

**Eine axiomatische Charakterisierung räumlicher  
Granularität: formale Grundlagen  
detailgrad-abhängiger Objekt- und  
Raumrepräsentation**

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
am Fachbereich Informatik der Universität Hamburg

vorgelegt von

Hedda R. Schmidtke

Hamburg 2004

Genehmigt vom Fachbereich Informatik der Universität Hamburg  
auf Antrag von Prof. Dr. Christopher Habel,  
Prof. Dr. Christian Freksa  
und Prof. Dr. Leonie Dreschler-Fischer

Hamburg, den 6.12.2004

Prof. Dr.-Ing. H. Siegfried Stiehl  
Dekan

## Zusammenfassung

Ausgangshypothese der vorliegenden Arbeit ist, dass räumliche Granularität vom Konzept der Ausdehnung in einem Kontext wesentlich bestimmt wird. Diese Hypothese, für die sowohl Ergebnisse kognitionswissenschaftlicher Untersuchungen wie auch Ergebnisse der Forschung zu geographischen Informationssystemen sprechen, wird formalisiert und genau untersucht. Im ersten Teil der Arbeit wird eine formale Charakterisierung von Granularität und räumlicher Ausdehnung erarbeitet, die auf besonderen ausgedehnten Entitäten, den Orten basiert. Hierzu müssen sowohl die mathematischen Grundlagen von Ausdehnung und Distanz als auch die – für die Gewährleistung kognitiver Adäquatheit wichtigen – mathematischen Grundlagen vager Klassifikation beachtet werden. Im zweiten Teil der Arbeit wird ausgeführt, dass die im ersten Teil vorgestellte Konzeption tatsächlich viele der von der Kognitionswissenschaft geforderten Eigenschaften räumlicher Granularität aufweist.

Die im zweiten Teil aufgestellten Definitionen können als formale Spezifikationen für Anwendungen im Bereich intelligenter Systeme aufgefasst werden. Die Ergebnisse der Untersuchung sind durch die Verwendung der axiomatischen Methode formal exakt und nachprüfbar. Die Berücksichtigung verschiedener möglicher Modelle erlaubt aber genügend Offenheit, um für eine bestimmte Anwendung spezialisierte Konzepte ableiten zu können.

Der Ansatz modelliert verschiedene vage, kontextabhängige und sogar zu Paradoxa führende Konzepte des Allgemeinverständes in klarer und formal exakter Form, ohne ihre Vagheit und Kontextabhängigkeit wesentlich zu vereinfachen. Der Begriff des räumlichen Kontextes kann mit Hilfe der charakterisierten Konzepte modelliert werden: Der formale, geometrische Begriff des Ortes, der in dieser Arbeit vorgestellt wurde, kann als Repräsentant für räumliche Kontexte verwendet werden. Es kann auch erklärt werden, wie sich Granularität und Vagheit durch den zentralen Begriff der in einem Kontext irrelevanten Ausdehnung in Verbindung bringen lassen. Mehrere der betrachteten Phänomene können auf bestimmte in einem Kontext irrelevante Ausdehnungen zurückgeführt werden: für das Phänomen der Dimensionalität im Kontext wird zwischen den relevanten und den irrelevanten Ausdehnungen eines Objektes im Kontext unterschieden; für das Phänomen vager Regionen wird die irrelevante Ausdehnung einzelner Konstituenten von der relevanten Ausdehnung des konstituierten Objektes unterschieden.

In der Untersuchung werden verschiedene nicht-transitive Ununterscheidbarkeitsrelationen betrachtet. Nicht-transitive Ununterscheidbarkeit ist ein in der kognitionspsychologischen Forschung experimentell (für einen Überblick s. Palmer [81]) und formal (Suppes und Zinnes [105]) gut untersuchtes Phänomen, dass aber im Bereich der Forschung zum qualitativen räumlichen Schließen bislang wenig beachtet wurde (Cohn und Hazarika [18]).

## Abstract

Starting point of the dissertation is the hypothesis that spatial granularity is influenced by the concept of extension in a context. This hypothesis, which is supported by results from research on both spatial cognition and geographic information systems, is formally specified and analysed. In the first part of the dissertation, a formal characterisation of granularity and spatial extension is introduced, which is based on certain extended geometric entities, called places. The mathematical foundations of extension and distance as well as the mathematical foundations of vague classification are included in the discussion. The concept of vague classification is used to ensure cognitive adequacy of the derived concept of spatial granularity. In the second part, the derived concepts are shown to have many of the properties of spatial granularity that have been found in cognitive science.

The definitions proposed in the second part can be understood as specifications of applications in the area of research on intelligent systems. The results being derived using the axiomatic method are formally exact and verifiable. Nevertheless, the formalisation is open enough to allow different models, so that specialised concepts can be derived as needed for a given application.

The approach models several vague and context-dependent notions of common-sense and even especially unwieldy notions leading to paradox in a clear and formally exact manner without sacrificing vagueness and context-dependency. The notion of spatial context can be modelled using the characterised concepts: the formal, geometric notion of place, which is introduced in this dissertation, can be used to represent spatial contexts. In addition, it can be explained how granularity and vagueness can be linked by the central notion of irrelevant extension in a context. Several of the analysed phenomena of spatial granularity can be put down to a certain irrelevant extension in a context: for the phenomenon of dimensionality in a context, the relevant and irrelevant extensions of an object in a context are examined; for the phenomenon of vague regions, the irrelevant extension of constituents of an object is studied in comparison to the relevant extension of the constituted object.

The analysis uses several non-transitive relations of indistinguishability. Non-transitive indistinguishability is a phenomenon, which is well examined in cognitive psychology both experimentally and formally, but has not been covered by research on qualitative spatial reasoning.

## **Danksagung**

Bei der Anfertigung meiner Dissertation habe ich von Christopher Habel wertvolle Anregungen erhalten, für die ich an dieser Stelle meinen Dank ausspreche. Außerdem danke ich Carola Eschenbach und den GutachterInnen Leonie Dreschler-Fischer und Christian Freksa.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Repräsentationen . . . . .	3
1.1.1. Raumrepräsentationen in der Forschung zur natürlichen Kognition	5
1.1.2. Raumrepräsentationen in der Rauminformationstheorie . . . . .	8
1.2. Granularität . . . . .	10
1.2.1. Ununterscheidbarkeit und Vagheit . . . . .	12
1.2.2. Granulatsgröße, Kontextbereich und Dimensionalität . . . . .	16
1.3. Aufbau der Arbeit . . . . .	21
<b>I. Granularität und Raum</b>	<b>23</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>25</b>
2.1. Geometrische Basiskonzepte . . . . .	27
2.2. Inzidenz und Anordnung . . . . .	29
2.3. Regionen . . . . .	31
<b>3. Granularität und Ausdehnung</b>	<b>37</b>
3.1. Verwandte Ansätze zu räumlicher und zeitlicher Granularität . . . . .	37
3.2. Ausdehnung . . . . .	40
3.3. Granularitäten . . . . .	43
3.3.1. Ausdehnung und Granularität . . . . .	44
3.3.2. Halbordnung und Ununterscheidbarkeit . . . . .	46
3.3.3. Weitere Möglichkeiten der Charakterisierung . . . . .	47
3.4. Exkurs: Temporale Granularität . . . . .	48
3.4.1. Beispiel . . . . .	49
3.4.2. Granularitätsebenenwechsel . . . . .	51
3.4.3. Bezug zu verwandten Ansätzen . . . . .	53
<b>4. Räumliche Granularität</b>	<b>55</b>
4.1. Geometrische Charakterisierung von Orten . . . . .	58
4.2. Exkurs: Beziehung zur Distanz zwischen Punkten . . . . .	65
4.3. Diskussion . . . . .	72

<b>II. Lokalisation und Objekt</b>	<b>75</b>
<b>5. Ort und Objekt</b>	<b>77</b>
5.1. Anmerkungen zum Vorgehen . . . . .	78
5.2. Aspekte der Lokation: Position, Form, Lokation der substantiellen Teile .	81
5.3. Räumlicher Kontext und Granularitätsebenenwechsel . . . . .	86
5.4. Schlussfolgerungen . . . . .	91
<b>6. Äußere Struktur von Objekten: Position &amp; Form</b>	<b>95</b>
6.1. Ausdehnungsspektrum und Dimensionalität im Kontext . . . . .	95
6.2. Orte als räumliche Kontexte . . . . .	104
6.3. Schlussfolgerungen . . . . .	109
<b>7. Innere Struktur von Objekten: Substanz und Form</b>	<b>113</b>
7.1. Konstituenten . . . . .	114
7.2. Die granulare Kernregion . . . . .	117
7.3. Veränderung und Identität . . . . .	121
7.4. Aggregationen: Beispiel Wald . . . . .	124
7.5. Schlussfolgerung . . . . .	130
<b>8. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>133</b>
<b>Anhang</b>	<b>137</b>
<b>A. Anwendungen</b>	<b>139</b>
A.1. Schließen über Granularitäten . . . . .	139
A.2. Berechnung des lokalen granularen Kerns . . . . .	139



# 1. Einleitung

Die Repräsentation räumlicher Objekte ist für einen breiten Bereich wissenschaftlicher Forschungsfelder relevant. Im interdisziplinären Bereich der Raumkognition werden Raumrepräsentationen von Menschen, Tieren und künstlichen Navigatoren aus kognitionswissenschaftlicher Perspektive untersucht. Psychologische, neurowissenschaftliche und linguistische Untersuchungen geben Einblicke in die Navigationsfähigkeiten des Menschen und lassen Rückschlüsse über die Struktur der Verarbeitung von Wissen über den Raum und Objekte im Raum zu. Für die Forschung zu intelligenten Systemen weisen diese Untersuchungen einen möglichen Weg zu effizienteren Verarbeitungsmechanismen. Umgekehrt bieten die informatischen Methodiken der formalen Spezifikation, Implementation und Komplexitätsanalyse weitere Möglichkeiten, die Tauglichkeit von Verarbeitungsmodellen zu prüfen. Die Repräsentation von Wissen über räumliche Beziehungen ist ein zentrales Thema der Wissensrepräsentation. Die Repräsentation von Raum und Objekten im Raum ist aber auch für Bildverarbeitung, Computergrafik und die Forschung zu räumlichen Datenbanken wichtig. Repräsentationen von Raum, räumlichen Objekten und räumlichen Beziehungen haben zudem eine unterstützende Funktion für die Naturwissenschaft allgemein. Ein breites Inventar verfügbarer räumlicher Repräsentationen ist für rechnergestützte Analysen nützlich. Besonders die Möglichkeit, verschiedene Repräsentationen desselben Objekts oder derselben räumlichen Relationen in konsistenter Weise zu integrieren, eröffnet neue Perspektiven.

Repräsentation bedeutet dabei stets auch Vereinfachung. Eine adäquate, d.h. in einer Aufgabenstellung effektive und effiziente, Repräsentation enthält so viele Details wie nötig und so wenige wie möglich. Überflüssige Details müssen ignoriert werden können. Anwendungen, die eine Zoom-Operation über einen sehr großen Maßstabsbereich unterstützen, wie z.B. geographische Informationssysteme (GIS), profitieren besonders von einer Möglichkeit, den *Detailgrad* von Repräsentation und Abbildung steuern zu können. Die Generierung gröberer aus feineren Repräsentationen ist dabei in der Geographie unter dem Terminus der kartographischen Generalisierung bekannt. Eine Repräsentation eines Objektes bei feinerem Detailgrad ist eine Repräsentation, die mehr Details enthält aber dasselbe Objekt darstellt. Eine räumliche Repräsentation eines Autobahnkreuzes als Schnittregion der Regionen oder Linien, die die Autobahnen darstellen, hat einen gröberen Detailgrad; eine Repräsentation, in der auch die Auf- und Abfahrten als zusätzliche Details enthalten sind, hat einen feineren Detailgrad (s. Timpf und Kuhn [108]).

Die Termini Detailgrad (*level of detail*), Granularität (*granularity*) oder Granularitätsebene (*level of granularity*) und Auflösung (*resolution*) werden in Bezug auf GIS auch synonym verwendet (vgl. z.B. Stell und Worboys [104]). Im Bereich der Wissensrepräsentation hingegen ist Granularität in der Charakterisierung nach Hobbs ein Parameter

## 1. Einleitung

des Repräsentationsprozesses<sup>1</sup>, mit dessen Hilfe wir in einem Aufgabenkontext Relevantes von Irrelevantem trennen können [53, S. 542]: „We look at the world under various grain sizes and abstract from it only those things that serve our present interests.“

Ich möchte daher im folgenden unterscheiden zwischen dem Detailgrad einer Repräsentation, als ihrer Einordnung in einer Hierarchie gröberer und feinerer Repräsentationen, und der Granularität als formalem Kontext-Parameter, den eine Anwendung oder der Nutzer so wählt, dass sich eine gegebene Aufgabe möglichst einfach bearbeiten lässt. Abhängig von der räumlichen Granularität kann eine detailliertere oder weniger detaillierte Repräsentation eines im aktuellen Kontext enthaltenen Objektes ausgewählt werden. Es ist mit dieser Unterscheidung z.B. möglich, zwischen der vom Nutzer gewählten, intendierten Granularität und den tatsächlich unterstützten Granularitäten, d.h. den Granularitäten, für die eine Repräsentation mit geeignetem Detailgrad bereitliegt, zu differenzieren.

Ich möchte zudem unterscheiden zwischen Detailgraden und *Granularitätsschichten* der Repräsentation: Repräsentationen desselben Objektes, die verschiedene räumliche Aspekte abbilden, haben nicht nur unterschiedlichen Detailgrad, sondern befinden sich auch in verschiedenen Granularitätsschichten des Objektes. Durch größere Veränderung der Granularität kann sich nicht nur der Detailgrad, sondern auch der im Kontext relevante räumliche Aspekt ändern.

Die Form eines Objektes, seine Position im größeren räumlichen Kontext und seine innere räumliche Struktur geben jeweils u.a. solche granularitätsabhängigen räumlichen Aspekte des Objektes an. Der Teppich neben meinem Schreibtisch z.B. hat eine rechteckige Form, befindet sich in meinem Arbeitszimmer neben dem Schreibtisch und besteht aus Wollfäden, die zueinander wiederum in einer spezifischen räumlichen Relation stehen. Der Vergleich mit einer geometrischen Form (rechteckig), die grobe Angabe der Position (im Arbeitszimmer etc.) und die relative Lokalisierung der substantiellen Teile (Anordnung der Wollfäden im Webmuster) sind verschiedene räumliche Aspekte des Objektes, die an eine bestimmte Granularitätsschicht gebunden sind. Ein herausstehender Wollfaden z.B. ändert weder die Form des Objektes noch seine Position in relevanter Weise. Das Webmuster ist, wenn überhaupt, nur bei sehr feiner Granularität repräsentiert.<sup>2</sup> Für die Frage, wo sich der Teppich befindet, hingegen ist allein die grobe Position relevant, nicht, ob er gerollt oder ausgelegt ist, oder welches Webmuster er hat. Eine Repräsentation als Punkt z.B. kann hierfür ausreichend sein.

Die drei räumlichen Aspekte von Position, Form und innerer Struktur lassen sich aber in komplexeren Domänen nicht immer so problemlos voneinander trennen. Kontinuierliche Veränderungen der Form über einen längeren Zeitraum können zu einer langsamen Verschiebung der Position führen. Für die Forschung zu adäquaten Repräsentationen für geographische Informationssysteme z.B. gewinnen solche Fragestellungen zunehmend an Bedeutung (vgl. Goodchild [42]). Für die Wissensrepräsentation sind sie besonders deshalb von Interesse, weil sie das schwierige Problem der Vagheit berühren.

---

<sup>1</sup>Der Begriff der Repräsentation wird allgemein sowohl für den Repräsentationsprozess oder die Repräsentationsabbildung als auch für das Resultat verwendet (s. Abschnitt 1.1).

<sup>2</sup>Es könnte z.B. die Odometrie eines navigierenden Roboters auf sehr feiner Ebene beeinflussen.

Die vorliegende Arbeit ist eine Untersuchung der Fragen, welche formalen räumlichen Beziehungen zwischen den oben bestimmten Begriffen Detailgrad einer Repräsentation, Granularität als Kontext-Parameter und Granularitätsschichten eines Objektes bestehen, und wie sich die Interaktion zwischen einem granularen, räumlichen Kontext und in diesem Kontext adäquaten Repräsentationen eines Objektes formal erfassen lässt.

Die gewonnenen Konzeptionen sollen dabei möglichst mit dem Allgemeinverstand verträglich und kognitiv adäquat sein. Kognitive Adäquatheit bedeutet hier, dass die sich ergebenden Repräsentationen Resultate der Kognitionswissenschaft berücksichtigen. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels sollen die zentralen Begriffe der Fragestellung erläutert und in ihrem wissenschaftlichen Kontext dargestellt werden: Zunächst werden der Begriff der allgemeinen *Repräsentation* in der Repräsentationstheorie und der Begriff der *Raumrepräsentation* in der Kognitionswissenschaft erläutert. In diesen Rahmen wird der Begriff der *räumlichen Granularität* eingeordnet. Es wird ein Überblick über die Literatur zu in der Raumkognition untersuchten Phänomenen räumlicher Granularität und über verwandte Ansätze zu räumlicher und zeitlicher Granularität gegeben. Granularität wird als entscheidender Faktor verstanden, der ermöglicht zu bestimmen, welche Aspekte einer Repräsentation im Kontext relevant und welche irrelevant sind. Irrelevanz räumlicher Aspekte wird dabei mit Hilfe von *Ununterscheidbarkeit* als irrelevanter Unterschied modelliert. Behandelte Aspekte räumlicher Granularität in der Kognitionswissenschaft und Wissensrepräsentation, die in dieser Arbeit von einem formalen Standpunkt aus untersucht werden, sind:

- Auf gröberen Granularitätsschichten eines Objektes spiegelt sich irrelevante Ausdehnung in einer Reduktion der *Dimensionalität* der räumlichen Repräsentation: Eine Straße kann z.B. in Kontexten größerer Granularität durch einen eindimensionalen Streckenzug repräsentiert werden; die im Kontext irrelevante Breite der Straße wird nicht repräsentiert [53].
- Auf feineren Granularitätsschichten eines Objektes zeigt sich irrelevante interne Struktur darin, dass statt einer detaillierten Repräsentation aller Teile des Objektes nur der grobe Umriss repräsentiert ist.

## 1.1. Repräsentationen

In der allgemeinen Repräsentationstheorie nach Palmer [80] wird die Repräsentationssituation folgendermaßen charakterisiert: Ein zu repräsentierender Aspekt der Welt ( $\mathcal{W}_1$ ), das *Repräsentandum* wird über eine Repräsentationsabbildung  $\rho$  auf einen Aspekt der repräsentierenden Welt ( $\mathcal{W}_2$ ), die *Repräsentation* abgebildet:  $\rho : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ . Wichtig sind hierbei vor allem die Fragen, welche Aspekte modelliert werden und welche nicht, welche Strukturen Repräsentandum und Repräsentation zugrunde liegen und welche Eigenschaften die Repräsentationsabbildung  $\rho$  hat.  $\rho$  ist im Allgemeinen keine Isomorphie, denn es können Aspekte der realen Welt, die irrelevant für eine gegebene Problemstellung sind, z.B. vereinfacht werden oder gänzlich unrepräsentiert bleiben.

## 1. Einleitung

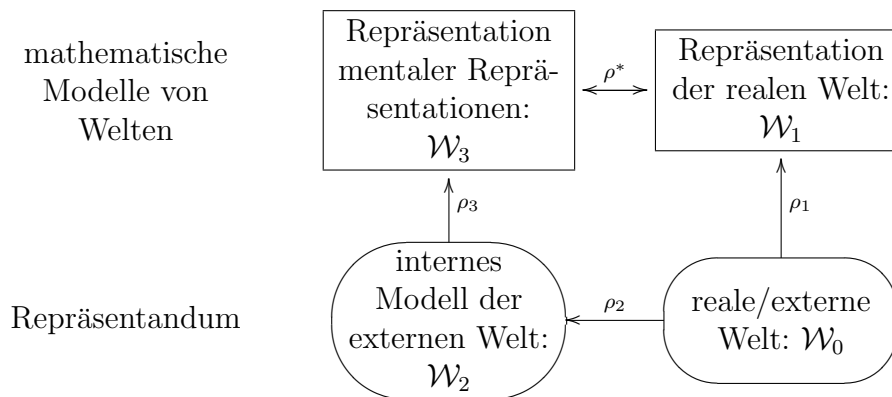


Abbildung 1.1.: Repräsentation in der Kognitions- und Naturwissenschaft nach Habel [45] (meine Übersetzung).

Habel [45] stellt die Bedeutung des Begriffes der Repräsentation für die Kognitionswissenschaft heraus. Ein wichtiges Problem, das vor allem für das in dieser Arbeit zentrale Thema der Repräsentation von räumlichen und zeitlichen Entitäten entscheidend ist, sieht er in der Frage, wie die nicht-endliche Raum-Zeit-Realität in einem endlichen Medium repräsentiert werden kann. Er nennt dieses Problem das Kontinuitäts-Endlichkeits-Dilemma (*continuity-finiteness dilemma*). Soll das allgemeine Repräsentationsschema auf mentale Repräsentationen angewandt werden, so ergibt sich nach Habel eine komplexere Repräsentationssituation (Abb. 1.1): Das mentale Modell ( $\mathcal{W}_2$ ) der realen Welt ist die von einem kognitiven System gewonnene Repräsentation der realen Welt ( $\mathcal{W}_0$ ). Die Kognitionswissenschaft untersucht aber nach Habel auch Repräsentationen ( $\mathcal{W}_3$ ) der mentalen Repräsentationen in  $\mathcal{W}_2$ .  $\mathcal{W}_2$  ist daher sowohl Repräsentation als auch Repräsentandum. Mathematische Modelle der realen Welt, wie z.B. formale Modelle der Physik, sind durch  $\mathcal{W}_1$  dargestellt. Das Kontinuitäts-Endlichkeits-Dilemma zeigt sich sowohl für die Abbildung  $\rho_2$  als auch für die durch  $\rho_1, \rho_2$  und  $\rho_3$  induzierte Abbildung  $\rho^*$  [45, S. 82f]. Die formalen Konzepte in dieser Arbeit gehören zu den formalen Grundlagen der in  $\mathcal{W}_3$  angesiedelten mathematischen Repräsentationen mentaler und – wenn man die internen Zustände eines künstlichen intelligenten Informationsverarbeitungssystems hinzunimmt – für die Wissensverarbeitung geeigneter Repräsentationen. Hierzu sind Anforderungen der Abbildung  $\rho_3$  zu beachten, d.h. Anforderungen aus der Wissensverarbeitung als auch Anforderungen aus der Forschung zur natürlichen Kognition. Für die Bedeutung der definierten Konzepte muss auch die Übertragung  $\rho^*$  zwischen kontinuierlichen und endlichen mathematischen Modellen, also die Grundlagen der Diskretisierung betrachtet werden (s. Kap. 5). In Bezug auf die Adäquatheit einer Repräsentation werden hierzu auch Aspekte aus  $\mathcal{W}_1$  und  $\mathcal{W}_0$  zu beachten sein.

### 1.1.1. Raumrepräsentationen in der Forschung zur natürlichen Kognition

In der Raumkognition wird nach dem Modell von Landau und Jackendoff [65] die Raumrepräsentation von verschiedenen Wahrnehmungsmodalitäten und in Wechselwirkung mit der linguistischen Repräsentation aufgebaut und kann in motorische Information und Sprache umgesetzt werden. Die Raumrepräsentation ist in [65] eine spezifische mentale Repräsentation für die Kodierung geometrischer Eigenschaften von Objekten in der Welt und den räumlichen Beziehungen zwischen ihnen. Da räumliche Repräsentationen aus auditiven, visuellen und haptischen Wahrnehmungsinformationen abgeleitet sind und auch aus rein sprachlichen Repräsentationen gewonnen werden können, muss ihr Format amodal oder multimodal sein. Die Raumrepräsentation lässt sich nach [65] anhand der Interaktion zwischen linguistischen Repräsentationen und multimodalen Informationsquellen experimentell untersuchen.

Kosslyn [59, 60] hat in einer Reihe von Experimenten nachgewiesen, dass die Raumrepräsentation bildhafte Anteile hat.<sup>3</sup> Versuchspersonen gaben an, sich für die Lösung räumlicher Aufgaben ein *mentales Bild* vorgestellt und in diesem, wie z.B. auf einer Skizze, die räumlichen Gegebenheiten simuliert zu haben. Tatsächlich ließen sich Verzögerungen in den Antwortzeiten und rein räumliche Parameter der Aufgaben – wie Distanz und Größe – aufeinander abbilden. Kosslyn [59] zeigt, dass ein mentales Bild einem realen darin ähnelt, dass es eine bestimmte Auflösung und eine Ausdehnung besitzt. Er charakterisiert ein rasterbild-ähnliches mentales Raumrepräsentationsmedium, den visuellen Puffer (*visual buffer*). Soll auf Teile außerhalb, auf Details oder ein größeres Ganzes zugegriffen werden, dann muss dazu der mentale Bildausschnitt verschoben (*panning*), es muss hinein-, oder herausgezoomt (*zooming*) werden. Kosslyn verwendet den Begriff *grain*, um Phänomene der Auflösung (*resolution*) im visuellen Puffer zu charakterisieren. Er zeigt auf, dass der visuelle Puffer zudem eine begrenzte räumliche Ausdehnung (*limited spatial extent*) hat. Die mentale Repräsentation ist also in Detailgrad und maximaler Ausdehnung beschränkt.

Habel [44, 45] charakterisiert eine Operation der Einbettung (*embedding*) einer feineren Repräsentation in eine gröbere. Mit Hilfe dieser Operation lässt sich eine hierarchische Repräsentation räumlichen Wissens aufbauen und nutzen, die auch die Integration von Verfeinerungen in gröbere Repräsentationen räumlicher Zusammenhänge unterstützt, die sich durch die Operation des Zoomens allein nicht abbilden lassen [44]. Durch die Möglichkeit der Einbettung lässt sich auch das Kontinuitäts-Endlichkeits-Dilemma in der Repräsentation auflösen. Die Einbettung erlaubt potentiell beliebig genaue Verfeinerung: Erhält ein wissensverarbeitendes System zusätzliche Detailinformation über einen Sachverhalt, so lässt sich das Detail in die bisher gewonnene grobe Überblicksinformation einbetten. Die Repräsentation kann dabei in jeder Ebene endliche Genauigkeit haben. Sie ist aber *potentiell* beliebig genau, weil eine Verfeinerung stets eingebettet werden *kann*,

<sup>3</sup>Die Theorie der mentalen Vorstellungen ist nicht unumstritten. Vgl. Pylyshyn [88] für einen kritischen Rückblick auf die sog. *imagery debate*. Zudem ist die Bezeichnung *bildhaft* mit Hinblick auf die Charakterisierung von Landau und Jackendoff [65] unnötig eng, da die Raumrepräsentationen ja nicht auf die visuelle Modalität beschränkt sind.

## 1. Einleitung

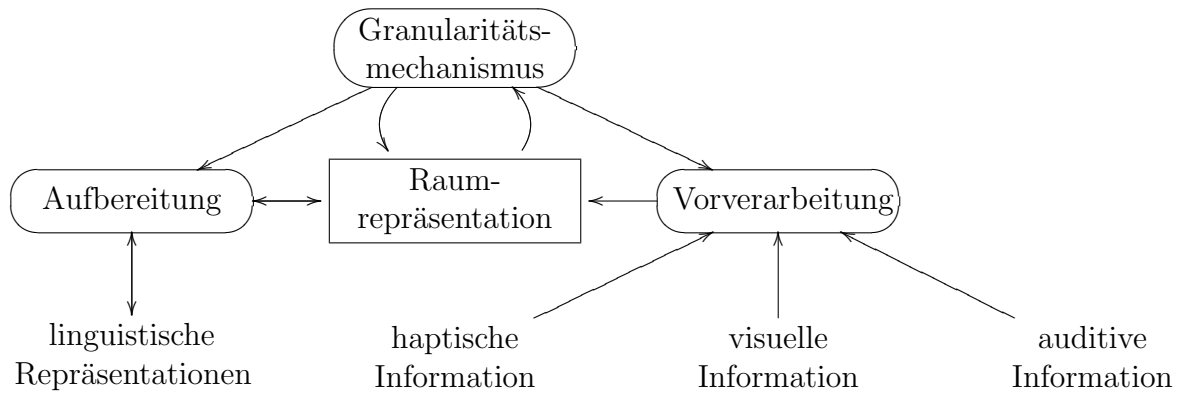


Abbildung 1.2.: Granularitätsmechanismen dienen dem Aufbau von Raumrepräsentationen aus räumlicher Information und linguistischen Repräsentationen.

wenn sie als relevantes Detail gespeichert werden soll. Dies gilt nicht nur für räumliche, sondern auch für Konstellationen temporaler Entitäten [45].

