfahren, betrachten wir die Bedeutung des Vorfaktors δ_{Ro} insbesondere für die Gleichungen (5.2.14) und (5.2.15), die wir aus Gründen der Übersichtlichkeit in der äquivalenten Form

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = L_{\delta_{\text{Ro}}} \mathbf{v}_{\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) L_{\delta_{\text{Ro}}} \nabla H^{n+1/2} \quad (5.2.16)$$

mit der Matrix

$$L_{\delta_{\text{Ro}}} := \delta_{\text{Ro}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \\ \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) & 1 \end{pmatrix}$$

angeben, genauer.

Wie in der folgenden Bemerkung für diese semi-diskreten Gleichungen mit $\text{Fr} = \sqrt{F} \text{Ro}$, $F > 0$, gezeigt wird, sichert dieser Vorfaktor unter der Verwendung einer geeigneten Mehrskalenenwicklung im Grenzwert $\text{Ro} \rightarrow 0$ das semi-diskrete quasi-geostrophische Gleichgewicht. Dies bedeutet für unser numerisches Verfahren, dass es in diesem Fall die sogenannte AP-Eigenschaft nach [Jin99] erfüllt, das heißt, das Verfahren ist asymptotisch erhaltend (engl. *asymptotic preserving*), und folglich ein geeignetes Zeitintegrationsverfahren für unser Gesamtproblem darstellt.

Dabei weist ein numerisches Verfahren diese Eigenschaft auf, wenn eine asymptotische Mehrskalenenwicklung bezüglich der semi-diskreten Gleichungen in führender Ordnung mit einer Semi-Diskretisierung der entsprechenden asymptotischen Gleichungen übereinstimmt. Beispielsweise ist im Fall der Flachwassergleichungen mit einer Trennung von linearen und nichtlinearen Termen in [BALN14] ein Verfahren mit AP-Eigenschaft zu finden.

Bemerkung 5.2.2

Zum Nachweis der AP-Eigenschaft bezüglich des quasi-geostrophischen Gleichgewichts zum Zeitpunkt $t^{n+1/2}$ ersetzen wir die physikalischen Variablen in der Gleichung (5.2.16) mit $\text{Fr} = \sqrt{F} \text{Ro}$, $F > 0$, durch semi-diskrete asymptotische Mehrskalenenwicklungen der Form

$$\Phi(\mathbf{x}, t^{n+1/2}; \text{Fr}) = \sum_{j=0}^k \text{Fr}^j \Phi_j(\mathbf{g}_{\text{Ro}}(\mathbf{x}, t^{n+1/2}; \text{Fr})) + o(\text{Fr}^k), \quad \text{Fr} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

Es folgt unter der Annahme, dass die asymptotischen Höhenfunktionen $H_0^{n+1/2} = \text{const.} \neq 0$ und $\nabla_S H_1^{n+1/2} = 0$ erfüllen,

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_0^{n+1/2} + \sqrt{F} \text{Ro} \mathbf{v}_1^{n+1/2} + F \text{Ro}^2 \mathbf{v}_2^{n+1/2} \\ &= L_{\delta_{\text{Ro}}} \mathbf{v}_{\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{F \text{Ro}^2 - 1}{\text{Ro}} \right) L_{\delta_{\text{Ro}}} \left(\nabla_S H_2^{n+1/2} + \nabla_M \left(H_1^{n+1/2} + \sqrt{F} \text{Ro} H_2^{n+1/2} \right) \right). \end{aligned}$$

Dann erhalten wir für $\text{Ro} \rightarrow 0$

$$\mathbf{v}_0^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\nabla_S H_2^{n+1/2} + \nabla_M H_1^{n+1/2} \right)$$

unter Verwendung der folgenden Grenzwerte

$$\lim_{\text{Ro} \rightarrow 0} L_{\delta_{\text{Ro}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{\text{Ro} \rightarrow 0} \left(\frac{F \text{Ro}^2 - 1}{\text{Ro}} \right) L_{\delta_{\text{Ro}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\Delta t} \\ \frac{2}{\Delta t} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei schließlich eine Raummittelung zum semi-diskreten quasi-geostrophischen Gleichgewicht

$$\overline{\mathbf{v}_0^{\perp, n+1/2}} = \nabla_M H_1^{n+1/2}$$

führt.

Unter bestimmten Voraussetzungen kann allerdings der Vorfaktor δ_{Ro} auch vernachlässigt werden. Dies wird im Folgenden dargelegt.

Bemerkung 5.2.3

In dieser Bemerkung beschreiben wir weitere Eigenschaften des Vorfaktors δ_{Ro} .

Falls

$$\left| \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \right| < 1 \tag{5.2.17}$$

gilt, erhalten wir unter Verwendung der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Ro}} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \right)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(- \left(\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \right)^2 \right)^k \\ &= 1 - \left(\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \right)^4 \mp \dots \end{aligned}$$

und können dadurch die Terme in den Gleichungen (5.2.12) bis (5.2.15) nach Potenzen in Δt anordnen. Da nach Gleichung (5.2.8) alle Terme mit dem Vorfaktor δ_{Ro} mit Δt multipliziert werden, ist daraufhin ein Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit durch $\delta_{\text{Ro}} = 1$ gegeben.

Andererseits wird für $\text{Ro} \neq 0$ die Bedingung (5.2.17) zu

$$\Delta t < 2 \left| \frac{\text{Ro}}{\text{Ro} - 1} \right|,$$

womit $\Delta t \rightarrow 0$ für $\text{Ro} \rightarrow 0$ gilt. Demzufolge führen sehr kleine Rossby-Zahlen zu sehr kleinen Zeitschrittweiten. Dieser Zusammenhang zwischen δ_{Ro} und Δt steht allerdings im Gegensatz zu unserer Zeitschrittweite, die, um sehr kleine Zeitschrittweiten zu verhindern, mittels der CFL-Bedingung des Hilfsproblems unabhängig von der Froude-Zahl bestimmt wird. Folglich ist für $\text{Ro} \ll 1$ die Gleichung (5.2.17) nicht erfüllt und der Vorfaktor δ_{Ro} notwendig.

Um die weiteren Ausführungen zu vereinfachen und da wir für unsere numerischen Testbeispiele (siehe Kapitel 6) nur mit Werten Δt und Ro arbeiten werden, die Gleichung (5.2.17) erfüllen, setzen wir nach Bemerkung 5.2.3 im weiteren Verlauf der Arbeit $\delta_{\text{Ro}} = 1$ und betrachten infolgedessen die Gleichungen (5.2.12) bis (5.2.15) nur bis einschließlich der ersten Ordnung in Δt . Die asymptotische Korrektur für beliebige δ_{Ro} ist aus Gründen der Vollständigkeit in Anhang A.1 zu finden.

Nach diesen Vorbereitungen ermitteln wir die physikalischen Funktionen zum Zeitpunkt t^{n+1} in Abhängigkeit der Hilfswerte $H_{\text{aux}}^{n+1/2}$, $M_{\text{aux}}^{n+1/2}$ und $N_{\text{aux}}^{n+1/2}$. Für die Höhe H^{n+1} bestimmen wir unter Verwendung der Gleichungen (5.2.12) und (5.2.13) die Divergenz des Impulses zum Zeitpunkt $t^{n+1/2}$ und setzen diese in die erste Komponente der Gleichung (5.2.8) ein. Es folgt

$$\begin{aligned}
H^{n+1} &= H^n - \Delta t \left(\partial_x M^{n+1/2} + \partial_y N^{n+1/2} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
&= H^n - \Delta t \left(\partial_x M_{\text{aux}}^{n+1/2} + \partial_y N_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) \\
&\quad - \Delta t \left(\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \left(-\partial_x N_{\text{aux}}^{n+1/2} + \partial_y M_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) \text{div} \left(H_{\text{aux}}^{n+1/2} \nabla H^{n+1/2} \right) \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
&= H^n - \Delta t \mathcal{F}_H \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) - \Delta t \mathcal{A}_H \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, H^{n+1/2} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \tag{5.2.18}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_H(\mathbf{Q}) &= \partial_x M + \partial_y N, \\
\mathcal{A}_H(\tilde{\mathbf{Q}}, H) &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) \left(-\partial_x \tilde{N} + \partial_y \tilde{M} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) \text{div} \left(\tilde{H} \nabla H \right).
\end{aligned}$$

Folglich bestimmt sich die Höhe zum Zeitpunkt t^{n+1} in Übereinstimmung mit unserer Mehrskalenganalyse aus Kapitel 4.2 unter anderem durch die Vortizität. Zudem haben wir eine Abhängigkeit von einem gewichteten Laplace-Operator bezüglich der Höhe. Diese entsteht aus der Nichtlinearität des Höhengradienten, die mittels des Doppelarguments dargestellt wird.

Im Gegensatz zum weiteren Vorgehen aus [Hof00] und [Mei01] verzichten wir aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine zusätzliche Aufteilung dieser Funktionen in Flussfunktionen und bezeichnen daher die Funktion \mathcal{A}_H mit einer Anpassung der dortigen Termini als asymptotische Korrekturfunktion der Höhe. Die Funktion \mathcal{F}_H nennen wir entsprechend die klassische Korrekturfunktion der Höhe, da sie mit den klassischen Termen übereinstimmt.

Anschließend ermitteln wir den Impuls zum Zeitpunkt t^{n+1} . Dazu bestimmen wir die Terme $(Hv_1^2)^{n+1/2}$, $(Hv_2^2)^{n+1/2}$ und $(Hv_1v_2)^{n+1/2}$ bis einschließlich der ersten Ordnung in Δt durch geeignete Multiplikationen der Gleichungen (5.2.12) bis (5.2.15), sodass gilt

$$\begin{aligned} (Hv_1^2)^{n+1/2} &= H^{n+1/2}v_{1\text{aux}}^{n+1/2}v_{1\text{aux}}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) 2H^{n+1/2}v_{1\text{aux}}^{n+1/2}v_{2\text{aux}}^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) 2M_{\text{aux}}^{n+1/2}\partial_x H^{n+1/2} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ (Hv_2^2)^{n+1/2} &= H^{n+1/2}v_{2\text{aux}}^{n+1/2}v_{2\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) 2H^{n+1/2}v_{1\text{aux}}^{n+1/2}v_{2\text{aux}}^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) 2N_{\text{aux}}^{n+1/2}\partial_y H^{n+1/2} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ (Hv_1v_2)^{n+1/2} &= H^{n+1/2}v_{1\text{aux}}^{n+1/2}v_{2\text{aux}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) H^{n+1/2} \left((v_{1\text{aux}}^{n+1/2})^2 - (v_{2\text{aux}}^{n+1/2})^2 \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) M_{\text{aux}}^{n+1/2}\partial_y H^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) N_{\text{aux}}^{n+1/2}\partial_x H^{n+1/2} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Gemeinsam mit den Gleichungen (5.2.12) und (5.2.13) für den klassischen Quellterm \mathbf{S}_F setzen wir diese Terme in die zweite beziehungsweise dritte Komponente der Gleichung (5.2.8) ein und lassen die jeweiligen asymptotischen Terme unverändert.

Es folgt mit der obigen Struktur, wobei wir aus Gründen der Übersichtlichkeit direkt das Ergebnis angeben,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n - \Delta t \mathcal{F}_M(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}_M}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}) \\ &\quad - \Delta t \mathcal{A}_M(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, H^{n+1/2}) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, \mathbf{Q}^{n+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

$$\begin{aligned} N^{n+1} &= N^n - \Delta t \mathcal{F}_N(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}_N}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}) \\ &\quad - \Delta t \mathcal{A}_N(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, H^{n+1/2}) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, \mathbf{Q}^{n+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

mit den klassischen Korrekturfunktionen des Impulses und dem klassischen Quellterm

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_M(\mathbf{Q}) &= \partial_x \left(\frac{M^2}{H} + \frac{1}{2}H^2 \right) + \partial_y \left(\frac{MN}{H} \right), & \mathcal{S}_{\mathcal{F}_M}(\mathbf{Q}) &= -N, \\ \mathcal{F}_N(\mathbf{Q}) &= \partial_x \left(\frac{MN}{H} \right) + \partial_y \left(\frac{N^2}{H} + \frac{1}{2}H^2 \right), & \mathcal{S}_{\mathcal{F}_N}(\mathbf{Q}) &= M \end{aligned}$$

sowie den sogenannten asymptotischen Korrekturfunktionen des Impulses

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M(\tilde{\mathbf{Q}}, H) &= -\Delta t \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \partial_x \left(\frac{\tilde{M}\tilde{N}}{\tilde{H}} \right) + \Delta t \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_x (\tilde{M}\partial_x H) - \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \tilde{H}\partial_x H \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \partial_y \left(\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{H}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_y (\tilde{N}\partial_x H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \partial_y \left(\frac{\tilde{N}^2}{\tilde{H}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_y \left(\tilde{M} \partial_y H \right), \\
\mathcal{A}_N(\tilde{\mathbf{Q}}, H) = & \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \partial_x \left(\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{H}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_x \left(\tilde{N} \partial_x H \right) \\
& -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \partial_x \left(\frac{\tilde{N}^2}{\tilde{H}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_x \left(\tilde{M} \partial_y H \right) \\
& + \Delta t \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \partial_y \left(\frac{\tilde{M} \tilde{N}}{\tilde{H}} \right) + \Delta t \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_y \left(\tilde{N} \partial_y H \right) - \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \tilde{H} \partial_y H.
\end{aligned}$$

Weiterhin beschreibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{A_M}(\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) &= \mathcal{S}_{A_M}^A(\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) + \mathcal{S}_{A_M}^F(\tilde{\mathbf{Q}}, H) \\
\mathcal{S}_{A_N}(\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) &= \mathcal{S}_{A_N}^A(\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) + \mathcal{S}_{A_N}^F(\tilde{\mathbf{Q}}, H)
\end{aligned}$$

den asymptotischen Quellterm des Impulses, der zudem in den Quellanteil

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{A_M}^A(\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) &= -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \tilde{M} + \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) N, \\
\mathcal{S}_{A_N}^A(\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) &= -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \tilde{N} - \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) M
\end{aligned}$$

und den Gradientenanteil

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{A_M}^F(\tilde{\mathbf{Q}}, H) &= -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \tilde{H} \partial_y H, \\
\mathcal{S}_{A_N}^F(\tilde{\mathbf{Q}}, H) &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \tilde{H} \partial_x H
\end{aligned}$$

aufgespalten wird.

Damit erhalten wir für die physikalischen Funktionen zum Zeitpunkt t^{n+1} unter Verwendung der Gleichungen (5.2.18), (5.2.19) und (5.2.20) die kompakte Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n - \Delta t \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}) \\
- \Delta t \mathcal{A}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, H^{n+1/2}) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, \mathbf{Q}^{n+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (5.2.21)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= (\mathcal{F}_H, \mathcal{F}_M, \mathcal{F}_N)^T, \quad \mathcal{S}_{\mathcal{F}} = (0, \mathcal{S}_{\mathcal{F}_M}, \mathcal{S}_{\mathcal{F}_N})^T, \\
\mathcal{A} &= (\mathcal{A}_H, \mathcal{A}_M, \mathcal{A}_N)^T, \quad \mathcal{S}_{\mathcal{A}} = (0, \mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}, \mathcal{S}_{\mathcal{A}_N})^T.
\end{aligned}$$

Um die Herleitung der asymptotischen Korrektur abzuschließen, ersetzen wir analog zum Vorgehen aus [Hof00] und [Mei01] die Hilfswerte $\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}$ in den asymptotischen Funktionen \mathcal{A} und $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ mit den Gleichungen (5.2.12) und (5.2.13) für $\delta_{\text{Ro}} = 1$ jeweils durch $\mathbf{Q}^{n+1/2}$. Dies ist

innerhalb der Gleichung (5.2.21) ohne Ordnungsverlust möglich, da dann alle Hilfswerte dieser Funktionen mit hinreichend vielen Δt multipliziert werden.

Infolgedessen ändern wir im asymptotischen Quellterm die Notation und schreiben aufgrund der Impulsgleichheit im Doppelargument $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\tilde{Q}, H)$ mit $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}^{\mathcal{A}}(\tilde{Q})$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}^{\mathcal{A}}(\tilde{Q})$ statt $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\tilde{Q}, Q)$ mit $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}^{\mathcal{A}}(\tilde{Q}, Q)$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}^{\mathcal{A}}(\tilde{Q}, Q)$. Alle anderen Funktionen verbleiben unverändert, sodass nun alle Doppelargumente die Nichtlinearität im Höhengradienten kennzeichnen.

Es folgt

$$\begin{aligned} Q^{n+1} = & Q^n - \Delta t \mathcal{F}(Q_{\text{aux}}^{n+1/2}) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(Q_{\text{aux}}^{n+1/2}) \\ & - \Delta t \mathcal{A}(Q^{n+1/2}, H^{n+1/2}) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(Q^{n+1/2}, H^{n+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

wodurch wir schließlich die asymptotische Korrektur bestimmt haben.

Da diese Gleichung neben einer starken Kopplung der drei Komponenten auch noch Anteile des Mittelpunkt-Verfahrens aufweist, verwenden wir darauf aufbauend ein anderes Zeitintegrationsverfahren zweiter Ordnung. Dies und alle weiteren Schritte der Diskretisierung zur numerischen Realisierung der asymptotischen Korrektur, mit dieser Bezeichnung referenzieren wir fortan Gleichung (5.2.22), diskutieren wir im folgenden Unterkapitel.

5.3 Diskretisierung

In diesem Unterkapitel diskretisieren wir die einzelnen Teilschritte zur numerischen Realisierung der asymptotischen Korrektur. Diese bestehen aus der Diskretisierung des Hilfsproblems in Kapitel 5.3.1, der asymptotischen Funktionen H_0 und H_1 in Kapitel 5.3.2, der räumlichen Ableitungen in Kapitel 5.3.3 und der zeitlichen Ableitung in Kapitel 5.3.4. Unser Ziel ist es dabei, ein vollständig-implizites Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit zu erhalten. Hierfür geben wir zunächst die Diskretisierung der physikalischen Variablen und die Herleitung der Zeitschrittweite an.

Da wir für unseren Algorithmus eine Kombination aus Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Verfahren mit bilinearen Ansatzfunktionen verwenden werden, betrachten wir die zeitliche Veränderung der physikalischen Variablen zu Zellmittelwerten.

Dazu unterteilen wir das rechteckige Rechengebiet $\Omega = [x_a, x_e] \times [y_a, y_e] \subset \mathbb{R}^2$ mit $x_a, x_e \in \mathbb{R}$ und $x_a < x_e$ sowie $y_a, y_e \in \mathbb{R}$ und $y_a < y_e$ in ein äquidistantes Gitter mit $A_x \in \mathbb{N}$ Zellen in x -Richtung und $A_y \in \mathbb{N}$ Zellen in y -Richtung, womit die Gesamtanzahl der Zellen $A_x \cdot A_y$ beträgt.

Mit der Gitterweite $\Delta x = (x_e - x_a) / A_x$ und den Gitterpunkten $x_{1/2} := x_a$, $x_{A_x+1/2} := x_e$ und $x_{i+1/2} := x_{i-1/2} + \Delta x$ für $i = 1, \dots, A_x$ in x -Richtung sowie der Gitterweite $\Delta y = (y_e - y_a) / A_y$ und den Gitterpunkten $y_{1/2} := y_a$, $y_{A_y+1/2} := y_e$ und $y_{j+1/2} := y_{j-1/2} + \Delta y$ für $j = 1, \dots, A_y$ in y -Richtung sind die einzelnen Zellen durch $\Omega_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ gegeben und erfüllen $\Omega = \bigcup \Omega_{i,j}$.

Schließlich erhalten wir die jeweiligen diskreten Anfangswerte $\Phi_{i,j}$ einer physikalischen Funktion Φ mittels eines Zellmittelwertes über Φ bezüglich der jeweiligen Zelle $\Omega_{i,j}$. Falls die diskreten Werte nur an den einzelnen Knotenpunkten $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ vorliegen, so lassen sich die Zellmittelwerte durch eine geeignete Interpolation bestimmen.

Die numerische Realisierung der Randbedingungen erfolgt über Geisterzellen (engl. *ghost cells*). Dies sind künstlich erzeugte Zellen links, rechts, unterhalb und oberhalb des diskretisierten Rechengebietes, die in Abhängigkeit der jeweiligen Randbedingungen aus den Zellen des eigentlichen Rechengebietes ermittelt werden (siehe beispielsweise [LeV02]).

Die Zeitschrittweite Δt unseres Algorithmus bestimmen wir anhand der CFL-Bedingung des Hilfsproblems. Da dieses Problem den rotierenden Flachwassergleichungen (5.2.1) bis (5.2.2) mit $Ro = 1$ und $Fr = 1$ entspricht und folglich nur Eigenwerte der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ aufweist, kann Δt unabhängig von der Froude-Zahl gewählt werden. Mit der CFL-Zahl des Hilfsproblems

$$cfl_{\text{aux}} := \Delta t \left(\min \left(\frac{\Delta x}{\max_{i,j} |v_{1i,j} + \sqrt{H_{i,j}}|}, \frac{\Delta y}{\max_{i,j} |v_{2i,j} + \sqrt{H_{i,j}}|} \right) \right)^{-1}$$

ist diese Bedingung durch $0 < cfl_{\text{aux}} \leq 1/2$ gegeben, wobei im Allgemeinen aus Stabilitätsgründen maximal $cfl_{\text{aux}} = 0.45$ gesetzt wird.

Infolgedessen ist es daher möglich, sowohl das Hilfsproblem über ein explizites als auch die physikalischen Variablen zum Zeitpunkt t^{n+1} über ein noch zu bestimmendes vollständig-implizites Verfahren zu ermitteln.

5.3.1 Diskretisierung des Hilfsproblems

Im Folgenden stellen wir das explizite numerische Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit zur Bestimmung des Hilfsproblems vor. Eine übersichtliche Darstellung und mathematische Herleitung der dabei verwendeten Methoden ist beispielsweise in [Tor09] zu finden.

Um die entsprechende Ordnung zu erhalten, müssen wir insbesondere den Quellterm beachten. Dazu teilen wir das Hilfsproblem mit dem Splitting-Ansatz nach Strang [Str68] in die beiden folgenden Anfangswertprobleme auf und zeigen wie die diskreten Hilfsgrößen bestimmt werden. Für das erste Problem betrachten wir die bekannten Flachwassergleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H + \operatorname{div}(H \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (H \mathbf{v}) + \operatorname{div}(H \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + H \nabla H &= 0 \end{aligned}$$

zum Anfangswert $(H^n, (Hv_1)^n, (Hv_2)^n)^T$ mit dem Lösungsoperator

$$\mathcal{W}^{(\Delta t)}(H^n, (Hv_1)^n, (Hv_2)^n) = (H^{n+1}, (Hv_1)^*, (Hv_2)^*)$$

und für das zweite Problem den Quellterm als gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (Hv) + (Hv)^\perp = 0$$

zum Anfangswert $((Hv_1)^*, (Hv_2)^*)^T$ mit dem Lösungsoperator

$$\mathcal{R}^{(\Delta t)}((Hv_1)^*, (Hv_2)^*) = ((Hv_1)^{n+1}, (Hv_2)^{n+1}).$$

Unter der Voraussetzung, dass die beiden Lösungsoperatoren ebenfalls über Verfahren zweiter Ordnung bestimmt werden, ist für das vollständige Hilfsproblem ein entsprechendes Verfahren durch

$$(H^{n+1}, (Hv_1)^{n+1}, (Hv_2)^{n+1}) = \mathcal{R}^{(\Delta t/2)} \mathcal{W}^{(\Delta t)} \mathcal{R}^{(\Delta t/2)} (H^n, (Hv_1)^n, (Hv_2)^n)$$

gegeben. Folglich erhalten wir unsere Hilfswerte aus Kapitel 5.2 mittels

$$(H_{\text{aux}}^{n+1/2}, M_{\text{aux}}^{n+1/2}, N_{\text{aux}}^{n+1/2}) = \mathcal{R}^{(\Delta t/4)} \mathcal{W}^{(\Delta t/2)} \mathcal{R}^{(\Delta t/4)} (H^n, M^n, N^n).$$

Abschließend geben wir die jeweiligen Verfahren zweiter Ordnung für die beiden Lösungsoperatoren an, wobei auch andere Verfahren mit gleichen Eigenschaften eingesetzt werden können. Den Lösungsoperator $\mathcal{R}^{(\Delta t)}$ der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmen wir über ein explizites zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung mit direkter Anwendung der Zellmittelwerte.

Für den Lösungsoperator $\mathcal{W}^{(\Delta t)}$ der Flachwassergleichungen bezüglich Zellmittelwerten nutzen wir das MUSCL-Hancock-Verfahren in zwei Raumdimensionen nach van Leer [Lee79], [Lee84]. Dieses Finite-Volumen-Verfahren zweiter Ordnung ergänzen wir um Sweby-Limiter [Swe84] mit $\beta = 1.5$ und lösen die einzelnen Riemann-Probleme durch approximative Riemann-Löser. Dabei verwenden wir den HLLC-Löser [TSS94], [FT95] und für die auftretenden Wellengeschwindigkeiten Abschätzungen nach Einfeldt [Ein88].