Einen Mechanismus zur Verfeinerung und Vergrößerung der Raumrepräsentation wie die Operation der Einbettung bei Habel [44, 45] oder auch die Zoom-Metapher bei Kosslyn [59, 60] wird im Folgenden als *Granularitätsmechanismus* bezeichnet. Abbildung 1.2 illustriert die in dieser Arbeit eingenommene Perspektive auf Granularität in der Verarbeitung von Wissen über räumliche Beziehungen (in Anlehnung an das Modell von Landau und Jackendoff [65]): Granularität bestimmt, wie neue Informationen in aktuelle Raumrepräsentationen eingebettet werden können. Es wird hier ein Vorverarbeitungsschritt angenommen, der aus den modalitätsspezifischen Informationen die Raumrepräsentation generiert oder anreichert. Der Granularitätsmechanismus trägt hier z.B. dazu bei, irrelevante Details zu entfernen, feine Detailinformationen zu größeren Überblicksinformationen zu integrieren etc., so dass die neue Information in die Raumrepräsentation eingefügt werden kann. Auf Seiten der linguistischen Repräsentationen wird hier ein ähnlicher Schritt der Aufbereitung angenommen, in dem propositional gegebene räumliche Beziehungen in eine (nach Kosslyn [59, 60] vermutlich bildhafte) Raumrepräsentation integriert, aber auch aus dieser extrahiert werden können. Der Granularitätsmechanismus interagiert aber auch mit der Raumrepräsentation selbst. Der Wechsel zwischen Detail und Überblick (Einbettung [44, 45] und Zooming [59, 60]) lässt sich für das Schließen über räumliches Wissen gut nutzen.

Raumrepräsentationen sind auch in der Forschung zur Navigation natürlicher aber auch künstlicher Agenten untersucht worden. Ein für diese Arbeit zentrales formales Konzept ist das des *Ortes* (*place*, charakterisiert in den Kapiteln 4 und 5). Der Begriff wurde in Anlehnung an die Verwendung des Begriffes in der Forschung zu künstlichen und biologischen Navigationssystemen gewählt:<sup>4</sup> Ortserkennung (*place recognition*) ist

<sup>4</sup>Hier ist anzumerken, dass der Begriff des Ortes in anderen Disziplinen auch noch weitere – eventuell sogar nicht-räumliche – Bedeutungen hat. In den Geowissenschaften etwa hat der Begriff eine lange Tradition und eine vielschichtigere Bedeutung (für einen historischen Überblick s. Curry [20]).

eine grundlegende Fähigkeit, die ein Navigationssystem benötigt, um eine zuvor erlernte Route ablaufen zu können. Das Wiedererkennen eines Ortes dient dabei als Auslöser (*triggered response*) einer Aktion, die zum nächsten Ort der Route führt. Trullier, Wiener, Berthoz und Meyer [109] beschreiben Orte als definiert durch Konfigurationen von Landmarken. Werner, Krieg-Brückner und Herrmann [116] stellen fest, dass Orte Routensegmente verbinden. Mallot [71] diskutiert Möglichkeiten, wie eine interne *kognitive Karte* eines navigierenden Agenten aufgebaut sein könnte: Er stellt Ortsgraphen (*place graphs*), welche Orte als Knoten und Routensegmente als Kanten beinhalten, Ansichtsgraphen (*view graphs*) gegenüber, die Ansichten von Orten in den Knoten und die zugehörigen Aktionen (*triggered response*) in den Kanten speichern. Aus der Sichtweise der Forschung zu Navigationssystemen ist ein Ort charakterisiert durch eine Menge von Ansichten, die, verglichen mit der aktuellen Ansicht, dem System Informationen über seine aktuelle Position liefern. Es kann diesen Ort dann ansteuern (*homing*), indem es sich so bewegt, dass sich die aktuelle und die gespeicherte Ansicht zunehmend ähnlicher werden.

Auch für die Forschung zu Routeninstruktionen ist der Begriff des Ortes wichtig. Verbale Routeninstruktionen basieren auf der folgenden räumlichen Repräsentation (Allen [2], Denis [23], Klein [58], Wunderlich und Reinelt [121]): Routenbeschreibungen enthalten Informationen über Landmarken (*landmarks*), Entscheidungspunkte (*decision points*) und Aktionen, die ein imaginärer Wanderer ausführen muss, wenn er der Route folgen möchte. Der Instruierende generiert eine interne räumliche Repräsentation, die Start und Ziel enthält. Er muss dann einen Pfad (*path*) zwischen den beiden Lokationen planen. Dieser Pfad kann dann durch die Beschreibung von Entscheidungspunkten, bezogen auf lokale oder entfernte Landmarken, verbalisiert werden. Entscheidungspunkte sind dabei solche Orte, an denen eine Entscheidung getroffen werden muss, welcher von mehreren möglichen Fortsetzungen des Weges der Instruierte folgen soll. In städtischen Umgebungen liegen Entscheidungspunkte an Kreuzungen, Einmündungen oder Weggabelungen. In einer offenen Umgebung liegen Entscheidungspunkte in der Nähe besonders salienter Konfigurationen oder an Punkten, wo ein Richtungswechsel notwendig ist (Allen [2], Denis [23], Tversky und Lee [111]). Diese Lokationen werden als punktförmig charakterisiert und können als Orte betrachtet werden, die für die Route besonders wichtig sind. Ein Entscheidungspunkt wird vom Instruierenden beschrieben – und später vom Instruierten erkannt – mit Bezug auf die Landmarken, die den Ort charakterisieren.<sup>5</sup>

In dem Projekt von Tschander, Schmidtke, Eschenbach, Habel und Kulik [110] wird die Frage behandelt, wie ein künstliches Navigationssystem, der geometrische Agent, eine im Voraus gegebene natürlichsprachliche Instruktion so verarbeiten kann, dass er erfolgreich der beschriebenen Route in einer simulierten 2D-Umgebung folgen kann. Eine der zentralen Aufgaben des Agenten ist, aus der natürlichsprachlichen Instruktion eine Repräsentation der Orte aufzubauen, auf die er später treffen wird.

Eschenbach, Tschander, Habel und Kulik [31] analysieren Pfade als Trajektorien, die die Punkte, die auf ihnen liegen, linear anordnen. Aus dieser Anordnung ergibt sich die

<sup>5</sup>S.a. Lovelace, Hegarty und Montello [69] zu Kriterien für die Qualität von Routenbeschreibungen und Fraczak [34] zur Generierung von kognitiven Karten aus Routenbeschreibungen.

## 1. Einleitung

korrespondierende Anordnung der Orte entlang des Pfades. Der Begriff des Ortes ist in [31] nicht weiter charakterisiert. Die in Kap. 4 axiomatisch charakterisierte geometrische Entität könnte aber in diesem Rahmen eingesetzt werden.

Der Begriff des Ortes wird in dieser Arbeit verwendet, um eine an räumliche Granularität gebundene geometrische Entität zu bezeichnen, die

- bei feiner Granularität als lokaler, räumlicher Kontext dienen kann, in dem Objekte – in Routenbeschreibungen z.B. lokale Landmarken – lokalisiert sein können,
- bei grober Granularität – in einer Routenskizze oder kognitiven Karte z.B. – hingegen eine punktartige Lokation ist, deren Ausdehnung nicht relevant ist.

Das Konzept einer punktartigen Lokation, deren Ausdehnung erst durch eine Operation des Zooming relevant wird, war bereits im Zusammenhang mit dem Begriff *grain* bei Kosslyn [59] kurz angedeutet worden. Es wird in Abschnitt 1.2 als zentrale Komponente räumlicher Granularität eingehender diskutiert.

### 1.1.2. Raumrepräsentationen in der Rauminformationstheorie

In der Rauminformationstheorie<sup>6</sup>, etwa im Bereich räumlicher Datenbanken, unterscheidet man zwischen rasterbasierten und vektorbasierten Datenformaten und korrespondierend dazu zwischen feldbasierten und objektbasierten Raumrepräsentationen (für eine Einführung s. z.B. Rigaux, Scholl und Voisard [94]). In feldbasierten Raumrepräsentationen wird einem Raumpunkt ein bestimmter Wert, z.B. ein Höhen- oder Farbwert, zugeordnet. Objektbasierte Raumrepräsentationen ordnen einem Objekt eine Menge von Raumpunkten zu, etwa die in einem bestimmten Polygon liegenden Punkte. Die Datenformate korrespondieren zu Diskretisierungsmöglichkeiten dieser Raumrepräsentationen, die notwendig sind, um das Kontinuitäts-Endlichkeits-Dilemma zu lösen: Rasterbasierte Datenformate speichern eine endliche Menge an Werten in einer Matrix, aus der die Koordinaten der zugehörigen Raumpunkte abzulesen sind. Vektorbasierte Datenformate speichern eine Sequenz bestimmter Koordinaten des vom Objekt eingenommenen Raums.

Eine viel diskutierte Frage in der Forschung zu geographischen Informationssystemen ist, welche der beiden Repräsentationsarten angemessen ist für welche Aufgaben.<sup>7</sup> Objektbasierte Repräsentationen und damit die vektorbasierten Datenformate repräsentieren Objekte durch homogene Regionen mit scharfen Grenzen, wohingegen natürliche Objekte der geographischen Domäne häufig unscharfe Grenzen haben – wie etwa Wälder, Berge etc. (s. Frank [37]). Die Vagheit der Grenzen natürlicher geographischer Objekte ist eine wichtige Frage aktueller Forschung zu Rauminformationssystemen und im Bereich des qualitativen räumlichen Schließens (s. z.B. Kulik [63], Bittner und Smith [9,10],

---

<sup>6</sup>Der hier verwendete Begriff der Rauminformationstheorie wurde in Anlehnung an den Titel der Konferenzreihe COSIT, *conference on spatial information theory*, gewählt.

<sup>7</sup>Vgl. Galton [41] für eine detaillierte Analyse theoretischer Aspekte zu Kompatibilität und Konversion zwischen diesen Repräsentationen.



Bennett [5]). Ursachen der Vagheit liegen u.a. in der inhärent multi-granularen Struktur dieser Objekte und darin, dass sie durch Perzeption bzw. Messung entstehen, s. Abschnitt 1.2 und Kap. 7.

Ob ein geographisches Konzept in einem bestimmten Kontext anwendbar ist, hängt u.a. vom aktuell gewählten *Maßstab* ab (Goodchild [42]). Das Konzept der *urbanen Region* z.B. ist an einen spezifischen Maßstab gebunden. Vergrößert der Benutzer eines GIS den Maßstab, etwa durch hineinzoomen, so sollte die Region durch eine Darstellung der Häuserblocks, Straßen, Parks etc. ersetzt werden. Bei Maßstabsverkleinerungen hingegen ist ab einem bestimmten Maßstab ein annotierter Punkt, der die Stadt und ihre wichtigsten Daten visualisiert, eine adäquatere Repräsentation.

Die Möglichkeit, den Maßstab interaktiv zu verkleinern oder zu vergrößern, ergibt sich erst durch die Verwendung von Rauminformationssystemen. Der Maßstab einer Karte auf Papier ist fest. Der Maßstab einer räumlichen Repräsentation spezifiziert ein Verhältnis zwischen Größen in der Realität und Einheiten im Repräsentationsmedium: in einer Karte mit einem Maßstab von  $1 : x$  entspricht 1cm in der Karte einer Länge von  $x$ cm in der Realität. Dies lässt sich in begrenztem Maße auch auf andere Repräsentationsmedien übertragen, so kann bei einer rasterbasierten Repräsentation mit im Verhältnis zu Längen in der Realität äquidistanten Rasterlinien der Maßstab in Bezug zur Seitenlänge einer Rasterzelle bestimmt werden. Zwar könnte auch in vektorbasierten Repräsentationen bei auf Euklidischer Metrik basierenden Koordinaten z.B. ein ähnlicher Bezug zu einer Einheitsstrecke hergestellt werden; aber im Gegensatz zu Daten im rasterbasierten Format und Karten im Repräsentationsmedium Papier gibt ein solcher Wert nicht notwendigerweise einen Hinweis auf den Detailgrad der Repräsentation.

Sowohl raster- als auch vektorbasierte Datenformate haben nur einen bestimmten Maßstabsbereich, in dem sie adäquat sind. Bei rasterbasierten Daten ist dies offensichtlich: die Inhalte der einzelnen Pixel tragen keine zusätzliche Information mehr. Aber auch für vektorbasierte Datenformate gilt dies, auch wenn durch Namensgebungen wie *scalable vector graphics* beliebige Skalierbarkeit suggeriert wird: Vergrößert der Nutzer sukzessive etwa eine Ecke eines Polygons, so wird dies ab einem bestimmten Maßstab ebenfalls keine neuen Informationen ergeben. Ist nun das dargestellte Objekt ein Objekt der physikalischen Realität, wie z.B. eine Stadt, so wird in beiden Fällen ein Maßstab erreicht, ab dem das Dargestellte nur noch ein Artefakt der Repräsentationstechnik ist, aber nicht mehr das zu repräsentierende Objekt abbildet. Anders ist dies bei Objekten, die durch Setzung entstehen:<sup>8</sup> Für Grundstücke oder auch die Stadtgrenze z.B. ist die Repräsentation durch ein vektorbasiertes Datenformat korrekt. Eine kritische Sichtweise auf die Adäquatheit der rasterbasierten Repräsentation liefert Goodchild [42]. Er merkt an, dass eine geographischen Messungsprozessen angemessene Repräsentation räumlicher Gegebenheiten durch die feste Rasterstruktur in falscher Weise eingeschränkt wird: Messpunkte können z.B. in durch die räumlichen Gegebenheiten vorgegebener Weise unregelmäßig über den Raum verteilt sein. Das Raster-Datenformat suggeriert dann an einigen Stellen höhere Genauigkeit, als die Messung tatsächlich gewährleistet, während es an anderen Stellen, wo detailliertere Information vorliegt, zu ungenau ist.

<sup>8</sup>S. auch die Unterscheidung zwischen *fiat* und *bona fide* Objekten von Smith und Varzi [103].

## 1. Einleitung

Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Konzepte sind neutral bezüglich der Wahl des Datenformates und der Unterscheidung zwischen feldbasierten und objektbasierten Repräsentationen, in Beispielen wird sowohl auf die objektbasierte als auch auf die feldbasierte Perspektive zurückgegriffen. Auch muss für Fälle, in denen Messung eine Rolle spielt, nicht notwendigerweise eine Rasterstruktur angenommen werden, so dass auch die von Goodchild geforderten Strukturen repräsentiert werden können.

Der Begriff der Maßstabsabhängigkeit geographischer Konzepte [42] deutet auf eine Beziehung zwischen Maßstab und räumlicher Granularität hin und ist darum für diese Arbeit wichtig (s. bes. Kap. 6 und Kap. 7). Der Maßstab einer Karte im Repräsentationsmedium Papier schränkt durch die maximal adäquate Auflösung des Druckverfahrens und des menschlichen Auges und durch die maximal adäquate Ausdehnung des Papiers die darstellbaren Gegebenheiten in ähnlicher Weise ein, wie der Kontext-Parameter Granularität dies für andere Repräsentationen leisten soll.

### 1.2. Granularität

Der Begriff der *Granularität* wurde von Hobbs in einem für diese Arbeit zentralen Artikel [53] in die Wissensrepräsentation eingeführt. Er charakterisiert Granularität als eine Möglichkeit, Wissen über die komplexe Welt so zu strukturieren, dass statt einer allgemeinen globalen Theorie der Welt lokale Theorien einer vereinfachten um unwesentliche Unterscheidungen bereinigten Weltsicht für Planung und Repräsentation verwendet werden können. Er hält die Fähigkeit zum flexiblen *Granularitätsebenenwechsel* für eine der fundamentalen Eigenschaften der menschlichen Intelligenz:

We look at the world under various grain sizes and abstract from it only those things that serve our present interests. [53, S. 542]

Hobbs skizziert folgende, für eine Untersuchung von Granularität wichtige Konzepte, die auch für diese Arbeit zentral sind:

**Dimensionalität** Hobbs führt das Beispiel der Repräsentation einer Straße an: Bei der Planung einer Reise ist es ausreichend, eine Straße als eindimensionale Kurve zu konzeptualisieren. Wenn man eine Straße hingegen überqueren will, ist ihre Breite relevant, und die Straße wird als zweidimensionales Objekt betrachtet. Schlaglöcher und Bodenwellen sind Charakteristika einer Straße als dreidimensionales Objekt.

**Granulatsgröße (grain-size)** Hobbs konstatiert, dass bestimmte Konzepte granularitätsabhängig sind. Er nennt als Beispiel die Anwendbarkeit bestimmter Begriffe von Substanzen: Wasser erscheint als kontinuierliche Substanz bis zur molekularen Ebene. Sand hingegen zerfällt ab einer noch der direkten Wahrnehmung zugänglichen Ebene in einzelne Sandkörner. Auch komplexere Konzepte haben eine solche kleinste Ebene der Anwendbarkeit: Ein Stau etwa ist größer als ein einzelnes Fahrzeug. Dieses Phänomen ist eng verwandt mit dem der Sorites-Vagheit in der Philosophie, Linguistik und Wissensrepräsentation.

**Ununterscheidbarkeit und Granularitätsebenen** Mehrere Objekte einer feineren Granularitätsebene, die sich nicht in für eine anstehende Aufgabe relevanter Weise unterscheiden, sind in der Vergrößerung, die für die Aufgabe angemessen ist, zu einem Objekt zusammengefasst.

Vom Standpunkt der Wissensrepräsentation erlaubt Granularität zum einen eine Reduktion der Komplexität, zum anderen eine Anpassung von Repräsentationen an Konzepte des Allgemeinverständes.

Ein Informationssystem, das über einen Granularitätsmechanismus, d.h. einen Mechanismus zur Verfeinerung und Vergrößerung von Repräsentationen verfügt, kann durch diesen die Anzahl der zu behandelnden Objekte in günstigen Fällen selbstständig reduzieren. Ein Rechenbeispiel soll dies veranschaulichen: Für einen Algorithmus, der bei  $n$  Elementen eine Komplexität  $O(c^n)$  hat, würde bei einer Vergrößerung auf eine Anzahl von  $\log_c n$  Elementen die Komplexität für die Ausführung des Kernalgorithmus mit Hilfe der Vergrößerung auf  $O(n)$  sinken. Falls die Vergrößerung selbst im Bereich von  $O(n)$  bleibt und tatsächlich nur irrelevante Details entfernt, d.h. in Bezug auf die Aufgabe korrekt ist, verspricht dies in günstigen Fällen einen erheblichen Effizienzgewinn für die gesamte Berechnung der Aufgabe.

Der zweite Vorteil der Granularität betrifft die Möglichkeit, komplexe Sachverhalte in einer dem Allgemeinverstand gut zugänglichen Weise zu formulieren. Kalendersysteme etwa erlauben es Menschen, auf flexible Weise Termine und Abläufe mit einer ausreichenden Genauigkeit zu planen. Natürlichsprachliche Datenquellen – wie z.B. Nachrichtenartikel in Internet-News-Diensten – enthalten temporale Information, die mit Hilfe von Granularitätsstrukturen maschinell verarbeitbar sind (vgl. Schilder und Habel [96]). Solche Repräsentationen auch für Programmierung und Datenbanken einsetzen zu können und nicht auf eine spezifische temporale Granularität, z.B. Mikrosekunden, festgelegt zu sein, ist ein weiteres Ziel der Forschung zu Granularität (s. Montanari, Peron und Policriti [73, 74] und Franceschet und Montanari [35]).

Es liegt auf der Hand, dass besonders Forschungsbereiche, in denen die Anzahl der zu betrachtenden Elemente stets groß ist, oder die benötigten Aufgaben hohe Komplexität haben, spezifische Weiterentwicklungen der Idee der Granularität entwickelt haben. Im Bereich temporalen Datenbanken z.B. werden Kalendersysteme genutzt, um temporale Granularität umzusetzen (vgl. Bettini, Jajodia und Wang [8]). Ohlbach und Gabbay [79] untersuchen eine Erweiterung temporaler Logiken um ein Kalendersystem. Die *multi-level temporal logics* von Montanari, Peron und Policriti [73] umfassen noch allgemeinere granulare Zeitlogiken. Auch praktische, experimentelle Untersuchungen aus dem Bereich räumlicher Datenbanken existieren. Hörhammer und Freestone [54] zeigen, dass die Performanz einer räumlichen Datenbank erheblich verbessert werden kann, indem die Objekte nach der kartographischen Maßstabsebene, zu der sie gehören, indiziert werden. Der indizierte Wert wird dabei automatisch u.a. von der Größe der Objekte abgeleitet. Auch die Detailgrad-Algorithmen (*level of detail*) aus dem Bereich der 3D-Computergrafik gehören zu den Ansätzen, in denen Granularitätsstrukturen eine

praktische Nutzung haben.<sup>9</sup> Insbesondere die Arbeit von Erikson [27] zu hierarchischen Detailgrad-Verfahren berührt Aspekte granularer Raumrepräsentationen.

In geographischen Informationssystemen kann räumliche Granularität für verschiedene Aufgaben verwendet werden: Frank und Timpf [36] nutzen Granularität für die semi-automatische Generalisierung in kartographischen Anwendungen. Für die Planung zur Wegfindung unterscheiden Timpf und Kuhn [108] drei Detailebenen: die Planungsebene, auf der die grobe Route etwa als Abfolge von Autobahnen und Autobahnkreuzen bestimmt wird, die detailliertere Instruktionsebene, auf der auch Auf- und Abfahrten an einem Autobahnkreuz repräsentiert werden, und die Fahrer-Ebene, auf der die einzelnen Spuren der Autobahn repräsentiert sind. Hornsby und Egenhofer [55] modellieren die möglichen Bewegungen von Objekten durch raum-zeitliche Entitäten, die sich je nach gewählter Granularität für einen besseren Überblick über die Gesamtbewegung vergrößern oder, wenn zusätzliche Informationen bekannt werden, verfeinern lassen. [55] ist damit auch ein Ansatz zur Repräsentation unvollständiger Information. Bittner und Smith [9] stellen eine Theorie granularer Partitionen vor, in der sich auch Aspekte geographischer Vagheit repräsentieren lassen (s.a. Bittner und Stell [11]).

### 1.2.1. Ununterscheidbarkeit und Vagheit

Hobbs charakterisiert Granularität über die in einer Situation oder für eine Aufgabe *relevanten Prädikate* und eine *Ununterscheidbarkeitsrelation* (*indistinguishability relation*) [53, S. 542]: „Our approach to granularity will be to extract from [a first-order logical, global theory] smaller, more computationally tractable, local theories.“ Zwei Entitäten aus der Domäne der globalen Theorie nennt er ununterscheidbar genau dann, wenn sie sich bezüglich aller relevanten Prädikate gleich verhalten. Die Ununterscheidbarkeitsrelation ist mit dieser Charakterisierung eine Äquivalenzrelation. Für eine vereinfachte, aufgabenbezogene oder situationsangemessene lokale Theorie ist es nun ausreichend, allein die Äquivalenzklassen bezüglich Ununterscheidbarkeit als Elemente ihrer Interpretationsdomäne anzunehmen.<sup>10</sup>

Hobbs untersucht aber auch Fälle nicht-transitiver Ununterscheidbarkeit wie z.B. zwischen Temperaturen:

It is apparently true, for example, that people are able to distinguish between temperatures that are two degrees Fahrenheit apart, but not one degree Fahrenheit. We can distinguish between 58° and 60°, but not between 58° and 59°. [53, S. 543]

---

<sup>9</sup>Luebke, Watson, Cohen, Reddy und Varshney [70] stellen Theorie und Anwendung von Detailgrad-Algorithmen vor.

<sup>10</sup>Es mag an dieser Stelle interessieren, wie sich der Begriff der Theorie, der bei Hobbs verwendet wird, zum Begriff der Repräsentation verhält. Eine Theorie lässt sich zunächst als eine konsistente Menge von Aussagen verstehen, umfasst somit bestimmte mathematische Modelle. In diesem Sinne aufgefasst, korrespondiert der Begriff damit in dem Repräsentationsdiagramm Abb. 1.1 nach Habel [45] zu dem der mathematischen Modelle von Welten. Die globale Theorie kann als Repräsentation der realen Welt  $\mathcal{W}_1$  gesehen werden. Die lokalen Theorien sind dann Repräsentationen interner Repräsentationen analog zu  $\mathcal{W}_3$ .

Die Ununterscheidbarkeitsrelation auf Temperaturen ist in diesem Beispiel nicht transitiv, denn  $58^{\circ}\text{F}$  ist ohne technische Hilfsmittel nur schwer unterscheidbar von  $59^{\circ}\text{F}$  und  $59^{\circ}\text{F}$  von  $60^{\circ}\text{F}$ , aber  $58^{\circ}\text{F}$  ist von  $60^{\circ}\text{F}$  unterscheidbar. Dieses Phänomen ist aus psychophysikalischen Untersuchungen zu Unterscheidbarkeitsschwellen in der Perzeption bekannt (ein Überblick findet sich bei Palmer [81, S. 671]) und trifft auch für die Klassifikation räumlicher Ausdehnung zu: Versuchspersonen, denen zwei waagerechte Linien nacheinander oder horizontal nebeneinander präsentiert wurden, hielten diese Linien erst bei einer Differenz von ca. 10% Länge nicht mehr für gleich lang. Erst 10mm und 11mm, 30mm und 33mm etc. wurden als nicht mehr gleich lang eingeschätzt. Ebenso waren die Probanden nur ab dieser Differenz in der Lage anzugeben, welche der beiden Linien die längere ist. Diese Differenz wird als *just noticeable difference* (JND) bezeichnet. Da die Linien in diesem Fall nicht direkt vergleichbar sind, müssen die Probanden vermutlich auf eine mentale Repräsentation der Linien zugreifen, und diese für den Vergleich verwenden. Bei einer Repräsentation ähnlich dem Modell von Kosslyn [59] ließe sich dieses Resultat auf die Größe der Rasterzellen zurückführen. Entspricht eine gefüllte Rasterzelle in der Repräsentation der visuellen Information einer Zelle von der Seitenlänge 1mm in der Realität, so kann eben genau der Unterschied zwischen einer 10mm langen Linie (10 gefüllte Rasterzellen) und einer 11mm langen Linie (11 gefüllte Rasterzellen) abgelesen werden. Bei einem geringeren Unterschied – etwa von nur 0,5 mm – ist die zusätzliche Zelle vermutlich nicht gefüllt, und der Unterschied wird nicht wahrgenommen. Das Ergebnis für die Längen 30mm und 33mm ergibt sich dann analog bei einer Seitenlänge der Zellen von 3mm in der Realität. Die Vergrößerung der Messgenauigkeit ergibt sich daraus, dass für die Repräsentation der längeren Linien im visuellen Puffer dieselbe Anzahl von Zellen zur Verfügung steht wie für die Repräsentation der kürzeren Linien. Die JND somit als Basislänge einer granularen, internen Repräsentation aufzufassen liegt nahe.

Die Untersuchungen zu Unterscheidbarkeitsschwellen geben Aufschluss über die menschlichen Fähigkeiten in Klassifikation und Vergleich und sind somit eine wichtige mathematische Grundlage psychologischer Untersuchungen. Diese mathematische Basis – in ihrer Charakterisierung aus der Messtheorie nach Suppes und Zinnes [105] – nimmt in dieser Arbeit eine herausragende Rolle ein. Einer der Hauptunterschiede zwischen dieser Arbeit und anderen Ansätzen zu räumlicher und zeitlicher Granularität – und auch zum Hobbsschen Ansatz – ist, wie noch dargelegt werden wird, die konsequente Verwendung nicht-transitiver Ununterscheidbarkeitsrelationen, wo immer ein kognitiv adäquates Konzept von Klassifikation gesucht wird, in dem direkte Vergleiche ausgeschlossen sind. U.a. können z.B. die Relationen *zur gleichen Zeit* auf Momenten, Zeitintervallen oder Ereignissen und *am selben Ort* auf Raumpunkten, Raumregionen oder materiellen Objekten diese Eigenschaft haben.

Das Phänomen der Ununterscheidbarkeit ist auch eng verknüpft mit dem der Vagheit natürlichsprachlicher Ausdrücke, speziell mit der in der Philosophie als *Sorites-Vagheit* bezeichneten Art von Vagheit (für einen Überblick s. Varzi [112]). Sorites-Vagheit (abgeleitet vom griechischen *sōrós* = Haufen) ist z.B. eine charakteristische Eigenschaft von Aggregationen umfassenden Konzepten. Der *Sorites-Fehlschluss* lässt sich am Beispiel des Konzeptes *Wald*, das exemplarisch in Kap. 7 behandelt wird, veranschaulichen: (a) ein Baum ist kein Wald; (b) wenn eine bestimmte Ansammlung von Bäumen kein Wald

## 1. Einleitung

ist, so wird durch einen zusätzlichen Baum auch kein Wald daraus. Dieses Argument ist offensichtlich falsch, denn jeder Wald besteht ja nur aus endlich vielen Bäumen. Wenn sich die Anzahl der Bäume also über die Zeit immer vergrößert, muss irgendwann aus einer Baumgruppe ein Wald werden. Im Falle des Waldes sind aber auch noch andere Kriterien wichtig, wie z.B. die Dichte des Baumbestandes (s. Bennett [7]).

Andere Beispiele für Sorites-Vagheit finden sich in der Bedeutung zahlreicher Adjektive wie z.B. *kahlköpfig*, dessen Anwendbarkeit durch eine nicht ausreichende Anzahl von Haaren bestimmt wird. Direkt mit dem oben beschriebenen Phänomen der Ununterscheidbarkeit von Längen hängt die Vagheit der Adjektive *groß/klein* oder im Fall der Temperaturen *warm/kalt* zusammen. Van Deemter [22] beschreibt das Paradoxon folgendermaßen: Ausgangspunkt ist eine lange Reihe von nebeneinanderstehenden Personen, wobei zwei nebeneinanderstehende Personen von der Größe her stets ununterscheidbar seien, die kleinste Person  $a_1$  aber erheblich kleiner sei als die größte  $a_n$ . Wenn  $a_1$  nun als *klein* bezeichnet wird, so kann der Sorites Fehlschluss folgendermaßen aufgebaut werden:  $a_1$  ist klein; und wenn  $a_1$  klein ist, dann auch  $a_2$ . Daher ist auch  $a_2$  klein. Wenn aber  $a_2$  klein ist, dann auch  $a_3$ , und so fort. Im letzten Schluss folgt daher, dass auch die Person  $a_n$  klein sein muss, unabhängig von ihrer tatsächlichen Größe. Dabei ist es nach van Deemter nicht ausschlaggebend, dass die Größen tatsächlich perzeptuell ununterscheidbar in der Größe sind, auch bei einer ausreichenden Ähnlichkeit der Größen ist das Argument, wenn auch weniger zwingend, anwendbar. Für das Argument ist ausreichend, dass es in jedem Schritt einen *vernachlässigbaren* Unterschied gibt (Hyde [56]). Hyde [56] gibt einen detaillierten Überblick über Sorites-Paradoxa und Lösungsmöglichkeiten.

Ich möchte an dieser Stelle nur kurz die hier eingenommene Perspektive skizzieren, die zu denjenigen Ansätzen in der Klassifikation von Hyde [56] korrespondiert, die die induktive Prämisse anzweifeln, und an dem von van Deemter vorgeschlagenen Ansatz [22] orientiert ist.  $P$  sei ein vages Prädikat wie *klein*. Sei  $\approx_s$  eine nicht-transitive Ununterscheidbarkeitsrelation für die in  $P$  relevante Größe  $s$ , d.h. eine reflexive und symmetrische aber nicht transitive zweistellige Relation, wie z.B. *ungefähr so groß wie*. Der im Schritt  $i$  verwendete Schluss ist dann der folgende: Wenn  $a_i$  klein ist (1.1) und  $a_i$  und  $a_{i+1}$  ununterscheidbar bezüglich ihrer Größe sind (1.2), dann ist auch  $a_{i+1}$  klein (1.4). Die bezweifelte hierfür notwendige Prämisse (1.3) besagt, dass mit einer beliebigen  $P$  erfüllenden Entität  $x$  auch alle von ihr mit  $\approx_s$  ununterscheidbaren  $y$   $P$  erfüllen.<sup>11</sup>

$$P(a_i) \tag{1.1}$$

$$a_i \approx_s a_{i+1} \tag{1.2}$$

$$\forall x, y : P(x) \wedge x \approx_s y \rightarrow P(y) \tag{1.3}$$

$$P(a_{i+1}) \tag{1.4}$$

Eine zum Paradox führende Definition für ein vages Prädikat  $P$  ist

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists a_p : P^*(a_p) \wedge x \approx_s a_p. \tag{D1}$$

<sup>11</sup>Um Klammern zu sparen, sind in allen logischen Formeln die Quantorenskopi immer maximal zu lesen, also bis zum Ende der Formel oder, bis eine vor dem Quantor geöffnete Klammer geschlossen wird.

In dieser Definition sind Individuen, auf die  $P$  zutrifft gerade diejenigen Individuen, die zu einem für  $P$  prototypischen Individuum  $a_p$  bezüglich der Größe  $s$  unterscheidbar von  $a_p$  sind.<sup>12</sup> Dabei ist  $P^*$  ein nicht vages Prädikat, das eine Menge von Prototypen umfasst. Für Prädikate wie *klein* ist ein Bezug zu einer Vergleichsrelation wie *kleiner* angebracht,  $P^*$  könnte in diesem Fall alle Vergleichslängen umfassen, die (bei idealer, beliebig genauer Messung) kleiner als eine bestimmte Referenzgröße sind.

Bei einer transitiven Relation  $\approx_s$  folgt (1.3) aus (D1) und der Transitivität.<sup>13</sup> Im Falle der nicht-transitiven Relation hingegen ist (1.3) zwar im allgemeinen falsch, aber in alltäglichen Situationen, in denen die zur Diskussion stehenden Objekte nicht so trügerisch aufgebaut sind, d.h. in denen wir z.B. größeren und kleineren Personen in zufällig verteilter Weise begegnen, ist die Transitivität von  $\approx_s$  und damit (1.3) eine plausible Default-Regel, deren Schlussfolgerungen bei Bedarf, also wenn eine erhebliche Diskrepanz zwischen Schlussfolgerung und Wahrnehmung entsteht, auch zurückgenommen werden können.<sup>14</sup> Eine solche Regel wäre für ein wissensverarbeitendes System z.B. in solchen Fällen von Vorteil, in denen die Berechnung von  $P^*$  oder die Suche nach  $a_p$  mit hohem Aufwand verbunden ist.

Ein Nachteil der Modellierung ist nach Hyde [56] wie bei allen Ansätzen, die (1.3) ablehnen, dass  $P$  durch die Modellierung nicht mehr vage ist in dem Sinne, dass es nun möglich ist, genau zu bestimmen, für welche  $a_i$   $P(a_i)$  gilt und für welche nicht. (1.3) daher als Default mit einer eingeschränkten Gültigkeit zu verstehen, ist eine Möglichkeit diesen Nachteil abzuschwächen.

Hobbs verfolgt im Fall der nicht-transitiven Ununterscheidbarkeit eine andere Strategie. Er wählt eine Basis *relevanter Prädikate*, die, im Gegensatz zur Ununterscheidbarkeit allein, eine Zusammenfassung von Entitäten erlauben. Im Beispiel der Temperaturen etwa bestimmt er als relevante Prädikate die Zugehörigkeit einer Temperatur zu einem Zehnerintervall wie die 50er, 60er-Temperaturen etc. Die Elemente der vereinfachten Theorie sind dann genau diese Intervalle. Die ununterscheidbaren Instanzen an den Grenzen der Intervalle können willkürlich aber in mit der Ordnung konsistenter Weise den Intervallen zugerechnet werden, damit auch in der vereinfachten Theorie noch alle Fälle abgedeckt werden. Hobbs zeigt, dass sich dadurch die Nicht-Transitivität der Ununterscheidbarkeit auch auf die Individuen aller vergrößerten Theorien überträgt, da ja die Randelemente der Intervalle weiterhin ununterscheidbar sind, z.B.  $100^\circ$  das kleinste Element der 100er ununterscheidbar ist von  $99^\circ$ , dem größten Element der 00er bei einer Unterteilung in Hunderterintervalle. Er argumentiert, dass die Ununterscheidbarkeit bei zunehmender Vergrößerung immer unplausibler wird und argumentiert für eine *Idealisierung* (*idealiz-*

<sup>12</sup>Diese sehr grobe Definition von  $P$  durch Vergleich mit prototypischen Elementen ist für die Illustration der durch perzeptuelle Ununterscheidbarkeit ausgelösten Probleme ausreichend. Die von van Deemter [22] vorgeschlagene kontextabhängige Modellierung setzt hier den Vergleich mit einem im Kontext gegebenen Vergleichsobjekt ein.

<sup>13</sup>Van Deemter [22] modelliert nur solche Objektpaare als ununterscheidbar, die auch durch Vergleiche mit anderen Objekten in der Kontextmenge nicht unterschieden werden können. Die so entstehende kontextuelle Ununterscheidbarkeit ist dann wiederum eine Äquivalenzrelation. Vgl. auch den Überblick von Varzi [112] über kognitionspsychologische Experimente zu Sorites-Vagheit.

<sup>14</sup>Zum Begriff der Defaultlogik s. Reiter [92].

## 1. Einleitung

ation), dafür alle Elemente der Domäne der vergrößerten Theorie für unterscheidbar zu deklarieren, weil dies nur für wenige Ausnahmen nicht korrekt ist.

Die Temperaturskala wird durch den Prozess der Idealisierung, wie ihn Hobbs charakterisiert, partitioniert. Die Domänen der vergrößerten Theorien sind Diskretisierungen einer kontinuierlichen Temperaturwerteskala. Die Partitionierung bietet hierbei zum einen einen Übergang von punktuellen Werten auf Wertebereiche, zum anderen eine Diskretisierung des Wertebereichs. Ansätze zu räumlicher Granularität, die dieser Analyse folgen, sollen im weiteren *Partitionierungsansätze* genannt werden. Ich werde in Abschnitt 3.1 genauer auf diese Ansätze eingehen.

### 1.2.2. Granulatsgröße, Kontextbereich und Dimensionalität

Hobbs erwähnt noch einen anderen Faktor, der für den Aufbau und die Interaktion und Integration<sup>15</sup> granularitätsabhängiger lokaler Theorien entscheidend ist: *Größe*

Much of our knowledge is grain-dependent. In the knowledge bases we build as we axiomatize commonsense knowledge [...] grain-size must be an explicit argument of many predications. [53, S. 545]

Gerade bezüglich räumlicher Granularität halte ich die Granulatsgröße (*grain size*) für einen besonders wichtigen Faktor einer kognitiv adäquaten Modellierung von Granularität. Kosslyn [59, S. 139f] postuliert eine rasterbild-ähnliche mentale Raumrepräsentation, den visuellen Puffer (*visual buffer*). Er verwendet den Begriff *grain* um Phänomene der begrenzten Auflösung eines mentalen Rasterbildes zu beschreiben. Kosslyn zeigt auf, dass der visuelle Puffer zudem eine begrenzte räumliche Ausdehnung (*limited spatial extent*) hat. Die mentale Repräsentation ist also in Detailgrad und maximaler Ausdehnung beschränkt. Sowohl für den Begriff der Granulatsgröße als auch für den der maximalen Ausdehnung spielt die Größe der zu repräsentierenden Objekte und Teilobjekte eine wichtige Rolle.<sup>16</sup>

Auch für die Analyse räumlicher Präpositionen in der natürlichen Sprache sind ähnliche Eigenschaften der mentalen Raumrepräsentation postuliert worden. Der Begriff der Schematisierung (*schematization*, vgl. Talmy [106]) ist eng verbunden mit dem der Granularität. Herskovits erläutert den Prozess der Schematisierung folgendermaßen:

Systematic selection, idealization, approximation, and conceptualization are facets of schematization, a process that reduces a real physical scene, with all its richness of detail, to a very sparse and sketchy semantic content. [51, S. 149]

---

<sup>15</sup>Diese werden bei Hobbs *articulation* genannt. Ich ziehe in Anlehnung an die aktuelle Diskussion zur Ontologieintegration (zu grundsätzlichen Fragen vgl. z.B. Pinto, Gómez-Pérez und Martins [84]) den Begriff der Integration vor.

<sup>16</sup>Anzumerken ist, dass in Kosslyns Konzeption [59] die Granulatsgröße über das mentale Bild hinweg variiert: im Zentrum ist die Auflösung höher als in der Peripherie. Diese Eigenschaft wird im Rahmen der hier vorgestellten Charakterisierung nicht vorausgesetzt. Im Unterschied zu Kosslyn wird in dieser Arbeit zudem keine Partitionierung des Repräsentationsraums angenommen (s.a. Abschnitt 3.1).



Diese Beschreibung spricht dafür, dass Schematisierung als ein kognitiver Prozess für den Wechsel zwischen räumlichen Granularitätsebenen angesehen werden kann, und die Arbeiten zu Schematisierung somit ebenfalls Aufschluss über die kognitiven Grundlagen räumlicher Granularität geben können.

Um die Frage entscheiden zu können, ob zwei Objekte sich im obigen Sinne *an demselben Ort* befinden, also bezüglich ihrer Lokation ununterscheidbar sind, muss man Wissen über die Größen der Objekte haben. Ein Tisch und ein Schrank etwa, sind an demselben Ort, wenn sie sich z.B. in demselben Büroraum befinden. Kleinere Gegenstände wie ein Bleistift und ein Kugelschreiber würde der Allgemeinverstand als an demselben Ort lokalisiert betrachten, wenn sie z.B. in derselben Schublade sind. Herskovits [51] stellt in einer Analyse der englischen Präposition *at* eine in diesem Zusammenhang wichtige Beobachtung auf:

There is much linguistic evidence that one central sense of *at* is “coincidence of a movable point object with a point place in a cognitive map.”  
[51, S. 158] (Hervorhebung im Original)

Sie konstatiert, dass *at* nur für größere Umgebungsräume, also z.B. bei Navigationsaufgaben<sup>17</sup> verwendet werden kann. Wichtig für die Diskussion räumlicher Granularität ist hier aber vor allem der Bezug zur Repräsentation von Objekten. Herskovits gibt das folgende Kriterium für Punktartigkeit von Objekten:

[...] Jack is at the supermarket.  
is typically infelicitous if the speaker herself is in the supermarket, because a space that surrounds you cannot be seen as a point; representing a fixed object as a point requires seeing it from a distance. [51, S. 158]

Diese Analyse legt nahe, dass es einen direkten Zusammenhang gibt zwischen der Semantik der Präposition *at* und der Frage, wie ein Objekt in einem räumlichen Kontext repräsentiert ist. Die erwähnte Relation der Koinzidenz, die sie für eine wichtige Komponente der Bedeutung von *at* hält, zeigt Bezüge zur räumlichen Ununterscheidbarkeit. Von einem formalen Standpunkt aus müssen Lokalisations- und Referenzobjekt nicht als Punkte repräsentiert sein, um punktartig in dem beschriebenen Sinne zu sein. Punktartig sind Objekte, deren Ausdehnung im Kontext nicht relevant ist, die also kleiner als die Granulatsgröße sind. Wie sich das Phänomen einer im Kontext reduzierten Dimensionalität formal erfassen lässt, wird in Kap. 6 genauer untersucht. Die Koinzidenz kann dann durch räumliche Ununterscheidbarkeit formalisiert werden.

Wichtig ist unter beiden Interpretationen der Einfluss des räumlichen Kontextes, den Herskovits in der Analogie zu einer gesehenen Szene charakterisiert. Diese Analogie verwendet sie auch an anderer Stelle. Sie argumentiert, dass in dem Satz *The land beyond the river is fertile* das Lokalisationsobjekt (*the land*) als unbeschränktes Objekt konzeptualisiert wird:

---

<sup>17</sup>Sie stellt hier den Bezug zu kognitiven Karten (*cognitive maps*) her.

## 1. Einleitung

[...] the land stops somewhere, but this outer boundary is not part of the conceptualization—it is outside the scope of the mental eye.  
[51, S. 153]

Für den Begriff räumlicher Granularität lassen sich zusammenfassend zwei wichtige Komponenten herausarbeiten:

**Kontextbereich** Der Kontextbereich ist der räumlicher Kontext, relativ zu dem Objekte repräsentiert sind. Objekte, die sich außerhalb dieses Bereichs (*scope of the mental eye* bei Herskovits [51], *limited spatial extent* bei Kosslyn [59]), der zum Kontext korrespondiert, befinden, werden nicht repräsentiert. Objekte, die nur zu einem Teil in diesem Bereich liegen, werden nicht vollständig repräsentiert.

**Granulatsgröße** Die Granulatsgröße (*grain-size*) bestimmt, welche Dimensionalität einem Objekt zugeordnet wird. Ist das Objekt wesentlich kleiner als die Granulatsgröße, so ist es entweder nicht relevant oder kann als Punkt repräsentiert werden. Die Granulatsgröße ist nicht unabhängig von der Größe des Kontextbereichs.

Eine ähnliche Sichtweise auf räumliche Granularität findet sich auch bei anderen Autoren (z.B. in [93, 40]), wobei Granulatsgröße und Granularität häufig synonym verwendet und vom Kontextbereich abgetrennt betrachtet werden. Reitsma und Bittner [93] charakterisieren die raumzeitliche Granularität durch Ausdehnung (*extent*) und Granulatsgröße (*grain*).<sup>18</sup> Diese Auffassung von räumlicher Granularität ist eng an die Analogie zur visuellen Wahrnehmung oder fotografischen Abbildung einer Szene angelehnt: Eine Fotografie hat eine endliche Ausdehnung und eine feste Auflösung.

Auch Galton zieht in seiner Einführung des Begriffs der Repräsentationsgranularität (*representational granularity*) in [40, S. 30] den Vergleich zu einer Fotografie, wobei er (wie z.B. auch Stell und Worboys [104]) Granularität und Granulatsgröße synonym verwendet, also den Aspekt der maximalen Ausdehnung im Kontext auslöst. Galtons Repräsentationsgranularität korrespondiert damit im Wesentlichen zu dem oben entwickelten Konzept der Granulatsgröße in einer Repräsentation.<sup>19</sup> Er stellt dem Begriff der Repräsentationsgranularität den der *intrinsic Granularität* gegenüber:

The intrinsic granularity of something is manifested in the various size-scales at which it exhibits significant structure, where this latter notion is to be expanded in terms of heterogeneity, discontinuity, or, more generally, of reduced symmetry. At these scales, our descriptions tend to be in terms of discrete objects, whereas at intermediate scales the natural form of description is in terms of distributions of matter ('stuff' rather than 'things').  
[40, S. 29f]

---

<sup>18</sup>Bei Reitsma und Bittner sind allerdings Ausdehnung und Granulatsgröße eines raumzeitlichen Phänomens gemeint, und nicht eines Kontextes wie in dieser Arbeit angenommen. Andererseits schließt die hier verwendete Fokussierung auf einen räumlichen Kontext nicht aus, dass dieser von einem räumlichen Objekt oder der räumlichen Ausdehnung eines Ereignisses abgeleitet werden kann (vgl. hierzu auch das Konzept des *externen Ortes* in Abschnitt 5.2).

<sup>19</sup>Galtons Charakterisierung umfasst aber zudem auch nicht-räumliche Granularitätsphänomene.

Galton illustriert diese Charakterisierung intrinsischer Granularität anhand des Beispiels einer Schale, die mit Zuckerwürfeln gefüllt ist. Er stellt Maßstabsgrößen, unter denen signifikante Struktur sichtbar wird, solchen gegenüber, unter denen keine Individuierung von Objekten stattfindet: Individuierbare Objekte finden sich auf den Maßstabsebenen der Schüssel (ca. 10cm), der Zuckerwürfel (1cm), der Zuckerkörnchen (1mm) und der einzelnen Moleküle (1nm). Die zugehörigen Granularitätsebenen sind intrinsisch nach Galton, weil sie von den Objekten der Welt bestimmt werden, nicht von der Repräsentation: „we are not free to choose any scale as a grain-size: at scales of 4 centimeters, or 4 millimeters, or 1 micrometer the content of the sugar bowl does not resolve itself into structured individuals“ [40, S. 30]. Intrinsische Granularität ist damit wichtig für die Beantwortung von Fragen der Objektindividuation und -konzeptualisierung und somit von grundlegender Bedeutung für die Kognitionswissenschaft und Wissensrepräsentation. Die intrinsische Granularität steuert, welche Objektkonzepte bei einem bestimmten Maßstab überhaupt anwendbar sind. Hier gibt es auch enge Bezüge zur Maßstabsabhängigkeit geographischer Konzepte.

Auch die Forschung zur visuellen Objekterkennung nutzt Granularität im Sinne von Maßstabsabhängigkeit für detaillierungsgradabhängige Objektbeschreibungen. Der Detailgrad spielt z.B. in der hierarchischen Formrepräsentation von Objekten nach Marr und Nishihara [72] und in der Formbeschreibung mit Hilfe der von Blum [12] eingeführten Mittelachsen (*medial axes*<sup>20</sup>) eine wichtige Rolle.

Das von Galton beschriebene Phänomen der intrinsischen Granularität lässt sich im Rahmen der Bildverarbeitung mit der Erkennung räumlicher Cluster in Verbindung bringen. Han, Kamber und Tung [48] klassifizieren räumliche Clustering-Techniken, die besonders für das Data-Mining in der geographischen Domäne geeignet sind. Besonders die dichte-basierten (*density-based*) Algorithmen (DBSCAN, OPTICS, DENCLUE) sind nach [48] nützlich, um solche für das menschliche Auge natürliche Cluster-Regionen gleichförmiger Dichte aber beliebiger Form zu finden.<sup>21</sup>

Intrinsische Granularität und Dichte sind zusammenhängende Konzepte. Bennett [7] zeigt, dass das vom Standpunkt der Repräsentation schwierige Konzept der *Waldregion* sich durch Betrachtung der Baumdichte in kreisförmigen Regionen einer bestimmten Größe charakterisieren lässt. Die Größe dieser kreisförmigen Regionen kann wiederum mit dem Begriff der Granulatsgröße in Zusammenhang gebracht werden. Bennett konstatiert, dass das Konzept der Waldregion eine spezielle Form von Vagheit zeigt, die prototypisch ist für die Regionen natürlicher, geographischer Objekte. Wälder können unscharfe Grenzen haben. Aber auch die oben angeführten Zuckerwürfel haben bei genauerer Betrachtung – also in einer Repräsentation mit hohem Detailgrad – nur annäherungsweise die Form eines Würfels. Die einzelnen Zuckerkristalle erzeugen eine raue, an vielen Stellen durchbrochene Oberfläche. Die Frage stellt sich hier, warum ein solches Objekt trotzdem als Würfel bezeichnet und auch in bestimmten Kontexten als solcher repräsentiert werden kann. Diejenigen Kontexte, in denen eine solche Repräsentation

<sup>20</sup>Die Mittelachsen werden auch als Skelette (*skeletons*) bezeichnet. Ein Überblick über den Stand der Forschung zu maßstabsabhängigen Erweiterungen des Mittelachsenansatzes findet sich bei Pizer, Siddiqi, Székely, Damon und Zucker [85].

<sup>21</sup>Zum Begriff des Clustering allgemein vgl. den Überblick von Jain, Duin und Mao [57].

## 1. Einleitung

korrekt ist, sind genau diejenigen, in denen die Granularität im Kontext mit der intrinsischen Granularität des Zuckerwürfels verträglich ist. Es wäre z.B. zu erwarten, dass eine Repräsentation des Zuckerwürfels, in der die Granulatsgröße der Repräsentation (z.B. die Größe eines Voxels) etwas größer als die intrinsische Granulatsgröße, d.h. die ungefähre Größe der Zuckerkristalle, ist, einer Repräsentation eines idealen, mathematischen Würfels gleicht oder zumindest nahe kommt. Die Repräsentation bildet damit den Zuckerwürfel in seiner Form korrekt ab. Die Objekte, die ihn konstituieren, d.h. die einzelnen Zuckerkristalle, werden durch die Voxels aber nur annäherungsweise repräsentiert. Diese Beziehung zwischen intrinsischer und Repräsentationsgranularität wird in den Kapiteln 5 und 7 genauer behandelt.

Betrachtet man die Repräsentation eines Objektes in Kontexten verschiedener Granularitäten, so geht es dabei nicht allein um Übergänge zwischen verschiedenen Detailgraden der Repräsentationen, sondern vor allem um besonders problematische Übergänge zwischen sehr verschiedenen Repräsentationsarten. Solche Übergänge treten in Systemen auf, die einen sehr breiten Bereich von Granularitäten umfassen müssen, die z.B. eine Repräsentation eines Objektes durch eine Koordinate auf sehr grober Ebene und eine Repräsentation durch eine Region, oder Koordinatenmenge auf einer feineren Ebene unterstützen. Die verschiedenen Repräsentationen eines Objektes können in drei grobe Kategorien eingeordnet werden, die sich danach unterscheiden, welche räumlichen Aspekte in den zugehörigen Repräsentationen vornehmlich repräsentiert sind, und zu welchen Bereichen von Granularitätsebenen sie korrespondieren. Diese korrespondierenden Bereiche von Granularitätsebenen werden hier als *Granularitätsschichten* der Repräsentation eines Objektes bezeichnet. Drei Schichten werden unterschieden: die Schicht der Position, die der Form und die der Lokation substantieller Teile, kurz Schicht der Substanz genannt:

**Substanz eines Objektes** Die feinste Schicht der Repräsentation ist die der Substanz. Eine Repräsentation des Zuckerwürfels, die vornehmlich seine Substanz repräsentiert, wäre z.B. eine Liste der Mittelpunkte von Zuckerkristallen. Dargestellt ist hier also nicht das eigentliche Objekt, sondern vielmehr die es konstituierenden Objekte.

**Form eines Objektes** Die mittlere Schicht der Repräsentation ist die der Form. Die Repräsentation des Zuckerwürfels durch die acht Eckkoordinaten eines Würfels wäre ein Beispiel. Komplexere Objekte können auf verschiedenen Granularitätsebenen verschiedene Formrepräsentationen haben. Ein Fluss z.B. könnte grob als Linie skizziert werden, aber auch feiner durch ein komplexes Polygon, das auch detaillierte Formaspekte wie ein Flussdelta oder Inseln erkennbar macht.

**Position eines Objektes** Die gröbste Schicht ist die der Position. Sie dient der Lokalisierung eines Objektes im Rahmen eines größeren räumlichen Zusammenhangs oder Layouts. In solchen Zusammenhängen reicht die Repräsentation durch einen charakteristischen Punkt des Objektes aus. Beispiele sind überall dort gegeben, wo ein Objekt durch eine einzige Koordinate repräsentiert ist. Ein GPS (*global*

*positioning system*) etwa liefert grobe Positionsinformation, die zudem noch mehr oder weniger ungenau ist.

Bezogen auf die intrinsische Granularität ist die Schicht der Formrepräsentationen derjenige Bereich von Granularitätsebenen, in dem das Objekt in seiner diskreten Struktur individuiert wird. Insofern sind die anderen beiden Schichten gewissermaßen Randbereiche der Repräsentation, in denen andere Objekte und Konzepte in den Vordergrund treten können.

### 1.3. Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil werden die formalen Grundlagen für eine Theorie räumlicher Granularität beschrieben. Hierzu sind drei Schritte notwendig. Zunächst wird in Kap. 2 die in dieser Arbeit eingenommene Perspektive auf räumliche Strukturen und die verwendete Methodik der axiomatischen Charakterisierung vorgestellt. Verwandte Ansätze zur räumlichen Granularität werden diskutiert. Formaler Ausgangspunkt ist die axiomatische Geometrie für Inzidenz und Anordnung nach Eschenbach und Kulik [30]. Diese wird um ein möglichst offenes Konzept von Regionen angereichert. Die Beziehung zwischen der in der weiteren Arbeit gewonnenen Geometrie für räumliche, granulare Entitäten und der bekannten Axiomatisierung der Geometrie durch Hilbert [52] wird im Überblick dargestellt. Im zweiten Schritt wird in Kap. 3 eine auf Ausdehnung basierende Charakterisierung von Granularität vorgestellt, die u.a. sowohl für die Beschreibung räumlicher als auch zeitlicher Granularität verwendet werden kann. Die Ergebnisse dieser beiden Kapitel werden in Kap. 4 zusammengeführt, um eine für Phänomene räumlicher Granularität taugliche Konzeption räumlicher Ausdehnung zu finden, auf der eine Granularitätsstruktur aufsetzen kann.