5.3.2 Diskretisierung der asymptotischen Funktionen H_0 und H_1

Im Folgenden stellen wir die numerischen Verfahren zur Bestimmung der diskreten asymptotischen Höhenfunktionen vor. Da diese auch die in Kapitel 4.2 gezeigte zweiskalige, asymptotische Struktur aufweisen sollen, übertragen wir die entsprechenden Ergebnisse auf den diskreten Fall. Um dies zu erreichen, betrachten wir für die Höhe im Gegensatz zu asymptotischen Entwicklungen beliebiger Ordnung die Zerlegung

$$H = H_0 + \text{Fr} H_1 + \text{Fr}^2 H_2$$

mit der Höhe in führender Ordnung H_0 , den langwelligen Anteilen der Höhe H_1 bestehend aus Poincaré- und stationären Wellen sowie den kurzwelligen Anteilen der Höhe H_2 und bestimmen

diese Funktionen mit den Ergebnissen der Mehrskalenanalyse, wobei wir die Zweiskaligkeit unter Einsatz von geeigneten Mittelungsoperatoren erhalten.

Mit dem Vorgehen aus [Kle95] ist für eine periodische Funktion $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein zweidimensionaler, lokaler Mittelungsoperator in Abhängigkeit der Froude-Zahl durch

$$\bar{\Phi}(x, y) := \frac{1}{|\Omega_p|} \int_{y - \frac{\Delta y}{2\text{Fr}}}^{y + \frac{\Delta y}{2\text{Fr}}} \int_{x - \frac{\Delta x}{2\text{Fr}}}^{x + \frac{\Delta x}{2\text{Fr}}} \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} \quad (5.3.1)$$

gegeben. Dabei bezeichnet Ω_p eine Rechteckumgebung zum Mittelpunkt $(x, y)^T \in \Omega$ mit Seitenlängen $\Delta x / \text{Fr}$ in x -Richtung und $\Delta y / \text{Fr}$ in y -Richtung, sodass das Maß der Umgebung $|\Omega_p| = (\Delta x \Delta y) / \text{Fr}^2$ beträgt. Folglich hängt der lokale Mittelungsoperator von der räumlichen Diskretisierung mit den Gitterweiten Δx und Δy sowie von der Froude-Zahl ab.

Aufgrund des Transformationsatzes liegt keine Abhängigkeit von der Rossby-Zahl vor, da mittels der Skala $x_S = x / \text{Ro}$, $y_S = y / \text{Ro}$, den zugehörigen Gitterweiten $\Delta x_S = \Delta x / \text{Ro}$, $\Delta y_S = \Delta y / \text{Ro}$ sowie $\Phi(x, y) = \Phi(\text{Ro } x_S, \text{Ro } y_S) =: \Phi_S(x_S, y_S)$ die Gleichheiten

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, y) &= \frac{\text{Fr}^2}{\Delta x \Delta y} \int_{y - \frac{\Delta y}{2\text{Fr}}}^{y + \frac{\Delta y}{2\text{Fr}}} \int_{x - \frac{\Delta x}{2\text{Fr}}}^{x + \frac{\Delta x}{2\text{Fr}}} \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} \\ &= \frac{\text{Ro}^2 \text{Fr}^2}{\Delta x \Delta y} \int_{\frac{y}{\text{Ro}} - \frac{\Delta y}{2\text{Fr} \text{Ro}}}^{\frac{y}{\text{Ro}} + \frac{\Delta y}{2\text{Fr} \text{Ro}}} \int_{\frac{x}{\text{Ro}} - \frac{\Delta x}{2\text{Fr} \text{Ro}}}^{\frac{x}{\text{Ro}} + \frac{\Delta x}{2\text{Fr} \text{Ro}}} \Phi(\text{Ro } \tilde{x}_S, \text{Ro } \tilde{y}_S) \, d\tilde{x}_S \, d\tilde{y}_S \\ &= \frac{\text{Fr}^2}{\Delta x_S \Delta y_S} \int_{y_S - \frac{\Delta y_S}{2\text{Fr}}}^{y_S + \frac{\Delta y_S}{2\text{Fr}}} \int_{x_S - \frac{\Delta x_S}{2\text{Fr}}}^{x_S + \frac{\Delta x_S}{2\text{Fr}}} \Phi_S(\tilde{x}_S, \tilde{y}_S) \, d\tilde{x}_S \, d\tilde{y}_S \\ &= \bar{\Phi}_S(x_S, y_S) \end{aligned}$$

gelten. Durch die letzte Gleichheit der obigen Umformungen haben wir zudem gezeigt, dass die von der Rossby-Zahl unabhängige, lokale Mittelung (5.3.1) im diskreten Fall der kontinuierlichen, räumlichen Mittelung (4.1.15) entspricht.

Weiterhin definieren wir durch

$$\bar{\bar{\Phi}} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \text{const.}$$

einen zweidimensionalen, globalen Mittelungsoperator.

Da unsere Diskretisierung im Gegensatz zur asymptotischen Mehrskalentwicklung nicht bezüglich der Skalen (\mathbf{x}_S, t_S) und (\mathbf{x}_M, t_M) , sondern bezüglich der Skala (\mathbf{x}, t) erfolgt, müssen wir die Ergebnisse der Mehrskalenanalyse entsprechend anpassen. Dazu identifizieren wir die einzelnen Ableitungen mittels

$$\frac{\partial}{\partial t_S} \hat{=} \text{Ro} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t_M} \hat{=} \frac{\text{Ro}}{\text{Fr}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla_S \hat{=} \text{Ro} \nabla, \quad \nabla_M \hat{=} \frac{\text{Ro}}{\text{Fr}} \nabla$$

und ersetzen diese in den Gleichungen der asymptotischen Höhenfunktionen. Dieses Vorgehen ist möglich, da wir zur Bestimmung der eigentlichen Werte $(H, M, N)^T$ zum Zeitpunkt

t^{n+1} nur die asymptotische Struktur der Höhenfunktion benötigen und diese in Kapitel 5.3.4 über Fixpunktiterationen bestimmen werden, wofür wir hiermit geeignete Startwerte ermittelt haben.

Nach Gleichung (5.1.7) gilt für die asymptotische Höhenfunktion führender Ordnung H_0 mit angepassten Ableitungsoperatoren und globaler Mittelung

$$\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial t} H_0 = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

wobei \mathbf{n} den äußeren Normaleneinheitsvektor zu $\partial\Omega$ bezeichnet. Da das Rechengebiet Ω ein Rechteck darstellt und wir nur periodische Randbedingungen betrachten, verschwindet das Oberflächenintegral. Demnach ist die asymptotische Höhenfunktion führender Ordnung sowohl zeit- als auch raumunabhängig und es gilt $H_0 = \bar{H} = \text{const.} \neq 0$.

Daraufhin lassen sich nach [Kle95] in Übereinstimmung mit der asymptotischen Zerlegung die asymptotischen Höhenfunktionen anhand der Mittelungsoperatoren bestimmen. Diese sind durch

$$H_0 = \bar{H}, \quad H_1 = \frac{1}{\text{Fr}} \left(\bar{H} - \bar{H} \right), \quad H_2 = \frac{1}{\text{Fr}^2} (H - H_0 - \text{Fr} H_1)$$

gegeben. Zudem gilt für die gemittelte Geschwindigkeit in führender Ordnung $\bar{\mathbf{v}}_0 \equiv \bar{\mathbf{v}}$.

Nachdem wir in unserem Algorithmus die Hilfswerte bestimmt haben, ermitteln wir mit den obigen Ausführungen die asymptotischen Funktionen zum initialen Zeitpunkt t^n . Dabei werden die diskreten mehrdimensionalen Integrale der Mittelungsoperatoren jeweils mittels der Trapezregel realisiert.

Anschließend bestimmen wir mit dem folgenden numerischen Verfahren zweiter Ordnung die diskrete asymptotische Höhenfunktion erster Ordnung H_1 zum Zeitpunkt t^{n+1} . Hierfür betrachten wir zunächst die entsprechenden linearen Gleichungen (4.2.2) bis (4.2.3) beziehungsweise (5.1.12) bis (5.1.13) aus der Mehrskalenanalyse. Mit den angepassten Ableitungsoperatoren werden die Gleichungen für $(H_1, \bar{\mathbf{v}})^T$ zu

$$\frac{\partial}{\partial t} H_1 + \frac{H_0}{\text{Fr}} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \tag{5.3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\text{Fr}} \nabla H_1 + \frac{1}{\text{Ro}} \bar{\mathbf{v}}^\perp = 0. \tag{5.3.3}$$

Ferner erhalten wir für $\mathbf{w} := (H_1, \bar{\mathbf{v}})^T$ mit der gemittelten Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{\mathbf{v}}_A, \bar{\mathbf{v}}_B)^T$, wobei $\bar{\mathbf{v}}_A$ die Geschwindigkeit in x -Richtung und $\bar{\mathbf{v}}_B$ die Geschwindigkeit in y -Richtung bezeichnet, und den Matrizen

$$L_{F_1} := \frac{1}{\text{Fr}} \begin{pmatrix} 0 & H_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{F_2} := \frac{1}{\text{Fr}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{S_F} := \frac{1}{\text{Ro}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die lineare Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} + L_{F_1} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w} + L_{F_2} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{w} + L_{S_F} \mathbf{w} = 0.$$

Da die Eigenwerte der Matrizen L_{F_1} und L_{F_2} die Ordnung $\mathcal{O}(1/\text{Fr})$ aufweisen, können wir auch hier aufgrund der zugehörigen CFL-Bedingung kein explizites Verfahren verwenden. Folglich bestimmen wir die asymptotische Funktion H_1 zum Zeitpunkt t^{n+1} über ein implizites Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit. Eine übersichtliche Darstellung und mathematische Herleitung der dabei verwendeten Methoden ist beispielsweise in [Tor09] zu finden.

Analog zum Hilfsproblem teilen wir die lineare Form mit dem Splitting-Ansatz nach Strang [Str68] in die drei folgenden Anfangswertprobleme auf. Für das erste Problem betrachten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} + L_{F_1} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w} = 0$$

zum Anfangswert \mathbf{w}^n mit dem Lösungsoperator $\mathcal{X}^{(\Delta t)}(\mathbf{w}^n) = \mathbf{w}^*$, für das zweite Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} + L_{F_2} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{w} = 0$$

zum Anfangswert \mathbf{w}^* mit dem Lösungsoperator $\mathcal{Y}^{(\Delta t)}(\mathbf{w}^*) = \mathbf{w}^{**}$ und für das dritte Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} + L_{S_F} \mathbf{w} = 0$$

zum Anfangswert \mathbf{w}^{**} mit dem Lösungsoperator $\mathcal{S}^{(\Delta t)}(\mathbf{w}^{**}) = \mathbf{w}^{n+1}$.

Unter der Voraussetzung, dass die drei Lösungsoperatoren ebenfalls über Verfahren zweiter Ordnung bestimmt werden, ist für die vollständige lineare Form ein entsprechendes Verfahren durch

$$\mathbf{w}^{n+1} = \mathcal{S}^{(\Delta t/2)} \mathcal{X}^{(\Delta t/2)} \mathcal{Y}^{(\Delta t)} \mathcal{X}^{(\Delta t/2)} \mathcal{S}^{(\Delta t/2)}(\mathbf{w}^n)$$

gegeben.

Außerdem ist es durch diesen Ansatz möglich, die Methode der Charakteristiken auf die ersten beiden Probleme anzuwenden und damit die Linearität der Gleichungen auszunutzen. Ohne Splitting-Ansatz wäre dies nicht der Fall (siehe beispielsweise [LeV02]), da die Matrizen L_{F_1} und L_{F_2} nicht kommutieren, das heißt, es gilt $L_{F_1} L_{F_2} \neq L_{F_2} L_{F_1}$, und sich demzufolge nicht gleichzeitig diagonalisieren lassen.

Abschließend geben wir die jeweiligen Verfahren zweiter Ordnung für die drei Lösungsoperatoren an, wobei auch andere Verfahren mit gleichen Eigenschaften eingesetzt werden können. Den Lösungsoperator $\mathcal{S}^{(\Delta t)}$ der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmen wir über ein implizites Trapez-Verfahren mit direkter Anwendung der Zellmittelwerte.

Für die Lösungsoperatoren $\mathcal{X}^{(\Delta t)}$ und $\mathcal{Y}^{(\Delta t)}$ der linearen partiellen Differentialgleichungen bezüglich Zellmittelwerten nutzen wir nach nun möglichen Diagonalisierungen der einzelnen Matrizen die Methode der Charakteristiken und für die zeitliche Ableitung ein implizites Trapez-Verfahren. In Kombination mit dem Splitting-Ansatz führt dies dazu, dass das Lösen

der linearen diskreten Probleme ohne wesentlichen numerischen Aufwand erfolgt.

Bemerkung 5.3.1

Die bisher verwendete lokale Mittelung (5.3.1) weist im diskreten Fall einen entscheidenden Nachteil auf. Für festes Δx und Δy sowie hinreichend kleiner Froude-Zahl erhalten wir $\Omega \subset \Omega_p$. Infolgedessen beschreibt die lokale eine globale Mittelung und es gilt $\bar{\Phi}(x, y) = \text{const}$.

Dies steht allerdings im Widerspruch zu unserer asymptotischen Mehrskalanalyse, welche für die räumlich und zeitlich gemittelte asymptotische Höhenfunktion H_1 nach Gleichung (5.1.10) das quasi-geostrophische Gleichgewicht in Abhängigkeit der Raumskala \mathbf{x}_M vorsieht.

Eine Möglichkeit, um diesen Nachteil zu beheben, besteht darin, einen vom diskreten Raumgitter unabhängigen Mittelungsoperator zu verwenden. Im Fall der eindimensionalen Euler-Gleichungen für alle Mach-Zahlen wurde von Hoffmann in [Hof00] eine entsprechende Mittelung mittels diskreter Datenanalyse entwickelt. Es wäre folglich naheliegend, diesen Ansatz auf unsere zweidimensionale Situation zu erweitern.

Aktuell verzichten wir jedoch darauf, da wir für unsere numerischen Testbeispiele (siehe Kapitel 6) nur mit Werten $\Delta x, \Delta y$ und Fr arbeiten werden, die nicht zu $H_1 = \text{const}$. führen.

Damit haben wir gezeigt, wie sich zwei der drei asymptotischen Höhenfunktionen bestimmen lassen. Die Herleitung der diskreten asymptotischen Höhenfunktion zweiter Ordnung H_2 zum Zeitpunkt t^{n+1} diskutieren wir im Rahmen der Diskretisierung der zeitlichen Ableitung in Kapitel 5.3.4.

5.3.3 Diskretisierung der räumlichen Ableitungen

Als Nächstes ersetzen wir innerhalb der asymptotischen Korrektur die räumlichen Ableitungen durch entsprechende diskrete Ableitungsoperatoren der Konsistenzordnung zwei. Hierfür verwenden wir nach [VK09] eine Kombination aus Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Verfahren mit bilinearen Ansatzfunktionen, sodass beispielsweise der Laplace-Operator durch den aus [Sül91] bekannten 9-Punkte-Stern diskretisiert wird.

Im Gegensatz zu anderen Verfahren weist dieses Vorgehen einige Vorteile auf. So werden etwa im Fall der Flachwassergleichungen für $Fr \rightarrow 0$ in [VK09] geeignete Stabilitätseigenschaften nachgewiesen und deutlich verbesserte Resultate erzielt.

Für ein ähnliches Verfahren wird Ersteres auch im Fall von mehrdimensionalen Advektionsgleichungen in [TF04] gegenüber einer klassischen Diskretisierung mit Finiten-Differenzen beschrieben. Dabei stimmt der dort zum Einsatz kommende diskrete Divergenzoperator nach einer Interpolation mit dem des obigen Verfahrens überein.

Die hier verwendeten diskreten räumlichen Ableitungsoperatoren sind in Anhang A.2 zu finden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir im Weiteren darauf, die Zellmittelwerte der physikalischen Funktionen anhand von Indizes zu kennzeichnen und neue Symbole für die diskreten räumlichen Ableitungsoperatoren einzuführen.

5.3.4 Diskretisierung der zeitlichen Ableitung

Abschließend ersetzen wir innerhalb der asymptotischen Korrektur das Zeitintegrationsverfahren durch geeignete Verfahren zweiter Ordnung und bestimmen infolgedessen die physikalischen Variablen zum Zeitpunkt t^{n+1} . Dabei ermitteln wir die asymptotische Höhenfunktion zweiter Ordnung H_2 durch verschiedene Helmholtz-Probleme und beachten die Nichtlinearität der Gleichungen mithilfe passender Fixpunktiterationen, sodass insgesamt ein vollständig-implizites Verfahren entsteht.

Zunächst geben wir jedoch für hinreichend glatte Funktionen $\mathbf{q} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^s, t \mapsto \mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s, \mathbf{q} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{q})$ mit $s \in \mathbb{N}$ die hier verwendeten Zeitintegrationsverfahren anhand der autonomen Differentialgleichung

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

allgemein an.

Als erstes Verfahren betrachten wir das Heun-Verfahren

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{[1]} &= \mathbf{q}^n + \Delta t \mathbf{g}(\mathbf{q}^n) \\ \mathbf{q}^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^n + \frac{1}{2} \left(\mathbf{q}^{[1]} + \Delta t \mathbf{g}(\mathbf{q}^{[1]}) \right), \end{aligned}$$

welches nach [GS98] das optimale Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung mit TVD-Eigenschaft ist.

Als zweites Verfahren betrachten wir das aus drei Schritten bestehende vollständig-implizite Verfahren zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{q}}^{n+1} &= \mathbf{q}^n + \Delta t \mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{q}}^{n+1}) \\ \widetilde{\mathbf{q}}^n &= \mathbf{q}^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{q}}^n) - \mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{q}}^{n+1}) \right) \\ \mathbf{q}^{n+1} &= \mathbf{q}^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{g}(\mathbf{q}^{n+1}) + \mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{q}}^n) \right), \end{aligned}$$

wobei ein Nachweis der entsprechenden Konsistenzordnung beispielsweise in [Mei01] zu finden ist. Wie die einzelnen Hochstellungen bereits andeuten, beschreibt der erste Schritt eine implizite Näherung der Werte zum Zeitpunkt t^{n+1} , der zweite Schritt eine implizite Korrektur der Werte zum Zeitpunkt t^n und der abschließende dritte Schritt ein implizites Trapez-Verfahren.

Als drittes Verfahren betrachten wir das implizite Radau-IIA-Verfahren

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{[1]} &= \mathbf{g} \left(\mathbf{q}^n + \Delta t \left(\frac{5}{12} \mathbf{k}^{[1]} - \frac{1}{12} \mathbf{k}^{[2]} \right) \right) \\ \mathbf{k}^{[2]} &= \mathbf{g} \left(\mathbf{q}^n + \Delta t \left(\frac{3}{4} \mathbf{k}^{[1]} + \frac{1}{4} \mathbf{k}^{[2]} \right) \right) \\ \mathbf{q}^{n+1} &= \mathbf{q}^n + \Delta t \left(\frac{3}{4} \mathbf{k}^{[1]} + \frac{1}{4} \mathbf{k}^{[2]} \right), \end{aligned}$$

welches ein implizites Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung ist. Im Fall von steifen Differen-

tialgleichungen reduziert sich die Konsistenzordnung auf zwei (siehe beispielsweise [HW96]).

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir unser eigentliches Verfahren durch eine Kombination der drei obigen Zeitintegrationsverfahren. Zu gegebenen hinreichend glatten physikalischen Variablen zum Zeitpunkt t^n bestimmen wir mit dem Heun-Verfahren die Variablen zum Zeitpunkt t^{n+1} , wobei innerhalb jedes Schritts die asymptotische Korrektur durch das vollständig-implizite Verfahren zweiter Ordnung ermittelt wird.

Hierfür gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}^{n+1} &= Q^n - \Delta t \mathcal{F} \left(Q_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \left(Q_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) \\ &\quad - \Delta t \mathcal{A} \left(\widetilde{Q}^{n+1}, \widetilde{H}^{n+1} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \left(\widetilde{Q}^{n+1}, \widetilde{H}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}^n &= Q^n - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A} \left(\widetilde{Q}^n, \widetilde{H}^n \right) - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \left(\widetilde{Q}^n, \widetilde{H}^n \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A} \left(\widetilde{Q}^{n+1}, \widetilde{H}^{n+1} \right) + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \left(\widetilde{Q}^{n+1}, \widetilde{H}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= Q^n - \Delta t \mathcal{F} \left(Q_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \left(Q_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A} \left(Q^{n+1}, H^{n+1} \right) - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \left(Q^{n+1}, H^{n+1} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A} \left(\widetilde{Q}^n, \widetilde{H}^n \right) - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \left(\widetilde{Q}^n, \widetilde{H}^n \right). \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Diese Kombination verwenden wir aus Stabilitätsgründen. Der Einsatz des vollständig-impliziten Verfahrens zweiter Ordnung erfolgt zudem aufgrund der Nichtlinearität der asymptotischen Korrekturfunktion und der daraus resultierenden starken Kopplung der Gleichung. Einzelnen betrachtet, wird das Heun-Verfahren beispielsweise in [VK09] als grundlegendes Zeitintegrationsverfahren verwendet. Für das vollständig-implizite Verfahren zweiter Ordnung ist dies beispielsweise in [Hof00] und [Mei01] der Fall.

Anschließend stellen wir die numerische Realisierung der Gleichung (5.3.4) im Detail vor. Die anderen beiden Gleichungen (5.3.5) und (5.3.6) folgen analog. Wir bestimmen zunächst die Hilfs- werte mit Kapitel 5.3.1 und die asymptotischen Höhenfunktionen H_1 und H_2 mit Kapitel 5.3.2. Weiterhin übertragen wir die Nichtlinearität der Gleichung, welche durch das Doppelargument der asymptotischen Korrekturfunktion dargestellt wird, mittels einer Fixpunktiteration mit Iterationsschritt $k \rightarrow k + 1$ und Startwert $\widetilde{Q}^{n+1,[0]} = Q_{\text{aux}}^{n+1/2}$ auf die numerische Situation. Demzufolge erhalten wir mit der Höhenzerlegung

$$\widetilde{H}^{n+1,[k+1]} = H_0^{n+1} + \text{Fr} H_1^{n+1} + \text{Fr}^2 H_2^{n+1,[k+1]},$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, die asymptotische Höhe zweiter Ordnung $H_2^{n+1,[k+1]}$ durch das Helmholtz- Problem

$$\begin{aligned} &\text{Fr}^2 H_2^{n+1,[k+1]} + \Delta t \mathcal{A}_H \left(\widetilde{Q}^{n+1,[k]}, \text{Fr}^2 H_2^{n+1,[k+1]} \right) \\ &= H^n - H_0^{n+1} - \text{Fr} H_1^{n+1} - \Delta t \mathcal{F}_H \left(Q_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) - \Delta t \mathcal{A}_H \left(\widetilde{Q}^{n+1,[k]}, H_0^{n+1} + \text{Fr} H_1^{n+1} \right) \end{aligned}$$

und bestimmen daraufhin den Impuls durch

$$\begin{aligned} M^{\widetilde{n+1},[k+1]} &= M^n - \Delta t \mathcal{F}_M \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}_M} \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) \\ &\quad - \Delta t \mathcal{A}_M \left(\mathbf{Q}^{\widetilde{n+1},[k^*]}, H^{\widetilde{n+1},[k+1]} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}_M} \left(\mathbf{Q}^{\widetilde{n+1},[k+1]}, H^{\widetilde{n+1},[k+1]} \right), \\ N^{\widetilde{n+1},[k+1]} &= N^n - \Delta t \mathcal{F}_N \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}_N} \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) \\ &\quad - \Delta t \mathcal{A}_N \left(\mathbf{Q}^{\widetilde{n+1},[k^*]}, H^{\widetilde{n+1},[k+1]} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}_N} \left(\mathbf{Q}^{\widetilde{n+1},[k+1]}, H^{\widetilde{n+1},[k+1]} \right), \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{Q}^{\widetilde{n+1},[k^*]} := \left(H^{\widetilde{n+1},[k+1]}, M^{\widetilde{n+1},[k]}, N^{\widetilde{n+1},[k]} \right)^T,$$

wobei wir für den Quellanteil des asymptotischen Quellterms den Splitting-Ansatz mit dem impliziten Radau-IIA-Verfahren verwenden und die Diskretisierung aller räumlichen Ableitungen mit Kapitel 5.3.3 erfolgt. Um unphysikalische Oszillationen zu reduzieren, ersetzen wir in der Impulsberechnung die Hilfswerte der Höhe zudem durch $H_{\text{aux}}^{n+1/2} = \left(H^n + H^{\widetilde{n+1},[k+1]} \right) / 2$. Da das lineare Gleichungssystem des Helmholtz-Problems dünnbesetzt ist, bestimmen wir die Lösung numerisch über das iterative BiCGSTAB-Verfahren nach [Vor92] mit der unvollständigen LU-Zerlegung als Vorkonditionierer.

Bemerkung 5.3.2

In jedem Zeitschritt ist der größte numerische Aufwand durch die Berechnung der unvollständigen LU-Zerlegung gegeben. Da wir diese Matrizen nur als Vorkonditionierer des BiCGSTAB-Verfahrens benötigen, ist es durch das folgende Vorgehen möglich, den Aufwand erheblich zu reduzieren.

Wir bestimmen initial einmalig für jeden der drei Schritte des vollständig-impliziten Verfahrens zweiter Ordnung die jeweilige unvollständige LU-Zerlegung und verwenden diese in Abhängigkeit des jeweiligen Verfahrensschritts für jeden Zeit- und Iterationsschritt. Infolgedessen erhöhen sich zwar die Iterationsschritte des BiCGSTAB-Verfahrens, allerdings ist dies gegenüber der beschriebenen Aufwandsersparnis ohne Bedeutung.

Die Fixpunktiteration endet, sobald das Abbruchkriterium

$$\max_{i,j} \left\| \mathbf{Q}_{i,j}^{\widetilde{n+1},[k+1]} - \mathbf{Q}_{i,j}^{\widetilde{n+1},[k]} \right\|_{\infty} < \text{TOL}$$

mit einer Genauigkeit von 10^{-12} , die ebenso innerhalb des BiCGSTAB-Verfahrens verwendet wird, erfüllt ist.

Für Gleichung (5.3.5) startet die Fixpunktiteration bei $\mathbf{Q}^{\widetilde{n},[0]} = \mathbf{Q}^n$ mit der Höhenzerlegung

$$H^{\widetilde{n},[k+1]} = H_0^n + \text{Fr} H_1^n + \text{Fr}^2 H_2^{\widetilde{n},[k+1]},$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und für die Gleichung (5.3.6) bei $\mathbf{Q}^{n+1,[0]} = \mathbf{Q}^{\widetilde{n+1}}$ mit der Höhenzerlegung

$$H^{n+1,[k+1]} = H_0^{n+1} + \text{Fr} H_1^{n+1} + \text{Fr}^2 H_2^{n+1,[k+1]},$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Insgesamt erhalten wir hiermit unter der Bedingung von hinreichend kleinen Froude-Zahlen ein vollständig-implizites Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit, das sowohl für Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ als auch $\mathcal{O}(\varepsilon)$ gültig ist.

Dies folgt insbesondere durch die Verwendung des impliziten Radau-IIA-Verfahrens, da der Quellanteil des asymptotischen Quellterms durch den Splitting-Ansatz eine steife Differentialgleichung beschreibt und dadurch der Ordnungsverlust von drei auf zwei wirksam wird. Aufgrund der Linearität dieser steifen Differentialgleichung entsteht dabei kein zusätzlicher numerischer Aufwand.

Wenn jedoch in dieser Situation ein Verfahren zweiter Ordnung wie das Trapez-Verfahren verwendet wird, führt die Steifheit zu einem Ordnungsverlust von zwei auf eins mit dem Ergebnis, dass das Gesamtverfahren die Konsistenzordnung eins im Gegensatz zu unserer Zielsetzung aufweist.

Damit unser Algorithmus auch für hinreichend kleine Froude-Zahlen gültig ist, müssen wir diesen noch um die numerische Realisierung der Divergenzfreiheit nach den Gleichungen (5.1.8) und (5.1.11) ergänzen. Dies ist Inhalt des folgenden Unterkapitels.

5.4 Divergenzfreie Korrektur

In diesem Unterkapitel leiten wir die divergenzfreie Korrektur her und stellen die entsprechende numerische Realisierung vor. Analog zur Sicherstellung der Divergenzfreiheit im Fall der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen mittels Chorin-Projektion nach Chorin [Cho68] und Temam [Tem69] über ein versetztes Raugitter, eine übersichtliche Darstellung der numerischen Realisierung ist beispielsweise in [GDN97] zu finden, sichern wir für hinreichend kleine Froude-Zahlen die Divergenzfreiheit nach den Gleichungen (5.1.8) und (5.1.11) der asymptotischen Mehrskalanalyse durch eine Korrektur der Werte $\widehat{Q}^{n+1} := Q^{n+1}$ aus Kapitel 5.3.4.

In unserem Fall erhalten wir dabei ein weiteres Helmholtz-Problem. Um die Entstehung von unphysikalischen Oszillationen wie sogenannte Schachbrett-Instabilitäten zu verhindern, bestimmen wir die Lösung dieses Problems aus Stabilitätsgründen über ein duales Gitter, da die physikalischen Variablen \widehat{Q}^{n+1} bezüglich Zellmittelwerten vorliegen, und diskretisieren die räumlichen Ableitungen nach [VK09] durch eine Kombination aus Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Verfahren mit bilinearen Ansatzfunktionen.

Die entsprechenden diskreten räumlichen Ableitungsoperatoren sind aus Gründen der Vollständigkeit in Anhang A.2 zu finden und werden wie im Fall der asymptotischen Korrektur aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht durch neue Symbole gekennzeichnet.

Zur Herleitung der divergenzfreien Korrektur folgen wir zunächst den Ausführungen in [Hof00] und [Mei01] für die eindimensionalen Euler-Gleichungen und passen diese auf unsere zweidimensionale Situation an.

Als Ausgangspunkt der folgenden Herleitung setzen wir für den Impuls zum Zeitpunkt t^{n+1}

$$\begin{aligned} (H\mathbf{v})^{n+1} &= (H\mathbf{v})^{\widehat{n+1}} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) (H\bar{\mathbf{v}}^\perp)^{\widehat{n+1}} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{\widehat{n+1}} \nabla H^{\widehat{n+1}} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) (H\bar{\mathbf{v}}^\perp)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{n+1} \nabla H^{n+1} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$(H\mathbf{v})^{n+1} = (H\mathbf{v})^{**} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) (H\bar{\mathbf{v}}^\perp)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{n+1} \nabla H^{n+1} \quad (5.4.1)$$

mit

$$(H\mathbf{v})^{**} = (H\mathbf{v})^{\widehat{n+1}} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) (H\bar{\mathbf{v}}^\perp)^{\widehat{n+1}} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H^{\widehat{n+1}} \nabla H^{\widehat{n+1}},$$

wobei $\bar{\mathbf{v}}$ die gemittelte Geschwindigkeit bezeichnet, und bestimmen die Höhe zum Zeitpunkt t^{n+1} durch das Trapez-Verfahren

$$H^{n+1} = H^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\text{div} (H\mathbf{v})^{n+1} + \text{div} (H\mathbf{v})^n \right). \quad (5.4.2)$$

Dabei wählen wir diese Form der asymptotischen Terme, um unter geeigneten Voraussetzungen die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit im Grenzwert $\text{Fr} \rightarrow 0$ zu erhalten. Hierfür nehmen wir bezüglich der Höhenzerlegung

$$H = H_0 + \text{Fr} H_1 + \text{Fr}^2 H_2$$

aufgrund der Mehrskalenanalyse an, dass die asymptotische Höhenfunktion $H_0 = \text{const.} \neq 0$ erfüllt und die asymptotische Höhenfunktion H_1 durch die linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen (5.3.2) bis (5.3.3) bestimmt wird, wodurch sich die obigen asymptotischen Terme unabhängig von der Rossby-Zahl und in der Form $\mathcal{O}(\text{Fr})$ schreiben lassen.

Es folgt

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) H\bar{\mathbf{v}}^\perp + \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2} \right) H\nabla H \\ &= \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}} \right) H\bar{\mathbf{v}}^\perp + \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}} \right) H\nabla (H_1 + \text{Fr} H_2) \\ &= H\bar{\mathbf{v}}^\perp - \frac{1}{\text{Ro}} H\bar{\mathbf{v}}^\perp + \text{Fr} H\nabla H_1 - \frac{1}{\text{Fr}} H\nabla H_1 + (\text{Fr}^2 - 1) H\nabla H_2 \\ &= H\bar{\mathbf{v}}^\perp + \text{Fr} H\nabla H_1 - H \left(\frac{1}{\text{Ro}} \bar{\mathbf{v}}^\perp + \frac{1}{\text{Fr}} \nabla H_1 \right) + (\text{Fr}^2 - 1) H\nabla H_2 \\ &= H\bar{\mathbf{v}}^\perp + \text{Fr} H\nabla H_1 + H \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} + (\text{Fr}^2 - 1) H\nabla H_2, \end{aligned}$$

sodass hiermit Gleichung (5.4.1) zu

$$\begin{aligned} (H\mathbf{v})^{n+1} &= (H\mathbf{v})^{**} + \frac{\Delta t}{2} \left((H\bar{\mathbf{v}}^\perp)^{n+1} + \text{Fr} H^{n+1} \nabla H_1^{n+1} + H^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} \right)^{n+1} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} (\text{Fr}^2 - 1) H^{n+1} \nabla H_2^{n+1} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

wird.

Schließlich erhalten wir die sogenannte divergenzfremie Korrektur durch ein Einsetzen der Gleichung (5.4.3) in Gleichung (5.4.2), welches im folgenden Helmholtz-Problem

$$\begin{aligned} &\text{Fr}^2 H_2^{n+1} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 (\text{Fr}^2 - 1) \text{div} \left(H^{n+1} \nabla H_2^{n+1} \right) \\ = & H^n - H_0^{n+1} - \text{Fr} H_1^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \text{div} (H\mathbf{v})^n - \frac{\Delta t}{2} \text{div} (H\mathbf{v})^{**} \\ &- \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \text{div} \left((H\bar{\mathbf{v}}^\perp)^{n+1} + \text{Fr} H^{n+1} \nabla H_1^{n+1} + H^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} \right)^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

resultiert.

Demnach hängt dieses semi-diskrete Problem nicht von der Rossby-Zahl ab und ist auch für verschwindende Froude-Zahlen gültig. Darüber hinaus wird hierdurch die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit im Grenzwert $\text{Fr} \rightarrow 0$ sicher gestellt. Dies zeigen wir im folgenden Lemma, welches die zu [Hof00, Lemma 3.3.1] und [Mei01, Satz 3.3.4] im Fall der Euler-Gleichungen analoge Aussage darstellt. Zudem können wir unser Lemma als Verallgemeinerung zu [Vat05, Lemma 3.1] im Fall der Flachwassergleichungen verstehen.

Lemma 5.4.1

Sei $\text{div} \mathbf{v}^n = 0$ gegeben und sei ferner $H = H_0 + \text{Fr} H_1 + \text{Fr}^2 H_2$ eine geeignete Zerlegung der Höhe mit $H_0 = \text{const.} \neq 0$.

Dann folgt im Grenzwert $\text{Fr} \rightarrow 0$ für das angegebene Verfahren $\text{div} \mathbf{v}^{n+1} = 0$.

Beweis:

Zunächst setzen wir die Höhenzerlegung für H^{n+1} in die beiden Gleichungen (5.4.3) und (5.4.4) ein und betrachten jeweils den Grenzwert $\text{Fr} \rightarrow 0$. Folglich erhalten wir mit der Voraussetzung $\text{div} \mathbf{v}^n = 0$ für Gleichung (5.4.4)

$$0 = -H_0^n \text{div} \mathbf{v}^n = \text{div} (H\mathbf{v})^{**} + \frac{\Delta t}{2} \text{div} \left((H_0 \bar{\mathbf{v}}^\perp)^{n+1} + H_0^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} \right)^{n+1} - H_0^{n+1} \nabla H_2^{n+1} \right).$$

Anschließend wenden wir die Divergenz auf die angepasste Gleichung (5.4.3) im Grenzwert $\text{Fr} \rightarrow 0$ an, sodass unter Verwendung der obigen Gleichung die Behauptung mittels

$$H_0^{n+1} \text{div} \mathbf{v}^{n+1} = \text{div} (H\mathbf{v})^{**} + \frac{\Delta t}{2} \text{div} \left((H_0 \bar{\mathbf{v}}^\perp)^{n+1} + H_0^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} \right)^{n+1} - H_0^{n+1} \nabla H_2^{n+1} \right) = 0$$

folgt. □

Durch die obigen Ausführungen können wir des Weiteren die Gestalt der hier verwendeten asymptotischen Terme erklären. Da wir aufgrund der Nichtlinearität im Höhengradienten und der Notwendigkeit der asymptotischen Höhenfunktion H_1 für das quasi-geostrophische Gleichgewicht eine Höhenzerlegung der Form $H = H_0 + \text{Fr} H_1 + \text{Fr}^2 H_2$ benötigen, verhindert insbesondere der gegebene Quellterm unter Verwendung der linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen die Entstehung eines Terms der Ordnung $\mathcal{O}(1/\text{Fr})$.

Außerdem hat dies zur Folge, dass die asymptotische Höhenfunktion H_2 auch im Grenzwert $\text{Fr} \rightarrow 0$ in Übereinstimmung mit unserer Mehrskalenganalyse (siehe Bemerkung 4.2.2) von der gemittelten Vortizität abhängt und durch die zeitliche Veränderung der gemittelten Geschwindigkeit beeinflusst wird. Zusätzlich kann in diesem Grenzwert H_2 als Korrektur der Höhe in Analogie zur Chorin-Projektion für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen verstanden werden.

Allerdings kommt diese Darstellung der divergenzfreien Korrektur in unserem Algorithmus aus mehreren Gründen nicht zum Einsatz. Dies wird im Folgenden dargelegt.

Bemerkung 5.4.2

In der numerischen Realisierung unseres vollständig-impliziten Algorithmus verwenden wir aus den beiden folgenden Gründen nicht das Helmholtz-Problem aus Gleichung (5.4.4), sondern setzen stattdessen für die divergenzfreie Korrektur direkt Gleichung (5.4.1) in Gleichung (5.4.2) ein. Dies ermöglicht eine vereinfachte Implementierung, da die neue divergenzfreie Korrektur im Gegensatz zu Gleichung (5.4.2) mit dem BDF(2)-Verfahren für die zeitliche Ableitung der gemittelten Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t^{n+1}

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}}\right)^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2} \bar{\mathbf{v}}^{n+1} - 2 \bar{\mathbf{v}}^n + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^{n-1}\right)$$

keine gemittelten Werte zum Zeitpunkt t^{n-1} benötigt.

Außerdem ist es aktuell innerhalb unseres Gesamtverfahrens nicht möglich den Grenzwert $\text{Fr} \rightarrow 0$ beziehungsweise numerisch $\text{Fr} = 0$ zu betrachten. Neben den in Bemerkung 5.3.1 genannten Nachteilen der lokalen Mittelung liegt dies daran, dass durch die Gestalt der asymptotischen Terme für die asymptotische Korrektur bezüglich einer Höhenzerlegung Terme der Ordnung $\mathcal{O}(1/\text{Fr})$ auftreten.

Somit könnte es zukünftig sinnvoll sein, die asymptotische Korrektur in diesem Fall mit der Geschwindigkeitszerlegung $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$ anhand der zu den rotierenden Flachwassergleichungen (5.0.1) bis (5.0.2) äquivalenten Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H + \text{div}(H \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (H \mathbf{v}) + \text{div}(H \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + H \bar{\mathbf{v}}^\perp + \frac{1}{\text{Ro}} H \mathbf{v}'^\perp + H \nabla H &= \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}}\right) H \bar{\mathbf{v}}^\perp + \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2}\right) H \nabla H \end{aligned}$$

zu bestimmen.

Nichtsdestotrotz ist unser vollständig-impliziter Algorithmus für die numerischen Testbeispiele

aus Kapitel 6 anwendbar, da alle Beispiele hinreichend kleine und von Null verschiedene Froude-Zahlen aufweisen und daher die divergenzfreie Korrektur benötigen.

Aus den in Bemerkung 5.4.2 genannten Gründen setzen wir für die divergenzfreie Korrektur infolgedessen direkt Gleichung (5.4.1) in Gleichung (5.4.2) ein und stellen anschließend die entsprechende numerische Realisierung vor. Dabei verwenden wir auch hier aufgrund der Nichtlinearität im Höhengradienten eine Fixpunktiteration mit Iterationsschritt $k \rightarrow k + 1$ und Startwert $\mathbf{Q}^{n+1,[0]} = \widehat{\mathbf{Q}}^{n+1}$.

Demzufolge erhalten wir mit der Höhenzerlegung

$$H^{n+1,[k+1]} = \widehat{H}_0^{n+1} + \text{Fr} \widehat{H}_1^{n+1} + \text{Fr}^2 H_2^{n+1,[k+1]},$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, die asymptotische Höhe zweiter Ordnung $H_2^{n+1,[k+1]}$ durch das Helmholtz-Problem

$$\begin{aligned} & \text{Fr}^2 H_2^{n+1,[k+1]} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 (\text{Fr}^2 - 1) \operatorname{div} \left(H^{n+1,[k]} \nabla H_2^{n+1,[k+1]} \right) \\ = & H^n - \widehat{H}_0^{n+1} - \text{Fr} \widehat{H}_1^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \operatorname{div} (H\mathbf{v})^n - \frac{\Delta t}{2} \operatorname{div} (H\mathbf{v})^{**} \\ & - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}}\right) \operatorname{div} (H\bar{\mathbf{v}}^\perp)^{n+1,[k]} - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}}\right) \operatorname{div} \left(H^{n+1,[k]} \nabla \widehat{H}_1^{n+1} \right) \end{aligned}$$

und bestimmen daraufhin den Impuls durch

$$\begin{aligned} (H\mathbf{v})^{n+1,[k+1]} = (H\mathbf{v})^{**} & + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro} - 1}{\text{Ro}}\right) \left(H^{n+1,[k+1]} \bar{\mathbf{v}}^{n+1,[k]} \right)^\perp \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Fr}^2 - 1}{\text{Fr}^2}\right) H^{n+1,[k+1]} \nabla H^{n+1,[k+1]}, \end{aligned}$$

wobei die Diskretisierung aller räumlichen Ableitungen mit Anhang A.2 erfolgt. Im Gegensatz zur asymptotischen Korrektur bestimmen wir hier allerdings aus den genannten Stabilitätsgründen $H_2^{n+1,[k+1]}$ bezüglich Knotenpunktwerten. Folglich wenden wir im Helmholtz-Problem die diskreten Ableitungsoperatoren direkt an und bilden die anderen Terme des Problems mit geeigneten Interpolationen auf die Knotenpunktwerte ab.

Weiterhin bestimmen wir mit direkten diskreten Ableitungsoperatoren, wir nutzen aus, dass die Höhe nach einer geeigneten Interpolation sowohl bezüglich Zellmittelwerten als auch bezüglich Knotenpunktwerten vorliegt, den Impuls bezüglich Zellmittelwerten.

Da auch hier das lineare Gleichungssystem des Helmholtz-Problems dünnbesetzt ist, bestimmen wir die Lösung numerisch ebenfalls über das iterative BiCGSTAB-Verfahren nach [Vor92] mit der unvollständigen LU-Zerlegung, die initial einmalig ermittelt wird (siehe Bemerkung 5.3.2), als Vorkonditionierer.

Die Fixpunktiteration endet, sobald das Abbruchkriterium

$$\max_{i,j} \left\| \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1,[k+1]} - \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1,[k]} \right\|_\infty < \text{TOL}$$

mit einer Genauigkeit von 10^{-12} , die ebenso innerhalb des BiCGSTAB-Verfahrens verwendet wird, erfüllt ist.

Insgesamt ist damit die Entwicklung eines vollständig-impliziten Algorithmus zweiter Ordnung in Raum und Zeit für die rotierenden Flachwassergleichungen bei hinreichend kleinen Froude-Zahlen und beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$ abgeschlossen. Um diese Eigenschaften numerisch nachzuweisen, testen wir unseren Algorithmus im folgenden Kapitel an geeigneten Testbeispielen.

6 Numerische Resultate

In diesem Kapitel testen wir unseren vollständig-impliziten Algorithmus aus Kapitel 5 an ausgewählten Testbeispielen und stellen die mit Matlab R2018a ermittelten numerischen Resultate vor. Dazu geben wir hier die einzelnen Beispiele kurz an, weitere Details folgen in den jeweiligen Unterkapiteln, und diskutieren Grundsätzliches zu der numerischen Simulation sowie den verwendeten Fehlergrößen.

Insgesamt betrachten wir vier zweidimensionale Testfälle, zwei klassische stationäre Lösungen sowie zwei nichtlineare Dynamiken, jeweils mit hinreichend kleinen Froude-Zahlen, beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$, periodischen Randbedingungen und hinreichend glatten Anfangsbedingungen. Als stationäre Lösungen verwenden wir sowohl eine exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels als auch einen See in Ruhe.

Die beiden dimensionsbehafteten nichtlinearen Dynamiken stammen aus [GHK⁺09]. Sie beschreiben zum einen die Wechselwirkung eines Wirbelpaares und zum anderen die Entwicklung einer Scherströmung. In beiden Fällen wird als Rechengebiet das Rechteck $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ mit den Längen $L_x = 5000$ km und $L_y = 4330$ km betrachtet. Zudem wird für die Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ und für die Rotationsfrequenz $f = 6.147 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ gesetzt. Letzteres entspricht einem Breitengrad von 25° . Weiterhin ist zu beachten, dass sich für diese beiden Testbeispiele unser Algorithmus erst nach einer geeigneten Entdimensionalisierung der Form

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \widetilde{\Delta x} = \frac{\Delta x}{L}, \quad \widetilde{\Delta y} = \frac{\Delta y}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \widetilde{\Delta t} = \frac{\Delta t}{T}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{U}$$

mit hinreichend kleinen Froude- und Rossby-Zahlen anwenden lässt. Dabei sind die charakteristischen Skalen der Länge, der Zeit, der Höhe sowie der Geschwindigkeit durch L, T, H_0 sowie U gegeben und die dimensionslosen Variablen jeweils durch Tilde-Zeichen gekennzeichnet, die wir im Weiteren aus Gründen der Übersichtlichkeit weglassen werden.

Für die numerischen Ergebnisse ermitteln wir in Abhängigkeit des Testbeispiels verschiedene Fehlergrößen, die wir im Folgenden vorstellen werden. Da für die exakte, stationäre Lösung eine analytische Darstellung vorliegt, können wir zu einem vorgegebenen Zeitpunkt experimentelle Konvergenzordnungen bestimmen.

Allgemein betrachtet ist die experimentelle Konvergenzordnung für eine bekannte, p -fach integrierbare Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der L^p -Norm $\|\cdot\|_p$ definiert durch

$$EOC_{L^p}^f := \frac{\log(\|f - f_{\Delta x}\|_p) - \log(\|f - f_{\Delta x/2}\|_p)}{\log(\Delta x) - \log\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{\|f - f_{\Delta x}\|_p}{\|f - f_{\Delta x/2}\|_p}\right)}{\log(2)},$$

wobei $f_{\Delta x}$ beziehungsweise $f_{\Delta x/2}$ die numerische Approximation von f bezüglich der Gitterweite Δx beziehungsweise $\Delta x/2$ beschreibt. Weiterhin ist durch $\|f - f_{\Delta x}\|_p$ der absolute und durch $\|f - f_{\Delta x}\|_p / \|f\|_p$ der relative Fehler gegeben.

Im Fall der exakten, stationären Lösung betrachten wir zum Zeitpunkt $t = 1$ die experimentellen Konvergenzordnungen für die Höhe $EOC_{L^p}^H$ und den Impuls in x -Richtung $EOC_{L^p}^{(Hv_1)}$ bezüglich $p = 2, \infty$ mit den folgenden diskreten Darstellungen der Normen

$$\|f\|_2 \approx \left(\Delta x \Delta y \sum_{i,j=1}^{A_x, A_y} f_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_\infty \approx \max_{i,j} |f_{i,j}|.$$

Im Gegensatz dazu weisen die beiden nichtlinearen Dynamiken aus [GHK⁺09] keine analytischen Lösungen auf. Um dennoch die Qualität von numerischen Ergebnissen beurteilen zu können, werden erstens diese mit den Ergebnissen der entsprechenden Literatur verglichen und zweitens die jeweiligen relativen Fehler von mehreren Erhaltungsgrößen zu deren Anfangsgrößen betrachtet. Je kleiner diese sind, desto besser die numerischen Resultate. Typischerweise werden als dimensionsbehaftete Erhaltungsgrößen in Abhängigkeit der Zeit die Gesamtmasse $m(t)$, die Gesamtenergie $E(t)$, die massengewichtete potentielle Vortizität $PV(t)$ und die potentielle Enstrophie $PE(t)$ betrachtet. Diese sind mit den jeweiligen diskreten Darstellungen durch

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{\Omega} H \, d\mathbf{x} \approx \Delta x \Delta y \sum_{i,j=1}^{A_x, A_y} H_{i,j}, \\ E(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} H \mathbf{v}^T \mathbf{v} + g H^2 \, d\mathbf{x} \approx \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i,j=1}^{A_x, A_y} \left(H_{i,j} (v_{1,i,j}^2 + v_{2,i,j}^2) + g H_{i,j}^2 \right), \\ PV(t) &= \int_{\Omega} q H \, d\mathbf{x} \approx \Delta x \Delta y \sum_{i,j=1}^{A_x, A_y} q_{i,j} H_{i,j}, \\ PE(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} q^2 H \, d\mathbf{x} \approx \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i,j=1}^{A_x, A_y} q_{i,j}^2 H_{i,j}, \end{aligned}$$

gegeben, wobei $q = q_{\text{rel}} + f/H$ die potentielle Vortizität mit der relativen potentiellen Vortizität $q_{\text{rel}} = (\text{curl } \mathbf{v})/H$ bezeichnet und für jede physikalische Variable $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{x}, t)$ gilt.