Im zweiten Teil der Arbeit wird dann gezeigt, dass das formale Fundament auch tatsächlich geeignet ist, zahlreiche Phänomene räumlicher Granularität zu erfassen. In Kap. 5 wird eine formale Grundlage für das Prinzip des Granularitätsebenenwechsels vorgestellt, der sich in der obigen Diskussion (Abschnitt 1.2) in Begriffen wie *zooming*, *grain* und *extent* widerspiegelt. Es können dann die für die drei Granularitätsschichten charakteristischen Ausdehnungen einer Objektregion bestimmt werden.

Darauf aufbauend wird in Kap. 6 die äußere Granularitätsstruktur des Objektes, seine Einbettung in räumliche Kontexte größerer Granularität untersucht, und es werden Anforderungen an Repräsentationen formuliert, die im Zusammenhang mit dem Begriff der Dimensionalität in Abschnitt 1.2 angesprochen wurden. Kapitel 7 zeigt, wie sich der Übergang von der Repräsentation eines Objektes zu der seiner Teile auf feinerer Granularität gestaltet. Hier werden die im Zusammenhang mit dem Begriff der *intrinsischen Granularität* diskutierten Phänomene des Übergangs zwischen einer Repräsentation eines Objektes und einer Repräsentation seiner Teile untersucht.

Im abschließenden Kapitel 8 werden Möglichkeiten der Anwendung, offene Fragen und Grenzen des Ansatzes im Rahmen einer Gesamtbewertung zusammengefasst und diskutiert.

## 1. Einleitung

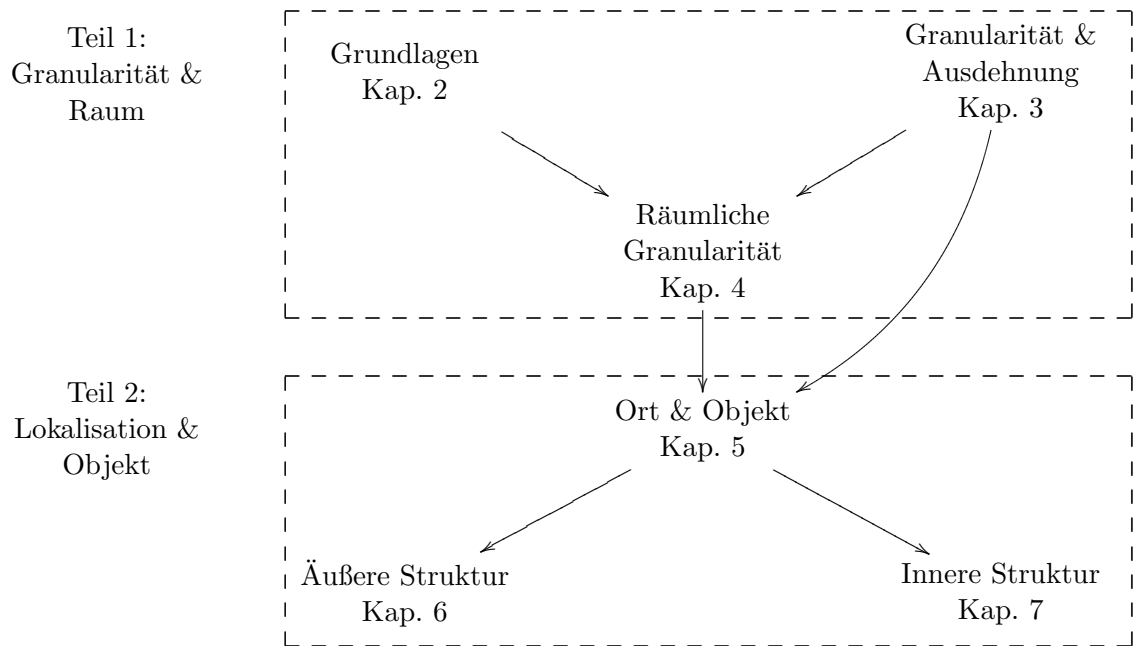


Abbildung 1.3.: Aufbau der Arbeit: direkte formale und inhaltliche Abhängigkeiten

Die formalen und inhaltlichen Abhängigkeiten dieser Arbeit sind in Abb. 1.3 im Überblick dargestellt. Die Kapitel 2 und 3 genau wie die Kapitel 6 und 7 bauen nicht direkt aufeinander auf und können daher auch in anderer Reihenfolge gelesen werden.

**Teil I.**

**Granularität und Raum**





## 2. Grundlagen

Der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz zur Repräsentation räumlicher Granularität fußt auf einer geometrischen Charakterisierung räumlicher Entitäten und Relationen. Ziel ist, die in Kap. 1 informell beschriebenen für räumliche Granularität grundlegenden Entitäten, Konzepte und Relationen (wie *grain size*, *grain*, *extent*, *punktuell in einem räumlichen Kontext*), in einen konsistenten, gemeinsamen, axiomatischen Rahmen zu fassen.

Eine mit Hilfe der axiomatischen Methode<sup>1</sup> erstellte Charakterisierung geht von undefinierten Basiskonzepten – in der Geometrie z.B. *Punkt* oder *Inzidenz* – aus, die zueinander durch Formulierung von grundlegenden Prinzipien, den Axiomen, in Beziehung gesetzt werden. Aufbauend auf diesen Basisentitäten können dann zusätzliche Konzepte definiert und in darauf aufbauenden Axiomen und Definitionen verwendet werden. Die Geschichte der axiomatischen Methode geht auf Euklids Elemente zurück und erstreckt sich bis in die Gegenwart; in der Informatik wird sie z.B. angewandt in der Spezifikation abstrakter Datentypen und erlaubt im Gegensatz zur konstruktiven Methode größere Implementationsunabhängigkeit.

Hauptvorteil der axiomatischen Methode ist eine vollständige mathematisch-logische Erfassung eines wissenschaftlichen Teilbereiches unabhängig von außerhalb der Theorie liegenden Konzepten. Durch Axiome kann die Bedeutung der Basiskonzepte festgelegt werden, Definitionen sind demgegenüber stets abhängig von den in ihnen vorkommenden Basiskonzepten. Ein Axiomensystem ist eindeutig hinsichtlich der von ihm erfassten Konzepte, kann aber mehr als ein Modell haben; die Gruppenaxiome z.B. gelten für verschiedene mathematische Strukturen, die aber alle eben die beschriebenen Eigenschaften aufweisen. Dies erlaubt die Systematisierung und in der Folge die systematische Untersuchung mathematischer Strukturen. Ein Theorem, welches aus einem Axiomensystem folgt, ist in allen Strukturen gültig, die die Axiome erfüllen. Axiomensysteme können zudem bezüglich ihrer Restriktivität verglichen werden. Ein stark einschränkendes Axiomensystem hat den Vorteil dahingehend eindeutiger zu sein, dass nur ganz bestimmte, nämlich die intendierten Modelle erfasst sind. Ein weniger restriktives Axiomensystem hat dagegen den Vorteil allgemeiner zu sein, d.h., dass die bewiesenen Resultate für eine größere Menge von Modellen gelten und auf weniger Vorannahmen aufbauen.

Die axiomatische Methode wurde in der kognitionswissenschaftlichen Forschung zu Raumrepräsentationen und Prozessen, die auf diesen arbeiten, erfolgreich eingesetzt. Habel und Eschenbach [46] zeigen, dass axiomatische Charakterisierungen die Möglichkeit bieten, abstrakte räumliche Strukturen beschreiben zu können, die in verschiedenen kognitiven Systemen einsetzbar sind. Eine Axiomatisierung von abstrakten Anordnungs-

---

<sup>1</sup>Für eine Einführung s. Carnap [14].

strukturen etwa kann Strukturen beschreiben, die von Systemen zur Verarbeitung von räumlichem Wissen genauso genutzt werden können wie z.B. von Systemen zur Verarbeitung von zeitlichem Wissen.<sup>2</sup>

Ausgangspunkt der vorliegenden Axiomatisierung ist die Annahme, dass wesentlich für eine Charakterisierung räumlicher Granularität die Konzepte von Ausgedehtheit und Kongruenz sind. Nach der von Habel und Eschenbach [46] gegebenen Aufteilung in Gruppen räumlicher Konzepte gehören Kongruenz und Aspekte der Ausgedehtheit wie Volumen und Länge in die Gruppe der metrischen Konzepte. Ich werde diese Sprechweise zunächst übernehmen. Metrik in dem hier gebrauchten Sinne ist aber nicht zu verwechseln mit quantitativer Erfassung und Berechnung. Ziel ist eine auch im qualitativen räumlichen Schließen (*qualitative spatial reasoning*) verwendbare Repräsentation von Ausgedehtheit und Kongruenz. Für die axiomatische Charakterisierung dieser Raumkonzepte wird zunächst eine zugrunde liegende Raumtheorie benötigt. Dies kann die Topologie sein – diesen Weg verfolgen z.B. Borgo, Guarino und Masolo [13], Bennett [6] und Dugat, Gambarotto und Larvor [24] – oder die Geometrie, die für diese Arbeit als Grundlage gewählt wurde.

Axiomatische Geometrie wurde in der kognitionswissenschaftlichen Forschung zu Raumrepräsentationen und Prozessen, die auf diesen arbeiten, erfolgreich eingesetzt, z.B., um die in der Semantik der natürlichsprachlichen Terme *links*, *rechts*, *vor*, *hinter* kodierte Anordnungsinformation zu charakterisieren (Eschenbach und Kulik [30]), aber auch in der Beschreibung von Formmerkmalen wie für die Semantik des Terms *Ecke* (Eschenbach, Habel, Kulik und Leßmöllmann [29]). Auch die Konzepte von Richtung [98] und Richtungswechsel [100] lassen sich geeignet geometrisch charakterisieren.

### **Regionenbasierte Ansätze zur Lokation von Objekten**

In der Geometrie werden die hier zentralen Konzepte der Ausdehnung und Größenkongruenz über die Distanz zwischen Punkten, bzw. über die Längen von Strecken charakterisiert. Im Gegensatz dazu werden diese Konzepte hier aufbauend auf Regionen und speziellen, ausgedehnten, geometrischen Entitäten, den *Orten*, bestimmt (s. Kap. 4). Hierdurch ist eine Integration mit anderen im qualitativen räumlichen Schließen angesiedelten regionenbasierten Ansätzen und besonders eine Integration mit mereotopologischen Ansätzen zur Objektlokalisierung möglich.

Ziel mereotopologischer Ansätze ist, die in der Nachfolge von Russell [95] als problematisch angesehene mengentheoretische Fassung der Topologie durch eine Theorie zu ersetzen, die Punkte als sekundäre – also abgeleitete, nachgeordnete – Entitäten, Regionen hingegen als primäre räumliche Entitäten und nicht als Mengen von Punkten annimmt. Die Mereologie ist dabei die zugrundeliegende Theorie der *Teil-von*-Beziehung zwischen Regionen, auf der eine Topologie als Theorie der Relation der *Verbundenheit* (*connection*) von zwei Regionen aufbauen kann. Wichtiges Resultat ist dabei, dass Eigenschaften, die der Allgemeinverstand Regionen zuschreibt, wie z.B. Zusammenhang der Teilregionen eines Ganzen (*self-connectedness*) sich gut beschreiben lassen. Eine umfassende Darstellung findet sich bei Simons [102] und in den Arbeiten von Casati und Varzi,

---

<sup>2</sup>Die Charakterisierung von Granularität in Kap. 3 ist entsprechend auch sowohl auf zeitliche als auch auf räumliche Strukturen anwendbar.

vor allem in [17].

Regionenbasierte Ansätze lassen sich erfolgreich im Bereich des qualitativen räumlichen Schließens (*qualitative spatial reasoning*, s. Cohn und Hazarika [18] für einen Überblick) einsetzen. Ein einflussreicher mereotopologischer Ansatz aus diesem Bereich ist der *region-connection-calculus*-Ansatz von Randell, Cui und Cohn [90] (kurz RCC). Ein verwandter Ansatz ist der von Asher und Vieu [4], auf dem Dugat, Gambarotto und Larvor [24] eine Kongruenzgeometrie für Formrepräsentation und -vergleich aufbauen. Sie charakterisieren hierzu geometrische Begriffe, wie Größe, Winkel und Richtung auf Basis eines Prädikates *Kugel* (*sphere*) über Regionen.<sup>3</sup> Ziel ihrer Untersuchung ist die Analyse konvexer Teilkomponenten einfacher Regionen – d.h. zusammenhängender Regionen ohne Löcher – oder Polygone. Der von ihnen verwendete Algorithmus zur Dekomposition einer Region in konvexe Teilregionen arbeitet dabei auf einer Repräsentation der Region als einer (möglichst kleinen) Menge der in ihr enthaltenen maximalen Kugeln, die etwa aus dem generalisierten Voronoi-Diagramm gewonnen werden kann.<sup>4</sup> Aspekte der Skalierung und Detailgenauigkeit der Repräsentation sind dabei über die Größe der enthaltenen Kugeln steuerbar. [24] kann somit als Axiomatisierung der Mittelachsen-Ansätze der Formrepräsentation gesehen werden.

## 2.1. Geometrische Basiskonzepte

Ausgangspunkt für die Überlegungen dieser Arbeit ist eine geometrische Charakterisierung des zweidimensionalen Raumes. Die Beschränkung auf die Ebene bietet sich aus zwei Gründen an: zum einen finden zweidimensionale räumliche Strukturen Verwendung in zahlreichen informatischen Anwendungen: Monitore erlauben die Darstellung dreidimensionaler Daten nur indirekt und direkt dreidimensionale Darstellungsmedien sind noch nicht weit verbreitet. Aber auch im Alltag werden zweidimensionale räumliche Strukturen eingesetzt: z.B. in Skizzen und Karten. Zum anderen ermöglicht die Beschränkung auf die ebene Geometrie eine kompaktere Darstellung der charakterisierten Konzepte räumlicher Granularität, ohne dass für die Argumentation Wesentliches ausgelassen werden müsste. Die eingeführten Konzepte sind aber nicht auf den zweidimensionalen Raum beschränkt. Die Erweiterungen für den höherdimensionalen Fall werden daher ebenfalls kurz erörtert, wo es notwendig ist.

Zur Charakterisierung der Konzepte wurde eine sortierte Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit verwendet. Eine sortierte Logik zu verwenden, ist in der axiomatischen Geometrie übliches Vorgehen. Die Restriktion auf Prädikatenlogik erster Stufe ergibt sich aus dem Wunsch, zu Konzepten zu gelangen, die möglichst gut für informatische Anwendungen weiterverwendet werden können. Prädikatenlogik erster Stufe ist hier der

---

<sup>3</sup>Die Idee, Kugeln als Basisentitäten einer regionenbasierten, axiomatischen Geometrie zu nutzen, geht auf Tarski [107] zurück und wurde von Borgo, Guarino und Masolo [13] in das mereotopologische Gerüst eingebettet.

<sup>4</sup>Das generalisierte Voronoi-Diagramm gehört zu den Formrepräsentationsansätzen auf Basis von Mittelachsen (s. den Überblick von Pizer, Siddiqi, Székely, Damon und Zucker [85]). Es wird auch eingesetzt in der Roboternavigation, s. Moratz und Wallgrün [77].

## 2. Grundlagen

Axiomengruppen	Entsprechungen in dieser Arbeit	Kapitel
I: Inzidenz	Inzidenzaxiome $\iota$	Kap. 2
II: Anordnung	Anordnungsaxiome $\beta$	Kap. 2
III: Kongruenz	Axiome über Orte und Streifen. Axiome der Längenkongruenz (III.1–3): III.1 gilt nur in abgeschwächter Form. III.2 lässt sich herleiten. III.3 muss nicht erfüllt sein. Winkelkongruenz (III.4,5) ist nicht erfasst.	Kap. 4
IV: Parallelenaxiom	Parallelenaxiome $\parallel$	Kap. 2
V: Stetigkeit	nicht erfasst	

Tabelle 2.1.: Die Axiomengruppen nach Hilbert [52] und ihre Entsprechungen in dieser Arbeit.

geeignete Kompromiss zwischen allgemeiner Zugänglichkeit, Ausdrucksmächtigkeit und Entscheidbarkeit: als Beschreibungsformalismus ist Prädikatenlogik gut etabliert und erhöht damit die Zugänglichkeit der Arbeit; die Semi-Entscheidbarkeit sichert zumindest rudimentäre Anwendbarkeit für den Bereich des räumlichen Schließens. Es ist allerdings anzunehmen, dass sich Beschreibungsformalismen finden lassen, die durch gewisse Einschränkungen der Ausdrucksmächtigkeit bessere Inferenzeigenschaften aufweisen.<sup>5</sup>

Die in diesem Kapitel festgelegten allgemeinen Grundbegriffe sollen nun zunächst die geometrischen Basisentitäten und -relationen bestimmen. Die Axiomatisierung entspricht im wesentlichen einer planaren Fassung der Geometrie nach Hilbert [52]. Hilbert teilt die Axiomatisierung der Geometrie in fünf Axiomengruppen ein. Die Axiome der Verknüpfung oder Inzidenz (Gruppe I), die Axiome der Anordnung (II) und das Axiom der Parallelen (IV) können als wohl erprobtes Fundament in diese Arbeit im wesentlichen direkt übernommen werden und werden in diesem Kapitel kurz aufgeführt. Differenzen gibt es vor allem im Bereich der Axiome der Kongruenz (III), die für den hier verwendeten Begriff räumlicher Granularität wichtig sind. Von den Axiomen der Gruppe III sind allein die Axiome III.1-3 Axiome zur Längenkongruenz und damit für die hier interessierende Axiomatisierung von Größenkongruenz wichtig. Die Axiome III.4,5 charakterisieren Winkelkongruenz, ein Konzept, das in dieser Arbeit nicht benötigt wird. Die Stetigkeitsaxiome (Gruppe V) sichern die Messbarkeit von Strecken (Archimedisches Axiom, V.1) und die Vollständigkeit des Axiomensystems (V.2). Sie lassen sich nicht ohne weiteres in den formalen Rahmen, auf den diese Arbeit beschränkt sein soll, einbetten. Für das Archimedische Axiom wird Arithmetik benötigt, V.2 ist nur in Prädikatenlogik zweiter Stufe formulierbar. Tabelle 2.1 stellt die Beziehung zwischen der Hilbertschen und der hier verwendeten Axiomatisierung dar.

In diesem Kapitel werden die grundlegenden geometrischen Entitäten (Punkte, Geraden, Regionen) und Relationen (Inzidenz, Anordnung, Parallelität) charakterisiert. Tabelle 2.2 zeigt einen Überblick über die in dieser Arbeit charakterisierten Sorten von geometrischen Entitäten. Die in Kap. 4 charakterisierten Orte und Streifen werden für

<sup>5</sup>Vgl. hierzu z.B. die Resultate von Kutz, Sturm, Suzuki, Wolter und Zakharyashev [64], die – ebenfalls von einer unrestringierten prädikatenlogischen Beschreibung ausgehend – Entscheidbarkeitsprobleme von Logiken metrischer Räume behandeln.

Entitäten	Sorten	Variablen	Charakteris.
	Punkte	$P, P', P_1, Q, R \dots$	Kap. 2
	Geraden	$g, g', g_1 \dots$	
unigranulare	Orte	$p, p', p_1 \dots$	Kap. 4
	Streifen	$t, t', t_1 \dots$	
multigranulare	Objektregionen	$A, A', A_1 \dots$	Kap. 2

Tabelle 2.2.: Übersicht über die geometrisch charakterisierten Arten von Entitäten, ihre Sorten und die zugehörigen Variablennamen.

die Axiomatisierung räumlicher Granularität auf Basis von Größenkongruenz eingesetzt. Diese unigranularen, d.h. einer eindeutigen Granularität zuordbaren, Entitäten können dann in der Analyse der beliebig komplexen, multigranularen Regionen im zweiten Teil der Arbeit eingesetzt werden. Zwei für diese Analyse wichtige Konzepte werden aber bereits in Abschnitt 2.3 in einer auf Punkten basierenden Fassung vorgestellt: das Konzept des *projektiven Zusammenhangs* und das des *umschlossenen* oder *internen Punktes*.

## 2.2. Inzidenz und Anordnung

Als Basis für den geometrischen Raum wird hier eine axiomatische Charakterisierung gegeben, die in weiten Teilen den ersten Axiomengruppen der planaren euklidischen Geometrie nach Hilbert [52] entspricht. Enthalten sind Inzidenzaxiome (nach Eschenbach und Kulik [30]) und ein Parallelenaxiom, eine Anordnungsstruktur, die den von Eschenbach und Kulik in [30] und von Eschenbach, Habel, Kulik und Leßmöllmann in [29] definierten Anordnungsstrukturen entspricht, aber auch mit der von mir in [97, 98] aufgestellten geometrischen Charakterisierung von Richtungskonzepten verträglich ist. Die Axiome der Inzidenz ( $\iota$ ) beschreiben die grundlegenden Beziehungen zwischen Punkten und Geraden: Auf jeder Geraden liegen zumindest zwei Punkte (AI1). Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Gerade, die durch die Punkte verläuft (AI2), (AI3). Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht mit ihr inzidiert (AI4).

$$\forall g : \exists P, Q : P \neq Q \wedge P \iota g \wedge Q \iota g \quad (\text{AI1})$$

$$\forall P, Q : \exists g : P \iota g \wedge Q \iota g \quad (\text{AI2})$$

$$\forall P, Q, g_1, g_2 : P \neq Q \wedge P \iota g_1 \wedge P \iota g_2 \wedge Q \iota g_1 \wedge Q \iota g_2 \rightarrow g_1 = g_2 \quad (\text{AI3})$$

$$\forall g : \exists P : \neg P \iota g \quad (\text{AI4})$$

Die Relation der Inzidenz lässt sich erweitern zu einer Relation zwischen beliebigen geometrischen Entitäten und den Punkten, die in ihnen liegen. Alle geometrischen Entitäten in dieser Arbeit sind stets vollständig durch die mit ihnen inzidenten Punkte charakterisiert. Zwischen zwei beliebigen geometrischen Entitäten  $x$  der Sorte  $\mathcal{X}$  und  $y$  der Sorte  $\mathcal{Y}$ , die die Relation der Inzidenz unterstützen, lassen sich Relationen *Teil-von* ( $\sqsubseteq$ ) und *Überlappung* ( $\circ$ ) gemäß dem folgenden Schema definieren:  $x$  ist in  $y$  *enthalten* (oder  $x$  ist *Teil von*  $y$ ), wenn alle Punkte, die mit  $x$  inzidieren, auch auf  $y$  liegen (D2).  $x$  *überlappt*

## 2. Grundlagen

$y$ , wenn es Punkte gibt, die mit beiden inzidieren (D3):

$$x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall P : P \iota x \rightarrow P \iota y \quad (\text{D2})$$

$$x \circ y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists P : P \iota x \wedge P \iota y \quad (\text{D3})$$

Damit die Schemata auch auf einzelne Punkte anwendbar sind, soll  $\iota$  auch als Relation über Punkten gelten können und hier mit der Identität übereinstimmen:

$$P \iota Q \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P = Q \quad (\text{D4})$$

Für die Charakterisierung einer Anordnungsstruktur nützlich ist die Relation der Kollinearität (*col*), die für drei verschiedene Punkte gilt, die auf derselben Geraden liegen (D5).

$$\text{col}(P, Q, R) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P \neq Q \wedge P \neq R \wedge Q \neq R \wedge \exists g : P \iota g \wedge Q \iota g \wedge R \iota g \quad (\text{D5})$$

Die Axiome (A $\beta$ 1)–(A $\beta$ 7) sichern grundlegende Anordnungsstrukturen in der Ebene. Anordnung von Punkten auf einer Geraden wird mit Hilfe der dreistelligen Relation *zwischen* ( $\beta$ ) axiomatisiert, wobei  $\beta(P, Q, R)$  folgendermaßen zu lesen ist: der Punkt  $Q$  liegt auf einer Geraden zwischen den Punkten  $P$  und  $R$ .<sup>6</sup> Wenn drei Punkte in der Relation  $\beta$  stehen, so liegen sie auf einer Geraden (A $\beta$ 1). Liegt  $Q$  zwischen  $P$  und  $R$ , so liegt  $Q$  auch zwischen  $R$  und  $P$  (A $\beta$ 2), aber  $P$  liegt nicht zwischen  $Q$  und  $R$  (A $\beta$ 3). Liegen drei verschiedene Punkte auf derselben Geraden, so liegt einer zwischen den beiden anderen (A $\beta$ 4). Gilt  $\beta(P, Q, R)$  und ein weiterer Punkt  $Q'$  liegt ebenfalls auf derselben Geraden wie  $P$  und  $Q$ , so überträgt sich die Ordnung und  $Q'$  liegt in Bezug auf  $Q$  auf der Seite von  $P$  ( $\beta(Q', Q, R)$ ), oder auf der Seite von  $R$  ( $\beta(P, Q, Q')$ ) (A $\beta$ 5). Auf Geraden soll es zudem keinen letzten Punkt bezüglich  $\beta$  geben: Für je zwei Punkte  $P, Q$  gibt es einen weiteren Punkt  $R$  jenseits von  $P$  und  $Q$  ( $\beta(P, Q, R)$ ) (A $\beta$ 6). Planarität wird durch das Axiom von Pasch (A $\beta$ 7) gesichert: Informell besagt das Axiom, dass jede Gerade, die zwischen zwei Eckpunkten  $P_1, P_3$  in ein Dreieck  $P_1, P_2, P_3$  eintritt, das Dreieck zwischen  $P_1$  und  $P_2$  oder zwischen  $P_2$  und  $P_3$  wieder verlassen muss. Aus (A $\beta$ 7) folgt auch die Dichte von Punkten auf einer Geraden.

$$\forall P, Q, R : \quad \beta(P, Q, R) \rightarrow \text{col}(P, Q, R) \quad (\text{A}\beta 1)$$

$$\forall P, Q, R : \quad \beta(P, Q, R) \rightarrow \beta(R, Q, P) \quad (\text{A}\beta 2)$$

$$\forall P, Q, R : \quad \beta(P, Q, R) \rightarrow \neg\beta(Q, P, R) \quad (\text{A}\beta 3)$$

$$\forall P, Q, R : \quad \text{col}(P, Q, R) \rightarrow \beta(P, Q, R) \vee \beta(Q, P, R) \vee \beta(P, R, Q) \quad (\text{A}\beta 4)$$

$$\forall P, Q, Q', R : \quad \beta(P, Q, R) \wedge \text{col}(Q, Q', P) \rightarrow \beta(P, Q, Q') \vee \beta(Q', Q, R) \quad (\text{A}\beta 5)$$

$$\forall P, Q : \quad P \neq Q \rightarrow \exists R : \beta(P, Q, R) \quad (\text{A}\beta 6)$$

$$\forall P_1, P_2, P_3, g : \neg P_1 \iota g \wedge \neg P_2 \iota g \wedge \neg P_3 \iota g \wedge [\exists Q : Q \iota g \wedge \beta(P_1, Q, P_3)] \rightarrow \exists R : R \iota g \wedge (\beta(P_1, R, P_2) \vee \beta(P_2, R, P_3)) \quad (\text{A}\beta 7)$$

<sup>6</sup>Vgl. aber auch die Arbeiten von Habel [43] und Eschenbach, Habel und Kulik [28], die zeigen, wie sich das Konzept der *Zwischenheit* über Punkte auf Geraden hinaus erweitern lässt zu einer Relation auf Punkten oder sogar Regionen auf beliebigen Wegen oder Kurven.