6.1 Erhaltung einer exakten, stationären Lösung eines isolierten Wirbels

In diesem Unterkapitel testen wir unseren Algorithmus an einer exakten, stationären Lösung eines isolierten Wirbels. Unser Ziel ist es dabei, diese numerisch zu erhalten und eine experimentelle Konvergenzordnung von zwei bei hinreichend kleinen Gitterweiten nachzuweisen.

Für die stationären rotierenden Flachwassergleichungen lassen sich exakte Lösungen nach

einer Transformation von kartesischen Koordinaten (x, y) zu Polarkoordinaten (r, φ) herleiten. Unter den Bedingungen, dass die Höhe H rotationssymmetrisch ist und die Geschwindigkeiten $v_1(x, y, 0) = -v_\varphi(r) \sin \varphi$ sowie $v_2(x, y, 0) = v_\varphi(r) \cos \varphi$ mit einer nur vom Radius abhängigen Funktion $v_\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto v_\varphi(r)$ erfüllen, ist eine exakte, stationäre Lösung durch

$$H(r) - H_0 = \int_0^r \text{Fr}^2 \left(\frac{1}{\text{Ro}} v_\varphi(\tilde{r}) + \frac{1}{\tilde{r}} v_\varphi^2(\tilde{r}) \right) d\tilde{r}$$

gegeben. In vielen Testbeispielen der Literatur führt die genaue Wahl der Funktion v_φ zu einer Höhe H , die einen isolierten Wirbel repräsentiert, etwa in [VK09] und [Vat13] für die Flachwassergleichungen mit der Advektion oder in [AKNV11] und [BG17] für die rotierenden Flachwassergleichungen mit der Erhaltung eines solchen Wirbels.

Für unser Testbeispiel wählen wir nach diesem Muster

$$v_\varphi(r) = \begin{cases} v_{\max} \cdot s \cdot \frac{2r}{(r_m^2 - r^2)^4} \exp\left(\frac{-1}{r_m^2 - r^2}\right), & 0 \leq r < r_m, \\ 0, & r_m \leq r, \end{cases}$$

mit

$$v_{\max} = \varepsilon, \quad r_m = 0.45, \quad r_{v_{\max}} = \frac{1}{7} \sqrt{-7 + 21r_m^2 + 7\sqrt{16r_m^4 - 6r_m^2 + 1}}$$

sowie

$$s = \left(r_m^2 - r_{v_{\max}}^2 \right)^4 \cdot \left(2r_{v_{\max}} \exp\left(\frac{-1}{r_m^2 - r_{v_{\max}}^2}\right) \right)^{-1}$$

und $r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$ zum Mittelpunkt $(x_M, y_M) = (1/2, 1/2)$. Die Werte $r_{v_{\max}}$ und s sind so gewählt, dass mit $v_\varphi(r_{v_{\max}}) = v_{\max}$ das globale Maximum der Funktion gegeben ist.

Infolgedessen erhalten wir durch das obige Integral mit den hinreichend glatten Funktionen

$$\begin{aligned} \eta(r) &= - \left(2r_m^4 - 4r_m^2 r^2 + 2r^4 + 2r_m^2 - 2r^2 + 1 \right) \cdot \frac{\text{Fr}^2}{\text{Ro}} \cdot v_{\max} \cdot s \cdot \left(r_m^2 - r^2 \right)^{-2} \exp\left(\frac{-1}{r_m^2 - r^2}\right), \\ \xi(r) &= - \left(45r_m^{12} - 270r_m^{10} r^2 + 675r_m^8 r^4 - 900r_m^6 r^6 + 675r_m^4 r^8 - 270r_m^2 r^{10} + 45r^{12} + 90r_m^{10} \right. \\ &\quad - 450r_m^8 r^2 + 900r_m^6 r^4 - 900r_m^4 r^6 + 450r_m^2 r^8 - 90r^{10} + 90r_m^8 - 360r_m^6 r^2 + 540r_m^4 r^4 \\ &\quad - 360r_m^2 r^6 + 90r^8 + 60r_m^6 - 180r_m^4 r^2 + 180r_m^2 r^4 - 60r^6 + 30r_m^4 - 60r_m^2 r^2 + 30r^4 \\ &\quad \left. + 12r_m^2 - 12r^2 + 4 \right) \cdot \text{Fr}^2 \cdot v_{\max}^2 \cdot s^2 \cdot \frac{1}{4} \left(r_m^2 - r^2 \right)^{-6} \exp\left(\frac{-2}{r_m^2 - r^2}\right) \end{aligned}$$

die Höhe

$$H(r) - H_0 = \begin{cases} \eta(r) - \eta(0) + \xi(r) - \xi(0), & 0 \leq r < r_m, \\ -\eta(0) - \xi(0), & r_m \leq r. \end{cases}$$

Außerdem setzen wir $H_0 = 1$ und $\varepsilon = 0.1$.

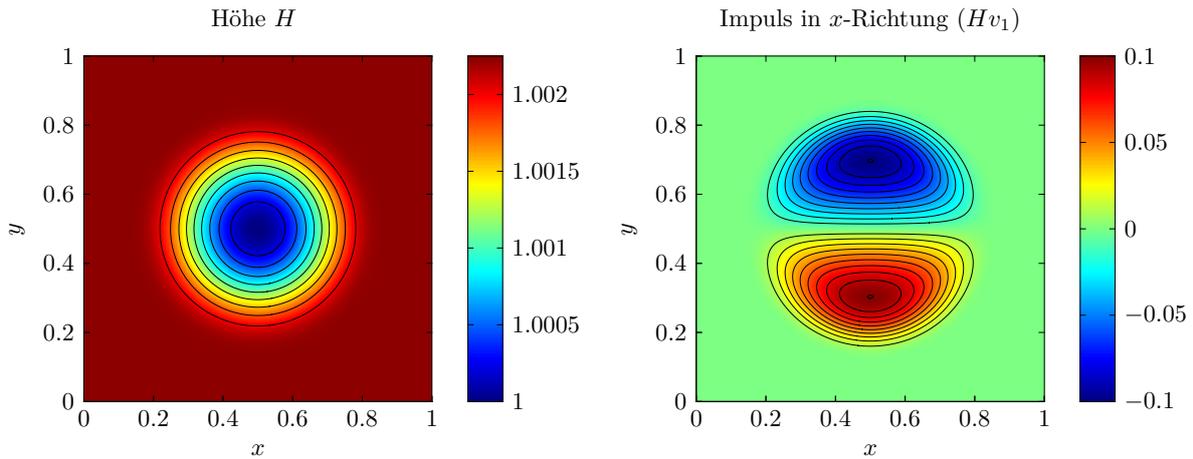


Abbildung 6.1: Höhe H (links) und Impuls in x -Richtung (Hv_1) (rechts) für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels im Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \varepsilon$ mit $\varepsilon = 0.1$.

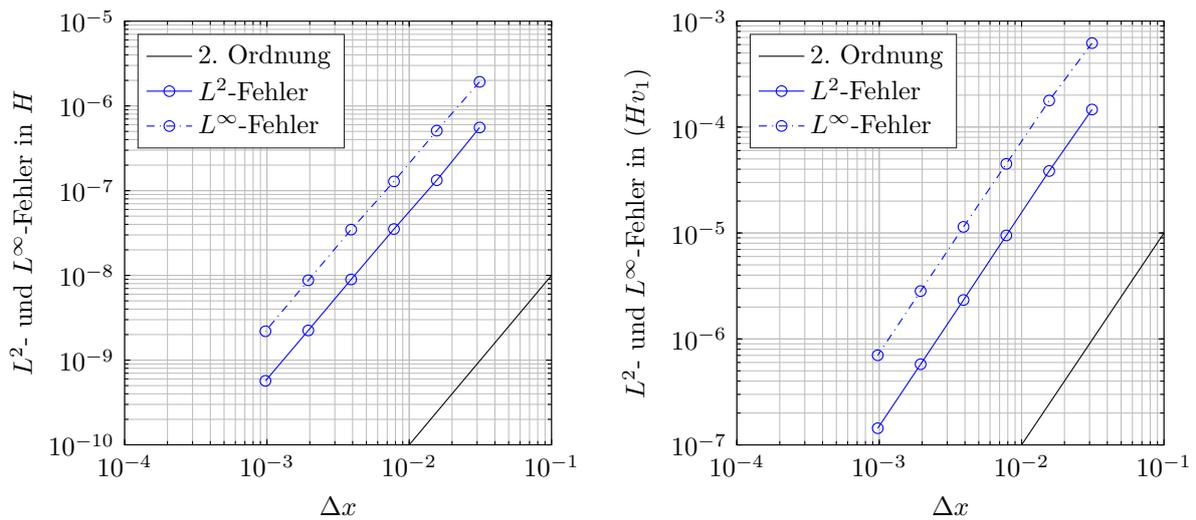


Abbildung 6.2: L^2 - und L^∞ -Fehler in H (links) sowie in (Hv_1) (rechts) in Abhängigkeit der Gitterweite Δx zum Zeitpunkt $t = 1$ für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels im Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = 1$ mit $\varepsilon = 0.1$, vergleiche Tabelle A.1.

Mit dem kleinen Parameter ε werden wir in Anlehnung an Kapitel 3.2 drei unterschiedliche Fälle für die Froude- und Rossby-Zahlen betrachten. Im ersten Fall setzen wir $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = 1$, im zweiten Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \sqrt{\varepsilon}$ und im dritten Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \varepsilon$. Demnach unterscheiden sich die drei Fälle nur durch die Wahl der Rossby-Zahl. In Abbildung 6.1 ist für den letzten Fall die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels für die Höhe H und den Impuls in x -Richtung (Hv_1) zu finden.

Für die numerische Simulation betrachten wir das Rechengebiet $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ mit den Gitterweiten $\Delta x = \Delta y = 2^{-k}$ im Zeitintervall $[0, 1]$ mit den jeweiligen Zeitschrittweiten $\Delta t = 100^{-1} \cdot 2^{5-k}$ für $k = 5, \dots, 10$. Damit erhalten wir für die einzelnen Hilfsprobleme in jedem

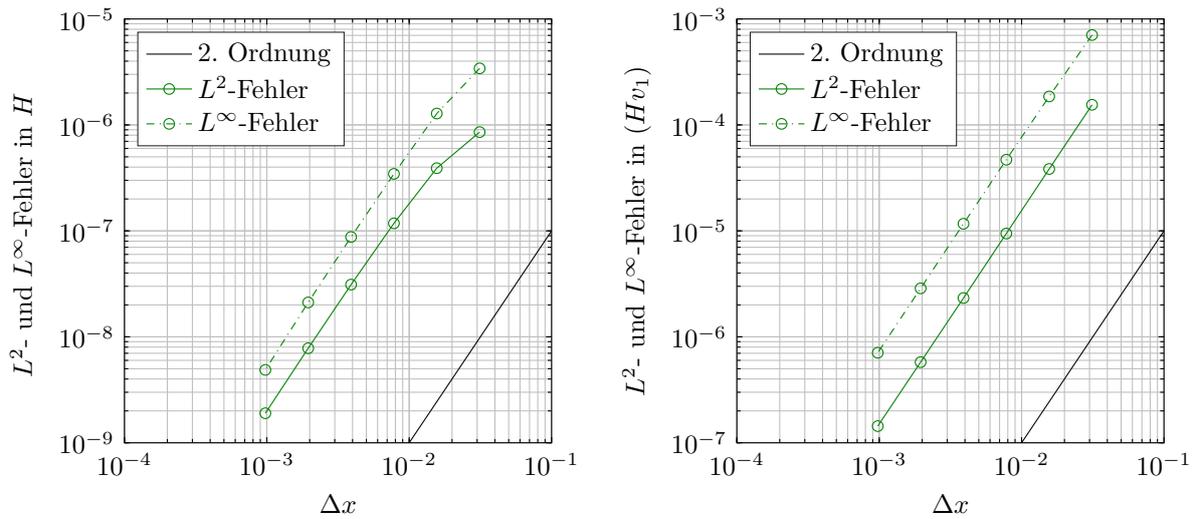


Abbildung 6.3: L^2 - und L^∞ -Fehler in H (links) sowie in (Hv_1) (rechts) in Abhängigkeit der Gitterweite Δx zum Zeitpunkt $t = 1$ für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels im Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \sqrt{\varepsilon}$ mit $\varepsilon = 0.1$, vergleiche Tabelle A.2.

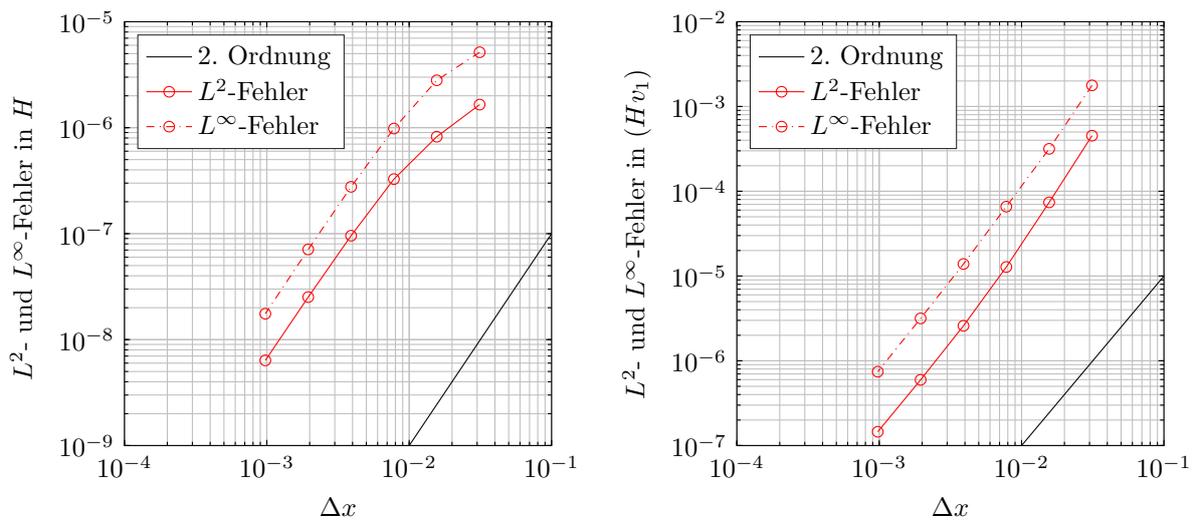


Abbildung 6.4: L^2 - und L^∞ -Fehler in H (links) sowie in (Hv_1) (rechts) in Abhängigkeit der Gitterweite Δx zum Zeitpunkt $t = 1$ für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels im Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \varepsilon$ mit $\varepsilon = 0.1$, vergleiche Tabelle A.3.

Fall die zulässige CFL-Zahl $\text{cfl}_{\text{aux}} \approx 0.35$.

In allen drei Fällen bestimmen wir für die numerischen Lösungen die jeweiligen L^2 - und L^∞ -Fehler in H , (Hv_1) und (Hv_2) mit den zugehörigen experimentellen Konvergenzordnungen zum Zeitpunkt $t = 1$.

Die einzelnen Ergebnisse sind im Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = 1$ in Abbildung 6.2, im Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \sqrt{\varepsilon}$ in Abbildung 6.3 und im Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \varepsilon$ in Abbildung 6.4 zu finden. Für die genauen Zahlenwerte verweisen wir auf den Anhang A.3 mit den Tabellen A.1, A.2 und A.3.

Aus Symmetriegründen stimmen alle Fehlergrößen für (Hv_2) mit denen für (Hv_1) überein und sind deshalb nicht mit angegeben.

Insgesamt erhalten wir bei hinreichend kleinen Gitterweiten für jeden der drei Fälle die erwartete experimentelle Konvergenzordnung zwei. Im dritten Fall ist darüber hinaus die Abhängigkeit der experimentellen Konvergenzordnung von der Rossby-Zahl und der Gitterweite zu erkennen. Genauer betrachtet reduziert sich diese für den Impuls in x -Richtung von einem Wert zwischen zwei und drei auf zwei bei kleiner werdenden Gitterweiten.

Dieses Verhalten ist direkt auf die Verwendung des Radau-IIA-Verfahrens mit ihrem Ordnungsverlust von drei auf zwei bei steifen Differentialgleichungen für den Quellanteil des asymptotischen Quellterms in unserem Algorithmus zurückzuführen, da bekanntlich mit abnehmender Rossby-Zahl der Einfluss des Quellanteils und damit des Radau-IIA-Verfahrens zunimmt.

6.2 Erhaltung eines Sees in Ruhe

In diesem Unterkapitel testen wir unseren Algorithmus an einem weiteren klassischen Testbeispiel, dem See in Ruhe. Unser Ziel ist es dabei, diesen über einen langen Zeitraum numerisch zu erhalten.

Dazu betrachten wir die rotierenden Flachwassergleichungen mit Bodenhöhe $h_B : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto h_B(x, y)$, hier in der Darstellung analog zu den Gleichungen (5.2.1) und (5.2.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H + \operatorname{div}(H\mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(H\mathbf{v}) + \operatorname{div}(H\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + H\mathbf{v}^\perp + H\nabla(H + h_B) &= \left(\frac{\operatorname{Ro} - 1}{\operatorname{Ro}}\right) H\mathbf{v}^\perp + \left(\frac{\operatorname{Fr}^2 - 1}{\operatorname{Fr}^2}\right) H\nabla(H + h_B). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Verwendung unseres Algorithmus erst nach einigen Anpassungen, welche die Bodenhöhe betreffen, möglich. Diese stellen wir im Folgenden kurz vor. Für die asymptotische Korrektur aus Kapitel 5.2 ersetzen wir Gleichung (5.2.22) durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n - \Delta t \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, H_{\text{aux}}^{n+1/2} + h_B) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}) \\ - \Delta t \mathcal{A}(\mathbf{Q}^{n+1/2}, H^{n+1/2} + h_B) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Q}^{n+1/2}, H^{n+1/2} + h_B) \end{aligned}$$

mit der klassischen Korrekturfunktion $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_H, \mathcal{F}_M, \mathcal{F}_N)^T$ in der Doppelpargumentdarstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_H(\tilde{\mathbf{Q}}, H) &= \partial_x \tilde{M} + \partial_y \tilde{N}, \\ \mathcal{F}_M(\tilde{\mathbf{Q}}, H) &= \partial_x \left(\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{H}} \right) + \tilde{H} \partial_x H + \partial_y \left(\frac{\tilde{M} \tilde{N}}{\tilde{H}} \right), \\ \mathcal{F}_N(\tilde{\mathbf{Q}}, H) &= \partial_x \left(\frac{\tilde{M} \tilde{N}}{\tilde{H}} \right) + \partial_y \left(\frac{\tilde{N}^2}{\tilde{H}} \right) + \tilde{H} \partial_y H, \end{aligned}$$

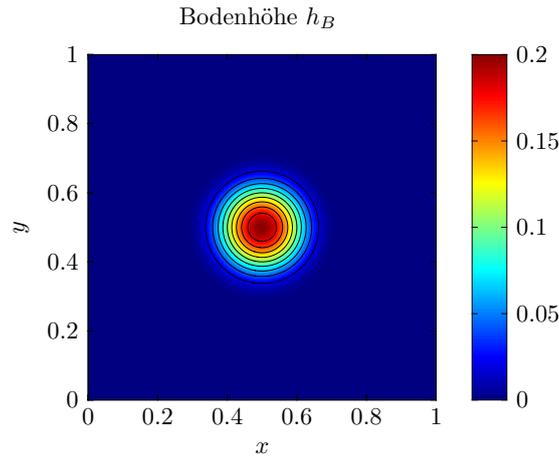


Abbildung 6.5: Bodenhöhe h_B im Fall der Erhaltung eines Sees in Ruhe.

dem klassischen Quellterm $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ sowie der asymptotischen Korrekturfunktion \mathcal{A} und dem asymptotischen Quellterm $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ aus Kapitel 5.2. Ein entsprechendes Vorgehen, das heißt ein Ersetzen von $H\nabla H$ durch $H\nabla(H + h_B)$, wenden wir ebenfalls für die divergenzfreie Korrektur aus Kapitel 5.4 an.

Die einzelnen Helmholtz-Probleme für H_2 erhalten wir mittels der zu [Vat13] analogen asymptotischen Entwicklung der Form

$$H(x, y, t) + h_B(x, y) = H_0(x, y, t) + \text{Fr} H_1(x, y, t) + \text{Fr}^2 H_2(x, y, t),$$

dabei bestimmen wir die asymptotischen Funktionen H_0 und H_1 wie in Kapitel 5.3.2.

Eine weitere wichtige Anpassung betrifft die numerische Realisierung des neuen Hilfsproblems. Aufgrund der Bodenhöhe ist das bisher verwendete Finite-Volumen-Verfahren zweiter Ordnung mit der MUSCL-Hancock-Methode und dem HLLC-Löser nicht mehr anwendbar. Stattdessen verwenden wir ein Finite-Volumen-Verfahren erster Ordnung mit dem in [ACU15] entwickelten approximativen Riemann-Löser. Dieser lässt sich als auf die Bodenhöhe angepasster HLL-Löser auffassen.

Infolge der fehlenden zweiten Ordnung im Hilfsproblem betrachten wir hier etwa keine Testbeispiele mit parabolischen Bodenhöhen wie die analytischen Lösungen aus [Bal65] und [Tha81], sondern nur das klassische Testbeispiel vom See in Ruhe.

Für unser Testbeispiel wählen wir die folgende rotationssymmetrische Bodenhöhe in Polarkoordinaten nach [Vat13]

$$h_B(r) = \begin{cases} a \cdot \frac{\exp(-\frac{1}{2}(r_m^2 - r^2)^{-1})}{\exp(-\frac{1}{2}r_m^{-2})}, & \text{für } r < r_m, \\ 0, & \text{für } r \geq r_m, \end{cases}$$

mit $r_m = 0.3$, $a = 0.2$ und $r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$ zum Mittelpunkt $(x_M, y_M) = (1/2, 1/2)$ (siehe Abbildung 6.5). Weiterhin sind die Anfangsbedingungen des Sees in Ruhe für die Höhe

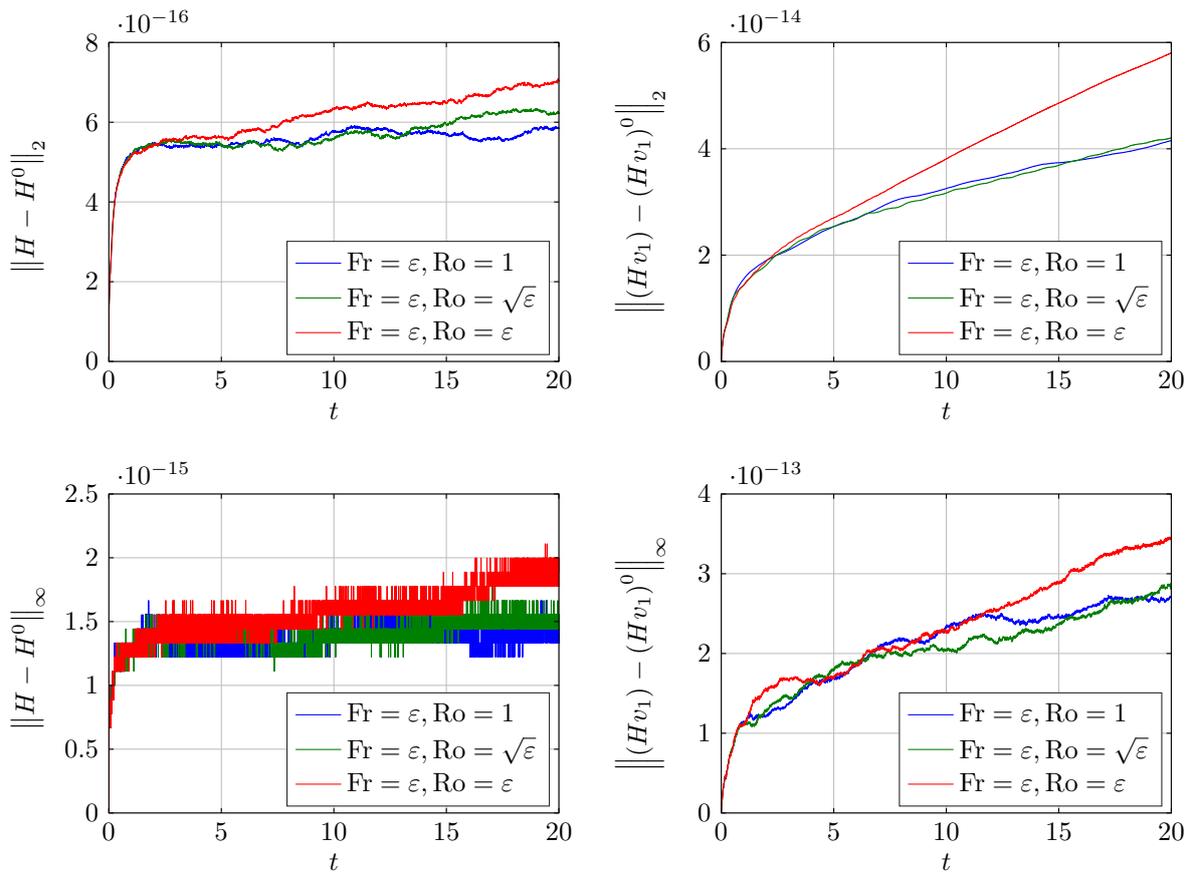


Abbildung 6.6: L^2 - und L^∞ -Fehler in H (links) und (Hv_1) (rechts) für den ruhenden See in den drei Fällen $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = 1$ (blau), $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \sqrt{\varepsilon}$ (grün) sowie $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \varepsilon$ (rot) jeweils mit $\varepsilon = 0.1$, $\Delta x = \Delta y = 1/128$ und $\Delta t = 1/400$.

durch

$$H(x, y, 0) + h_B(x, y) = \text{const.} = 1$$

und für die Geschwindigkeiten durch

$$v_1(x, y, 0) = v_2(x, y, 0) = 0$$

gegeben.