Aufgrund der Planarität lassen sich zwei Seiten einer Geraden bestimmen. Zwei Punkte  $P$  und  $Q$ , die nicht auf der Geraden  $g$  liegen, liegen auf derselben Seite von  $g$  (D7), falls es zwischen ihnen keinen Punkt der Geraden gibt, oder auf verschiedenen Seiten (D6), wenn ein Punkt der Geraden dazwischen liegt:

$$\text{diffS}(P, Q, g) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg(P \iota g \vee Q \iota g) \wedge \exists R : \beta(P, R, Q) \wedge R \iota g \quad (\text{D6})$$

$$\text{selbeS}(P, Q, g) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg(P \iota g \vee Q \iota g) \wedge \neg \exists R : \beta(P, R, Q) \wedge R \iota g \quad (\text{D7})$$

Parallelität von Geraden wird in dieser Arbeit ein wesentliches Hilfsmittel zur Charakterisierung von Ausgedehntheit sein (Kap. 4). Liegen zwei Regionen beide zwischen zwei parallelen Geraden, so kann man bereits feststellen, dass die beiden Regionen zumindest in der durch die beiden Parallelen beschränkten Richtung keine größere Ausdehnung haben. Parallelität gilt zwischen zwei Geraden, wenn sie keine Punkte gemeinsam haben (D8).

$$g \parallel g' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg \exists P : P \iota g \wedge P \iota g' \quad (\text{D8})$$

Die Existenz von Parallelen und Transitivität des reflexiven Abschlusses der Parallelität können nun gefordert werden: Für jeden Punkt  $P$  außerhalb einer Geraden  $g$  gibt es eine Parallele  $g'$  durch  $P$  (A1). Ist  $g_1$  Parallele zu  $g_2$ , und  $g_2$  ihrerseits Parallele zu  $g_3$ , so sind  $g_1$  und  $g_3$  identisch oder parallel (A2).

$$\forall g, P : \neg P \iota g \rightarrow \exists g' : P \iota g' \wedge g' \parallel g \quad (\text{A1})$$

$$\forall g_1, g_2, g_3 : g_1 \parallel g_2 \wedge g_2 \parallel g_3 \rightarrow g_1 \parallel g_3 \vee g_1 = g_3 \quad (\text{A2})$$

## 2.3. Regionen

Regionen dienen im zweiten Teil dieser Arbeit als geometrische Repräsentationen der räumlichen Ausdehnung von Objekten. Es ist damit eine ontologische Frage, welche Regionen im Raum existieren sollten und welche nicht. Mereotopologische Ansätze zur Ontologie, wie der von Casati und Varzi in [17] beschriebene, richten daher besondere Aufmerksamkeit auf ein möglichst natürliches und kognitiv adäquates Regionenkonzept. Demgegenüber verhält sich der hier beschriebene Ansatz so weit wie möglich neutral gegenüber ontologischen Fragen zu Objektregionen. Nicht nur die einfachen Objekte der Konzeptualisierung, wie die von Pratt und Lemon [86] untersuchten Polygonregionen, sondern auch die selbst bei beliebiger Verfeinerung immer noch komplexen Objekte der Wahrnehmung, wie etwa eine Küstenlinie als fraktales Objekt, sollen unter diesen Regionenbegriff gefasst werden können.

Als Regionen sollen in dieser Arbeit alle geometrischen Entitäten gelten können, die in der Inzidenzrelation zu einem oder mehreren Punkten stehen. Ihre Identität wird über die Inzidenz von Punkten bestimmt. Diese Fassung ist so allgemein wie möglich gehalten. Sie ist ontologisch sparsam und weitgehend neutral, da die Existenz allgemeiner Regionen nicht gefordert oder restringiert ist. Existenz wird in dieser Arbeit allein für speziellere geometrische Entitäten gefordert. Geraden z.B. erfüllen die Bedingungen für Regionen.

## 2. Grundlagen

Es ist aber nicht gesichert, dass zu jeder Geraden auch eine Region, die dieselben Punkte beinhaltet, existiert.

Regionen inzidieren mit mindestens einem Punkt (A3) und sind identisch genau dann, wenn sie mit denselben Punkten inzidieren (A4).

$$\forall A : \exists P : P \iota A \quad (\text{A3})$$

$$\forall A, A' : A = A' \leftrightarrow [\forall P : P \iota A \leftrightarrow P \iota A'] \quad (\text{A4})$$

Diese sehr offene Charakterisierung lässt ein breites Spektrum an möglichen Regionen zu, das im Vergleich zu den in mereotopologischen Ansätzen diskutierten Regionenkonzepthen zu unspezifisch erscheinen mag, um als Basis der räumlichen Repräsentation von Objekten zu dienen. Tatsächlich ist es aber notwendig von einem so offenen Konzept auszugehen, um eines der Ziele dieser Arbeit zu erreichen: die konzeptuelle Adäquatheit und Stabilität von vereinfachenden räumlichen Repräsentationen beliebiger komplex strukturierter Objekte formal erfassen zu können. Es wäre für dieses Ziel hinderlich bereits von einem gutartigen Regionenkonzepth auszugehen, es ist aber förderlich, bestimmte quasi topologische Eigenschaften geometrisch beschreiben zu können.

Der topologische Begriff des Zusammenhangs ist ein wichtiges Konzept der oben angeführten regionenbasierten Ansätze. Topologisch zusammenhängende Objekte z.B. können nicht beliebig über die Ebene verteilt sein. Für eine Charakterisierung von Ausdehnung ist diese Eigenschaft wichtig. Eine geometrische Eigenschaft, die ein für die Charakterisierungen in Kap. 4 ausreichendes Konzept von Zusammenhang bietet, ist die des *projektiven Zusammenhangs*. Geometrische Entitäten, die diese Eigenschaft haben, können zumindest nicht beliebig über die Ebene verstreut sein. Eine Region, oder andere geometrische Entität, heißt projektiv zusammenhängend (*proj*), wenn es keine Gerade gibt, die zwischen Punkten der Region hindurchläuft, ohne selbst die Region zu schneiden (D9).<sup>7</sup> Im topologischen Sinne zusammenhängende Regionen, aber auch andere, erfüllen diese Bedingung. Abbildung 2.1 zeigt drei Beispiele für projektiv zusammenhängende Regionen, die nicht zusammenhängend im topologischen Sinne sind, und drei Beispiele für nicht projektiv zusammenhängende Regionen mit einer sie teilenden Geraden. Wichtig für die geometrischen Charakterisierungen in Kap. 4 ist, dass die Region für Geraden undurchlässig ist. Demgegenüber zerfällt eine nicht projektiv zusammenhängende Region in zwei oder mehr Teile: Ein (hier zweidimensionaler) Betrachter, der entlang einer teilenden Geraden auf ein nicht projektiv zusammenhängendes Objekt blickt, sieht zwei (oder mehr) nicht zusammenhängende Teilobjekte: In der Projektion ist das Objekt nicht mehr zusammenhängend.

Mit dieser Eigenschaft eng verwandt ist die Relation des *internen oder umschlossenen Punktes int* (D10). Sie gilt zwischen einer geometrischen Entität  $x$  und einem Punkt  $P$  genau dann, wenn  $P$  in jeder Richtung von Punkten aus  $x$  umgeben ist, also auf jeder Geraden  $g$ , die durch  $P$  geht,  $P$  zwischen Punkten aus  $x$  liegt, die ebenfalls auf  $g$  liegen. Dabei ist nicht entscheidend, ob der Punkt  $P$  selbst in  $x$  ist oder nicht. *int* liefert uns

<sup>7</sup>Eine äquivalente Definition, die auf einer mit Hilfe von Halbgeraden charakterisierten Anordnungsstruktur basiert, habe ich in [97] aufgestellt.



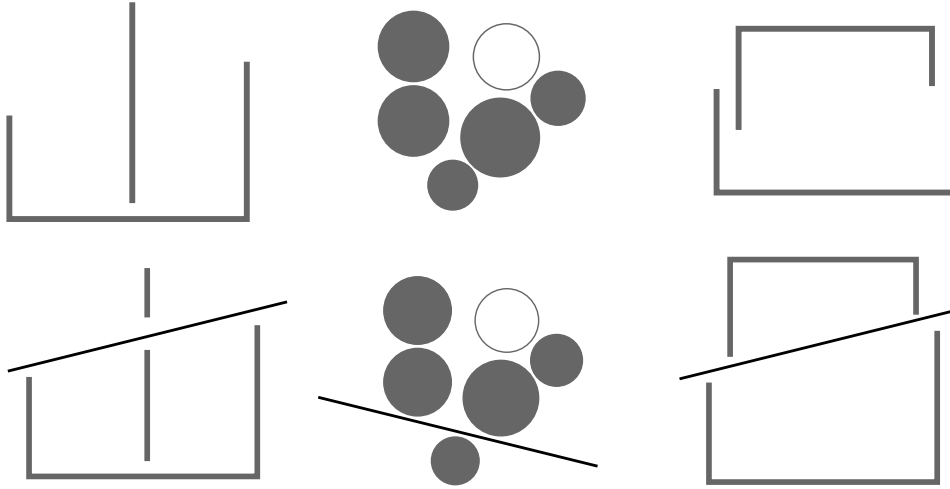


Abbildung 2.1.: Drei projektiv zusammenhängende Regionen (oben) und ähnliche Regionen, die nicht projektiv zusammenhängend sind, (unten) mit den sie teilenden Geraden (schwarz).

somit diejenigen Punkte, von denen aus es keinen geraden Weg nach außen gibt. Wir erreichen damit eine sehr schwache Konzeption vom Inneren und Äußeren einer Region. Im zweiten Teil der Arbeit, in welchem die Lokalisation von Objekten im Raum untersucht wird, wird das Innere von granularen Objektregionen in einer ähnlichen Weise genauer untersucht (vgl. vor allem Kap. 5 und 7 zu dieser Frage). Da beide Relationen auf beliebige geometrische Entitäten angewendet werden können, sollen sie hier als allgemeines Schema über Elemente  $x$  einer Sorte  $\mathcal{X}$  definiert werden.

$$\begin{aligned} \text{proj}(x) &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall g, P, Q : P \iota x \wedge Q \iota x \wedge \text{diffS}(P, Q, g) \\ &\rightarrow \exists R : R \iota g \wedge R \iota x \end{aligned} \quad (\text{D9})$$

$$\begin{aligned} \text{int}(x, P) &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall g : P \iota g \rightarrow \\ &\exists Q_1, Q_2 : Q_1 \iota g \wedge Q_2 \iota g \wedge Q_1 \iota x \wedge Q_2 \iota x \wedge \beta(Q_1, P, Q_2) \end{aligned} \quad (\text{D10})$$

Zu beachten ist, dass die Relationen  $\text{int}$  von demselben Typ sind wie die Relationen  $\iota$ : Sie setzen einen Punkt in Beziehung mit einer anderen geometrischen Entität. Es wäre daher z.B. leicht, eine Art Hülloperation zu definieren, die zu einer Region  $A$  diejenige Region berechnet, die außer den Punkten von  $A$  auch die von  $A$  umschlossenen Punkte enthält. Man beachte nun, dass eine solche Region der umschlossenen Punkte nicht zur konvexen Hülle korrespondiert (s. Abb. 2.2). Für Geraden und Punkte ergibt sich damit: Geraden und Punkte sind projektiv zusammenhängend, umschließen aber keine Punkte.

$$\begin{aligned} \forall g : \text{proj}(g) \\ \forall P : \text{proj}(P) \\ \forall g : \neg \exists P : \text{int}(g, P) \\ \forall P : \neg \exists Q : \text{int}(Q, P) \end{aligned}$$

## 2. Grundlagen

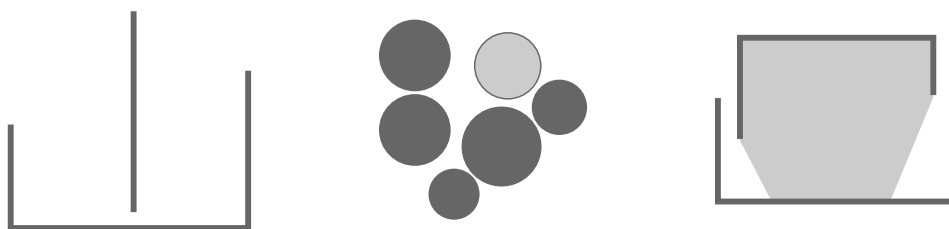


Abbildung 2.2.: Zusätzliche umschlossene Punkte (hell schattiert) der Regionen (dunkel schattiert) aus Abb. 2.1.

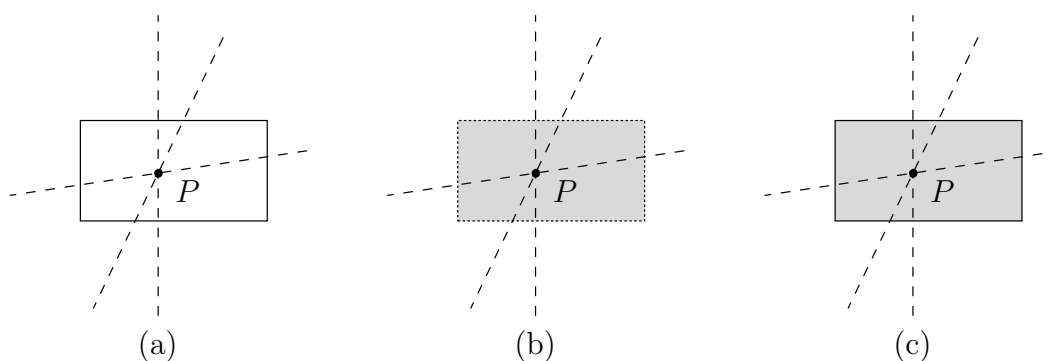


Abbildung 2.3.: Die Relation *int*: Der Rand eines Rechtecks (a), das offene Rechteck (b) und das geschlossene Rechteck (c) umschließen dieselben Punkte.  $P$  liegt in jeder der drei Regionen auf jeder Geraden zwischen zwei Punkten der Region.

Für die Regionen aus Abb. 2.1 sind in Abb. 2.2 die Regionen zusammen mit den nicht zur Region gehörigen umschlossenen Punkten dargestellt. Zu beachten ist, dass äußere Randpunkte nicht von der Region umschlossen sind.

Abbildung 2.3 illustriert an einem sehr einfachen Beispiel topologische Eigenschaften der Relation *int*: Ein offenes Rechteck, der Rand des Rechtecks und das geschlossene Rechteck umschließen dieselben Punkte, obwohl sie sich in den gemäß Inzidenz enthaltenen Punkten unterscheiden. Die Region der umschlossenen Punkte ist in jedem der drei Fälle das offene Rechteck. Diese Eigenschaft kann in Kap. 5 genutzt werden, um die Ähnlichkeiten von komplexen Objektregionen und sie repräsentierenden vereinfachten Regionen zu beschreiben. Die Vereinfachung auf die von *int* erfassten Punkte reduziert überwiegend die Formkomplexität in den inneren Bereichen einer Region und hat z.B. gegenüber der konvexen Hülle den Vorteil, die Konkavitäten in den äußeren Bereichen zu erhalten. Die Relation *int* ist hierdurch u.a. auch geeignet, eine Behälter-Eigenschaft zu charakterisieren, von der z.B. Anwendungen wie die von Schulz und Hahn [101] diskutierten biomedizinischen Ontologien profitieren könnten.

### Übertragbarkeit auf dreidimensionale Strukturen

Die Relation *proj* basiert wesentlich auf der Eigenschaft der Geraden eine Ebene zu partitionieren. Für eine Erweiterung von *proj* auf dreidimensionale Strukturen könnte die Gültigkeit von (D9) für Ebenen statt für Geraden  $g$  gefordert werden. Die Relation *diffS*

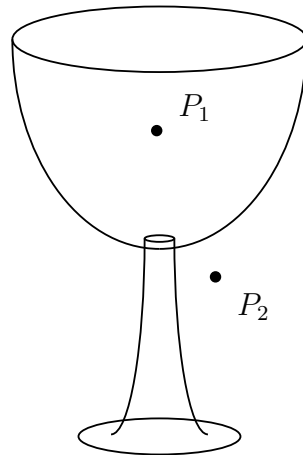


Abbildung 2.4.: Im dreidimensionalen Raum lassen sich mit einer modifizierten Variante von (D10) verschiedene Arten von Konkavitäten unterscheiden.  $P_1$  gehört eher zu der vom Glas umschlossenen Region als  $P_2$ .

ist hierzu als Relation zwischen zwei Punkten und einer Ebene zu definieren, da Ebenen den dreidimensionalen Raum in zwei Hälften aufteilen. Die Relation *int* dagegen ist unabhängig von der Eigenschaft der Planarität und kann daher direkt übernommen werden. Für *int* ließe sich aber auch eine Erweiterung denken, die bezüglich im dreidimensionalen Raum unterschiedlichen Konkavitäten differenziert (s. Abb. 2.4). Quantifiziert man statt über Geraden  $g$  in (D10) über Ebenen, so lässt sich die Relation des Umschlosseneins dahingehend modifizieren, dass bestimmte Konkavitäten zur umschlossenen Region gezählt werden, so dass  $P_1$  nicht aber  $P_2$  in Abb. 2.4 als *im Glas* klassifiziert werden. Die Relation *int* nach (D10) würde hier auf keinen der beiden Punkte zutreffen. Die konvexe Hülle würde beide Punkte enthalten. Vgl. zu diesem Thema auch Casatis und Varzis detaillierte Untersuchungen in [16], aber auch Herskovits [50] zu verschiedenen Aspekten der Bedeutung der englischen Präposition *in*.

## 2. Grundlagen

## 3. Granularität und Ausdehnung

In diesem Kapitel wird eine auf Ausdehnung basierende Charakterisierung von Granularität vorgestellt, die u.a. sowohl für die Beschreibung räumlicher als auch zeitlicher Granularität verwendet werden kann. Es werden zunächst verwandte Ansätze zu räumlicher und zeitlicher Granularität vorgestellt und die wesentlichen Unterschiede zum hier vorgestellten Ansatz herausgearbeitet.

Die Ergebnisse dieses Kapitels werden mit denen aus Kap. 2 in Kap. 4 zusammengeführt, um eine für Phänomene räumlicher Granularität taugliche Konzeption räumlicher Ausdehnung zu finden, auf der eine Granularitätsstruktur aufsetzen kann.

### 3.1. Verwandte Ansätze zu räumlicher und zeitlicher Granularität

Ausgehend von der Annahme, dass die Ununterscheidbarkeit eine Äquivalenzrelation sein sollte (s. Abschnitt 1.2), wurden u.a. im Bereich der regionenbasierten Charakterisierung räumlicher Granularität eine Reihe von Ansätzen entwickelt, die in Kap. 1 als *Partitionierungsansätze* bezeichnet wurden. Die Individuen einer gröberen Granularitätsebene sind dabei, wie von Hobbs [53] gefordert, genau die Äquivalenzklassen der Ununterscheidbarkeitsrelation der nächst feineren Ebene. Die granularen Partitionen (*granular partitions*) von Bittner und Smith [9] teilen die Domäne der Regionen in eine hierarchische Anordnung von Zellen auf, so dass sich eine Baumstruktur ergibt. Dabei gilt für Zellen an Geschwisterknoten Überlappungsfreiheit, und die Zelle an einem Kindknoten ist Teilzelle der Zelle am Elternknoten. Im Falle der räumlichen Domäne kann hier Überlappung und Teil-von wiederum mereotopologisch räumlich verstanden werden. Die Zellen einer Ebene in diesem Baum z.B. erfüllen dann die von Hobbs angegebenen Kriterien für Objekte einer Granularitätsebene. Die jeweils unter einem Knoten hängenden Knoten sind ununterscheidbar auf der Ebene des Elternknotens. Beispiel: In einer geographischen Partition der Kontinente, Länder, ihrer Bundesländer, Regierungsbezirke, usw., wären auf der Ebene der Kontinente die einzelnen Länder ununterscheidbar. Da der Ansatz von Bittner und Smith aber die Größendimensionen nicht mit einbezieht, ließen sich auch weniger homogene Ebenen wählen, die etwa die Postzustellbezirke Hamburgs als gleichberechtigte Entitäten neben dem Kontinent Australien enthalten. Ein weiteres Problem der Partitionierungsansätze ist, dass die Äquivalenzrelation eine eindeutige Zuordnung zu einer Partition verlangt, räumliche Konzepte des Alltagsverständes häufig aber unscharfe Grenzen erfordern (vgl. z.B. die Diskussion zu Waldregionen in Kap. 7). Partitionierungsansätze werden daher oft mit Ansätzen zur Vagheit kombiniert. Ein solcher Partitionierungsansatz ist z.B. die *fuzzy granularity* von Zadeh [122] im Bereich der

### 3. Granularität und Ausdehnung

allgemeinen Ansätze zu Granularität. Bittner und Smith [9] verwenden die Theorie der *rough sets* von Pawlak [82].

Die granulare Struktur der Domäne Zeit ist sehr viel besser erforscht als die des Raums. Granularität ist hier besonders interessant für die Verwendung in Kalendersystemen. Montanari, Peron und Policriti etwa geben in [73] das Szenario eines Wasserkraftwerkes an, für dessen Beschreibung verschiedenste Zeiteinheiten verwendet werden. Eine mögliche Aussage wäre etwa: *In regnerischen Wochen steigt der Pegel des Reservoirs um einen Meter pro Tag*. Für die Beschreibung von Kontrollgeräten wären hingegen z.B. Mikrosekunden angemessen: *Wenn ein Alarm von den Pegel-Sensoren kommt, sende ein Bestätigungssignal in 50 Mikrosekunden*. Wenn die Spezifikationsprache nur eine Zeiteinheit zulässt, bedeutet dies eine erhebliche Einschränkung für die Benutzbarkeit. Franceschet und Montanari [35] unterscheiden Theorien der Zeit zum einen nach der Anzahl der Granularitätsebenen (*layer*): eine einzelne gegenüber mehreren, endlich viele gegenüber unendlich vielen; zum anderen nach der Art der Verbindungen zwischen Granularitätsebenen. Sie untersuchen z.B. die Eigenschaften von *n-layered metric temporal logics*, die verwendet werden können, um eine endliche Menge von temporalen Entitäten gemäß zeitlicher Ordnung und Enthalten-Seins-Beziehung zu ordnen, aber auch  *$\omega$ -layered metric temporal logics*, wie die *downward unbounded layered logics*, die eine Unterteilung der Zeit in beliebig feine Intervalle erlauben und somit Dichte spezifizieren (vgl. hierzu auch Habels Begriff der *density in intensio* [45]). Zu beachten ist allerdings, dass auch bei den  *$\omega$ -layered metric temporal logics* von einer diskreten Einteilung in Granularitätsebenen ausgegangen wird, so dass sich eine (endlich verzweigende) Baum- oder Halbverbandsstruktur der zeitlichen Entitäten ergibt. Die Einschränkung auf eine Baumstruktur impliziert, dass jede Ebene im Baum zu einer Partitionierung der Zeit korrespondiert. Mit einer Erweiterung auf eine Halbverbandsstruktur wird es möglich, die Zeit auch in überlappende Intervalle aufzuteilen. So lässt sich z.B. auch ein Kalendersystem mit Wochen modellieren. Diese sind deshalb problematisch, weil es Wochen gibt, die die Grenze zwischen zwei Monaten überlappen. Modelliert man nur die Ebenen von Tagen, Monaten und Jahren, ist eine Baumstruktur ausreichend. In jedem Fall gilt aber, dass auch die Ebenen der *k-refinable layered metric temporal logics* Diskretisierungen der Zeitdomäne darstellen.

Der Ansatz von Bettini, Jajoda und Wang [8] charakterisiert eine ähnliche Struktur, wenngleich er formal ausgerichtet ist auf die Anwendungsbereiche temporale Datenbanken, Data-Mining und Schließen über Zeit. Eine Granularität ist in diesem Ansatz eine Abbildung von der Indexmenge der ganzen Zahlen auf Teilmengen der Zeitdomäne, so dass die Ordnung zwischen zwei Indizes mit der Ordnung der Zeitinstanzen (Momente oder Zeitintervalle) der zugehörigen Teilmengen übereinstimmt.

In dieser Arbeit wird im Gegensatz zu den obigen Ansätzen sowohl eine dichte Zeit- und Raumstruktur als auch eine dichte Granularitätenstruktur angenommen. Zudem stehen nicht Überlegungen zu Partitionierung und somit Diskretisierung im Zentrum, sondern Fragen der Gruppierung von Objekten feinerer Granularität zu Objekten gröberer Granularität. Es werden also nicht diskrete Ebenen von Größen, wie etwa Tage, Wochen, Monate und Jahre, sondern auch beliebige weitere Zwischengrößen angenommen. Ziel ist, Kriterien für die Strukturierung der Gegebenheiten in Raum und Zeit, d.h.

für materielle Objekte und Ereignisse, Prozesse etc., zu finden. Partitionierungsansätze verfolgen dieses Ziel durch die Aufteilung von Raum und Zeit und die Einordnung der Gegebenheiten in die so entstandenen Partitionen. In dieser Arbeit werden Grundlagen für eine solche Strukturierung vorgestellt, die allein von den Ausdehnungen der Gegebenheiten selbst ausgehen.

Granularität wird in dieser Arbeit, wie in Kap. 1 skizziert, als Kontextparameter verstanden, der durch Granulatsgröße und einen Kontextbereich bestimmt wird. Der Begriff des räumlichen Kontextes ist auch im Rahmen der Forschung zum allgemeinen Thema Kontext diskutiert worden. Vom Standpunkt der philosophischen Logik (s. den Überblick von Forbes [33]) ist die Frage interessant, wie sich die Bedeutung des indexikalischen Ausdrucks *hier*, der einen aktuellen räumlichen Kontext bezeichnet, erfassen lässt. Der Ausdruck *hier* ist verwandt mit anderen indexikalischen Ausdrücken wie *ich* und *jetzt*, die den im Kontext aktuellen Sprecher bzw. den aktuellen Zeitpunkt bezeichnen. Während allerdings zu der Frage, wie der Ausdruck *jetzt* in Bezug auf verschiedene Zeitstrukturen zu interpretieren ist, die umfangreichen Untersuchungen zu Zeitlogiken herangezogen werden können (ein Überblick findet sich bei Venema [113]), ist die Beziehung zwischen dem Ausdruck *hier* und verschiedenen räumlichen Strukturen noch nicht umfassend betrachtet worden.

Die im Vergleich zu zeitlichen Strukturen sehr viel komplexeren räumlichen Strukturen lassen zahlreiche mögliche Axiomatisierungen zu. Raumlogiken, wie die von Aiello und van Benthem in [1] untersuchten, beruhen auf den Entitäten und Relationen der zugrunde liegenden Axiomatisierung, d.h. auf Punkten und Geraden im Fall einer geometrischen Axiomatisierung, oder auf Regionen beliebiger Form im Fall einer mereotopologischen Axiomatisierung.

In den oben angeführten an Kalendersystemen orientierten Logiken zur Formalisierung temporaler granularer Strukturen, wie z.B. in den *layered metric temporal logics*, sind die Bedeutungen granularer indexikalischer Ausdrücke wie *heute* oder *dieses Jahr* gut formulierbar (s. z.B. die Kalenderlogiken von Ohlbach und Gabbay [79]). Vergleichbare Studien zu räumlichen granularen Logiken existieren m.W. noch nicht.<sup>1</sup> Dies könnte u.a. daran liegen, dass es vergleichbar einfache Ausdrücke, die räumliche Kontexte bezeichnen, nicht gibt. Präpositionalphrasen wie *an der Ampel*, *an der nächsten Kreuzung*, *bei der Kirche*, die z.B. in einer Routeninstruktion Entscheidungspunkte, die man als lokale räumliche Kontexte betrachten kann, kennzeichnen können (vgl. Wunderlich und Reinelt [121]), sind komplexe Konstruktionen, die im Gegensatz zu Ausdrücken wie *hier* und *dort* stets ein Referenzobjekt (*die Ampel*, *die nächste Kreuzung*, *die Kirche*) beinhalten. Eine maximale Ausdehnung spielt aber auch in der Bedeutung präpositionaler Ausdrücke eine wichtige Rolle: die Präposition *bei* spezifiziert Nähe, *an* Kontakt oder zumindest größere Nähe (s. Wunderlich und Herweg [120]) und selbst die projektiven Terme *vor*, *links von*, *nördlich von*, die im wesentlichen Richtungsinformation kodieren, sind auf einen maximalen Geltungsbereich beschränkt (s. Levinson [68]),<sup>2</sup> der vermut-

<sup>1</sup>Die räumlichen Logiken, die z.B. von Aiello und van Benthem in [1] diskutiert werden, enthalten keine granularen Strukturen, die zu denen in temporalen Logiken, die an Kalendersystemen orientiert sind, korrespondieren.

<sup>2</sup>Auch die Resultate von Regier und Carlson [91] lassen darauf schließen, dass Distanzen einen Einfluss

lich mit der Größe des Referenzobjektes zusammenhängt. Nach Talmy [106] wird z.B. ein Objekt auch bevorzugt in Beziehung zu einem größeren Referenzobjekt lokalisiert:<sup>3</sup> *das Fahrrad vor dem Haus* erscheint natürlicher als *das Haus hinter dem Fahrrad*.

In diesem Kapitel soll nun eine auf Ausdehnungen fußende Fassung von Granularität vorgestellt werden, mit der sich sowohl räumliche als auch zeitliche Granularität modellieren lässt.

## 3.2. Ausdehnung

Die in Kap. 1 skizzierten Phänomene räumlicher Granularität, wie auch die oben angeführten Bezüge zu temporalen und räumlichen Kontexten, legen nahe, den Zusammenhang zwischen den angeführten Phänomenen räumlicher Granularität und der räumlichen Ausdehnung eines Objektes näher zu untersuchen. Auf Granularitäten wie auf Ausdehnungen gibt es eine Ordnung: Bei feinerer Granularität wird eine Repräsentation höheren Detailgrades, bei gröberer Granularität eine niedrigeren Detailgrades gewählt. Auf einer feineren Granularität sind mehr und vor allem auch kleinere Details eines Objektes, aber eventuell nicht das ganze Objekt repräsentiert.

Eine Möglichkeit, diese Kriterien in eine einheitliche Repräsentation umzusetzen, ist, die Ordnungen auf Granularität und Ausdehnung miteinander in Beziehung zu setzen. In diesem Kapitel werden daher zunächst zwei Ordnungen eingeführt: kleinere Ausdehnung ( $<$ ) auf ausgedehnten Basisentitäten ( $s$ ) und feinere Granularität ( $\prec$ ) auf Granularitäten ( $\gamma$ ).<sup>4</sup> Die Konzepte sollen an Beispielen aus dem Bereich zeitlicher Granularität veranschaulicht werden.

In der Domäne Zeit entsprechen die Entitäten  $s$  den zusammenhängenden Intervallen und die Relation  $<$  der Relation *dauert weniger lang* auf Zeitintervallen. Zwei Ereignisse lassen sich damit bezüglich ihrer Dauer vergleichen. Ist  $t_1$  ein Intervall der Dauer 50 Mikrosekunden und  $t_2$  ein Intervall der Dauer 24h, so gilt  $t_1 < t_2$ .<sup>5</sup>

**Beispiel 1:** Die folgenden Beschreibungen (nach Montanari, Peron und Policriti [73]) gehören verschiedenen Granularitätsebenen an:

1. *In regnerischen Wochen steigt der Pegel des Reservoirs um einen Meter pro Tag.*
2. *Wenn ein Alarm von den Pegel-Sensoren kommt, sende ein Bestätigungssignal in 50 Mikrosekunden.*

---

auf die Bedeutung der projektiven Terme haben.

<sup>3</sup>Es werden in [106] neben der Größe auch andere Kriterien genannt, die bevorzugte Referenzobjekte auszeichnen: Das Haus ist z.B. auch im Gegensatz zum Fahrrad nicht beweglich.

<sup>4</sup>Die ausgedehnten Basisentitäten sollen auch kurz als Ausdehnungen bezeichnet werden. Für den Fall räumlicher Entitäten wird in den Kapiteln 5–7 genauer untersucht werden, wie sich verschiedene Arten der Ausdehnung einer komplexen Objektregion mit Hilfe der einfachen, räumlich ausgedehnten Basisentitäten, die in Kap. 4 charakterisiert werden, beschreiben lassen.

<sup>5</sup>Die Relation  $<$  ist nicht zu verwechseln mit der Vorzeitigkeit. Über die Lage der beiden Intervalle macht  $<$  keine Aussage. Das Intervall  $t_1$  kann ein Zeitintervall vor oder nach  $t_2$  sein, es könnte  $t_2$  überlappen etc.



Diese beiden Regeln können als Constraints über bestimmte Intervalle verstanden werden, wobei der zweiten Regel eine feinere Granularität zuzusprechen ist als der ersten.

**Beispiel 2:** Die folgenden Sätze beschreiben Prozesse, die sich derselben Granularität zuordnen ließen, die aber unterschiedliche Dauer haben:

- *Der Test benötigt auf Maschine A 50 Mikrosekunden.*
- *Der Test benötigt auf Maschine B 80 Mikrosekunden.*

Was ist nun der Unterschied zwischen der Ordnung auf Ausdehnungen und der auf Granularitäten? Die relativen Unterschiede zwischen den Zeiten im ersten Beispiel lassen sich verschiedenen Granularitäten zuordnen, die relativen Unterschiede in der Zeitdauer im zweiten Beispiel hingegen sind sehr viel geringer.<sup>6</sup> Der Unterschied zwischen 50 und 80 Mikrosekunden kann als für einen Granularitätsebenenwechsel nicht ausreichender Unterschied betrachtet werden. Die beiden zeitlichen Ausdehnungen lassen sich sprachlich basierend auf derselben Größenordnung der Mikrosekunden beschreiben, während eine Paraphrasierung auf Basis einer gemeinsamen Größenordnung bei den Intervallen *1 Tag* und *50 Mikrosekunden* im ersten Beispiel keine adäquate sprachliche Beschreibung ergibt (Montanari, Peron und Policriti [73]).<sup>7</sup>

Die Ausdehnung im zwei- oder dreidimensionalen Raum ist schwerer zu bestimmen, als in der eindimensionalen Zeit, da mehrdimensionale Objekte in verschiedenen Richtungen verschiedene Ausdehnungen aufweisen können. Eine wichtige Größe ist aber offenbar die Hauptausdehnung, z.B. die Länge oder Höhe eines Objektes. Es lässt sich z.B. feststellen, welches von zwei Häusern höher ist, oder welcher von zwei Bleistiften länger ist. Aber auch die anderen Ausdehnungsrichtungen können eine wichtige Rolle spielen: Ein Fluss und ein Bach z.B. unterscheiden sich vor allem in der sekundären Ausdehnung. Um einen Fluss zu überqueren sind andere Aktionen notwendig als im Falle des Baches. Zudem variiert die Breite über den Verlauf eines Flusses. In der Nähe der Quelle sind für die Überquerung andere Aktionen notwendig als in der Nähe der Mündung. Die Repräsentation von Phänomenen räumlicher Granularität ist Thema des zweiten Teils dieser Arbeit. Eine regionenbasierte, geometrische Charakterisierung räumlicher Ausdehnung wird in Kap. 4 vorgestellt. Es ist aber nötig (s. Kap. 6), komplexen Objektregionen mehrere Ausdehnungen zuweisen zu können, langgestreckte Objekte wie Flüsse z.B. sollten sowohl eine primäre als auch eine (lokal variierende) sekundäre Ausdehnung haben. Zudem ist es z.B. für Objekte, die aus Ansammlungen anderer Objekte bestehen, notwendig, auch die innere Granularitätsstruktur, die sich aus den Ausdehnungen der Teilobjekte ergibt, zu betrachten (s. Kap. 7).

<sup>6</sup>Partitionierungsansätze führen diesen Umstand darauf zurück, dass sich Intervalle der Länge 24h in Intervalle der Länge einer Mikrosekunde zerlegen lassen, dass sich aber 80 Mikrosekunden-Intervalle nicht in 50 Mikrosekunden-Intervalle partitionieren lassen.

<sup>7</sup>Auch aus Gründen der sprachlichen Pragmatik wäre z.B. eine Paraphrasierung von *1 Tag* durch *86.400.000.000 Mikrosekunden* abzulehnen und sogar als nicht korrekt einzustufen, da der letztere Ausdruck eine höhere Präzision suggeriert, als mit dem Ausdruck *1 Tag* durch den Sprecher gewährleistet wird (Krifka [61]).

### 3. Granularität und Ausdehnung

Ausgangspunkt sei im folgenden eine Relation  $<$  zwischen (räumlich oder zeitlich) ausgedehnten Basisentitäten  $s$ , denen eine *eindeutige* Ausdehnung zugeschrieben werden kann, d.h. die bezüglich  $<$  eine linear geordnete Struktur erhalten. Für diese Struktur soll zudem Dichte gefordert werden. Angenommen wird damit eine beliebig fein unterscheidbare Domäne von Ausdehnungen, die in der Repräsentation zu einer idealisierten, theoretisch beliebig genauen Distanz- oder Zeitdauermessung korrespondieren würde. Die Granularitäten sind nun im Gegensatz zu den Größeninstanzen lediglich durch eine Halbordnung  $\prec$  mit einer nicht transitiven Ununterscheidbarkeitsrelation  $\approx$  geordnet (s. Abschnitt 3.3.2). Dadurch entsprechen sie den kognitiven Granularitätsebenen. Die Relation  $\sim$  bestimmt (Abschnitt 3.3.1), ob eine bestimmte Entität  $s$  mit einer Granularität  $\gamma$  kompatibel ist. Die kleinsten kompatiblen Entitäten werden durch die Basisrelation  $grn$ , die größten mit  $ktx$  gekennzeichnet. Dann läßt sich die Beziehung zwischen ausgedehnten Entitäten und durch die Ausdehnung spezifizierten Granularitätsebenen, wie anfangs angedeutet, charakterisieren. Ein Objekt wird auf einer Granularitätsebene repräsentiert, wenn die zugehörigen Ausdehnungen mit der Granularität kompatibel sind.

Nach diesen Vorbemerkungen kann nun die Charakterisierung vorgestellt werden. Zunächst werden Relationen benötigt, um bestimmte räumliche oder zeitliche Entitäten nach ihrer Ausdehnung zu vergleichen. Ein auf Vergleichen aufbauender Ansatz hat den Vorteil, qualitativ in dem Sinne zu sein, dass die Basis der Vergleich zwischen ausgedehnten Entitäten ist und nicht eine Zuweisung zu numerischen Werten. Im Gegensatz zu einem quantitativen Ansatz wird hier vor allem die Operation der Addierbarkeit nicht unterstützt. In der Terminologie von Carnap [15] wird ein solches System zum Vergleich von Größen, das Addierbarkeit nicht unterstützt, *nicht-extensiv* genannt. *Qualitativ* im engeren Sinne von Carnap sind nur reine Klassifikationssysteme. Der Begriff wird also hier im weiteren Sinne des *qualitative spatial reasoning* verwendet (s. Cohn und Hazarika [18]).

Hier sollen zunächst einmal einfache Basisentitäten  $s$  angenommen werden, die für die Charakterisierung von Ausdehnung geeignet sind, weil ihnen eine *eindeutige* Ausdehnung zugeschrieben werden kann. In der Domäne Zeit sind dies z.B. die zusammenhängenden (konvexen), abgeschlossenen Intervalle mit ihrer eindeutigen Dauer.<sup>8</sup> Demgegenüber sind Entitäten mit nicht klar bestimmbar Ausdehnungen oder solche, bei denen mehrere Aspekte der Ausdehnung beachtet werden müssen, vorerst von der Betrachtung ausgeschlossen.<sup>9</sup> Die Ausdehnungsgleichheit zweier Entitäten  $s$  wird verglichen mit einer Äquivalenzrelation  $\equiv$ .

$$\forall s_1, s_2, s_3 : s_1 \equiv s_2 \wedge s_2 \equiv s_3 \rightarrow s_1 \equiv s_3 \quad (\text{A}\equiv 1)$$

$$\forall s_1, s_2 : s_1 \equiv s_2 \rightarrow s_2 \equiv s_1 \quad (\text{A}\equiv 2)$$

$$\forall s : s \equiv s \quad (\text{A}\equiv 3)$$

<sup>8</sup>In der klassischen Geometrie sind dies die Strecken mit ihrer eindeutigen Länge. In der regionenbasierten Geometrie von Borgo, Guarino und Masolo [13], die Kugeln (*sphere*) mit ihrem eindeutigen Durchmesser.

<sup>9</sup>Diese komplexeren Entitäten sind gerade die Objekte – oder in der Zeit: komplexe Ereignisse und Prozesse –, deren Granularitätsstruktur analysiert und repräsentiert werden soll. Die komplexen Objektregionen werden im zweiten Teil der Arbeit untersucht.

*Kleiner* ( $<$ ) sei als strikte Ordnungsrelation auf eindeutig ausgedehnten Entitäten ( $s, s_1, s'$ ) charakterisiert:  $<$  sei transitiv (A<1) und asymmetrisch (A<2); nur zwischen Entitäten verschiedener Ausdehnung bezüglich  $\equiv$  gelte  $<$  (A<3); die Äquivalenzklassen bezüglich  $\equiv$  bilden eine lineare Ordnung (A<4), und die Struktur erfülle zudem das Dichte-Axiom (A<5).

$$\forall s_1, s_2, s_3 : s_1 < s_2 \wedge s_2 < s_3 \rightarrow s_1 < s_3 \quad (\text{A<1})$$

$$\forall s_1, s_2 : s_1 < s_2 \rightarrow \neg s_2 < s_1 \wedge \neg s_1 \equiv s_2 \quad (\text{A<2})$$

$$\forall s_1, s_2 : s_1 < s_2 \rightarrow \neg s_1 \equiv s_2 \quad (\text{A<3})$$

$$\forall s_1, s_2 : s_1 < s_2 \vee s_2 < s_1 \vee s_1 \equiv s_2 \quad (\text{A<4})$$

$$\forall s_1, s_2 : s_1 < s_2 \rightarrow \exists s : s_1 < s \wedge s < s_2 \quad (\text{A<5})$$

Die Relationen  $\leq, >, \geq$  seien in der üblichen Weise abgeleitet.

Zu beachten ist, dass keine kontinuierliche Struktur angenommen werden soll. Das Dichte-Axiom sichert nur zu, dass es zwischen zwei Werten stets einen weiteren gibt. Kontinuität würde zusätzlich verlangen, dass es zu jeder beschränkten Folge von Werten stets auch den Grenzwert gibt. Diese Eigenschaft ist nützlich, um z.B. zu jedem zu behandelnden Objekt eine genau seiner maximalen Ausdehnung entsprechende Basisentität bestimmen zu können. Für die Formulierung der Kontinuität wäre allerdings Prädikatenlogik zweiter Stufe notwendig (s. Kap. 2).

### 3.3. Granularitäten

Die dichte Struktur auf den eindeutig ausgedehnten Entitäten korrespondiert zu einer Struktur prinzipiell beliebig genau messbaren Längen. Für die Einschätzung, ob zwei Objekte von derselben Granularität sind, ist es allerdings nicht angebracht, z.B. einem Gebäude, das 101,4m hoch ist und einem das 102,2m hoch ist, verschiedene Granularitäten zuzuordnen. Partitionierungsansätze sichern diese Eigenschaft dadurch, dass die Elemente der feineren Ebene durch Aufteilung aus den Elementen der gröberen Ebene hervorgehen. Die durch dieses Vorgehen entstehende Diskretisierung in diskrete Ebenen soll hier aber, wie in Abschnitt 3.1 diskutiert wurde, vermieden werden. Gemäß der Zielsetzung dieser Arbeit, Granularität als Kontextparameter zu charakterisieren, sollen demgegenüber Übergänge zwischen Granularitätsebenen möglichst wenige Brüche erzeugen, wie in Abschnitt 3.4.1 an einem Beispiel erläutert wird.<sup>10</sup>

Gegenüber den mit  $<$  prinzipiell beliebig fein unterscheidbaren Längen, soll für die Modellierung von Granularität eine schwächere Struktur gewählt werden: Zwei Objekte sollen sich auf derselben Granularitätsebene befinden, wenn sie eine grob ähnliche Größe haben. Für den Fall der temporalen Granularität könnten z.B. ein Intervall der Länge 23h und ein Intervall der Länge 26h beide der Granularität *Tag* zugeordnet werden. Relationen, die die Ähnlichkeit von Entitäten charakterisieren, können, wie in Abschnitt 1.2.1 vorgestellt, in einer kognitiv adäquaten Weise durch eine nicht transitive

<sup>10</sup>Zu Übergängen, die möglichst wenige Brüche erzeugen, vgl. auch die Überlegungen zu Kontinuitätskonzepten für Bewegung Abschnitt 5.3 und Identität Abschnitt 7.3 im zweiten Teil dieser Arbeit.

### 3. Granularität und Ausdehnung

Ununterscheidbarkeitsrelation modelliert werden, wie sie der Messtheorie psychologischer Untersuchungen entnommen werden kann (s. Suppes und Zinnes [105]). Wenn zwei Entitäten hingegen zu unterschiedlichen Granularitätsebenen gehören, im Beispiel von Montanari, Peron und Policriti [73] z.B. die zur Granularität von Mikrosekunden gehörenden Intervalle und die zu den Tagen gehörenden, so soll sich bestimmen lassen, welche der beiden feiner und welche gröber ist. Bei Suppes und Zinnes findet sich für die Relation *feiner als* ( $\prec$ ), die die Klassifikation in verschiedene Granularitäten erlauben soll, als geeignete Struktur die Halbordnung und die darauf definierte Ununterscheidbarkeitsrelation. Die Relation *feiner als* ( $\prec$ ) auf Granularitäten  $\gamma, \gamma', \gamma_1$  soll dann so definiert werden, das sich eine Halbordnung mit der Ununterscheidbarkeitsrelation der *granularen Indifferenz* ( $\approx$ ) ergibt.

Es ist hier noch anzumerken, dass der Begriff der granularen Indifferenz sich auf ununterscheidbare Granularitäten oder auf bezüglich ihrer Granularität ununterscheidbare Entitäten bezieht. Zu einem Intervall der Länge 5min3s und einem Intervall der Länge 8min55s existiert vermutlich eine gemeinsame Granularität: In einer Alltagssituation ließen sich die beiden zeitlichen Ausdehnungen z.B. vereinfachend sprachlich als *ca. 5min* und *ca. 9min* basierend auf Minuten beschreiben. Sie haben aber nicht dieselbe Ausdehnung und müssen auch nicht perzeptuell ununterscheidbar sein. Die perzeptuelle Ununterscheidbarkeit der Ausdehnungen hat zwar gemäß psychophysikalischer Untersuchungen (s. Abschnitt 1.2.1) dieselben mathematischen Eigenschaften, weil sie ebenfalls vager Klassifikation zuzuordnen ist; Objekte derselben Granularität müssen aber bezüglich ihrer Ausdehnung nicht perzeptuell ununterscheidbar sein.

#### 3.3.1. Ausdehnung und Granularität

Granularitäten oder Granularitätsebenen  $\gamma$  sollen nun charakterisiert sein durch eine minimal repräsentierte Ausdehnung, die *Granulatsgröße*, und eine maximale Ausdehnung oder *Kontextgröße*, die die größten im Kontext der Granularität repräsentierbaren Ausdehnungen kennzeichnet. Ausgangspunkt dieser Konzeptualisierung ist die Vorstellung, dass räumliche Granularität analog zu einem Fotopapier gesehen werden kann. So wie die Granularität des Fotopapiers dem dargestellten Bild durch die Granulatsgröße eine maximale Auflösung und durch seine Beschränktheit eine äußere maximale Ausdehnung zuweist, so bewirkt die räumliche Granularität eines Repräsentationskontextes, dass der Repräsentation eine maximale Ausdehnung im Kontext, also die maximal repräsentierte Ausdehnung und eine minimal repräsentierte Größe – die Granulatsgröße – zugewiesen werden kann.<sup>11</sup> Entsprechend dieser Motivation sollen nun die Relationen *Granulatsgröße* (*grn*) und *Kontextgröße* (*ctx*) zwischen Basisentitäten und Granularitäten charakterisiert werden.  $grn(\gamma, s)$  ( $ctx(\gamma, s)$ ) soll gelten, wenn die Entität  $s$  Granulatsgröße (Kontextgröße) in Bezug zur Granularitätsebene  $\gamma$  hat. Diese Beziehung zwischen ausgedehnten Entitäten  $s$  und Granularitäten  $\gamma$  wird durch die Axiome (A5)-(A8) erreicht, wie wir im Anschluss sehen werden (4)-(7).

<sup>11</sup>Vergleichbare Analogien werden z.B. von Galton in [40] (S. 29ff) verwendet. Auch Reitsma und Bittner [93] argumentieren ähnlich, dass Granularität durch maximale Ausdehnung (extent) und Granulatsgröße (grain) definiert ist. Vgl. Abschnitt 1.2.2.

Axiom (A5) sichert zunächst, dass die eindeutig ausgedehnten Entitäten  $s$  genau diejenigen Entitäten sind, die für die Charakterisierung von Granularität benötigt werden: Jede einfache ausgedehnte Basisentität soll als Granulat und als maximale Ausdehnung verwendbar sein. Axiom (A6) sichert, dass zu jeder Granularität eine maximale Ausdehnung und eine Granulatsentität bestimmt werden können, wobei Granulate kleiner sind als die maximal ausgedehnten Entitäten der Granularitätsebene. Es soll eingeschränkt werden, dass Granularitäten, die ja der Formalisierung von Verfeinerung und Vergrößerung dienen, selbst nicht in Teile zerlegt werden können: Wenn zwei Granularitäten  $\gamma, \gamma'$  in Granulatsgröße oder maximaler Ausdehnung gemäß  $<$  differieren, so überträgt sich dies auch auf die jeweils andere Größe (A7). Insbesondere sichert dieses Axiom die Übertragbarkeit der Ordnungsrelation  $<$  über ausgedehnte Entitäten auf die weiter unten definierte Relation  $\prec$  (feiner als) auf Granularitäten. Eine ausgedehnte Entität soll genau dann *kompatibel* zu einer Granularität  $\gamma$  genannt werden, wenn sie größer als die Granulatsgröße und kleiner als die maximale Ausdehnung ist (D11). Alternativ kann auch gesagt werden, dass  $s$  auf  $\gamma$  repräsentiert ist, denn Kompatibilität ist ein wichtiges Kriterium in der Frage, ob eine Entität in einem Kontext repräsentiert ist. Wenn zwei Granularitäten zu genau denselben Entitäten kompatibel sind, sollen sie identisch sein (A8).

$$\forall s \exists \gamma_1, \gamma_2 : \text{grn}(\gamma_1, s) \wedge \text{ctx}(\gamma_2, s) \quad (\text{A5})$$

$$\forall \gamma \exists s_1, s_2 : \text{grn}(\gamma, s_1) \wedge \text{ctx}(\gamma, s_2) \wedge s_1 < s_2 \quad (\text{A6})$$

$$\forall \gamma, s_1, s'_1, s_2, s'_2, \gamma' : \text{grn}(\gamma, s_1) \wedge \text{grn}(\gamma', s'_1) \wedge \text{ctx}(\gamma, s_2) \wedge \text{ctx}(\gamma', s'_2) \quad (\text{A7})$$

$$\wedge (s_1 < s'_1 \vee s_2 < s'_2) \rightarrow s_1 < s'_1 \wedge s_2 < s'_2$$

$$s \sim \gamma \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists s_1, s_2 : \text{grn}(\gamma, s_1) \wedge s_1 \leq s \wedge \text{ctx}(\gamma, s_2) \wedge s \leq s_2 \quad (\text{D11})$$

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 : \gamma_1 = \gamma_2 \leftrightarrow \forall s : s \sim \gamma_1 \leftrightarrow s \sim \gamma_2 \quad (\text{A8})$$

Es folgt, dass die Relation *grn* – und *ctx* entsprechend – bei gegebener Granularität  $\gamma$  jeweils genau für alle Entitäten  $s, s'$  einer Größe, d.h. Äquivalenzklasse von  $\equiv$ , gültig ist (1). Darauf aufbauend folgt, dass Granularitäten  $\gamma$  eindeutig durch die Granulatsgröße oder die Kontextgröße bestimmt werden (2).

$$\forall \gamma, s, s' : \text{grn}(\gamma, s) \rightarrow [s \equiv s' \leftrightarrow \text{grn}(\gamma, s')] \quad (1)$$

$$\forall \gamma, \gamma', s, s' : \text{grn}(\gamma, s) \wedge \text{grn}(\gamma', s) \rightarrow \gamma = \gamma' \quad (2)$$

Beweis (1):  $\rightarrow$ : Gegeben ein Granulat  $s_1$  zu einer Granularität  $\gamma$  und eine Entität  $s'_1$  derselben Ausdehnung wie  $s_1$ , so ist zunächst  $s'_1$  nach (A5) Granulat einer Granularität  $\gamma'$ . Es gibt nun nach (A6) zudem Entitäten  $s_2, s'_2$ , die die maximale Ausdehnung in  $\gamma, \gamma'$  bestimmen. Wegen (A7) muss nun nach (A4) auch  $s_2 \equiv s'_2$  gelten. Denn im Falle von  $s_2 < s'_2$  oder  $s'_2 < s_2$  würde die entsprechende Relation nach (A7) auch zwischen  $s_1$  und  $s'_1$  gelten. Damit ist aber nach (D11)  $\gamma'$  genau zu denjenigen  $s$  kompatibel, zu denen auch  $\gamma$  kompatibel ist, und damit nach (A8) identisch mit  $\gamma$ .

$\leftarrow$ : Gegeben zwei Granulate  $s_1, s'_1$  zu einer Granularität  $\gamma$ , so gibt es nach (A6) zudem eine Entität  $s_2$ , die die maximale Ausdehnung zu  $\gamma$  bestimmt. Angenommen  $s_1 < s'_1$  so

### 3. Granularität und Ausdehnung

müsste dann nach (A7)  $s_2 < s_2$  gelten, was im Widerspruch zur Irreflexivität von  $<$ , die aus (A<2) folgt, steht.  $\square$

Beweis (2): Gegeben Granularitäten  $\gamma, \gamma'$  und ein gemeinsames Granulat  $s_1$ . Es gibt nun nach (A6) Entitäten  $s_2, s'_2$ , die die maximale Ausdehnung in  $\gamma, \gamma'$  bestimmen. Wegen  $s_1 \equiv s_1$  und (A7) muss nun nach (A<4) auch  $s_2 \equiv s'_2$  gelten. Damit ist aber (D11)  $\gamma'$  genau zu denjenigen  $s$  kompatibel, zu denen auch  $\gamma$  kompatibel ist, und damit nach (A8) identisch mit  $\gamma$ .  $\square$

#### 3.3.2. Halbordnung und Ununterscheidbarkeit

Die Relation  $\prec$  (feiner als) auf Granularitäten  $\gamma, \gamma', \gamma_1$  kann nun so definiert werden, dass sich eine Halbordnung mit einer Ununterscheidbarkeitsrelation der *Indifferenz*  $\approx$  ergibt.

Eine Granularität  $\gamma$  soll genau dann *feiner als* ( $\prec$ ) eine Granularität  $\gamma'$  genannt werden, wenn alle mit ihr kompatiblen Entitäten kleiner sind als alle mit  $\gamma'$  kompatiblen Entitäten (D12). Eine einfache Folgerung ist, dass  $\gamma$  genau dann feiner ist als  $\gamma'$ , wenn die maximale Ausdehnung in  $\gamma$  kleiner ist als die Granulatsgröße von  $\gamma'$  (3). Zwei Granularitäten sollen genau dann *indifferent* ( $\approx$ ) heißen, wenn es Entitäten gibt, die zu beiden kompatibel sind (D13).

$$\gamma \prec \gamma' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall s, s' : s \sim \gamma \wedge s' \sim \gamma' \rightarrow s < s' \quad (\text{D12})$$

$$\forall \gamma, \gamma', s, s' : \text{ctx}(\gamma, s) \wedge \text{grn}(\gamma', s') \rightarrow [\gamma \prec \gamma' \leftrightarrow s < s'] \quad (3)$$

$$\gamma_1 \approx \gamma_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists s : s \sim \gamma_1 \wedge s \sim \gamma_2 \quad (\text{D13})$$

Es läßt sich nun beweisen, dass  $\prec$  eine Halbordnung auf den Granularitäten darstellt. Die im folgenden aufgeführten Eigenschaften der Halbordnung aus der Charakterisierung von Suppes und Zinnes [105] folgen aus der hier vorgestellten Axiomatisierung.