Wie in Kapitel 6.1 verwenden wir hier ebenfalls die drei unterschiedlichen Fälle für die Froude- und Rossby-Zahlen. Im ersten Fall setzen wir $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = 1$, im zweiten Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \sqrt{\varepsilon}$ und im dritten Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \varepsilon$ jeweils mit $\varepsilon = 0.1$.

Für die numerische Simulation betrachten wir das Rechengebiet $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ mit den Gitterweiten $\Delta x = \Delta y = 1/128$ im Zeitintervall $[0, 20]$ mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 1/400$. Damit erhalten wir für die einzelnen Hilfsprobleme in jedem Fall die zulässige CFL-Zahl $\text{cfl}_{\text{aux}} \approx 0.32$.

In allen drei Fällen bestimmen wir für die numerischen Lösungen nach jedem Zeitschritt die jeweiligen L^2 - und L^∞ -Fehler in H , (Hv_1) und (Hv_2) .

Die einzelnen Ergebnisse sind in Abbildung 6.6 zu finden, dabei ist der Fall $Fr = \varepsilon$ und $Ro = 1$ in Blau, der Fall $Fr = \varepsilon$ und $Ro = \sqrt{\varepsilon}$ in Grün und der Fall $Fr = \varepsilon$ und $Ro = \varepsilon$ in Rot dargestellt. Auch hier verzichten wir aus Symmetriegründen darauf die Fehlerwerte für (Hv_2) mit anzugeben. Allerdings stimmen sie aufgrund von Rundungsfehlern bedingt durch die sehr kleinen Fehlergrößen nicht mit denen für (Hv_1) überein, sondern weisen nur ein qualitativ ähnliches Verhalten auf.

Im Folgenden beschreiben wir den zeitlichen Verlauf der einzelnen Fehler. Für die Höhe H beziehungsweise den Impuls in x -Richtung (Hv_1) haben wir in jedem der drei Fälle ein vergleichbares Wachstum der L^2 - sowie L^∞ -Fehler im Zeitintervall $[0, 2]$. Anschließend wachsen diese für beide physikalischen Variablen weniger stark an, wobei das relative Wachstum für H schwächer als für (Hv_1) ausfällt. Die entstehenden Fehlergrößen der drei Höhen folgen dabei aus den jeweiligen Genauigkeiten, mit welchen die einzelnen linearen Gleichungssysteme durch das BiCGSTAB-Verfahren gelöst werden.

Außerdem stimmen die Fehlergrößen im zeitlichen Verlauf in den ersten beiden Fällen im Wesentlichen überein. Wie im dritten Fall zu erkennen, ist der absolute Fehler in der Regel am höchsten, wenn der Einfluss des Quellanteils des asymptotischen Quellterms am stärksten ist.

Da alle Fehlergrößen sehr klein sind, folgt insgesamt, dass unser Algorithmus den See in Ruhe erhält.

6.3 Wechselwirkung eines Wirbelpaares

In diesem Unterkapitel testen wir unseren Algorithmus an einer nichtlinearen Dynamik, der Wechselwirkung eines Wirbelpaares (engl. *vortex pair interaction*). Unser Ziel ist es dabei, das Verhalten dieser Strömung unter Erhaltung der vier eingangs genannten Größen numerisch korrekt wiederzugeben. Dazu vergleichen wir unsere Ergebnisse mit denen aus [GHK⁺09] und [BG17]. Um dies zu ermöglichen, nutzen wir unter anderem für unsere Abbildungen die ebenda verwendeten Werte für die Zeitpunkte und die Höhenlinien.

Die dimensionsbehafteten Anfangsbedingungen sind nach [GHK⁺09] für die Höhe durch

$$H(x, y, 0) = H_0 - H' \left(\exp \left(-\frac{1}{2} (x_1'^2 + y_1'^2) \right) + \exp \left(-\frac{1}{2} (x_2'^2 + y_2'^2) \right) - \frac{4\pi\sigma_x\sigma_y}{L_x L_y} \right)$$

und für die Geschwindigkeiten durch

$$\begin{aligned} v_1(x, y, 0) &= -\frac{gH'}{f\sigma_y} \left(y_1'' \exp \left(-\frac{1}{2} (x_1'^2 + y_1'^2) \right) + y_2'' \exp \left(-\frac{1}{2} (x_2'^2 + y_2'^2) \right) \right), \\ v_2(x, y, 0) &= \frac{gH'}{f\sigma_x} \left(x_1'' \exp \left(-\frac{1}{2} (x_1'^2 + y_1'^2) \right) + x_2'' \exp \left(-\frac{1}{2} (x_2'^2 + y_2'^2) \right) \right), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} x'_j &= \frac{L_x}{\pi\sigma_x} \sin\left(\frac{\pi}{L_x}(x - x_{c_j})\right), & y'_j &= \frac{L_y}{\pi\sigma_y} \sin\left(\frac{\pi}{L_y}(y - y_{c_j})\right), \\ x''_j &= \frac{L_x}{2\pi\sigma_x} \sin\left(\frac{2\pi}{L_x}(x - x_{c_j})\right), & y''_j &= \frac{L_y}{2\pi\sigma_y} \sin\left(\frac{2\pi}{L_y}(y - y_{c_j})\right), \end{aligned}$$

für $j = 1, 2$, sowie

$$\begin{aligned} x_{c_1} &= \left(\frac{1}{2} - a\right) L_x, & x_{c_2} &= \left(\frac{1}{2} + a\right) L_x, & \sigma_x &= \frac{3}{40} L_x, \\ y_{c_1} &= \left(\frac{1}{2} - a\right) L_y, & y_{c_2} &= \left(\frac{1}{2} + a\right) L_y, & \sigma_y &= \frac{3}{40} L_y \end{aligned}$$

und $a = 1/10$, gegeben. Folglich gilt $f\mathbf{v}^\perp + g\nabla H = 0$.

Mit den weiteren Erläuterungen aus [GHK⁺09] erfüllen die charakteristischen Skalen der Länge, der Geschwindigkeit und der Zeit

$$L = 2(\sigma_x + \sigma_y), \quad U = 2\frac{gH'}{fL}, \quad T = \frac{L}{U} = \frac{1}{2}\frac{fL^2}{gH'}.$$

Ferner führt die Wahl von $H_0 = 10\,000$ m und $H' = 75$ m zu einer nahezu inkompressiblen Strömung mit den dimensionslosen Parametern

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH_0}} \approx 0.055, \quad \text{Ro} = \frac{U}{fL} \approx 0.199, \quad \text{Bu} = \frac{\text{Ro}^2}{\text{Fr}^2} \approx 13.26.$$

Da die Froude- und Rossby-Zahlen hinreichend klein sind, ist unser Algorithmus anwendbar. Die Anfangsbedingungen des Impulses erhalten wir durch $M(x, y, 0) = H(x, y, 0) \cdot v_1(x, y, 0)$ beziehungsweise $N(x, y, 0) = H(x, y, 0) \cdot v_2(x, y, 0)$ und in Abbildung 6.7 (links) sind die Anfangsbedingungen der Höhe H und der relativen potentiellen Vortizität q_{rel} zu finden.

Für die numerische Simulation betrachten wir das Rechengebiet $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ mit $A_x = 389$ Zellen in x -Richtung und $A_y = 337$ Zellen in y -Richtung im Zeitintervall von 0 d bis 10 d mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 120$ s. Damit erhalten wir für das Hilfsproblem die zulässige CFL-Zahl $\text{cfl}_{\text{aux}} \approx 0.36$.

Weiterhin ist die Anzahl der Zellen so gewählt, dass $\Delta x \approx \Delta y$ mit $\Delta x = L_x/A_x \approx 12.8535$ km sowie $\Delta y = L_y/A_y \approx 12.8487$ km gilt und die Gesamtanzahl der Zellen $A_x \cdot A_y = 131093$ der Größenordnung $2 \cdot 256^2 = 131072$ entspricht. Dabei werden diese Größen aus Gründen der Vergleichbarkeit verwendet, da in [GHK⁺09] und [BG17] das Rechengebiet jeweils in $2 \cdot 256^2$ gleichseitige Dreiecke unterteilt wurde.

Für die numerischen Lösungen bestimmen wir nach jedem Zeitschritt die eingangs genannten Erhaltungsgrößen und zeigen des Weiteren zu ausgewählten Zeitpunkten Abbildungen mit Höhenlinien bezüglich der Höhe und der relativen potentiellen Vortizität jeweils in dimensions-behafteter Form.

Im Folgenden beschreiben wir den zeitlichen Verlauf der Strömung. Zu diesem Zweck ist

die Höhe H und die relative potentielle Vortizität q_{rel} zum Zeitpunkt $t = 3$ d in Abbildung 6.7 (rechts), zum Zeitpunkt $t = 6$ d in Abbildung 6.8 (links) und zum Zeitpunkt $t = 10$ d in Abbildung 6.8 (rechts) zu finden.

Wie die relative potentielle Vortizität anzeigt, stoßen sich die beiden initialen Wirbel gegenseitig voneinander ab, sodass der nördliche beziehungsweise südliche Wirbel Richtung Norden beziehungsweise Süden strömt. Währenddessen drehen sich beide Wirbel gegen den Uhrzeigersinn und interagieren über die periodische Randbedingung, sobald sie den nördlichen beziehungsweise südlichen Rand erreichen, miteinander.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus [GHK⁺09] und [BG17] zum Zeitpunkt $t = 10$ d liefert für die beiden Wirbel eine Übereinstimmung hinsichtlich ihrer Positionen und ihrer Größen. Außerdem weisen, da wir für die divergenzfremde Korrektur ein versetztes Gitter verwenden, unsere Ergebnisse keine unphysikalischen Oszillationen auf.

Weitere Unterschiede sind für die Höhenlinien zu bemerken. In unserem Fall umschließen diese für die Höhe in der Mitte des Rechengebietes einen zusammenhängenden Bereich und nicht verschiedene lokale Extrema wie in der zitierten Literatur. Überdies ist ersichtlich, dass unsere Höhenlinien glattere Kurven beschreiben. Dies ist auch für die relative potentielle Vortizität zu den Zeitpunkten 0.5, 1.5, 2 und 4 Tagen (siehe Anhang A.4 mit Abbildung A.1) im Vergleich zu [BG17] zu beobachten.

Als Nächstes diskutieren wir den zeitlichen Verlauf der Erhaltungsgrößen. Für den relativen Fehler der Gesamtmasse m und der massengewichteten potentiellen Vortizität PV (siehe Abbildung 6.9 (Mitte)) liegen die Werte im Bereich der Maschinengenauigkeit. Da der zeitliche Verlauf für die Gesamtmasse stark von der genauen Wahl des Vorkonditionierers abhängt (siehe Bemerkung 5.3.2), ist dieser nicht mit angegeben.

Weiterhin haben wir für den relativen Fehler der Energie E (siehe Abbildung 6.9 (links)) einen periodischen Verlauf mit Werten in der Größenordnung 10^{-13} . Im Vergleich zu der zitierten Literatur stimmen die jeweiligen Größenordnungen für die ersten beiden Fehler überein, für den relativen Fehler der Energie ist unsere Größenordnung besser.

Folglich werden diese drei Größen von unserem Algorithmus erhalten. Dies ist für die potentielle Enstrophie PE (siehe Abbildung 6.9 (rechts)) nicht der Fall. Im Unterschied zu Werten in der Größenordnung 10^{-6} in [GHK⁺09] und 10^{-5} in [BG17] erhalten wir hier deutlich schlechtere Werte. Der relative Fehler für die potentielle Enstrophie verläuft streng monoton fallend mit einem maximalen Fehler in der Größenordnung 10^{-2} .

Die genannten Unterschiede lassen sich wie folgt erklären. Im Gegensatz zu [BG17] hat unser Algorithmus zwar nach Kapitel 6.1 die experimentelle Konvergenzordnung zwei, stellt jedoch umgekehrt Frequenzspektren bestehend aus Wellenzahlen nicht vollständig dar.

Um das Frequenzspektrum zu ermitteln, wird im Allgemeinen ein Testbeispiel mit den Anfangsbedingungen einer kleinen Störung um eine konstante Höhe und verschwindender Geschwindigkeiten betrachtet. Anschließend wird zu einer beliebigen Zelle des Rechengebiets die zeitliche Veränderung der Höhe bestimmt und diese mittels Fouriertransformation zum Frequenzspektrum abgebildet.

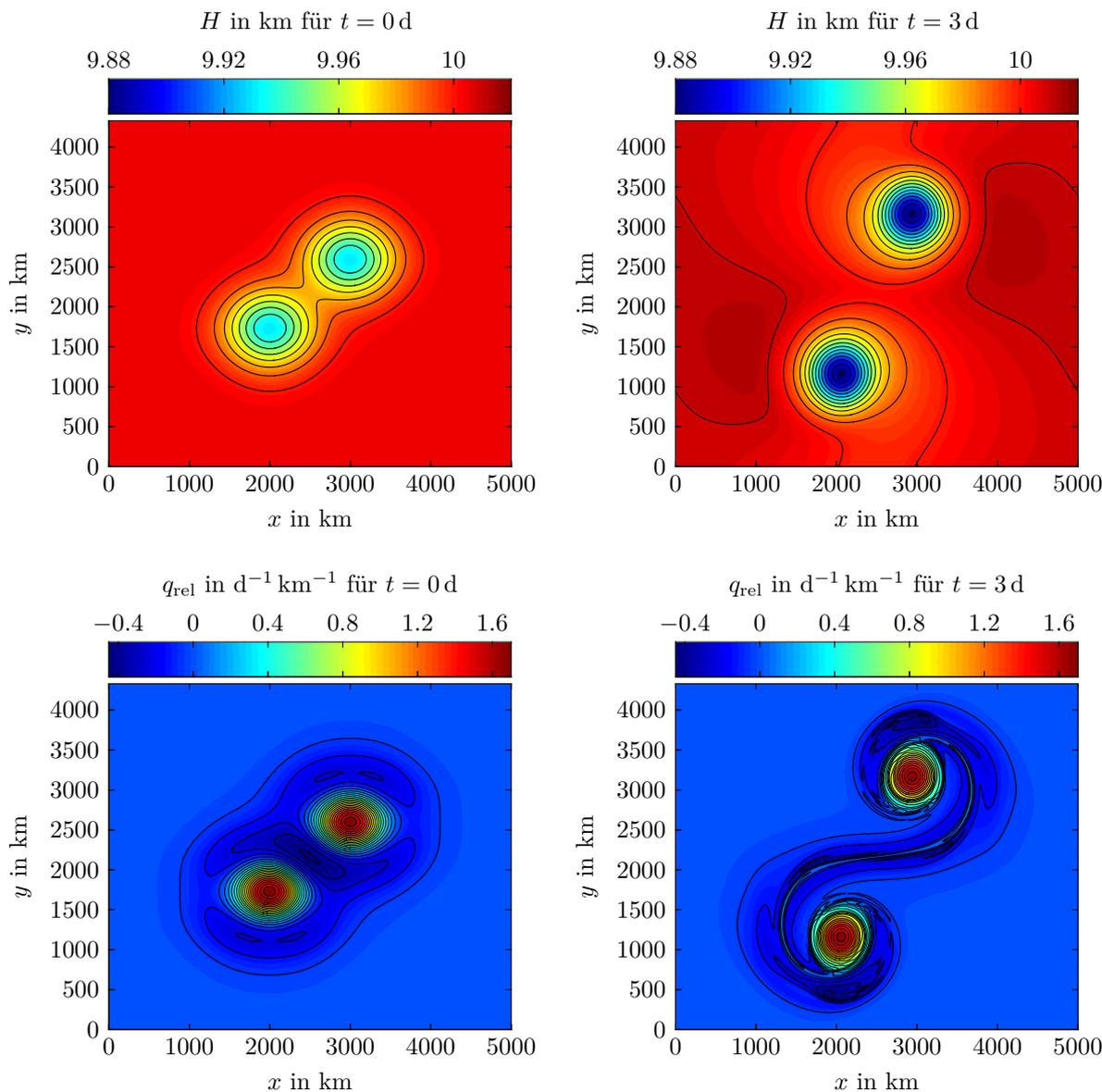


Abbildung 6.7: Höhe H (oben, Höhenlinien jeweils zwischen 9.88 km und 10.02 km im Abstand von 0.01 km) und relative potentielle Vortizität q_{rel} (unten, Höhenlinien jeweils zwischen $-0.45 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$ und $1.7 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$ im Abstand von $0.1 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$) zu den Zeitpunkten 0 (links) und 3 Tagen (rechts) im Fall der Wechselwirkung eines Wirbelpaares.

Andererseits folgen aus dem Eigenwertproblem der linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen die Wellenzahlen der Poincaré-Wellen. Da die obigen Anfangsbedingungen eine lineare Gestalt haben, müssen diese mit dem numerisch ermittelten Frequenzspektrum übereinstimmen. Dies ist allerdings für unseren Algorithmus nicht der Fall. Eine Anwendung auf dieses Testbeispiel mit den drei Fällen der Froude- und Rossby-Zahlen aus Kapitel 6.1 ergibt, dass die hohen Wellenzahlen in jedem der drei Fälle herausgefiltert werden.

Demzufolge sollte eine Erweiterung unseres Algorithmus um die oben beschriebene korrekte Darstellung von Frequenzspektren zu verbesserten Ergebnissen insbesondere für die Höhenlinien und

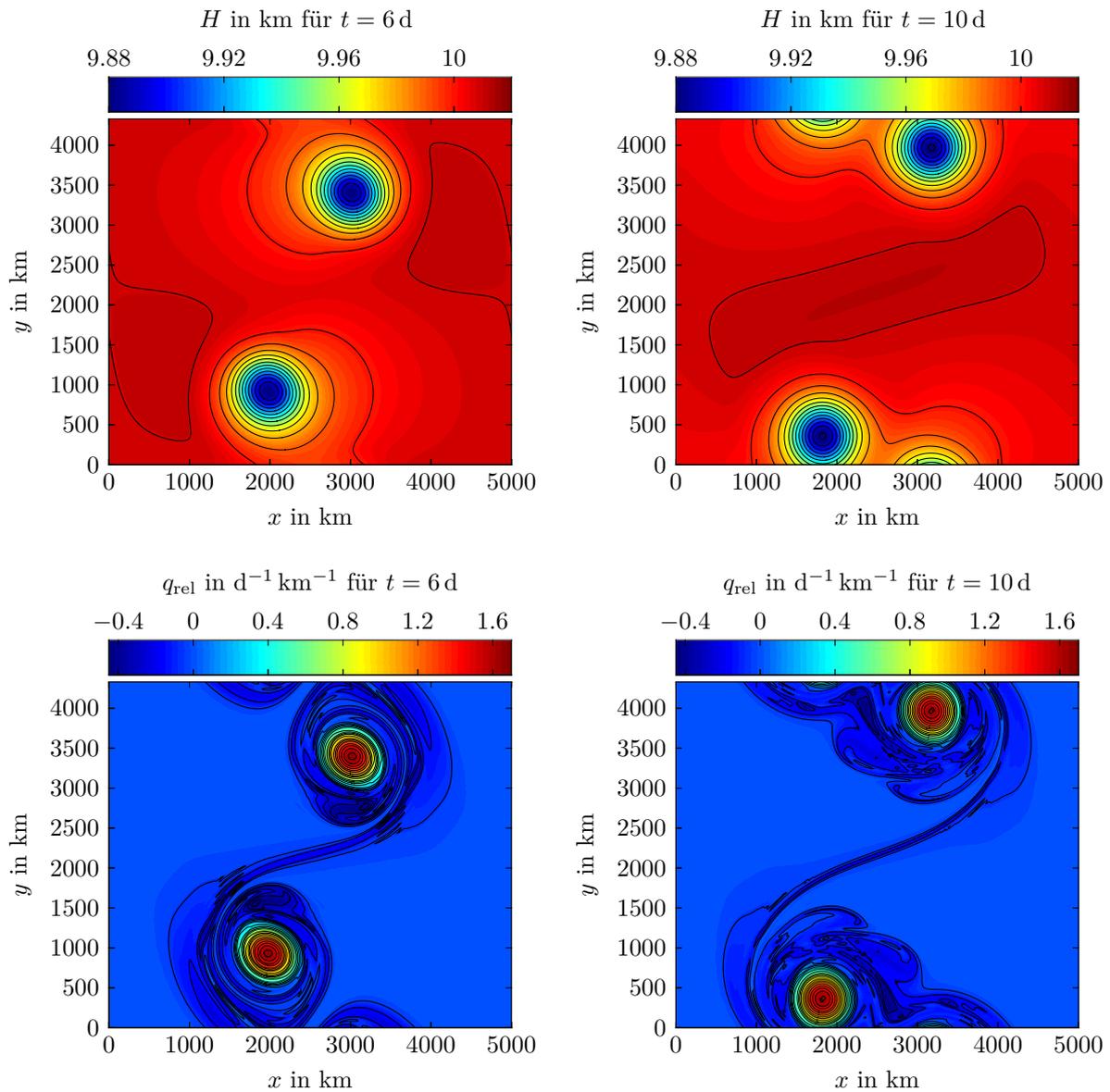


Abbildung 6.8: Höhe H (oben, Höhenlinien jeweils zwischen 9.88 km und 10.02 km im Abstand von 0.01 km) und relative potentielle Vortizität q_{rel} (unten, Höhenlinien jeweils zwischen $-0.45 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$ und $1.7 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$ im Abstand von $0.1 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$) zu den Zeitpunkten 6 (links) und 10 Tagen (rechts) im Fall der Wechselwirkung eines Wirbelpaares.

infolgedessen für die potentielle Enstrophie führen.

Um dies zu erreichen, sollte die bisher in Kapitel 5.3.2 und 5.4 verwendete gitterabhängige durch eine gitterunabhängige Mittelung analog zu [Hof00] und [Mei01] ersetzt werden. Daraufhin sollte der Algorithmus die hohen Wellenzahlen nicht mehr herausfiltern und sich die Bestimmung der asymptotischen Funktion H_1 sowie die divergenzfremde Korrektur verbessern.

Eine andere Möglichkeit, dies zu erreichen, könnte darin liegen das Multilevelverfahren aus [Vat13] bestehend aus einer Kombination von Trapez- und BDF(2)-Verfahren für die Flachwassergleichungen auf unseren Fall zu übertragen.

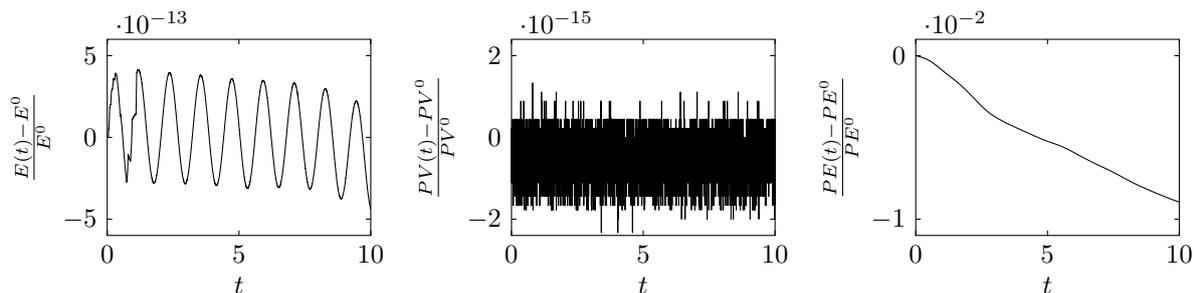


Abbildung 6.9: Relative Fehler bezüglich der Energie E (links), der massengewichteten potentiellen Vortizität PV (Mitte) und der potentiellen Enstrophie PE (rechts) im Fall der Wechselwirkung eines Wirbelpaares.