Die Halbordnung ist irreflexiv (4). Sind zwei Paare von Werten geordnet, so ist entweder der kleinere des ersten Paares kleiner als der größere des zweiten, oder der kleinere des zweiten Paares kleiner als der größere Wert des ersten (5). Sind drei Werte geordnet, so ist jeder weitere Wert größer als der kleinste oder kleiner als der größte (6). Zwei Werte sind ununterscheidbar, wenn sie nicht geordnet sind (7). Zwei Werte, die zu genau denselben Werten ununterscheidbar sind, sind identisch (8).

$$\forall \gamma : \neg \gamma \prec \gamma \quad (4)$$

$$\forall \gamma_1, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma'_2 : \gamma_1 \prec \gamma'_1 \wedge \gamma_2 \prec \gamma'_2 \rightarrow \gamma_1 \prec \gamma'_2 \vee \gamma_2 \prec \gamma'_1 \quad (5)$$

$$\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma : \gamma_1 \prec \gamma_2 \wedge \gamma_2 \prec \gamma_3 \rightarrow \gamma_1 \prec \gamma \vee \gamma \prec \gamma_3 \quad (6)$$

$$\forall \gamma, \gamma' : \gamma \approx \gamma' \leftrightarrow \neg(\gamma \prec \gamma' \vee \gamma' \prec \gamma) \quad (7)$$

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 : (\forall \gamma : \gamma_1 \approx \gamma \leftrightarrow \gamma_2 \approx \gamma) \rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \quad (8)$$

Die Irreflexivität von  $\prec$  ergibt sich aus der Irreflexivität von  $<$ .

Beweis (5): Beweis durch Widerspruch: Angenommen die maximale Ausdehnung von  $\gamma_1$  ist größer als die Granulatsgröße von  $\gamma'_2$ , und die maximale Ausdehnung von  $\gamma_2$  ist größer als die Granulatsgröße von  $\gamma'_1$ . Nach Voraussetzung  $\gamma_1 \prec \gamma'_1$  ist mit (3) die Granulatsgröße von  $\gamma'_1$  größer als die maximale Ausdehnung von  $\gamma_1$ . Wegen der Transitivität von  $<$  (A<1) wäre damit aber die Granulatsgröße von  $\gamma_2$  kleiner als die maximale Ausdehnung von  $\gamma'_2$ . Dies kann aber nicht sein, da nach Voraussetzung  $\gamma_2 \prec \gamma'_2$  mit (3) die maximale Ausdehnung von  $\gamma_2$  kleiner als die Granulatsgröße von  $\gamma'_2$  ist.  $\square$

Beweis (6): Beweis durch Widerspruch: Um der Behauptung zu widersprechen, müsste die Granularität  $\gamma$  so beschaffen sein, dass ihre Granulatsgröße kleiner ist als die maximale Ausdehnung von  $\gamma_1$  und ihre maximale Ausdehnung größer als die Granulatsgröße von  $\gamma_3$ . Damit wären allerdings sowohl Granulatsgröße als auch maximale Ausdehnung von  $\gamma_2$  mit  $\gamma$  kompatibel, was mit (A7) nur dann möglich ist, wenn  $\gamma$  und  $\gamma_2$  identisch sind, was durch die Voraussetzung  $\gamma_1 \prec \gamma_2 \wedge \gamma_2 \prec \gamma_3$  ausgeschlossen ist.  $\square$

Beweis (7):  $\rightarrow$ : Folgt direkt aus den Definitionen (D12) und (D13).

$\leftarrow$ : Angenommen es gibt  $s_1, s_2$  kompatibel zu  $\gamma$  und  $s'_1, s'_2$  kompatibel zu  $\gamma'$  mit  $\neg s_1 < s'_1$  und  $\neg s'_2 < s_2$ , dann gilt nach (A<4)  $s_1 \equiv s'_1$  oder  $s'_1 < s_1$  und entsprechend  $s_2 \equiv s'_2$  oder  $s_2 < s'_2$ . Im Fall  $s_1 \equiv s'_1$  ist  $s_1$  auch mit  $\gamma'$  kompatibel, und (D13) erfüllt. Entsprechendes gilt im Fall  $s_2 \equiv s'_2$ . Es ist also nur noch der Fall, dass  $s'_1 < s_1$  und  $s_2 < s'_2$  gilt, zu betrachten: Es lassen sich nun  $s_1$  und  $s_2$ , bzw.  $s'_1$  und  $s'_2$  vergleichen. Wegen (A<4), (A<3) und der Transitivität (A<1) gibt es keine Anordnung der vier Entitäten  $s'_1, s_1, s_2, s'_2$ , in der nicht jeweils mindestens eine Entität aus  $\gamma'$  zwischen solchen aus  $\gamma$  liegt, oder mindestens eine Entität aus  $\gamma$  zwischen solchen aus  $\gamma'$  liegt.  $\square$

Theorem (8) folgt aus (D13) und (A8).

Eigenschaften der Halbordnung sind Transitivität und Asymmetrie (vgl. [105]). Die Indifferenz  $\approx$  ist nicht transitiv, d.h. Granularität  $\gamma_1$  kann indifferent zu  $\gamma_2$  sein, und  $\gamma_2$  wiederum indifferent zu  $\gamma_3$ , ohne dass daraus zwangsläufig folgt, dass auch  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  indifferent sind. Zu beachten ist aber das folgende Theorem (9), das eine direkte Folgerung aus (6) ist: Sind  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  geordnet, so steht jede zu  $\gamma_3$  indifferente Granularität zumindest zu  $\gamma_1$  in derselben Relation wie  $\gamma_2$ .

$$\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma'_3 : \gamma_1 \prec \gamma_2 \wedge \gamma_2 \prec \gamma_3 \wedge \gamma_3 \approx \gamma'_3 \rightarrow \gamma_1 \prec \gamma'_3 \quad (9)$$

### 3.3.3. Weitere Möglichkeiten der Charakterisierung

Für bestimmte Modellierungen mag es wünschenswert erscheinen, Entitäten  $s_{\min}$  einer minimalen Größe anzunehmen. Die dargestellte Charakterisierung der Granularitäten erlaubt es aber nicht, eine minimale oder maximale Größe zu fordern. Aus (A5) und (A7) folgt (10):

$$\forall s \exists s_1, s_2 : s_1 < s \wedge s < s_2 \quad (10)$$

### 3. Granularität und Ausdehnung

Soll nun die Axiomatisierung um Entitäten einer minimalen Größe erweitert werden, so muss (A5) entsprechend angepasst werden. Hier bieten sich prinzipiell zwei Möglichkeiten. Zum einen kann (A5) so modifiziert werden, dass die  $s_{\min}$  gänzlich auszunehmen sind, also dass  $s_{\min}$  weder Granulatsentitäten noch maximale Ausdehnungen sein müssen. Dies hätte allerdings zur Folge, dass es Entitäten gibt, die zu keiner Granularität kompatibel sind. Zum anderen könnte man die  $s_{\min}$  allein als Granulate, nicht hingegen als maximale Ausdehnungen zulassen. Die beiden Fälle unterscheiden sich dahingehend, dass es im zweiten Fall – nicht aber im ersten – eine minimale Granularität  $\gamma_{\min}$  gibt. Die Eigenschaft, nur als Granulat fungieren zu können, muss dabei wegen (A7) auch auf alle anderen Entitäten, die kleiner als die maximale Ausdehnung von  $\gamma_{\min}$  sind, übertragen werden.

Ein Anwendungsbeispiel wäre eine – bezüglich der Relation der Vorzeitigkeit – diskrete intervallbasierte Zeitstruktur, bei der die Zeitachse und damit auch jedes zusammengesetzte Intervall durch atomare Zeitintervalle einer festen minimalen Länge z.B. 1s aufgeteilt wird. In diesem Fall folgt, dass die Relation  $<$  geeigneterweise ebenfalls als diskrete Relation modelliert wird mit den atomaren Intervallen als minimalen Elementen. Statt der Dichte (A<5) wäre hierfür entsprechend, Diskretheit der Relation  $<$  zu fordern.

Eine dichte Struktur wurde hier gegenüber der Einschränkung auf eine diskrete Struktur vorgezogen, um, wie in Abschnitt 2.3 erläutert, möglichst auch besonders komplexe, aus beliebig kleinen Teilobjekten zusammengesetzte, Objekte analysieren zu können. Bei Beschränkung auf eine diskrete Struktur der Ausdehnungen werden diese Möglichkeiten der Komposition eingeschränkt.

Es wurde durch (A<5) zudem eine dichte statt einer kontinuierlichen Struktur gewählt. Dies ist insofern gerechtfertigt, als die Ausdehnungen von Objekten der Wahrnehmung stets nur mit endlicher Genauigkeit bestimmt werden können. Es lässt sich allerdings zeigen, dass sich die Lücken einer nur dichten Ordnung von Größen auf Lücken im Bereich der Granularitäten übertragen. Ein weiteres Problem ergibt sich daraus, dass das vorgestellte Axiomensystem für Granularitäten kein Axiom enthält, das sichert, dass von jeder ausgedehnten Entität  $s$  jede andere ausgedehnte Entität  $s'$  durch eine endliche Anzahl von Granularitätswechseln erreichbar ist. Ein solches Axiom würde einen Begriff von natürlichen Zahlen und Arithmetik benötigen (s. auch die Bemerkungen zum sog. Archimedischem Axiom in der Geometrie in Abschnitt 2.1).

## 3.4. Exkurs: Temporale Granularität

In diesem Abschnitt soll die vorgestellte Konzeptualisierung von Granularitäten in Bezug zu verwandten Arbeiten zur temporalen Granularität gesetzt werden. Zunächst ist hierzu eine zugrunde liegende Zeitstruktur anzunehmen. Darauf aufbauend können dann komplexe temporale Entitäten (Ereignisse, Prozesse, Zustände,  $e, e',_1$ ) mit Hilfe einer Funktion *temp* in der Zeit verankert und bezüglich ihrer granularen Struktur analysiert werden. Als Basis der Zeitstruktur sollen endliche, konvexe (zusammenhängende) Intervalle ( $t, t_1, t'$  etc.) einer dichten Zeit angenommen werden. Solche Intervalle haben eine



eindeutige Ausdehnung – ihre Dauer –, die als Grundlage für die temporalen Granularitäten dienen kann. Für die temporalen Entitäten  $e$  sollen keinerlei Einschränkungen gelten außer, dass sie eine durch  $temp$  bestimmbare maximale zeitliche Ausdehnung haben sollen. Insbesondere könnten z.B. so auch nicht zusammenhängende Entitäten vorkommen. Die Funktion  $temp$  bildet eine temporale Entität  $e$  auf ein Zeitintervall  $t$  ab, so dass kein Teilereignis von  $e$  außerhalb von  $t$  stattfindet.

### 3.4.1. Beispiel

Die Vor- und Nachteile der vorgestellten Konzeption können bereits anhand einer sehr einfachen Beispielmodellierung aus der Domäne Zeit erläutert werden. Die in diesem Abschnitt skizzierte Struktur ist ein Modell für die aufgestellte Axiomatisierung und demonstriert deren Realisierbarkeit, erhebt aber keinen Anspruch auf Adäquatheit oder Plausibilität. Angenommen werden sollen zunächst folgende Rahmenbedingungen für spezifische Granularitäten  $\gamma_s$  mit Sekunden als Granulatsgrößen,  $\gamma_{min}$  für Minuten,  $\gamma_h$  für Stunden,  $\gamma_d$  für Tage (24h),  $\gamma_w$  für Wochen (7d). Die zeitliche Dauer eines zusammenhängenden Zeitintervalls  $t$  werde durch eine vorgegebene Funktion  $d$  als Wert in Sekunden angegeben.

$$\begin{aligned} \text{grn}(\gamma_s, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 1s \\ \text{grn}(\gamma_{min}, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 60s \\ \text{grn}(\gamma_h, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 3600s \\ \text{grn}(\gamma_d, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 86400s \\ \text{grn}(\gamma_w, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 604800s \end{aligned}$$

Im Beispiel soll eine Granularität mit Granulatsgröße  $x$  stets die Kontextgröße  $10 * x$  erhalten:<sup>12</sup>

$$\forall \gamma, t, t' : \text{grn}(\gamma, t) \rightarrow [\text{ktx}(\gamma, t') \leftrightarrow d(t') = d(t) * 10]$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \text{ktx}(\gamma_s, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 10s \\ \text{ktx}(\gamma_{min}, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 600s \\ \text{ktx}(\gamma_h, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 36000s \\ \text{ktx}(\gamma_d, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 864000s \\ \text{ktx}(\gamma_w, t) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(t) = 6048000s \end{aligned}$$

Abbildung 3.1 illustriert die Definitionen. Die Abbildung zeigt zwei Zeitintervalle  $t_1$  und  $t_2$  relativ zu einer in 10s-Intervalle aufgeteilten Zeitachse. Verschiedene Granularitäten

<sup>12</sup>Eine Konzeption von Granularität, die auf der Unterteilung gemäß einem bestimmten Faktor  $k$  (hier  $k = 10$ ) basiert, sind auch die  $k$ -refinable layered metric temporal logics von Montanari, Peron und Policriti [73].

### 3. Granularität und Ausdehnung

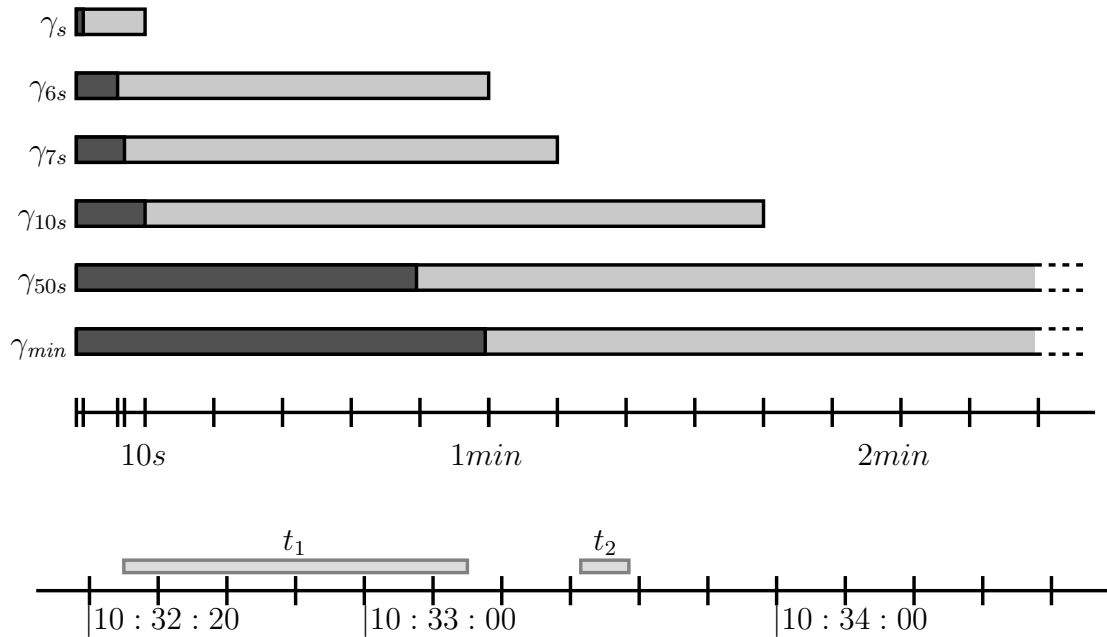


Abbildung 3.1.: Beispiel für Granularitäten der Zeitdomäne. Unten: zwei Zeitintervalle  $t_1$  (10:32:25–10:33:15 Uhr) und  $t_2$  (10:33:32–10:33:39 Uhr) relativ zu einer in 10s-Intervalle aufgeteilten Zeitachse; oben: verschiedene Granularitäten dargestellt anhand ihrer Granulatsgröße (dunkel) und ihrer Kontextgröße (hell).

werden anhand eines Granulatsintervalls und eines am selben Zeitpunkt beginnenden Kontextintervalls dargestellt. Ein Ereignis, das wie  $t_2$  zwischen 1s und 10s dauert, ist demnach mit  $\gamma_s$  kompatibel. Ein in einem Intervall wie  $t_1$  lokalisiertes Ereignis, welches 50 Sekunden dauert, ist in dieser einfachen Modellierung weder mit  $\gamma_s$  noch mit  $\gamma_{min}$  kompatibel. Es gibt allerdings eine Granularität  $\gamma_{50s}$ , die 50 Sekunden als Granulatsgröße hat, und entsprechend zu Ereignissen der Dauer von 50s–500s, d.h. (50s–8min20s) kompatibel ist. Es gilt u.a.:

$$\begin{aligned}\gamma_{50s} &\approx \gamma_{min} \\ \gamma_s &\prec \gamma_{50s} \\ \gamma_{50s} &\prec \gamma_h\end{aligned}$$

$\gamma_{50s}$  ist also zu der Granularität  $\gamma_{min}$ , die durch Minuten als Granulatsgröße bestimmt wird, indifferent.  $\gamma_s$  ist dagegen feiner und  $\gamma_h$  gröber.

Zu beachten ist aber, dass eine Granularität  $\gamma_{7s}$  sowohl zu  $\gamma_s$  als auch zu  $\gamma_{min}$  indifferent ist. Für die fast denselben Bereich von Ausdehnungen umfassende Granularität  $\gamma_{5s}$  hingegen gilt die Indifferenz zu  $\gamma_{min}$  nicht:

$$\begin{aligned}\gamma_{7s} &\approx \gamma_s \\ \gamma_{7s} &\approx \gamma_{min} \\ \gamma_{5s} &\approx \gamma_s \\ \gamma_{5s} &\prec \gamma_{min}\end{aligned}$$

Die feinste Granularität, die zu  $\gamma_{min}$  indifferent ist, ist in diesem Beispiel exakt die Granularität  $\gamma_{6s}$ , die Intervalle der Dauer 1min als Kontextintervalle beinhaltet. Die Exaktheit dieser Grenze mag als Nachteil erscheinen. Der exakte Übergang ist unabhängig von dem hier gewählten Beispiel eine generelle Eigenschaft der Axiomatisierung, die sich auch durch eine möglicherweise plausiblere Modellierung nicht umgehen lässt. Dieses Problem hängt eng zusammen mit dem u.a. von Fine in [32] diskutierten Problem der Vagheit höherer Ordnung: Die Granularitäten können als Repräsentanten unscharfer Größenordnungen von bestimmten Entitäten gesehen werden, haben aber in der Modellierung scharfe Grenzen. Die Vagheit dieser Grenzen ließe sich z.B. durch eine weitere Ununterscheidbarkeitsrelation, wie z.B. der perzeptuellen Ununterscheidbarkeit, modellieren. Aber auch bei Modellierung von Vagheit zweiter Ordnung würden wiederum exakte Übergänge entstehen, was eine zusätzliche Vagheit dritter Ordnung erfordern würde, usw.

Die Zielsetzung, eine Modellierung des Kontextparameters Granularität zu erreichen, die Brüche möglichst vermeidet, wird aber dennoch im Falle dynamischer Granularitätsebenenwechsel gut angenähert, wie unten an einem Beispiel gezeigt wird.

### 3.4.2. Granularitätsebenenwechsel

Ich möchte nun an einem Beispiel skizzieren, dass die hier vorgestellte Konzeption von Granularität, tatsächlich, wie gefordert, Eigenschaften eines kontextabhängigen, Vagheit

### 3. Granularität und Ausdehnung

beachtenden Konzeptes von Granularität aufweist. Angenommen in einer Anwendung wurden nacheinander Ereignisse  $e_i$  der Längen  $d(\text{temp}(e_1)) = 30s$ ,  $d(\text{temp}(e_2)) = 20s$ ,  $d(\text{temp}(e_3)) = 80s$ ,  $d(\text{temp}(e_4)) = 1,5s$  notiert. Entsprechend der Relation der Indifferenz liegt erst dann ein relevanter Granularitätswechsel vor, wenn die hinzukommenden Objekte eine Kategorisierung unter eine Granularität nicht mehr erlauben. Die Granularität des Kontextes könnte also sukzessive folgendermaßen bestimmt werden: Zunächst wird diejenige Granularität gewählt, die  $\text{temp}(e_1)$  als Granulat hat:  $\text{grn}(\gamma_{30s}, \text{temp}(e_1))$ . Im zweiten Schritt kommt  $e_2$  hinzu, dessen Intervall nicht mit  $\gamma_{30s}$  kompatibel ist. Als neue Granularität kann  $\text{grn}(\gamma_{20s}, \text{temp}(e_2))$  gewählt werden. Auch  $\text{temp}(e_1)$  ist noch mit  $\gamma_{20s}$  kompatibel. Am Kontext muss nicht viel geändert werden, denn es gilt  $\gamma_{20s} \approx \gamma_{30s}$ . Im dritten Schritt ändert sich nichts, da das neu hinzukommende  $e_3$  ebenfalls kompatibel zu  $\gamma_{20s}$  ist. Erst im vierten Schritt ist ein echter Granularitätsebenenwechsel, genauer eine Verfeinerung, notwendig, da es zu  $e_4$  keine kompatible Granularität gibt, die auch mit einem der bisherigen Elemente kompatibel wäre:  $\gamma_{1,5s}$  mit  $\text{grn}(\gamma_{1,5s}, \text{temp}(e_4))$  z.B. umfasst Elemente bis zur Länge  $15s$ .

Ein weniger klares Beispiel liegt vor bei folgender Reihe von Ereignissen, die an den Aufbau zur Sorites-Vagheit (Abschnitt 1.2.1) angelehnt ist:  $d(\text{temp}(e_1)) = 1s$ ,  $d(\text{temp}(e_2)) = 5s$ ,  $d(\text{temp}(e_3)) = 30s$ ,  $d(\text{temp}(e_4)) = 1\text{min}$ . Hier würde nach obiger Konzeption erst  $\gamma_s$  als Granularität gewählt. Das Ereignis  $e_2$  ist ebenfalls mit  $\gamma_s$  kompatibel. Erst im dritten Schritt kommt ein nicht kompatibles Element  $e_3$  hinzu. Die Granularität  $\gamma_{5s}$  ist zwar nun geeignet  $e_3$  und  $e_2$  zu beinhalten, aber  $e_1$  fällt in jedem Falle damit aus der Betrachtung. Ein klarer Granularitätsebenenwechsel wie in obigem Beispiel liegt aber nicht vor, da  $\gamma_{5s}$  und  $\gamma_s$  indifferent sind. Dieselbe Überlegung muss auch für den vierten Schritt angestellt werden. Hier kommt das Element  $e_4$  hinzu, das wiederum nicht mit  $\gamma_{5s}$  kompatibel ist, und entsprechend können nur Granularitäten gefunden werden, die mit  $e_4$  und  $e_3$  kompatibel sind, nicht aber mit  $e_2$ . Die größte Granularität, die diese Eigenschaft erfüllt, ist  $\gamma_{30s}$ , die feinste ist  $\gamma_{6s}$ , zu der  $e_4$  eine maximale Ausdehnung ist. Für  $\gamma_{30s}$  gilt  $\gamma_{30s} \approx \gamma_{5s}$  aber auch  $\gamma_{30s} \succ \gamma_s$ . Hier wird die Nicht-Transitivität der Indifferenz wichtig: Im Vergleich zum letzten Schritt liegt kein klarer Granularitätsebenenwechsel vor, aber im Vergleich zum ersten Schritt hat sich die Granularität relevant vergrößert. Bei Wahl von  $\gamma_{6s}$  gilt hingegen  $\gamma_{6s} \approx \gamma_s$  aber auch  $\gamma_{6s} \approx \gamma_{5s}$ , und es liegt also auch über die ganze Serie hinweg keine relevante Vergrößerung vor. Erst wenn ein erheblich größeres Element hinzukommt, wird der Wechsel über die ganze Serie unvermeidbar. Für ein hinzukommendes Element  $e_5$  mit  $d(\text{temp}(e_5)) = 4\text{min}$  ist die feinste mögliche Granularität  $\gamma_{24s}$ , zu der  $\text{temp}(e_5)$  maximale Ausdehnung ist. Für diese Granularität gilt:  $\gamma_{24s} \succ \gamma_s$ . Es hat also in der Serie erst im fünften Schritt eine erhebliche Vergrößerung stattgefunden.

Die Beispiele illustrieren, wie Granularität als Kontextparameter eingesetzt werden kann. Dynamische Granularitätswechsel können verschieden hart sein. Folgende Abstufungen wurden illustriert:

- Eine leichte Verschiebung der Granularität, so dass sich zu den bereits umfassten Entitäten auch eine neu hinzu gekommene erfassen lässt.
- Eine Verschiebung, bei der ein altes Element herausfallen muss, damit ein neues

kompatibel zum Kontext wird, bei der die so entstandene Granularität aber immer noch indifferent zu allen vorangegangenen bleibt.

- Eine leichte Vergröberung (Verfeinerung) bei der die entstehende Granularität gröber (feiner) als eine in der Serie vorangegangene wird.
- Eine Vergröberung (Verfeinerung) bei der die entstehende Granularität gröber (feiner) als alle vorangegangenen in der Serie wird.

Die verschiedenen möglichen Abstufungen illustrieren, dass die hier vorgestellte Konzeption von Granularität, tatsächlich, wie gefordert, Eigenschaften eines kontextabhängigen, Vagheit beachtenden Konzeptes von Granularität aufweist. Die genauen Eigenschaften dynamischer Granularitätsebenenwechsel sollen aber im weiteren nicht näher betrachtet werden. Hier sei auf die umfangreiche Literatur zur Sorites-Vagheit verwiesen (ein Überblick findet sich bei Varzi [112] und Hyde [56], zum Problem der Nicht-Transitivität vgl. auch van Deemter [22] und Halpern [47]). Im Zentrum der Arbeit stehen die statischen Eigenschaften räumlicher Granularität.

### 3.4.3. Bezug zu verwandten Ansätzen

Partitionierungsansätze gehen von einer Zeitstruktur aus, in der nur Zeitintervalle bestimmter Länge existieren, die durch Aufteilung anderer Zeitintervalle entstanden sind. Dies lässt sich in diesem Ansatz dadurch modellieren, dass das Axiom der Dichte ( $A < 5$ ) gegen ein Axiom, das eine diskrete Struktur der Ausdehnungen vorgibt, ausgetauscht wird. Zudem schreibt die strenge Aufteilung vor, dass zwischen Intervallen derselben Größe eine diskrete Ordnung der Vorzeitigkeit gegeben ist, und zwischen Intervallen verschiedener Größen aus Überlappung stets folgt, dass ein Intervall Teil des anderen ist (s. z.B. Bittner und Smith [9]).<sup>13</sup> Die Existenz einer feinsten Granularitätsebene korrespondiert zu der Existenz eines bezüglich  $<$  minimalen Elementes.

Die Granularitätsebenenstruktur ergibt sich dann bereits aus der diskreten Struktur der Ausdehnungen. Man beachte, dass durch eine Partitionierung der Zeitstruktur, die Funktion *temp* gegenüber dem oben skizzierten Ansatz in zweifacher Weise beschränkt wird: zum einen stehen nur noch Intervalle bestimmter Längen zur Lokalisierung der Ereignisse zur Verfügung, zum anderen müssen diese in einem festen Raster verankert sein. Während ein Intervall der Ausdehnung 24h in einem strengen Partitionierungsansatz z.B. stets um 0:00:00 Uhr beginnt und um 23:59:59 Uhr<sup>14</sup> einer bestimmten Zeitzone endet, existieren im hier vorgestellten Ansatz auch demgegenüber verschobene Intervalle derselben Länge, wie etwa die Tage einer anderen Zeitzone. Durch die dichte Struktur der Ausdehnungen existieren aber daneben auch Intervalle beliebiger anderer

<sup>13</sup>Nicht alle Autoren fordern die Eigenschaft, dass aus Überlappung stets folgt, dass ein Intervall Teil des anderen ist. Montanari, Peron und Policriti z.B. diskutieren in [73] auch eine temporale Logik, die diese strenge Forderung nicht aufstellt.

<sup>14</sup>Die Frage, ob die Intervallgrenzen zum Intervall gehören sollten oder nicht, soll hier nicht diskutiert werden. Hier ist nach Galton [39] eine Entscheidung zu treffen.

### 3. Granularität und Ausdehnung

Längen, wie z.B. die über das Jahr hinweg und für verschiedene Breitengrade variierenden Zeitintervalle, die am Sonnenaufgang eines Tages beginnen und am Sonnenaufgang des kalendarisch nächsten Tages enden.<sup>15</sup> Der hier vorgestellte Ansatz erlaubt, diese verschiedenen Zeitintervalle alle gemeinsam zu einer Granularität für das Konzept *Tag* zusammenzufassen.