Abschließend noch eine Bemerkung zum Testbeispiel der Wechselwirkung eines Wirbelpaares. Dieses besteht nach [GHK⁺09] aus drei Fällen mit unterschiedlichen Werten für H_0 . Die anderen beiden Fälle beschreiben erstens mit $H_0 = 450$ m eine semi-geostrophische und zweitens mit $H_0 = 750$ m eine quasi-geostrophische Strömung.

Im Gegensatz zum beschriebenen Fall mit $H_0 = 10\,000$ m werden in den anderen beiden Fällen die Ergebnisse aus der zitierten Literatur von unserem Algorithmus nicht reproduziert. Aus diesem Grund sind unsere jeweiligen Ergebnisse nicht mit angegeben.

Die fehlerhaften Resultate entstehen durch die divergenzfremde Korrektur, sodass sich diese auch hier unter Verwendung einer gitterunabhängigen Mittelung verbessern sollten. Dies wird ersichtlich, wenn wir für diese beiden Fälle in unserem Algorithmus die divergenzfremde Korrektur ignorieren und nur die asymptotische Korrektur betrachten.

Unter dieser Voraussetzung wird der zeitliche Verlauf der einzelnen Wirbel jeweils korrekt wiedergegeben. Allerdings entstehen dabei starke unphysikalische Oszillationen, die beispielsweise eine Erhaltung der Gesamtmasse verhindern. Um diese Oszillationen zu reduzieren, könnte es zudem hilfreich sein die in Kapitel 5.3.3 verwendeten bilinearen Ansatzfunktionen durch Limiter nach [BJ89] zu ergänzen.

6.4 Entwicklung einer Scherströmung

In diesem Unterkapitel testen wir unseren Algorithmus an einer weiteren nichtlinearen Dynamik, der Entwicklung einer Scherströmung (engl. *shear flow evolution*). Unser Ziel ist es dabei, das Verhalten dieser Strömung unter Erhaltung der vier eingangs genannten Größen numerisch korrekt wiederzugeben. Dazu vergleichen wir wie in Kapitel 6.3 unsere Ergebnisse mit denen aus [GHK⁺09] und [BG17]. Um dies zu ermöglichen, nutzen wir auch hier für unsere Abbildungen die ebenda verwendeten Werte für die Zeitpunkte und die Höhenlinien.

Die dimensionsbehafteten Anfangsbedingungen sind nach [GHK⁺09] für die Höhe durch

$$H(x, y, 0) = H_0 - H' \frac{y''}{\sigma_y} \exp\left(-\frac{y'^2}{2\sigma_y^2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \kappa \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda_x}\right)\right)$$

und für die Geschwindigkeiten durch

$$\begin{aligned} v_1(x, y, 0) &= \frac{gH'}{f\sigma_y L_y} \left(c(y) - \frac{y''^2}{\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{y'^2}{2\sigma_y^2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \kappa \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda_x}\right)\right), \\ v_2(x, y, 0) &= -\frac{gH'}{fL_x} \frac{2\pi\kappa}{\lambda_x} \frac{y''}{\sigma_y} \exp\left(-\frac{y'^2}{2\sigma_y^2} + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x'}{\lambda_x}\right), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{L_x}, & y' &= \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{L_y} \left(y - \frac{L_y}{2}\right)\right), \\ c(y) &= \cos\left(\frac{2\pi}{L_y} \left(y - \frac{L_y}{2}\right)\right), & y'' &= \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{L_y} \left(y - \frac{L_y}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

sowie $\lambda_x = 1/2$, $\sigma_y = 1/12$ und $\kappa = 1/10$, gegeben. Folglich gilt $f\mathbf{v}^\perp + g\nabla H = 0$.

Mit den weiteren Erläuterungen aus [GHK⁺09] erfüllen die charakteristischen Skalen der Länge, der Geschwindigkeit und der Zeit

$$L = 4\sigma_y L_y, \quad U = 6\frac{gH'}{fL}, \quad T = \frac{L}{U} = \frac{1}{6} \frac{fL^2}{gH'}.$$

Ferner führt die Wahl von $H_0 = 1076$ m und $H' = 30$ m zu einer quasi-geostrophischen Strömung mit den dimensionslosen Parametern

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH_0}} \approx 0.194, \quad \text{Ro} = \frac{U}{fL} \approx 0.224, \quad \text{Bu} = \frac{\text{Ro}^2}{\text{Fr}^2} \approx 1.34.$$

Da die Froude- und Rossby-Zahlen hinreichend klein sind, ist unser Algorithmus anwendbar. Die Anfangsbedingungen des Impulses erhalten wir durch $M(x, y, 0) = H(x, y, 0) \cdot v_1(x, y, 0)$ beziehungsweise $N(x, y, 0) = H(x, y, 0) \cdot v_2(x, y, 0)$ und in Abbildung 6.10 (links) sind die Anfangsbedingungen der Höhe H und der relativen potentiellen Vortizität q_{rel} zu finden.

Für die numerische Simulation betrachten wir das Rechengebiet $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ mit 389 Zellen in x -Richtung und 337 Zellen in y -Richtung im Zeitintervall von 0 d bis 10 d mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 108$ s. Damit erhalten wir für das Hilfsproblem die zulässige CFL-Zahl $\text{cfl}_{\text{aux}} \approx 0.37$.

Genau wie in Kapitel 6.3 bestimmen wir für die numerischen Lösungen nach jedem Zeitschritt die eingangs genannten Erhaltungsgrößen und zeigen des Weiteren zu ausgewählten Zeitpunkten Abbildungen mit Höhenlinien bezüglich der Höhe und der relativen potentiellen Vortizität jeweils in dimensionsbehafteter Form.

Im Folgenden beschreiben wir den zeitlichen Verlauf der Strömung. Zu diesem Zweck ist die Höhe

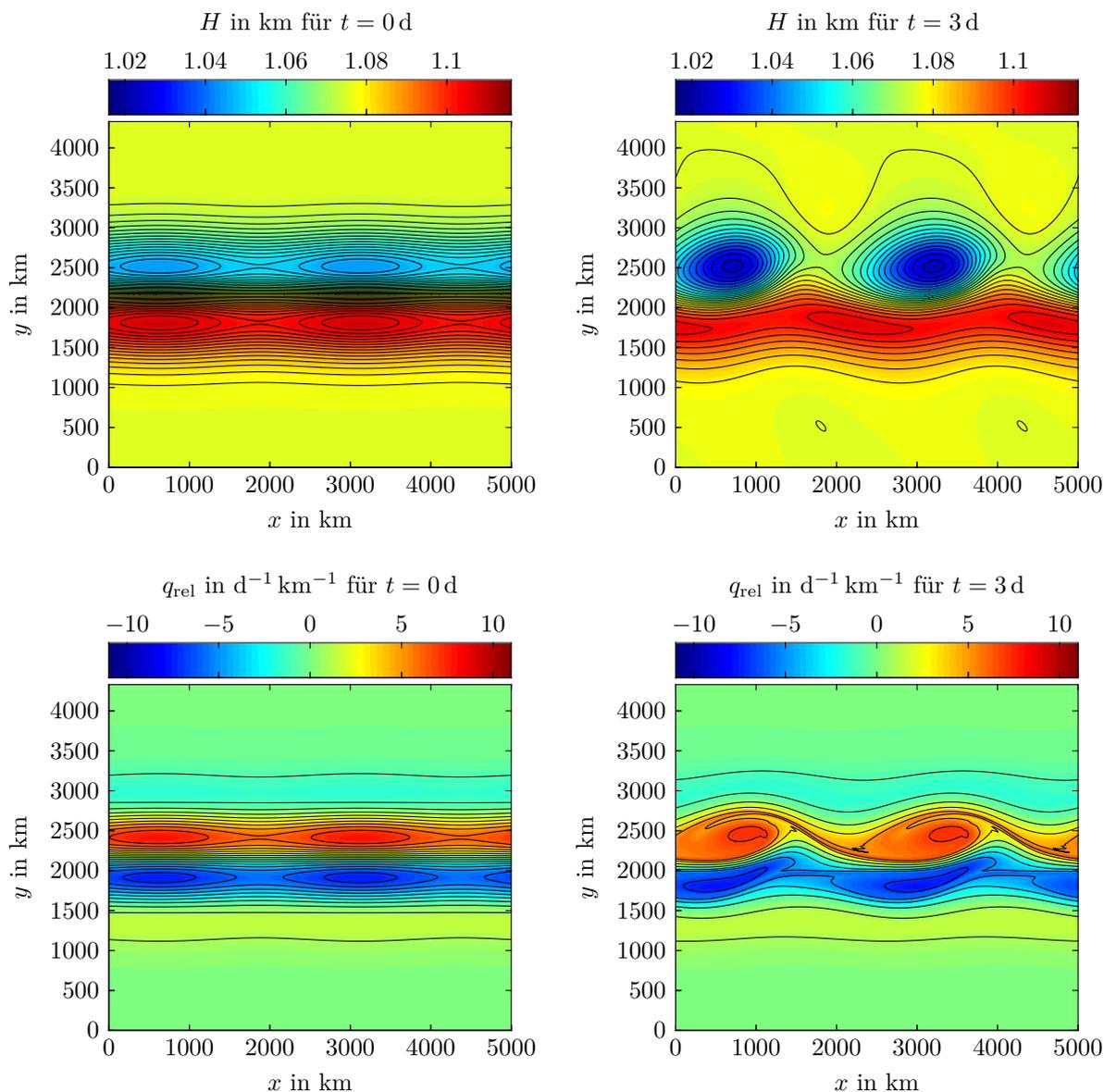


Abbildung 6.10: Höhe H (oben, Höhenlinien jeweils zwischen 1.016 km und 1.116 km im Abstand von 0.004 km) und relative potentielle Vortizität q_{rel} (unten, Höhenlinien jeweils zwischen $-11 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$ und $11 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$ im Abstand von $2 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$) zu den Zeitpunkten 0 (links) und 3 Tagen (rechts) im Fall der Entwicklung einer Scherströmung.

H und die relative potentielle Vortizität q_{rel} zum Zeitpunkt $t = 3 \text{ d}$ in Abbildung 6.10 (rechts), zum Zeitpunkt $t = 6 \text{ d}$ in Abbildung 6.11 (links) und zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ d}$ in Abbildung 6.11 (rechts) zu finden.

Initial liegt nach [GHK⁺09] ein instabiles Gleichgewicht bestehend aus einem zonalen Jet in x -Richtung mit einer überlagerten Störung vor. Wie die relative potentielle Vortizität anzeigt, entwickelt sich diese Störung im Laufe der Zeit zu zwei Paaren von gegenläufig rotierenden Wirbeln, welche währenddessen nach Norden strömen.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus [GHK⁺09] und [BG17] zu den drei Zeitpunkten liefert

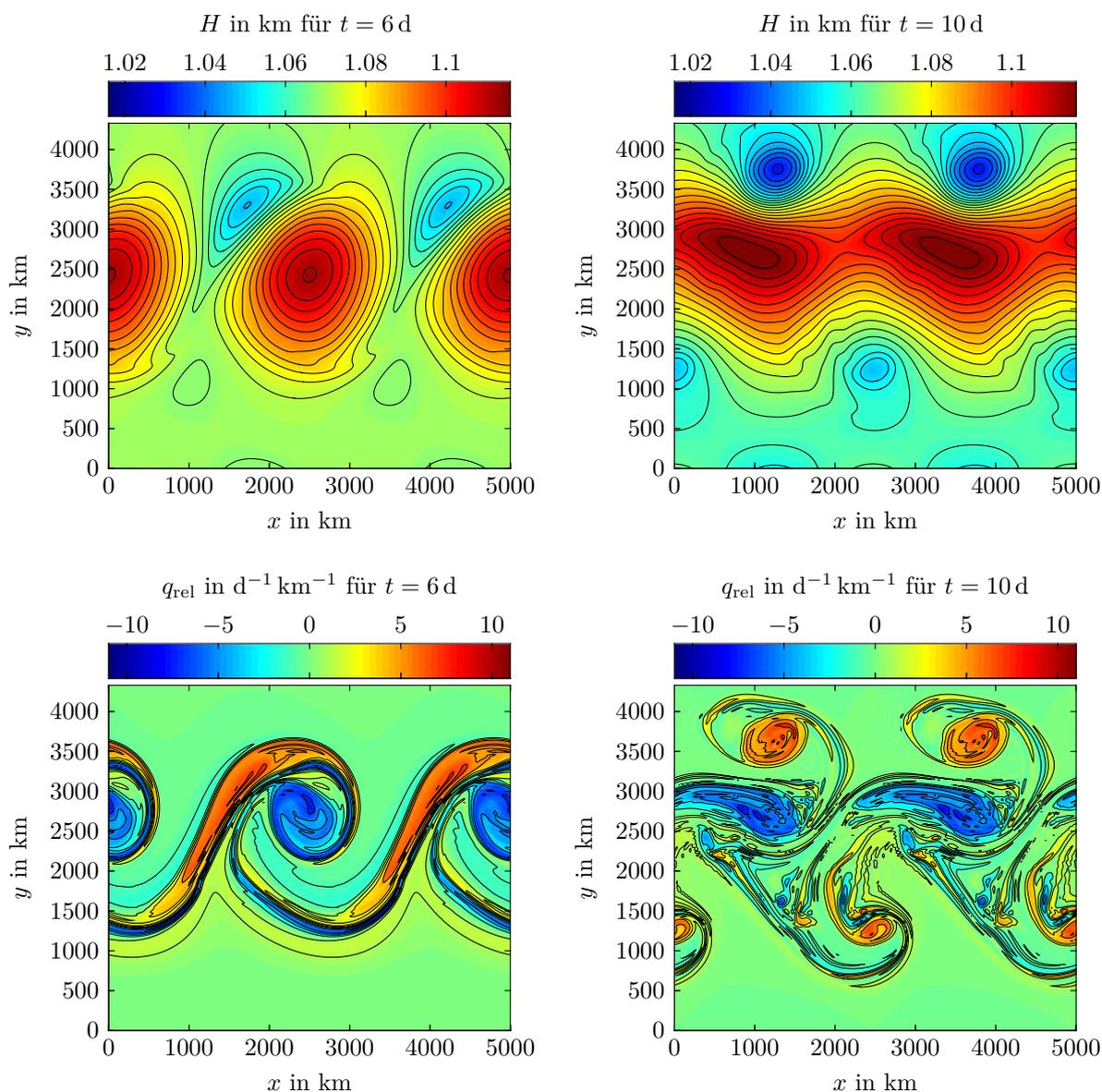


Abbildung 6.11: Höhe H (oben, Höhenlinien jeweils zwischen 1.016 km und 1.116 km im Abstand von 0.004 km) und relative potentielle Vortizität q_{rel} (unten, Höhenlinien jeweils zwischen $-11 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$ und $11 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$ im Abstand von $2 \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-1}$) zu den Zeitpunkten 6 (links) und 10 Tagen (rechts) im Fall der Entwicklung einer Scherströmung.

für die beiden Wirbelpaare im Wesentlichen eine Übereinstimmung hinsichtlich ihrer Positionen und ihrer Größen.

Allerdings nehmen mit zunehmender Zeit Abweichungen insbesondere für die Wirbelgrößen zu. Diese sind anhand der Höhenlinien zu erkennen. Im Gegensatz zu der zitierten Literatur haben wir in unserem Fall für die Höhe zum Zeitpunkt $t = 3 \text{ d}$ keine durchgehende Höhenlinie, die den nördlichen Rand durchdringt und aufgrund der Periodizität im südlichen Gebiet erscheint. Ähnliches ist auch zu den beiden weiteren Zeitpunkten zu beobachten.

Außerdem gibt es auch Abweichungen bezüglich der Wirbelpositionen. Dies ist am besten für

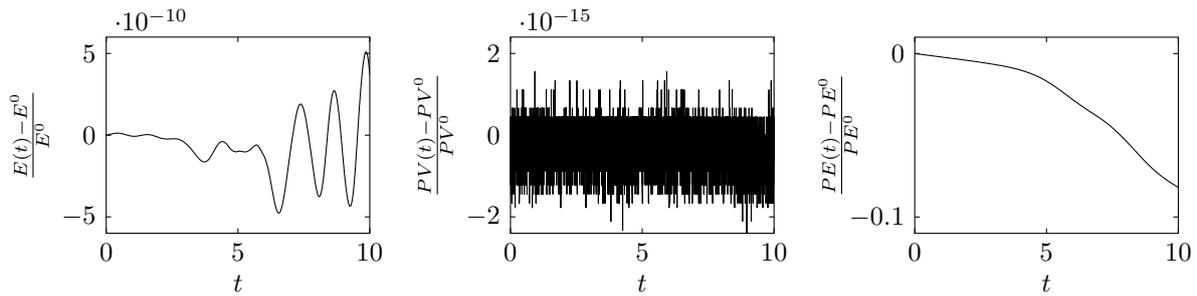


Abbildung 6.12: Relative Fehler bezüglich der Energie E (links), der massengewichteten potentiellen Vortizität PV (Mitte) und der potentiellen Enstrophie PE (rechts) im Fall der Entwicklung einer Scherströmung.

die relative potentielle Vortizität zum Zeitpunkt $t = 10$ d zu erkennen, wobei im Vergleich zu der zitierten Literatur unser Ergebnis deutlich weniger Rauschen aufweist.

Als Nächstes diskutieren wir den zeitlichen Verlauf der Erhaltungsgrößen. Wie in Kapitel 6.3 liegen die Werte für den relativen Fehler der Gesamtmasse m und der massengewichteten potentiellen Vortizität PV (siehe Abbildung 6.12 (Mitte)) im Bereich der Maschinengenauigkeit. Da auch hier der zeitliche Verlauf für die Gesamtmasse stark von der genauen Wahl des Vorkonditionierers abhängt (siehe Bemerkung 5.3.2), ist dieser nicht mit angegeben.

Weiterhin haben wir für den relativen Fehler der Energie E (siehe Abbildung 6.12 (links)) einen periodischen Verlauf mit ansteigender Amplitude und maximalen Fehler in der Größenordnung 10^{-10} . Im Vergleich zu der zitierten Literatur stimmen die jeweiligen Größenordnungen für die ersten beiden Fehler überein, für den relativen Fehler der Energie ist unsere Größenordnung besser.

Folglich werden diese drei Größen von unserem Algorithmus erhalten. Dies ist für die potentielle Enstrophie PE (siehe Abbildung 6.12 (rechts)) nicht der Fall. Im Unterschied zu Werten in der Größenordnung 10^{-5} in [GHK⁺09] und 10^{-3} in [BG17] erhalten wir hier deutlich schlechtere Werte. Der relative Fehler für die potentielle Enstrophie verläuft streng monoton fallend mit einem maximalen Fehler in der Größenordnung 10^{-1} .

Die genannten Unterschiede lassen sich wie in Kapitel 6.3 erklären. Auch hier sollte eine korrekte Darstellung von Frequenzspektren zu verbesserten Ergebnissen führen. Darüber hinaus könnte es zudem sinnvoll sein, die Froude- und Rossby-Zahlen nach jedem Zeitschritt neu aus der dimensionsbehafteten Strömung zu ermitteln.

Bekanntlich werden diese aktuell am Anfang aus den charakteristischen Skalen bestimmt und anschließend im gesamten zeitlichen Verlauf nicht mehr verändert. Aufgrund von nichtlinearen Dynamiken ist es jedoch im Allgemeinen möglich, dass sich diese Zahlen in Abhängigkeit der Zeit verändern können.

Für dieses Testbeispiel ist ein Anzeichen hierfür im zeitlichen Verlauf des relativen Fehlers der Energie zu finden. Je umfassender das gesamte Rechengebiet von den einzelnen Wirbeln besetzt wird, desto stärker steigt die Amplitude des genannten Fehlers an.

Um zeitliche Anpassungen für die Froude- und Rossby-Zahlen zu erhalten, bietet es sich an das Verfahren aus [Hof00] und [Mei01] für die Mach-Zahl der eindimensionalen Euler-Gleichungen auf unseren Fall zu übertragen. In Kombination mit der gitterunabhängigen Mittelung erwarten wir dadurch eine verbesserte asymptotische Zerlegung der Höhe und infolge bessere numerische Ergebnisse.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befasste sich mit der Theorie und Numerik von Mehrskalenmethoden für die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen.

Im theoretischen Teil der Arbeit wurden, um den Einfluss kleinerer Raumskalen auf die bekannten Gleichungen der Mesoskala, die im singulären Grenzwert das quasi-geostrophische Gleichgewicht beschreiben, zu bestimmen, für die rotierenden Flachwassergleichungen in angepasster einfacher Form asymptotische Einskalen- und Mehrskalenentwicklungen betrachtet. Dazu wurde als Erstes durch die Wahl der dimensionslosen Parameter in Analogie mit der Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung ein Gleichungssystem bezüglich der sogenannten Zwischenvariablen, das die Gleichungen der Mesoskala und der kleineren Submesoskala in Abhängigkeit eines zusätzlichen Parameters wiedergab, hergeleitet und mit Einskalenentwicklungen der entsprechende singuläre Grenzwert untersucht.

Anschließend war es für diese Gleichungen unter Verwendung der bekannten Beweisstrategie nach Klainerman und Majda [KM81], [KM82] für symmetrisch-hyperbolische Systeme möglich, die zu den bekannten Existenz-, Eindeutigkeits- und Konvergenzaussagen bezüglich der Mesoskala, vergleiche [Maj03], entsprechenden Aussagen bezüglich der Zwischenvariablen und Submesoskala zu beweisen.

Als Zweites wurde auf eine Verallgemeinerung dieser Gleichungen eine Zweiskalenentwicklung in Raum und Zeit angewendet. Hierfür wurden zunächst die jeweiligen Mittelungsoperatoren sowie Wachstumsbedingungen bezüglich der Submesoskala vorgestellt und für die Vortizität eine geeignete Entwicklung bestimmt.

Daraufhin wurde das resultierende asymptotische System mithilfe dieser Bedingungen analysiert. Unter anderem war die Geschwindigkeit in führender Ordnung bezüglich der Submesoskala divergenzfrei und die räumlich gemittelten Gleichungen erster Ordnung entsprachen den linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen.

Des Weiteren wurde gezeigt, dass das räumlich und zeitlich gemittelte quasi-geostrophische Gleichgewicht im Gegensatz zur bekannten Einskalenentwicklung um einen zusätzlichen Term in der Gleichung der potentiellen Vortizität verschoben war. Da das dabei entstehende Gleichungssystem allerdings keine geschlossene Form aufwies, wurden für diesen Term mögliche Ansätze zur Schließung diskutiert.

Im numerischen Teil der Arbeit wurde aufbauend auf den Ergebnissen der asymptotischen Analyse ein vollständig-impliziter Algorithmus zweiter Ordnung in Raum und Zeit für die rotierenden Flachwassergleichungen in Erhaltungsform bei hinreichend kleinen Froude-Zahlen

sowie beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$ entwickelt.

Hierzu wurde der asymptotische Korrekturansatz aus [Hof00], [Mei01] auf diesen Fall angepasst und die Höhe durch eine asymptotische Entwicklung zweiter Ordnung $H \sim H_0 + \text{Fr} H_1 + \text{Fr}^2 H_2$ ersetzt. Infolgedessen wurde H_0 durch die Hintergrundhöhe, H_1 durch die linearisierten rotierenden Flachwassergleichungen und H_2 durch ein Helmholtz-Problem ermittelt.

Um des Weiteren einen numerisch-stabilen Algorithmus zweiter Ordnung zu erhalten, wurde unter anderem ein entsprechendes vollständig-implizites Zeitintegrationsverfahren und für die räumlichen Ableitungsoperatoren nach [VK09] eine Kombination aus Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Verfahren mit bilinearen Ansatzfunktionen verwendet.

Ferner wurde der Quellterm, da hierfür im Fall kleiner Rossby-Zahlen eine steife Differentialgleichung vorlag, ohne Ordnungsverlust für das Gesamtverfahren mittels des geeigneten Radau-IIA-Verfahrens diskretisiert.

In einem zusätzlichen Schritt sicherte dieser Algorithmus unter Verwendung eines versetzten Gitters, das aus Stabilitätsgründen zum Einsatz kam, außerdem die Divergenzfreiheit bei verschwindenden Froude-Zahlen sowohl für konstante als auch gegen null konvergierende Rossby-Zahlen.

Anschließend wurde der entwickelte vollständig-implizite Algorithmus an zwei klassischen stationären Lösungen sowie zwei nichtlinearen Dynamiken überprüft und somit die Güte des Algorithmus bestimmt. Dabei wurden für die beiden stationären Lösungen die drei Fälle $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = 1$, $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \sqrt{\varepsilon}$ sowie $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = \varepsilon$ jeweils für $\varepsilon \ll 1$ betrachtet.

Für das erste Testbeispiel, eine exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels, wurde die experimentelle Konvergenzordnung ermittelt. Diese stimmte in allen drei betrachteten Fällen bei jeweils hinreichend kleinen Gitterweiten mit der erwarteten Ordnung zwei überein. Darüber hinaus war eine Abhängigkeit der experimentellen Konvergenzordnung von der Rossby-Zahl und der Gitterweite aufgrund des verwendeten Radau-IIA-Verfahrens für den Quellterm zu erkennen.

Mit dem zweiten Testbeispiel, einem See in Ruhe, konnte gezeigt werden, dass der Algorithmus diesen für alle drei Fälle numerisch erhält. Dazu mussten die einzelnen Schritte des Algorithmus jeweils auf die Bodenhöhe angepasst werden.

Anhand der beiden nichtlinearen Dynamiken aus [GHK⁺09], die zum einen die Wechselwirkung eines Wirbelpaares und zum anderen die Entwicklung einer Scherströmung beschreiben, wurde überprüft, inwieweit der vollständig-implizite Algorithmus diese Strömungen wiedergeben konnte. Da hierfür keine analytischen Lösungen vorliegen, mussten Erhaltungsgrößen bestimmt und die numerischen Resultate mit der entsprechenden Literatur verglichen werden. Insgesamt konnte der Algorithmus die beiden Strömungen jeweils unter hinreichender Erhaltung der Masse, der Energie und der massengewichteten Vortizität im Wesentlichen wiedergeben.

Abschließend wird ein kurzer Ausblick für zukünftige Forschungsziele angegeben. Um den Einfluss kleinerer Raumskalen, die zum Beispiel durch zweiskalige Anfangsbedingungen oder Bodenhöhen entstehen könnten, auf mesoskalige Bewegungen in der Atmosphäre und der Ozeane anhand der rotierenden Flachwassergleichungen weiter zu untersuchen, sollten die theoretischen

und numerischen Ansätze fortgeführt werden.

Innerhalb des Konvergenzbeweises für die Gleichungen der Zwischenvariablen im singulären Grenzwert sollte folglich untersucht werden, inwiefern schwächere Voraussetzungen betrachtet werden könnten. Um die wohl-erstellten Anfangsbedingungen durch beliebige Anfangsbedingungen zu ersetzen, würde es sich anbieten, das Vorgehen aus [Uka86] beziehungsweise [Asa87] auf diesen Fall zu übertragen.

Zudem sollten Ansätze zur Schließung des räumlich und zeitlich gemittelten quasi-geostrophischen Gleichgewichts untersucht werden. Hierzu könnten für den zusätzlichen Term aufgrund der Strukturgleichheit die Gleichungen führender Ordnung bezüglich der Submesoskala und der Zwischenvariablen verwendet werden.

Daneben sollte auch eine numerische Realisierung der theoretischen Ergebnisse in Betracht gezogen werden. Beispielsweise könnte es sich als zielführend erweisen, den zusätzlichen Term unter Verwendung des entwickelten vollständig-impliziten Algorithmus anhand geeigneter Testbeispiele und Mittelungsoperatoren nachzuweisen.

Weiterhin sollte es möglich sein, diesen Algorithmus zu verbessern. Dabei sollte zunächst die asymptotische Höhenfunktion erster Ordnung statt mittels der bisherigen lokalen Mittelung mit einem vom diskreten Raugitter unabhängigen Mittelungsoperator bestimmt und die Froude- und Rossby-Zahlen nach jedem Zeitschritt neu aus dimensionsbehafteten Strömungen berechnet werden.

Um dies zu erreichen, würde es sich jeweils anbieten die gitterunabhängige Mittelung unter Verwendung diskreter Datenanalyse aus [Hof00], [Mei01] und das Verfahren zur Berechnung der Mach-Zahl im Fall der eindimensionalen Euler-Gleichungen aus [Hof00], [Mei01] auf diese Situation anzupassen. Infolgedessen sollten sich die numerischen Resultate für die nichtlinearen Dynamiken hinsichtlich der Darstellung von Frequenzspektren und der numerischen Erhaltung der potentiellen Enstrophie verbessern.

Darüber hinaus würde mit diesem gitterunabhängigen Mittelungsoperator ein erster Schritt zur Erweiterung des Algorithmus auf den Fall $Fr \rightarrow 0$ beziehungsweise numerisch $Fr = 0$ vorliegen. In weiteren Schritten müsste unter anderem eine asymptotische Korrektur unabhängig von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ beispielsweise unter Verwendung einer geeigneten Geschwindigkeitszerlegung in Analogie mit der divergenzfreien Korrektur ermittelt und für die divergenzfreie Korrektur selbst eine geeignete Implementierung unabhängig von solchen Termen gewählt werden.

Weniger Aufwand sollte nötig sein, um auch im Fall von Bodenhöhen einen Algorithmus zweiter Ordnung in Raum und Zeit zu erhalten. Hierfür würde es in Anbetracht der bisherigen Realisierung ausreichen, das entsprechende Hilfsproblem mit einem Finite-Volumen-Verfahren zweiter Ordnung zu bestimmen, wobei dieses durch eine Kombination aus MUSCL-Hancock-Methode und einer geeigneten Anpassung des in [ACU15] entwickelten approximativen Riemann-Lösers bestehen könnte.

Anhang

A.1 Asymptotische Korrektur bezüglich δ_{Ro}

Hier geben wir aus Gründen der Vollständigkeit die asymptotische Korrektur für beliebige

$$\delta_{\text{Ro}} := \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right)\right)^2}$$

direkt an. Dabei erfolgt der Rechenweg analog zum Vorgehen im Fall $\delta_{\text{Ro}} = 1$ in Kapitel 5.2. Aufgrund der Notwendigkeit des Vorfaktors δ_{Ro} im Grenzwert $\text{Ro} \rightarrow 0$ beziehungsweise für hinreichend kleine Rossby-Zahlen wie wir es in Bemerkung 5.2.2 beziehungsweise Bemerkung 5.2.3 gezeigt haben, müssen wir allerdings alle Terme in den Gleichungen (5.2.12) bis (5.2.15) beachten.

Dann gilt für die asymptotische Korrektur bezüglich δ_{Ro}

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n &- \Delta t \mathcal{F}^{\delta_{\text{Ro}}} \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{\delta_{\text{Ro}}} \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2} \right) \\ &- \Delta t \mathcal{A}^{\delta_{\text{Ro}}} \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, H^{n+1/2} \right) - \Delta t \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^{\delta_{\text{Ro}}} \left(\mathbf{Q}_{\text{aux}}^{n+1/2}, \mathbf{Q}^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

mit der klassischen Korrekturfunktion $\mathcal{F}^{\delta_{\text{Ro}}} = \left(\mathcal{F}_H^{\delta_{\text{Ro}}}, \mathcal{F}_M^{\delta_{\text{Ro}}}, \mathcal{F}_N^{\delta_{\text{Ro}}} \right)^T$ bezüglich δ_{Ro}

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_H^{\delta_{\text{Ro}}}(\mathbf{Q}) &= \delta_{\text{Ro}} \partial_x M + \delta_{\text{Ro}} \partial_y N, \\ \mathcal{F}_M^{\delta_{\text{Ro}}}(\mathbf{Q}) &= \delta_{\text{Ro}}^2 \partial_x \left(\frac{M^2}{H} \right) + \partial_x \left(\frac{1}{2} H^2 \right) + \delta_{\text{Ro}}^2 \partial_y \left(\frac{MN}{H} \right), \\ \mathcal{F}_N^{\delta_{\text{Ro}}}(\mathbf{Q}) &= \delta_{\text{Ro}}^2 \partial_x \left(\frac{MN}{H} \right) + \delta_{\text{Ro}}^2 \partial_y \left(\frac{N^2}{H} \right) + \partial_y \left(\frac{1}{2} H^2 \right), \end{aligned}$$

dem klassischen Quellterm $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{\delta_{\text{Ro}}} = \left(0, \mathcal{S}_{\mathcal{F}_M}^{\delta_{\text{Ro}}}, \mathcal{S}_{\mathcal{F}_N}^{\delta_{\text{Ro}}} \right)^T$ bezüglich δ_{Ro}

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}_M}^{\delta_{\text{Ro}}}(\mathbf{Q}) = -\delta_{\text{Ro}} N, \quad \mathcal{S}_{\mathcal{F}_N}^{\delta_{\text{Ro}}}(\mathbf{Q}) = \delta_{\text{Ro}} M,$$

der asymptotischen Korrekturfunktion $\mathcal{A}^{\delta_{\text{Ro}}} = \left(\mathcal{A}_H^{\delta_{\text{Ro}}}, \mathcal{A}_M^{\delta_{\text{Ro}}}, \mathcal{A}_N^{\delta_{\text{Ro}}} \right)^T$ bezüglich δ_{Ro}

$$\mathcal{A}_H^{\delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathbf{Q}}, H) = \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(-\partial_x \tilde{N} + \partial_y \tilde{M} \right) + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \text{div} \left(\tilde{H} \nabla H \right),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_M^{\delta_{\text{Ro}}}(\tilde{Q}, H) = & -\frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(2\partial_x \left(\frac{\tilde{M}\tilde{N}}{\tilde{H}} \right) - \partial_y \left(\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{H}} - \frac{\tilde{N}^2}{\tilde{H}} \right) \right) \\
& + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \left(2\partial_x (\tilde{M}\partial_x H) + \partial_y (\tilde{M}\partial_y H + \tilde{N}\partial_x H) \right) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right)^2 \left(\partial_x \left(\frac{\tilde{N}^2}{\tilde{H}} \right) - \partial_y \left(\frac{\tilde{M}\tilde{N}}{\tilde{H}} \right) \right) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right)^2 \left(\partial_x (\tilde{H}(\partial_x H)^2) + \partial_y (\tilde{H}\partial_x H\partial_y H) \right) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) 2\partial_x (\tilde{M}\partial_y H + \tilde{N}\partial_x H) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) 2\partial_y (\tilde{M}\partial_x H - \tilde{N}\partial_y H) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) 2\partial_x (\tilde{N}\partial_y H) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_y (\tilde{N}\partial_x H + \tilde{M}\partial_y H) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right)^2 2\partial_x (\tilde{H}\partial_x H\partial_y H) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right)^2 \partial_y (\tilde{H}(\partial_x H)^2 - \tilde{H}(\partial_y H)^2) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^4 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right)^2 \partial_x (\tilde{H}(\partial_y H)^2) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^4 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right)^2 \partial_y (\tilde{H}\partial_x H\partial_y H) - \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \tilde{H}\partial_x H,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_N^{\delta_{\text{Ro}}}(\tilde{Q}, H) = & \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(\partial_x \left(\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{H}} - \frac{\tilde{N}^2}{\tilde{H}} \right) + 2\partial_y \left(\frac{\tilde{M}\tilde{N}}{\tilde{H}} \right) \right) \\
& + \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \left(\partial_x (\tilde{M}\partial_y H + \tilde{N}\partial_x H) + 2\partial_y (\tilde{N}\partial_y H) \right) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right)^2 \left(\partial_x \left(\frac{\tilde{M}\tilde{N}}{\tilde{H}} \right) - \partial_y \left(\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{H}} \right) \right) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right)^2 \left(\partial_x (\tilde{H}\partial_x H\partial_y H) + \partial_y (\tilde{H}(\partial_y H)^2) \right) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) 2\partial_x (\tilde{M}\partial_x H - \tilde{N}\partial_y H) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) 2\partial_y (\tilde{N}\partial_x H + \tilde{M}\partial_y H) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}} \right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2} \right) \partial_x (\tilde{N}\partial_x H + \tilde{M}\partial_y H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right) 2\partial_y \left(\tilde{M}\partial_x H\right) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right)^2 \partial_x \left(\tilde{H}(\partial_x H)^2 - \tilde{H}(\partial_y H)^2\right) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right)^2 2\partial_y \left(\tilde{H}\partial_x H\partial_y H\right) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right)^2 \partial_x \left(\tilde{H}\partial_x H\partial_y H\right) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 \delta_{\text{Ro}}^2 \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right)^2 \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right)^2 \partial_y \left(\tilde{H}(\partial_x H)^2\right) - \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right) \tilde{H}\partial_y H
\end{aligned}$$

und dem asymptotischen Quellterm $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^{\delta_{\text{Ro}}} = (0, \mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}^{\delta_{\text{Ro}}}, \mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}^{\delta_{\text{Ro}}})^T$ bezüglich δ_{Ro}

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}^{\delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q}) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}^{\mathcal{A}, \delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q}) + \mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}^{\mathcal{F}, \delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, H), \quad \mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}^{\delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q}) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}^{\mathcal{A}, \delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q}) + \mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}^{\mathcal{F}, \delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, H),$$

der zudem in den Quellanteil bezüglich δ_{Ro}

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}^{\mathcal{A}, \delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q}) &= -\frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right) \tilde{M} + \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right) N, \\
\mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}^{\mathcal{A}, \delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q}) &= -\frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right) \tilde{N} - \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right) M
\end{aligned}$$

und den Gradientenanteil bezüglich δ_{Ro}

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathcal{A}_M}^{\mathcal{F}, \delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, H) &= -\frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right) \tilde{H}\partial_y H - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right) \tilde{H}\partial_x H, \\
\mathcal{S}_{\mathcal{A}_N}^{\mathcal{F}, \delta_{\text{Ro}}}(\tilde{\mathcal{Q}}, H) &= \frac{\Delta t}{2} \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right) \tilde{H}\partial_x H - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \delta_{\text{Ro}} \left(\frac{\text{Ro}-1}{\text{Ro}}\right) \left(\frac{\text{Fr}^2-1}{\text{Fr}^2}\right) \tilde{H}\partial_y H
\end{aligned}$$

aufgespalten wird.

Um mit diesen Formeln die asymptotische Korrektur aus Gleichung (5.2.21) zu erhalten, setzen wir $\delta_{\text{Ro}} = 1$ und betrachten Gleichung (A.1.1) bis einschließlich der zweiten Ordnung in Δt .

A.2 Diskrete Ableitungsoperatoren mittels bilinearer Ansatzfunktionen

Hier geben wir aus Gründen der Vollständigkeit die wichtigsten diskreten Ableitungsoperatoren der Konsistenzordnung zwei, die nach einer Kombination aus Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Verfahren mit bilinearen Ansatzfunktionen entstehen, an. Bis einschließlich des diskreten Divergenzoperators sind sie beispielsweise in [VK09] zu finden. Zusätzlich benötigen wir aufgrund der Nichtlinearität im Höhengradienten den diskreten gewichteten Laplace-Operator.

Zunächst erweitern wir die Diskretisierung des Raumes aus Kapitel 5.3 um ein duales äquidistantes Gitter. Dazu bestimmen wir zu jeder Zelle $\Omega_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ die Zellmittelpunkte (x_i, y_j) durch $x_i = (x_{i+1/2} + x_{i-1/2})/2$ und $y_j = (y_{j+1/2} + y_{j-1/2})/2$. Anschließend erhalten wir mittels $\Omega_{i+1/2, j+1/2} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ für alle i, j die Zellen bezüglich der Knotenpunkte $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$, sodass auch das duale Gitter die konstanten Gitterweiten Δx und Δy aufweist. Analog zur Darstellung von Zellmittelwerten durch die Tiefstellung (i, j) kennzeichnen wir Knotenpunktswerte durch die Tiefstellung $(i + 1/2, j + 1/2)$.

Dann sind die einzelnen Operatoren erster Ordnung bezüglich der Zellmittelwerte durch Knotenpunktswerte gegeben. Diese Ableitungsoperatoren geben wir im Folgenden an. Der umgekehrte Fall folgt mittels einer Verschiebung der Indizes um jeweils $1/2$. Diese Ableitungsoperatoren benötigen wir für die numerische Realisierung der Divergenzfreiheit in Kapitel 5.4.

Für eine hinreichend glatte Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt sich die bilineare Ansatzfunktion bezüglich der Zelle $\Omega_{i,j}$ durch

$$\varphi(x, y)|_{\Omega_{i,j}} \approx \varphi_{i,j} + (x - x_i) \varphi_{x,i,j} + (y - y_j) \varphi_{y,i,j} + (x - x_i)(y - y_j) \varphi_{xy,i,j}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j} &= \frac{1}{4} \left(\varphi_{i+1/2, j+1/2} + \varphi_{i-1/2, j+1/2} + \varphi_{i+1/2, j-1/2} + \varphi_{i-1/2, j-1/2} \right), \\ \varphi_{x,i,j} &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\varphi_{i+1/2, j+1/2} - \varphi_{i-1/2, j+1/2} + \varphi_{i+1/2, j-1/2} - \varphi_{i-1/2, j-1/2} \right), \\ \varphi_{y,i,j} &= \frac{1}{2\Delta y} \left(\varphi_{i+1/2, j+1/2} + \varphi_{i-1/2, j+1/2} - \varphi_{i+1/2, j-1/2} - \varphi_{i-1/2, j-1/2} \right), \\ \varphi_{xy,i,j} &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left(\varphi_{i+1/2, j+1/2} - \varphi_{i-1/2, j+1/2} - \varphi_{i+1/2, j-1/2} + \varphi_{i-1/2, j-1/2} \right). \end{aligned}$$

Daraufhin ist der diskrete Gradient durch

$$(\nabla \varphi)_{i,j} = \begin{pmatrix} \varphi_{x,i,j} \\ \varphi_{y,i,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y - y_j \\ x - x_i \end{pmatrix} \varphi_{xy,i,j}$$

und die diskrete Divergenz mit $\mathbf{v} = (u, v)^T$ sowie den beiden bilinearen Ansatzfunktionen u und v durch

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{v})_{i,j} &= \frac{1}{2\Delta x} \left(u_{i+1/2, j+1/2} - u_{i-1/2, j+1/2} + u_{i+1/2, j-1/2} - u_{i-1/2, j-1/2} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta y}{8\Delta x} \left(-u_{y, i+1/2, j+1/2} + u_{y, i-1/2, j+1/2} + u_{y, i+1/2, j-1/2} - u_{y, i-1/2, j-1/2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta y} \left(v_{i+1/2, j+1/2} + v_{i-1/2, j+1/2} - v_{i+1/2, j-1/2} - v_{i-1/2, j-1/2} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta x}{8\Delta y} \left(-v_{x, i+1/2, j+1/2} + v_{x, i-1/2, j+1/2} + v_{x, i+1/2, j-1/2} - v_{x, i-1/2, j-1/2} \right) \end{aligned}$$

gegeben.

Aus diesen Operatoren lassen sich die diskreten Ableitungsoperatoren höherer Ordnung durch

geeignete Kombinationen und mittels Verschiebungen der Indizes ermitteln. Zum Beispiel folgt der diskrete gewichtete Laplace-Operator aus der diskreten Divergenz mit $\mathbf{v} = a\nabla b$ sowie den beiden bilinearen Ansatzfunktionen a und b , sodass gilt

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(a\nabla b))_{i,j} = & \left(\begin{aligned} & \frac{1}{8\Delta x^2} a_{i+1/2,j+1/2} - \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i+1/2,j+1/2} \\ & + \frac{1}{8\Delta y^2} a_{i+1/2,j+1/2} - \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i+1/2,j+1/2} \end{aligned} \right) b_{i+1,j+1} \\
& + \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{8\Delta x^2} a_{i+1/2,j+1/2} + \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i+1/2,j+1/2} \\ & + \frac{3}{8\Delta y^2} a_{i+1/2,j+1/2} - \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i+1/2,j+1/2} \\ & - \frac{1}{8\Delta x^2} a_{i-1/2,j+1/2} + \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i-1/2,j+1/2} \\ & + \frac{3}{8\Delta y^2} a_{i-1/2,j+1/2} + \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i-1/2,j+1/2} \end{aligned} \right) b_{i,j+1} \\
& + \left(\begin{aligned} & \frac{1}{8\Delta x^2} a_{i-1/2,j+1/2} - \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i-1/2,j+1/2} \\ & + \frac{1}{8\Delta y^2} a_{i-1/2,j+1/2} + \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i-1/2,j+1/2} \end{aligned} \right) b_{i-1,j+1} \\
& + \left(\begin{aligned} & \frac{3}{8\Delta x^2} a_{i+1/2,j+1/2} - \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i+1/2,j+1/2} \\ & - \frac{1}{8\Delta y^2} a_{i+1/2,j+1/2} + \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i+1/2,j+1/2} \\ & + \frac{3}{8\Delta x^2} a_{i+1/2,j-1/2} + \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i+1/2,j-1/2} \\ & - \frac{1}{8\Delta y^2} a_{i+1/2,j-1/2} + \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i+1/2,j-1/2} \end{aligned} \right) b_{i+1,j} \\
& + \left(\begin{aligned} & -\frac{3}{8\Delta x^2} a_{i+1/2,j+1/2} + \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i+1/2,j+1/2} \\ & - \frac{3}{8\Delta y^2} a_{i+1/2,j+1/2} + \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i+1/2,j+1/2} \\ & - \frac{3}{8\Delta x^2} a_{i-1/2,j+1/2} + \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i-1/2,j+1/2} \\ & - \frac{3}{8\Delta y^2} a_{i-1/2,j+1/2} - \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i-1/2,j+1/2} \\ & - \frac{3}{8\Delta x^2} a_{i+1/2,j-1/2} - \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i+1/2,j-1/2} \\ & - \frac{3}{8\Delta y^2} a_{i+1/2,j-1/2} + \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i+1/2,j-1/2} \\ & - \frac{3}{8\Delta x^2} a_{i-1/2,j-1/2} - \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i-1/2,j-1/2} \\ & - \frac{3}{8\Delta y^2} a_{i-1/2,j-1/2} - \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i-1/2,j-1/2} \end{aligned} \right) b_{i,j} \\
& + \left(\begin{aligned} & \frac{3}{8\Delta x^2} a_{i-1/2,j+1/2} - \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i-1/2,j+1/2} \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8\Delta y^2} a_{i-1/2,j+1/2} - \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i-1/2,j+1/2} \\
& + \frac{3}{8\Delta x^2} a_{i-1/2,j-1/2} + \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i-1/2,j-1/2} \\
& - \frac{1}{8\Delta y^2} a_{i-1/2,j-1/2} - \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i-1/2,j-1/2} \Big) b_{i-1,j} \\
& + \left(\frac{1}{8\Delta x^2} a_{i+1/2,j-1/2} + \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i+1/2,j-1/2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{8\Delta y^2} a_{i+1/2,j-1/2} - \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i+1/2,j-1/2} \right) b_{i+1,j-1} \\
& + \left(-\frac{1}{8\Delta x^2} a_{i+1/2,j-1/2} - \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i+1/2,j-1/2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{8\Delta y^2} a_{i+1/2,j-1/2} - \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i+1/2,j-1/2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8\Delta x^2} a_{i-1/2,j-1/2} - \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i-1/2,j-1/2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{8\Delta y^2} a_{i-1/2,j-1/2} + \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i-1/2,j-1/2} \right) b_{i,j-1} \\
& + \left(\frac{1}{8\Delta x^2} a_{i-1/2,j-1/2} + \frac{\Delta y}{16\Delta x^2} a_{y,i-1/2,j-1/2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{8\Delta y^2} a_{i-1/2,j-1/2} + \frac{\Delta x}{16\Delta y^2} a_{x,i-1/2,j-1/2} \right) b_{i-1,j-1}.
\end{aligned}$$

Demzufolge wird der Laplace-Operator durch den aus [Sül91] bekannten 9-Punkte-Stern diskretisiert

$$\begin{aligned}
(\Delta\varphi)_{i,j} = & \frac{1}{\Delta x^2} \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{8} \varphi_{i-1,j+1} & -\frac{1}{4} \varphi_{i,j+1} & +\frac{1}{8} \varphi_{i+1,j+1} \\ \frac{3}{4} \varphi_{i-1,j} & -\frac{3}{2} \varphi_{i,j} & +\frac{3}{4} \varphi_{i+1,j} \\ \frac{1}{8} \varphi_{i-1,j-1} & -\frac{1}{4} \varphi_{i,j-1} & +\frac{1}{8} \varphi_{i+1,j-1} \end{array} \right) \\
& + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{8} \varphi_{i-1,j+1} & +\frac{3}{4} \varphi_{i,j+1} & +\frac{1}{8} \varphi_{i+1,j+1} \\ -\frac{1}{4} \varphi_{i-1,j} & -\frac{3}{2} \varphi_{i,j} & -\frac{1}{4} \varphi_{i+1,j} \\ \frac{1}{8} \varphi_{i-1,j-1} & +\frac{3}{4} \varphi_{i,j-1} & +\frac{1}{8} \varphi_{i+1,j-1} \end{array} \right),
\end{aligned}$$

der sich mit $\Delta x = \Delta y$ zu

$$\begin{aligned}
(\Delta\varphi)_{i,j} = & \frac{1}{\Delta x^2} \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{4} \varphi_{i-1,j+1} & +\frac{1}{2} \varphi_{i,j+1} & +\frac{1}{4} \varphi_{i+1,j+1} \\ \frac{1}{2} \varphi_{i-1,j} & -3 \varphi_{i,j} & +\frac{1}{2} \varphi_{i+1,j} \\ \frac{1}{4} \varphi_{i-1,j-1} & +\frac{1}{2} \varphi_{i,j-1} & +\frac{1}{4} \varphi_{i+1,j-1} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

vereinfacht, vergleiche [VK09].

A.3 Absolute Fehler und experimentelle Konvergenzordnungen für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels

Tabelle A.1: L^2 - und L^∞ -Fehler in H sowie in (Hv_1) für verschiedene Raugitter mit den jeweiligen experimentellen Konvergenzordnungen zum Zeitpunkt $t = 1$ für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels im Fall $\text{Fr} = \varepsilon$ und $\text{Ro} = 1$ mit $\varepsilon = 0.1$, vergleiche Abbildung 6.2.

Raugitter	L^2 -Fehler in H	$EOC_{L^2}^H$	L^∞ -Fehler in H	$EOC_{L^\infty}^H$
32×32	5.5571e-07		1.9232e-06	
64×64	1.3273e-07	2.0659	5.1023e-07	1.9143
128×128	3.5196e-08	1.9150	1.2847e-07	1.9897
256×256	8.9516e-09	1.9752	3.4677e-08	1.8894
512×512	2.2394e-09	1.9991	8.7445e-09	1.9875
1024×1024	5.6866e-10	1.9775	2.1901e-09	1.9974
Raugitter	L^2 -Fehler in (Hv_1)	$EOC_{L^2}^{(Hv_1)}$	L^∞ -Fehler in (Hv_1)	$EOC_{L^\infty}^{(Hv_1)}$
32×32	1.4632e-04		6.1980e-04	
64×64	3.8474e-05	1.9271	1.7792e-04	1.8006
128×128	9.4875e-06	2.0198	4.4914e-05	1.9860
256×256	2.3307e-06	2.0253	1.1422e-05	1.9754
512×512	5.7725e-07	2.0135	2.8293e-06	2.0133
1024×1024	1.4366e-07	2.0065	7.0142e-07	2.0121

Tabelle A.2: L^2 - und L^∞ -Fehler in H sowie in (Hv_1) für verschiedene Rauggitter mit den jeweiligen experimentellen Konvergenzordnungen zum Zeitpunkt $t = 1$ für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels im Fall $Fr = \varepsilon$ und $Ro = \sqrt{\varepsilon}$ mit $\varepsilon = 0.1$, vergleiche Abbildung 6.3.

Rauggitter	L^2 -Fehler in H	$EOC_{L^2}^H$	L^∞ -Fehler in H	$EOC_{L^\infty}^H$
32×32	8.5572e-07		3.4183e-06	
64×64	3.9077e-07	1.1308	1.2806e-06	1.4165
128×128	1.1784e-07	1.7295	3.4538e-07	1.8905
256×256	3.1119e-08	1.9210	8.7554e-08	1.9799
512×512	7.8064e-09	1.9951	2.1126e-08	2.0511
1024×1024	1.9010e-09	2.0379	4.8759e-09	2.1153
Rauggitter	L^2 -Fehler in (Hv_1)	$EOC_{L^2}^{(Hv_1)}$	L^∞ -Fehler in (Hv_1)	$EOC_{L^\infty}^{(Hv_1)}$
32×32	1.5482e-04		7.0522e-04	
64×64	3.8402e-05	2.0113	1.8564e-04	1.9256
128×128	9.4427e-06	2.0239	4.6962e-05	1.9829
256×256	2.3254e-06	2.0217	1.1672e-05	2.0085
512×512	5.7708e-07	2.0106	2.8679e-06	2.0250
1024×1024	1.4370e-07	2.0057	7.0744e-07	2.0193

Tabelle A.3: L^2 - und L^∞ -Fehler in H sowie in (Hv_1) für verschiedene Rauggitter mit den jeweiligen experimentellen Konvergenzordnungen zum Zeitpunkt $t = 1$ für die exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels im Fall $Fr = \varepsilon$ und $Ro = \varepsilon$ mit $\varepsilon = 0.1$, vergleiche Abbildung 6.4.

Rauggitter	L^2 -Fehler in H	$EOC_{L^2}^H$	L^∞ -Fehler in H	$EOC_{L^\infty}^H$
32×32	1.6515e-06		5.1537e-06	
64×64	8.2244e-07	1.0058	2.8015e-06	0.8794
128×128	3.2724e-07	1.3296	9.8141e-07	1.5133
256×256	9.5667e-08	1.7743	2.7670e-07	1.8265
512×512	2.5192e-08	1.9251	7.1009e-08	1.9622
1024×1024	6.3655e-09	1.9846	1.7549e-08	2.0166
Rauggitter	L^2 -Fehler in (Hv_1)	$EOC_{L^2}^{(Hv_1)}$	L^∞ -Fehler in (Hv_1)	$EOC_{L^\infty}^{(Hv_1)}$
32×32	4.5277e-04		1.7756e-03	
64×64	7.3967e-05	2.6138	3.1665e-04	2.4874
128×128	1.2789e-05	2.5320	6.5926e-05	2.2639
256×256	2.5873e-06	2.3053	1.3866e-05	2.2493
512×512	5.9661e-07	2.1166	3.1656e-06	2.1310
1024×1024	1.4545e-07	2.0363	7.4371e-07	2.0897

A.4 Weitere Abbildungen für die relative potentielle Vortizität im Fall der Wechselwirkung eines Wirbelpaares

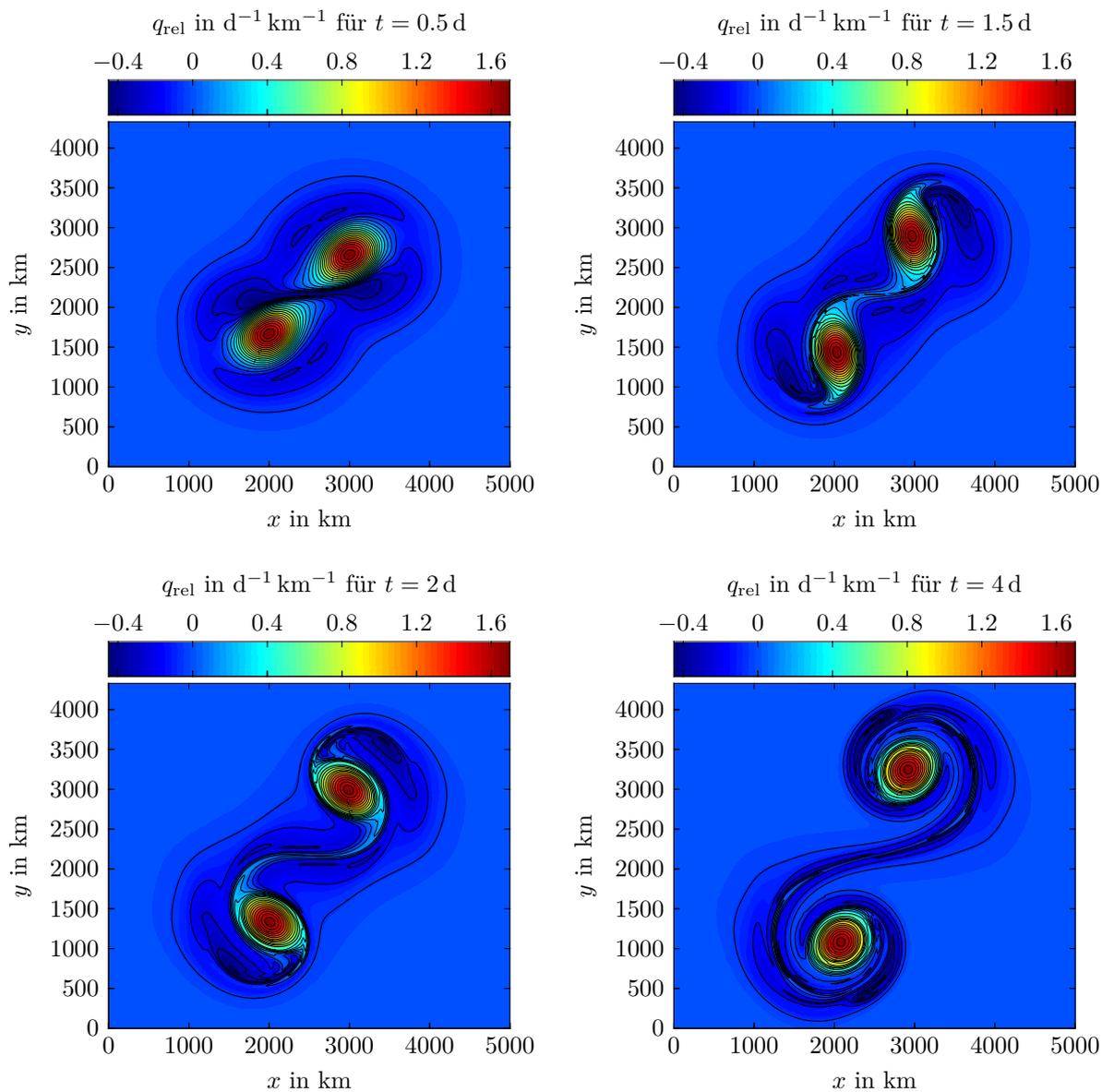


Abbildung A.1: Relative potentielle Vortizität q_{rel} (Höhenlinien jeweils zwischen $-0.45 \text{ d}^{-1} \text{km}^{-1}$ und $1.7 \text{ d}^{-1} \text{km}^{-1}$ im Abstand von $0.1 \text{ d}^{-1} \text{km}^{-1}$) zu den Zeitpunkten 0.5 (oben links), 1.5 (oben rechts), 2 (unten links) und 4 Tagen (unten rechts) im Fall der Wechselwirkung eines Wirbelpaares.

Literaturverzeichnis

- [Asa87] Asano, K. „On the incompressible limit of the compressible Euler equation“. In: *Japan Journal of Applied Mathematics* 4.3 (1987), S. 455–488.
- [ACU15] Audusse, E., Chalons, C. und Ung, P. „A simple well-balanced and positive numerical scheme for the shallow-water system“. In: *Communications in Mathematical Sciences* 13.5 (2015), S. 1317–1332.
- [AKNV11] Audusse, E., Klein, R., Nguyen, D. D. und Vater, S. „Preservation of the Discrete Geostrophic Equilibrium in Shallow Water Flows“. In: *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*. Springer, 2011, S. 59–67.
- [Bac14] Bachmann, T. „Asymptotische Entwicklungen bei rotierenden Flachwassergleichungen“. Masterarbeit. Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, 2014.
- [Bal65] Ball, F. K. „The effect of rotation on the simpler modes of motion of a liquid in an elliptic paraboloid“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 22.3 (1965), S. 529–545.
- [BJ89] Barth, T. und Jespersen, D. „The design and application of upwind schemes on unstructured meshes“. In: *27th Aerospace Sciences Meeting*. 1989, S. 366.
- [BG17] Bauer, W. und Gay-Balmaz, F. „Towards a geometric variational discretization of compressible fluids: the rotating shallow water equations“. In: *arXiv preprint arXiv:1711.10617* (2017).
- [BALN14] Bispen, G., Arun, K. R., Lukáčová-Medvid'ová, M. und Noelle, S. „IMEX large time step finite volume methods for low Froude number shallow water flows“. In: *Communications in Computational Physics* 16.2 (2014), S. 307–347.
- [Cha48] Charney, J. G. „On the scale of atmospheric motions“. In: *Geofysiske Publikasjoner* 17.2 (1948).
- [Cho68] Chorin, A. J. „Numerical solution of the Navier-Stokes equations“. In: *Mathematics of Computation* 22.104 (1968), S. 745–762.
- [CA89] Cotton, W. R. und Anthes, R. *Cloud and Storm Dynamics*. Academic Press, 1989.
- [CFL28] Courant, R., Friedrichs, K. und Lewy, H. „Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik“. In: *Mathematische Annalen* 100.1 (1928), S. 32–74.
- [Del10] Dellacherie, S. „Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number“. In: *Journal of Computational Physics* 229.4 (2010), S. 978–1016.

- [Ein88] Einfeldt, B. „On Godunov-type methods for gas dynamics“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 25.2 (1988), S. 294–318.
- [EM96] Embid, P.F. und Majda, A.J. „Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with arbitrary potential vorticity“. In: *Communications in Partial Differential Equations* 21.3-4 (1996), S. 619–658.
- [EM98] Embid, P.F. und Majda, A.J. „Low Froude number limiting dynamics for stably stratified flow with small or finite Rossby numbers“. In: *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 87.1-2 (1998), S. 1–50.
- [Eva10] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [FT95] Fraccarollo, L. und Toro, E.F. „Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems“. In: *Journal of Hydraulic Research* 33.6 (1995), S. 843–864.
- [GHK⁺09] Giorgetta, M., Hundertmark, T., Korn, P., Reich, S. und Restelli, M. „Conservative space and time regularizations for the ICON model“. In: *Reports on Earth System Science* 67 (2009), S. 1–32.
- [GS98] Gottlieb, S. und Shu, C.-W. „Total variation diminishing Runge-Kutta schemes“. In: *Mathematics of Computation* 67.221 (1998), S. 73–85.
- [GDN97] Griebel, M., Dornseifer, T. und Neunhoffer, T. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Bd. 3. Siam, 1997.
- [HW96] Hairer, E. und Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems Second Revised Edition with 137 Figures*. Bd. 14. Springer-Verlag, 1996.
- [Hin91] Hinch, E.J. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991.
- [Hin59] Hinze O, J. *Turbulence*. McGraw-Hill, 1959.
- [Hof00] Hoffmann, L. „Ein zeitlich selbstadaptives numerisches Verfahren zur Berechnung von Strömungen aller Mach-Zahlen basierend auf Mehrskalenasymptotik und diskreter Datenanalyse“. Dissertation. Universität Hamburg, 2000.
- [Hos75] Hoskins, B.J. „The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic equations“. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 32.2 (1975), S. 233–242.
- [Ili92] Il’in, A.M. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*. American Mathematical Soc., 1992.
- [Jin99] Jin, S. „Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 21.2 (1999), S. 441–454.
- [KC13] Kevorkian, J. und Cole, J.D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Bd. 34. Springer Science & Business Media, 2013.

-
- [KM81] Klainerman, S. und Majda, A. „Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids“. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 34.4 (1981), S. 481–524.
- [KM82] Klainerman, S. und Majda, A. „Compressible and incompressible fluids“. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 35.5 (1982), S. 629–651.
- [Kle95] Klein, R. „Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics I: One-dimensional flow“. In: *Journal of Computational Physics* 121.2 (1995), S. 213–237.
- [KBS⁺01] Klein, R., Botta, N., Schneider, T., Munz, C. D., Roller, S., Meister, A., Hoffmann, L. und Sonar, T. „Asymptotic adaptive methods for multi-scale problems in fluid mechanics“. In: *Journal of Engineering Mathematics* 39 (2001), S. 261–343.
- [Lee79] van Leer, B. „Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method“. In: *Journal of Computational Physics* 32.1 (1979), S. 101–136.
- [Lee84] van Leer, B. „On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe“. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 5.1 (1984), S. 1–20.
- [LeV02] LeVeque, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Bd. 31. Cambridge University Press, 2002.
- [Maj84] Majda, A. *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*. Bd. 53. Springer Science & Business Media, 1984.
- [Maj03] Majda, A. J. *Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean*. Bd. 9. American Mathematical Soc., 2003.
- [Maj07a] Majda, A. J. „New multiscale models and self-similarity in tropical convection“. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 64.4 (2007), S. 1393–1404.
- [Maj07b] Majda, A. J. „Multiscale models with moisture and systematic strategies for superparameterization“. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 64.7 (2007), S. 2726–2734.
- [ME98] Majda, A. J. und Embid, P. F. „Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with unbalanced initial data“. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 11.3-4 (1998), S. 155–169.
- [Mei99] Meister, A. „Asymptotic single and multiple scale expansions in the low Mach number limit“. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 60.1 (1999), S. 256–271.
- [Mei01] Meister, A. „Analyse und Anwendung Asymptotik-basierter numerischer Verfahren zur Simulation reibungsbehafteter Strömungen in allen Mach-Zahlbereichen“. Habilitationsschrift. Universität Hamburg, 2001.

- [MRKG03] Munz, C. D., Roller, S., Klein, R. und Geratz, K. J. „The extension of incompressible flow solvers to the weakly compressible regime“. In: *Computers & Fluids* 32.2 (2003), S. 173–196.
- [NBA⁺14] Noelle, S., Bispen, G., Arun, K. R., Lukáčová-Medvid'ová, M. und Munz, C.-D. „A weakly asymptotic preserving low Mach number scheme for the Euler equations of gas dynamics“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 36.6 (2014), B989–B1024.
- [Ped87] Pedlosky, J. *Geophysical Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 1987.
- [PY15] Plant, R. S. und Yano, J.-I., Hrsg. *Parameterization of Atmospheric Convection: (In 2 Volumes) Volume 1: Theoretical Background and Formulation, Volume 2: Current Issues and New Theories*. Bd. 1-2. World Scientific, 2015.
- [RZB01] Reznik, G. M., Zeitlin, V. und Ben Jelloul, M. „Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part 1. Rotating shallow-water model“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 445 (2001), S. 93–120.
- [SBGK99] Schneider, T., Botta, N., Geratz, K. J. und Klein, R. „Extension of finite volume compressible flow solvers to multi-dimensional, variable density zero Mach number flows“. In: *Journal of Computational Physics* 155.2 (1999), S. 248–286.
- [Sch78] Schneider, W. *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*. Springer, 1978.
- [Sch94] Schochet, S. „Fast singular limits of hyperbolic PDEs“. In: *Journal of Differential Equations* 114.2 (1994), S. 476–512.
- [Str68] Strang, G. „On the construction and comparison of difference schemes“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 5.3 (1968), S. 506–517.
- [Sül91] Süli, E. „Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on non-uniform meshes“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28.5 (1991), S. 1419–1430.
- [Swe84] Sweby, P. K. „High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 21.5 (1984), S. 995–1011.
- [Tem69] Temam, R. „Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (II)“. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 33.5 (1969), S. 377–385.
- [Tem77] Temam, R. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. Studies in Mathematics and Its Applications. 2. North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.
- [Tha81] Thacker, W. C. „Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 107 (1981), S. 499–508.
- [TTM08] Thomas, L. N., Tandon, A. und Mahadevan, A. „Submesoscale processes and dynamics“. In: *Ocean modeling in an Eddying Regime* (2008), S. 17–38.

-
- [Tor09] Toro, E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [TG07] Toro, E. F. und Garcia-Navarro, P. „Godunov-type methods for free-surface shallow flows: A review“. In: *Journal of Hydraulic Research* 45.6 (2007), S. 736–751.
- [TSS94] Toro, E. F., Spruce, M. und Speares, W. „Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver“. In: *Shock Waves* 4.1 (1994), S. 25–34.
- [TF04] Torrilhon, M. und Fey, M. „Constraint-preserving upwind methods for multidimensional advection equations“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42.4 (2004), S. 1694–1728.
- [Uka86] Ukai, S. „The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation“. In: *Journal of Mathematics of Kyoto University* 26.2 (1986), S. 323–331.
- [Vat05] Vater, S. „A new projection method for the zero froude number shallow water equations“. Diplomarbeit. Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin, 2005.
- [Vat13] Vater, S. „A multigrid-based multiscale numerical scheme for shallow water flows at low Froude number“. Dissertation. Freie Universität Berlin, 2013.
- [VK09] Vater, S. und Klein, R. „Stability of a Cartesian grid projection method for zero Froude number shallow water flows“. In: *Numerische Mathematik* 113.1 (2009), S. 123–161.
- [Vor92] van der Vorst, H. A. „Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems“. In: *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing* 13.2 (1992), S. 631–644.
- [Yan92] Yano, J.-I. „Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 243 (1992), S. 103–131.
- [Yan12] Yano, J.-I. *What is Scale Separation?: A Theoretical Reflection*. COST Document, ES0905. 2012.

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Theorie und Numerik von Mehrskalenmethoden für die entdimensionalisierten rotierenden Flachwassergleichungen.

Im theoretischen Teil der Arbeit werden für diese Gleichungen in angepasster einfacher Form asymptotische Einskalen- und Mehrskalenentwicklungen betrachtet. Als Erstes wird durch die Wahl der dimensionslosen Parameter ein Gleichungssystem bezüglich der sogenannten Zwischenvariablen hergeleitet, das die Gleichungen der Mesoskala und der Submesoskala in Abhängigkeit eines zusätzlichen Parameters wiedergibt, und mit Einskalenentwicklungen der entsprechende singuläre Grenzwert untersucht. Hierfür ist es möglich, die zu den bestehenden Existenz-, Eindeutigkeits- und Konvergenzaussagen bezüglich der Mesoskala entsprechenden Aussagen bezüglich der Zwischenvariablen und Submesoskala zu beweisen.

Als Zweites wird auf eine Verallgemeinerung dieser Gleichungen eine Zweiskalenentwicklung in Raum und Zeit angewendet und das resultierende asymptotische System mithilfe der jeweiligen Mittelungsoperatoren und Wachstumsbedingungen bezüglich der Submesoskala analysiert. Mit diesem Vorgehen wird unter anderem gezeigt, dass das räumlich und zeitlich gemittelte quasi-geostrophische Gleichgewicht im Gegensatz zur Einskalenentwicklung um einen zusätzlichen Term in der Gleichung der potentiellen Vortizität verschoben ist.

Im numerischen Teil der Arbeit wird basierend auf den Ergebnissen der asymptotischen Analyse ein vollständig-impliziter Algorithmus zweiter Ordnung in Raum und Zeit für die rotierenden Flachwassergleichungen in Erhaltungsform bei hinreichend kleinen Froude-Zahlen sowie beliebigen Rossby-Zahlen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$ entwickelt.

Anschließend wird die Güte des entwickelten Algorithmus an vier numerischen Testbeispielen überprüft. Für das erste Testbeispiel, eine exakte, stationäre Lösung eines isolierten Wirbels, wird die experimentelle Konvergenzordnung ermittelt und gezeigt, dass diese in allen drei betrachteten Fällen $Fr = \varepsilon$ und $Ro = 1$, $Fr = \varepsilon$ und $Ro = \sqrt{\varepsilon}$ sowie $Fr = \varepsilon$ und $Ro = \varepsilon$ jeweils für $\varepsilon \ll 1$ bei jeweils hinreichend kleinen Gitterweiten mit der erwarteten Ordnung zwei übereinstimmt. Weitere Testbeispiele werden durch den See in Ruhe, dessen numerische Erhaltung gezeigt wird, und zwei nichtlinearen Dynamiken, die im Wesentlichen korrekt wiedergegeben werden, beschrieben.

Summary

This thesis deals with the theory and numerics of multiscale methods for the dimensionless rotating shallow water equations.

In the theoretical part of the thesis, asymptotic single and multiple scale expansions are considered for these equations in customised primitive form. First, by choosing the dimensionless parameters, a system of equations with respect to the so-called intermediate variable is derived. Depending on an additional parameter, this system reproduces the equations of the mesoscale and the submesoscale. In addition, the corresponding singular limit of a single scale expansion is examined. For this purpose, it is possible to prove the statements concerning the intermediate variable and submesoscale which correspond to the existing statements of existence, uniqueness and convergence concerning the mesoscale.

Second, on a generalisation of these equations, a two-scale expansion in space and time is applied. The resulting asymptotic system is then analysed by means of the respective averaging operators and growth conditions with respect to the submesoscale. Using this procedure, one can show that the spatially and temporally averaged quasi-geostrophic equilibrium, in contrast to the single-scale expansion, is shifted by an additional term in the potential vorticity equation. In the numerical part of the thesis, based on the results of the asymptotic analysis, a complete-implicit algorithm, which is of second-order in space and time, is developed for the rotating shallow water equations in conservation form with sufficiently small Froude numbers and arbitrary Rossby numbers of order $\mathcal{O}(1)$ and $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Subsequently, the quality of the developed algorithm is tested on four numerical test examples. For the first test example, an exact, steady solution of an isolated vortex, the experimental order of convergence is determined. It is possible to show that in the three cases considered, $\text{Fr} = \varepsilon$ and $\text{Ro} = 1$, $\text{Fr} = \varepsilon$ and $\text{Ro} = \sqrt{\varepsilon}$ such as $\text{Fr} = \varepsilon$ and $\text{Ro} = \varepsilon$ each for $\varepsilon \ll 1$, for sufficiently small mesh sizes the respective order of convergence corresponds to the expected order two. Other test examples are described by the lake at rest, whose numerical preservation is shown, and two nonlinear dynamics, which are essentially reproduced correctly.

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertationsschrift selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Hamburg, den

Unterschrift