Der Ansatz trennt damit die implizite Größenangabe, die zu einem granular temporalen Konzept wie *Tag* oder *Stunde* gehört, von der tatsächlichen Lokalisierung bestimmter normierter Entitäten, die die vorgegebene Ausdehnung haben und die Zeit bzw. den Raum partitionieren.

In Abschnitt 3.2 wurde ein Bezug zwischen Granularitäten und den in einer Beschreibung verwendeten Größenordnungen wie Stunden oder Mikrosekunden gezogen. Größenordnungen (*order of magnitude*) sind im Bereich der qualitativen Physik u.a. von Raiman [89] untersucht worden. Davis [21] stellt einen *order of magnitude*-Kalkül zur Verwendung für Distanzen vor. In der qualitativen Physik ist es wichtig zu wissen, welcher von mehreren Anteilen einer Gleichung ausschlaggebend ist und welcher vernachlässigbar. Ein vernachlässigbarer Wert in einer Gleichung ist ein Wert, der im Vergleich zu den anderen Werten erheblich kleiner ist. Er kann daher vernachlässigt werden in dem Sinne, dass mit ihm wie mit einem Wert von 0 gerechnet werden kann. Treffen z.B. ein sehr großes Objekt und ein sehr kleines Objekt mit derselben Geschwindigkeit aufeinander, so sind für die resultierende Bewegung der Objekte hauptsächlich die Bewegungsrichtung und -geschwindigkeit des großen Objektes relevant. Die Bewegungsrichtung wird dabei durch das Vorzeichen des Bewegungsvektors, die Bewegungsgeschwindigkeit durch die Größenordnung der Länge des Bewegungsvektors repräsentiert werden.

Das dargestellte axiomatische System ist kein *order of magnitude*-Kalkül. Ähnlichkeiten bestehen dahingehend, dass auch im *order of magnitude reasoning* Werte als zu einer bestimmten Größenordnung gehörig betrachtet werden, genauso wie in diesem Ansatz Entitäten zu einer gemeinsamen Granularität oder zu zwei indifferenten Granularitäten gehören können. Unterschiede liegen darin, dass die Relation der Indifferenz und die Relation der Zugehörigkeit zu einer gemeinsamen Granularität im Gegensatz zur Relation der Zugehörigkeit zu einer bestimmten Größenordnung nicht transitiv ist. In Größenordnungskalkülen wie [21] wird die Menge der Größen partitioniert, um die Eigenschaft der Transitivität zu sichern. Ein weiterer Unterschied zu dem hier vorgestellten Ansatz ist die für die qualitative Physik interessante Möglichkeit mit Größenordnungen rechnen zu können, die für die Charakterisierung der Granularitäten nicht wichtig ist.

---

<sup>15</sup>Hier ist zu beachten, dass es nördlich des Polarkreises im Winter einen – gemäß dieser Definition – quasi letzten Tag gibt in dem Sinne, dass am kalendarisch nächsten Tag kein Sonnenaufgang mehr existiert.

## 4. Räumliche Granularität

In diesem Kapitel soll nun die Geometrie aus Kap. 2 mit den Größen und Granularitäten aus dem letzten Kapitel verbunden werden, um räumliche Granularität bestimmbar zu machen.

Die Behandlung der Ausdehnung von Regionen wird für gewöhnlich mit Hilfe der Längen von Strecken in die Geometrie eingeführt. Bei Hilbert [52] wird hierfür in Axiomengruppe III die Relation *Kongruenz* axiomatisch charakterisiert. Die ersten drei Kongruenzaxiome beschreiben Eigenschaften der Längen von Strecken. Das Axiom III.4 charakterisiert die Kongruenz zwischen Winkeln, und Axiom III.5 schließlich beschreibt die Kongruenz von Dreiecken und verbindet damit Kongruenz von Winkeln und Strecken. Die gewöhnlichen Rechenregeln für Winkelmaße und Streckenlängen lassen sich dann ableiten. Es gibt nun zwei wichtige Gründe von diesem Weg hier abzuweichen:

- Die hier vorgestellte Geometrie dient der Charakterisierung räumlicher Granularität. Die volle Mächtigkeit der Längen- und Winkelmessung ist hierfür nicht notwendig. Insbesondere das Rechnen mit Längen oder Winkeln wird nicht benötigt. Es reicht aus, bestimmen zu können, welche von zwei Regionen kleiner ist, um räumliche Granularität qualitativ zu erfassen.
- Strecken gehören – als im zweidimensionalen Raum niederdimensionale Entitäten – aus der Perspektive regionenbasierter Ansätze zu den ontologisch sekundären Entitäten (s. Kap. 2). Sie entsprechen messbaren Distanzen zwischen Punkten. Räumliche Granularität hängt in großem Maße von den verschiedenen Ausdehnungen eines Objektes, oder genauer einer Objektregion, ab. Diese Ausdehnungen können, wie in diesem Kapitel und in Kap. 6 gezeigt wird, auch in einer mit der regionenzentrierten Perspektive verträglicheren Art charakterisiert werden.

Noch schwieriger als die Granularität von Objektregionen zu charakterisieren ist es, eine geeignete Charakterisierung der Granularität der freien Flächen zwischen Objekten zu finden.

In der Forschung zu Navigation und Routeninstruktionen interessieren *begehbare Orte* u.U. mehr als die Objektregionen, die ja von den Objekten verdeckt werden, also gar nicht einsehbar sind. Der Begriff des Ortes war in Kap. 1 anhand der Entscheidungspunkte in Routeninstruktionen und der Positionen in der *Ortserkennung* (*place recognition*) biologischer und künstlicher Navigationssysteme motiviert worden.

Granularitätsphänomene treten auf, wenn hierarchisches Planen oder hierarchische Beschreibungen hinzukommen. Natürlichsprachliche Routenbeschreibungen nutzen Granularität zur kompakten Darstellung räumlicher Navigation. Routenbeschreibungen nehmen zwar auch auf direkte Wahrnehmung Bezug, können aber ein auf räumliche Gra-

ularität gestütztes Konzeptsystem verwenden. Frage ich z.B. im Reisebüro nach einer Möglichkeit schnell von Hamburg nach München zu gelangen, so wird mir vermutlich für die Hauptdistanz zwischen den zwei Orten Hamburg und München eine schnelle Route angeboten werden. Von wo genau ich in Hamburg starte und wo genau ich in München erwartet werde, ist zunächst unwichtig. Wähle ich z.B. eine Flugverbindung, so bleibt es vermutlich mir überlassen, wie ich von meinem Startort zum Flughafen in Hamburg und vom Flughafen in München zum Zielort gelange. Der tatsächliche Startort, ein bestimmtes Gebäude der Universität z.B. ist ein *Teilort* des größeren Startortes Hamburg, der zu der Granularität der Reiseroute kompatibel ist (s. Abschnitt 5.3).

In gewisser Hinsicht habe ich sogar schon begonnen zu reisen, wenn ich mich entscheide ins Reisebüro zu gehen, um für die Hauptdistanz eine Überbrückungsmöglichkeit zu finden. Navigation auf weitere Distanzen basiert damit einerseits wie die Roboternavigation auf der Erkennung von Orten und der Wahl geeigneter Handlungen, um zu anderen Orten zu gelangen, andererseits erlaubt die Annahme von Orten größerer Ausdehnung mit Hilfe von granularitätsabhängigen Verfeinerungstechniken über die reine Sichtbarkeitsnavigation hinauszugelangen.

Die Orte Hamburg und München sind bei der Grobplanung punktartige Lokationen, bei der Navigation auf feinerer Granularitätsebene, also für die Planung der Route zum Flughafen hingegen, stellen sie räumliche Kontextregionen. Diese Konzeptualisierung als punktartig oder ausgedehnt hängt eng zusammen mit den im Kontext des aktuellen Planungsschrittes relevanten räumlichen Ausdehnungen.

In diesem Kapitel soll nun, wie in Kap. 1 motiviert, eine am kognitiven Konzept des Ortes orientierte Charakterisierung räumlicher Ausdehnungen vorgestellt werden. In Abschnitt 3.1 war kritisiert worden, dass es keinen zu den granularen temporalen Kontexten korrespondierenden Begriff granularer räumlicher Kontexte gibt. Ziel ist hier daher die Entwicklung eines formal vergleichbaren Konzeptes einer Entität eindeutiger Größe, die auch als räumlicher Kontext dienen kann. Die oben erwähnten Strecken sind nicht geeignet, einen solchen räumlichen Kontext zu stellen. Strecken haben zwar, wie für die Charakterisierung von Granularität in Abschnitt 3.2 gefordert, eine eindeutige Größe – ihre Länge –, da sie als eindimensionale gerade Entitäten nur in einer Richtung überhaupt eine Ausdehnung besitzen. Sie korrespondieren damit auch genau zu den eindimensionalen zusammenhängenden Intervallen der Zeit, können aber insoweit nicht als Kontexte in der geforderten Art dienen, als sie nicht geeignet sind, Objekte, wie z.B. ausgedehnte lokale Landmarken oder einen ausgedehnten sich bewegenden Agenten, zu lokalisieren. Eine für diesen Zweck geeignetere geometrische Entität ist der Kreis – oder im dreidimensionalen Fall die Kugel –, der z.B. in der mereotopologischen Kongruenzgeometrie für Formrepräsentation und -vergleich von Dugat, Gambarotto und Larvor [24] als Basis für die Axiomatisierung verwendet wird. Kreise sind ausgedehnte Entitäten und daher besser geeignet, Objekte zu lokalisieren als Strecken, lassen sich aber bezüglich ihrer Ausdehnung wie die Strecken in eine lineare Ordnung bringen.

Um ein geometrisches Konzept des Ortes im obigen Sinne realisieren zu können, ist allerdings eine größere Freiheit bezüglich der umfassten Region wünschenswert. Die begehbare, freie Fläche, die einen Ort ausmacht, etwa lässt sich nicht notwendigerweise durch einen Kreis beschreiben. Zudem ist die Möglichkeit, eine Aufteilung des Raums



in Zellen eines Rasters vornehmen zu können, d.h. nicht auf die Kreise der Euklidischen Metrik beschränkt zu sein, wünschenswert, um eine Einbettung in die Partitionierungsansätze zu räumlicher Granularität zu erleichtern, und auch die Granularitätsphänomene der Rasterdatenformate (s. Kap. 1) erfassen zu können.

Zu diesem Zweck wurden für diese Arbeit Axiome eines granularen Ortskonzeptes entwickelt, das spezifisch genug ist, die obigen Anforderungen an eine Basisentität für räumliche Ausdehnungen zu erfüllen, aber offen genug, um für eine Repräsentation räumlicher Kontexte in verschiedenen Domänen ebenfalls tauglich zu bleiben. Die zu charakterisierenden Entitäten werden im folgenden daher als *Orte* bezeichnet.<sup>1</sup>

Anmerkung zur Terminologie: Die eindeutige Ausdehnung der Strecken – sie haben nur in eine Richtung eine Ausdehnung: die Länge einer Strecke ist durch die Strecke selbst gegeben, die Breite der Strecke ist durch einzelne Punkte gegeben – führt in der auf Strecken basierenden Konzeption zur Charakterisierung der Längen. Die eindeutige Ausdehnung der Orte – sie sollen in jede Richtung dieselbe Ausdehnung haben: die Länge eines Ortes wie auch seine Breite, sollen durch den Ort selbst gegeben sein – führt in der hier vorgestellten Konzeption zur Charakterisierung der hier als Größen bezeichneten Äquivalenzklassen der Größenkongruenz. Unter der Ausdehnung eines Objektes wird hingegen ein bestimmter Bereich gefasst, über den sich das Objekt erstreckt bzw. ausdehnt, z.B. in der Zeit das Intervall, über das sich ein Ereignis erstreckt, mit seiner eindeutig bestimmbar Dauer. Es ist zu beachten, dass beliebig geformte Regionen deshalb keine Größen charakterisieren, weil sie in vielfältiger Weise ausgedehnt sein können. Die Orte z.B., die in ihnen enthalten sind oder über die sie sich erstrecken, bestimmen ihre interne bzw. externe Ausdehnung, die wiederum zu bestimmten Größen und somit auch zur Granularität (Kap. 3) in einem Kontext in Beziehung gesetzt werden kann. Diese Beziehungen zwischen verschiedenen Arten von Ausdehnungen eines Objektes und Granularität werden im zweiten Teil der Arbeit detailliert untersucht.

Die Geometrie ist geeignet, die Eigenschaften einer eindeutigen Ausdehnung zu beschreiben. Das vornehmliche Mittel für die Beschreibung der Ausdehnung einer Region in einer bestimmten Richtung, das hier verwendet wird, ist der Raum zwischen zwei parallelen Geraden. Eine Region, die zwischen zwei parallelen Geraden liegt, kann nur in einer Richtung unbeschränkt sein. Eine geometrische Entität, die genau die zwischen zwei Parallelen eingeschlossenen Punkte enthält, heißt *Streifen*. Durch die Breite eines Streifens wird die Ausdehnung der in ihm liegenden Regionen beschränkt. Liegt eine Region in zwei Streifen, die in verschiedene Richtungen unbeschränkt sind, so ist die Region in jede Richtung beschränkt. Der Begriff der *Richtung* wird hier und im folgenden informell verwendet. Ein formales geometrisches Konzept von Richtung habe ich in [98, 97] erarbeitet.<sup>2</sup> Dieses formale Richtungskonzept konnte in der Zusammenarbeit mit Tschander, Eschenbach und Habel [100] für die Repräsentation von Richtungskon-

---

<sup>1</sup>Der Begriff des Kreises bezieht sich daher im folgenden, wenn nicht anders angemerkt, allein auf die Kreise der Euklidischen Metrik.

<sup>2</sup>Eine genaue Betrachtung der Beziehungen zwischen der Geometrie für Richtungen aus [98] und der hier vorgestellten Geometrie liegt außerhalb der in dieser Arbeit behandelten Fragestellung. Es sei hier nur angemerkt, dass die in [98] charakterisierten *Sektoren exakter Richtungen* in einer engen Beziehung zu den hier charakterisierten Streifen stehen.

zepten in der Sprache eingesetzt werden.

## 4.1. Geometrische Charakterisierung von Orten

Orte werden in dieser Arbeit über so genannte *Streifen* charakterisiert. Die Größenkongruenz von Streifen und Orten kann dann so entwickelt werden, dass sich eine Äquivalenzrelation  $\equiv$  mit einer linearen Ordnungsrelation  $<$  (*kleiner*) ergibt, wie in Abschnitt 3.2 gefordert. Kongruenz zwischen Strecken und Winkeln ist die Basis der Axiomengruppe III in der Axiomatisierung von Hilbert [52], wobei die Axiome III.1-3 die Kongruenz von Strecken und III.4 und III.5 die Kongruenz von Winkeln behandeln. Die Beziehung zwischen der hier aufgestellten Größenkongruenz und der Streckenkongruenz der Axiome III.1-3, durch die in der Hilbertschen Geometrie Ausdehnungen charakterisiert werden, wird genauer untersucht. Die Längen von Strecken werden hier abgeleitet als Durchmesser von Orten charakterisiert. Die Möglichkeit der Abtragung einer Strecke auf einer beliebigen Geraden, die mit III.1 gefordert wird, kann in dieser Stärke allerdings nicht gefolgert werden. Hierzu wird in Abschnitt 4.2 eine abgeschwächte Variante des Axioms III.1 hinzugenommen, um das Axiom III.2 und die Eindeutigkeit der Streckenabtragung beweisen zu können. Es wird dann gezeigt, dass das Axiom III.3 nicht gelten muss. Das Konzept der Winkelkongruenz der Axiome III.4 und III.5 wird in dieser Arbeit nicht benötigt. Abschließend wird das Distanzkonzept in Bezug zur Metrik gesetzt. Die Größenkonzepte aus Kap. 3 können dann auf Orte und Streifen übertragen werden, da die Kongruenzstruktur, wie wir sehen werden, lediglich Dichte benötigt. In Kap. 5 werden darauf aufbauend dann die räumlichen Granularitäten bestimmt.

In der ebenen Geometrie lassen sich Streifen  $t$  charakterisieren als der Raum zwischen zwei parallelen Geraden einschließlich der begrenzenden Geraden:

$$\begin{aligned} \forall t, g_1, g_2 : \text{border}(t, g_1, g_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} g_1 \parallel g_2 \wedge \forall P : P \iota t \leftrightarrow P \iota g_1 \vee P \iota g_2 \vee \\ \exists Q_1, Q_2 : Q_1 \iota g_1 \wedge Q_2 \iota g_2 \wedge \beta(Q_1, P, Q_2) \end{aligned} \quad (\text{D14})$$

Die Existenz von Streifen kann nun axiomatisch gesichert werden.

$$\forall g_1, g_2 : g_1 \parallel g_2 \leftrightarrow \exists t : \text{border}(t, g_1, g_2) \quad (\text{A9})$$

Mit dem Parallelenaxiom folgt, dass Streifen existieren, und dass die Charakterisierung eindeutig ist. Abbildung 4.1 illustriert die Charakterisierung.

Parallelität kann als rudimentäres Konzept von Äquidistanz verstanden werden. Der Abstand zwischen parallelen Geraden kann als an jeder Stelle gleich angesehen werden. Dadurch sind Streifen geeignet, ein rudimentäres Konzept von Größenvergleichen zu unterstützen. Ist ein Streifen echt in einem anderen enthalten, so beschränkt er die in ihm enthaltenen Regionen mehr als der Streifen, in dem er enthalten ist. Über die Relation des Enthaltenseins  $\sqsubseteq$  (D2) lässt sich daher auf den ineinander enthaltenen Streifen bereits eine mit Ausdehnung zusammenhängende Ordnung aufbauen. Abbildung 4.2 illustriert diese Eigenschaft. Die Region  $A_2$  ist in beiden abgebildeten Streifen enthalten,  $A_1$  hingegen ist nur in  $t$ , nicht aber in  $t'$  enthalten.  $A_1$  ist also in den durch  $t$  und  $t'$

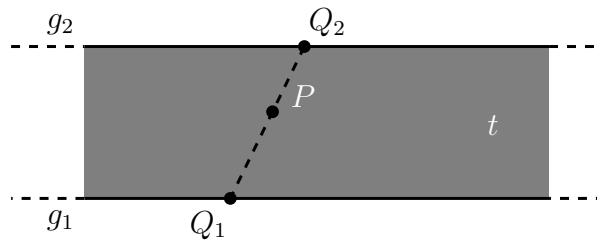


Abbildung 4.1.:  $P$  liegt in dem Streifen  $t$ , da  $P$  zwischen Punkten  $Q_1, Q_2$  liegt, die sich auf den Grenzgeraden  $g_1$  bzw.  $g_2$  des Streifens befinden.

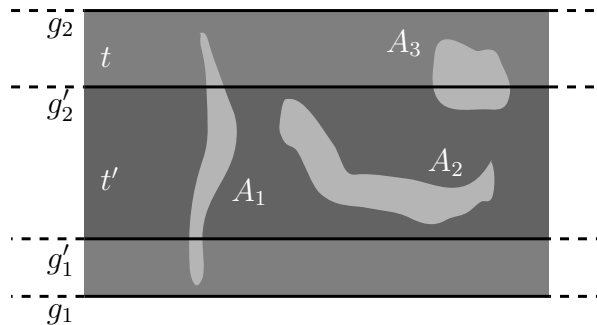


Abbildung 4.2.: Der durch  $g_1, g_2$  begrenzte Streifen  $t$  umfasst eine größere Breite als der durch  $g'_1, g'_2$  begrenzte Streifen  $t'$ .  $t$  enthält daher  $A_1, A_2$  und  $A_3$ .  $t'$  enthält nur  $A_2$ . Die Region  $A_1$  kreuzt  $t'$ , während  $A_3$   $t$  nur überlappt.

#### 4. Räumliche Granularität

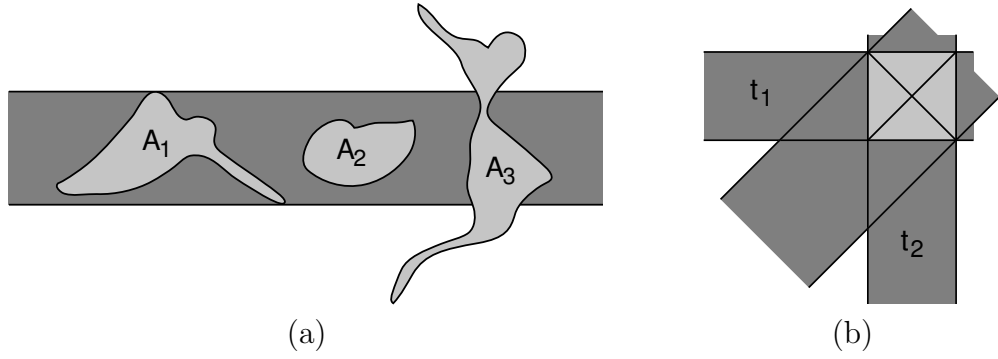


Abbildung 4.3.: (a) Relationen zwischen einem Streifen  $t$  und drei Regionen.  $A_2$  ist *enthalten* in  $t$  ( $\sqsubseteq$ ),  $A_3$  *kreuzt*  $t$  ( $\#$ ). Beide Relationen gelten für  $A_1$ . Daher wird  $A_1$  von  $t$  *bemessen* ( $\equiv$ ). Die Breite von  $t$  spezifiziert genau die Breite von  $A_1$  in eine Richtung. (b) Ein Quadrat und das von seinen Diagonalen aufgespannte Kreuz sind kollokalisiert.

beschränkten Richtungen ausgedehnter als  $A_2$ . Aber auch  $A_3$  ist nicht in  $t'$  enthalten, dennoch lässt sich  $A_3$  nicht als ausgedehnter als  $A_2$  bezeichnen. Um die Region  $A_1$  bezüglich ihrer Größe einordnen zu können, wird daher noch eine zusätzliche Relation benötigt:  $A_1$  unterscheidet sich bezüglich  $t'$  von  $A_3$  darin, dass  $A_1$  nicht aber  $A_3$  die gesamte Breite des Streifens überquert.  $A_1$  ist also bezüglich der Streifenbreite mindestens genauso ausgedehnt wie  $t'$ . Diese Eigenschaft lässt sich über die im Streifen enthaltenen Geraden charakterisieren: Eine geometrische Entität  $x$  einer Sorte  $\mathcal{X}$  *kreuzt*  $\#$  einen Streifen  $t$  genau dann, wenn sie alle Geraden, die in dem Streifen liegen, schneidet (D15).<sup>3</sup>

Regionen, die sowohl in einem Streifen enthalten sind als auch diesen kreuzen, stimmen in den vom Streifen beschränkten Richtungen genau mit der Breite des Streifens überein. Diese Relation kann für die Charakterisierung von Größen genutzt werden. Eine geometrische Entität  $x$  einer Sorte  $\mathcal{X}$  *liegt auf* einem Streifen  $t$ , wenn sie enthalten ist und ihn kreuzt (D16). In anderer Sprechweise: der Streifen  $t$  *bemisst* oder *begrenzt*  $x$ .

$$x \# t \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall g : g \sqsubseteq t \rightarrow g \circ x \quad (\text{D15})$$

$$x \equiv t \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \sqsubseteq t \wedge x \# t \quad (\text{D16})$$

Offensichtlich können so nur Regionen durch einen Streifen bemessen werden, die in den beschränkten Richtungen abgeschlossen sind, anderenfalls kann es keinen Streifen geben, der die Region enthält und zusätzlich mit jeder enthaltenen Gerade – also auch mit den beiden Grenzgeraden – berührt. Auch Punkte können nicht durch Streifen bemessen werden, da Streifen aufgrund der Irreflexivität der Parallelität stets mehr als eine Gerade enthalten. Abbildung 4.3(a) veranschaulicht die Relationen  $\sqsubseteq$ ,  $\#$ ,  $\equiv$  zwischen Regionen und Streifen. Liegen zwei geometrische Entitäten  $x$  der Sorte  $\mathcal{X}$  und  $y$  der Sorte  $\mathcal{Y}$  stets auf demselben Streifen, so sollen sie im folgenden *kollokalisiert*  $\triangleq$  genannt werden (D17):

$$\forall x, y : x \triangleq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall t : t \equiv x \leftrightarrow t \equiv y \quad (\text{D17})$$

<sup>3</sup>Eine Variante dieser Relation habe ich in [98,97] für das Schließen über Richtungsrelationen entwickelt.

Abbildung 4.3(b) illustriert die Relation. Ein Quadrat und das von seinen Diagonalen aufgespannte Kreuz sind kollokalisiert. Die Kollokalisierung erlaubt es, von der inneren Struktur einer abgeschlossenen Region zu abstrahieren und nur die äußeren Ausdehnungen zu betrachten. Es folgt unmittelbar, dass die Relation  $\triangleq$  eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv, ist.

Orte können nun als genau diejenigen geometrischen Entitäten axiomatisch charakterisiert werden, die in jeder Richtung dieselbe Ausdehnung haben. Zunächst soll gesichert werden, dass sich Orte genau in ihren Punkten unterscheiden (A10) und projektiv zusammenhängende geometrische Entitäten (vgl. (D9)) sind (A11):

$$\forall p_1, p_2 : p_1 = p_2 \leftrightarrow \forall P : P \iota p_1 \leftrightarrow P \iota p_2 \quad (\text{A10})$$

$$\forall p : \text{proj}(p) \quad (\text{A11})$$

### Überdeckungsaxiom

Zudem soll gelten, dass der gesamte Raum mit Orten überdeckt ist. Zu jedem Punkt auf einem Streifen existiert mindestens ein Ort, der von dem Streifen genau begrenzt wird und den Punkt enthält (A12).

$$\forall P, t : P \iota t \rightarrow \exists p : P \iota p \wedge p = t \quad (\text{A12})$$

Mit diesem Axiom folgt, dass jeder Punkt zu einem Ort beliebiger Größe gehört.

### Begrenzungsaxiome

Die nächste Gruppe von Axiomen wird bereits die rudimentären Ordnungseigenschaften für den Vergleich von räumlichen Ausdehnungen sichern. Zwei Orte lassen sich stets durch einen Streifen vergleichen, so dass der erste Ort genau von dem Streifen begrenzt wird und der zweite den Streifen kreuzt oder in ihm enthalten ist (A13). Axiom (A14) sichert, dass Orte die Ausdehnungen der Streifen vergleichbar machen: Angenommen  $p_1$  ist enthalten in  $t_1$  und  $p_2$  kreuzt  $t_2$  und ein Ort  $p$ , der gewissermaßen als Referenz fungiert, wird durch beide Streifen  $t_1$  und  $t_2$  bemessen, so gilt: Wenn es einen Streifen  $t$  gibt, in dem  $p_2$  enthalten ist, und  $t$  bemisst  $p_1$ , dann bemisst  $t$  auch  $p_2$ . Axiom (A15) besagt: Wenn zwei Orte beide auf zwei Streifen liegen, dann sind entweder die Streifen identisch, oder die Orte liegen immer auf denselben Streifen, d.h. sie sind kollokalisiert (D17) oder sogar identisch. Es muss zusätzlich gesichert werden, dass jeder Ort in jeder durch eine Gerade  $g$  vorgegebenen Richtung durch einen Streifen bemessen wird, der eine zu  $g$  parallele Grenzgerade  $g'$  hat. Dieses Axiom wird benötigt, um sicher zu stellen, dass Orte in jede Richtung beschränkt und abgeschlossen sind (A16).

$$\forall p_1, p_2 \exists t : p_1 = t \wedge (p_2 \# t \vee p_2 \sqsubseteq t) \quad (\text{A13})$$

$$\forall p_1, p_2, t_1, t_2, t : p_1 \sqsubseteq t_1 \wedge p = t_1 \wedge p_2 \# t_2 \wedge p = t_2 \wedge p_1 = t \wedge p_2 \sqsubseteq t \rightarrow p_2 = t \quad (\text{A14})$$

$$\forall p_1, p_2, t_1, t_2 : p_1 = t_1 \wedge p_2 = t_1 \wedge p_1 = t_2 \wedge p_2 = t_2 \rightarrow p_1 \triangleq p_2 \vee t_1 = t_2 \quad (\text{A15})$$

$$\forall p, g : \exists t, g', g'' : g' \parallel g \wedge \text{grenzG}(t, g', g'') \wedge p = t \quad (\text{A16})$$

#### 4. Räumliche Granularität

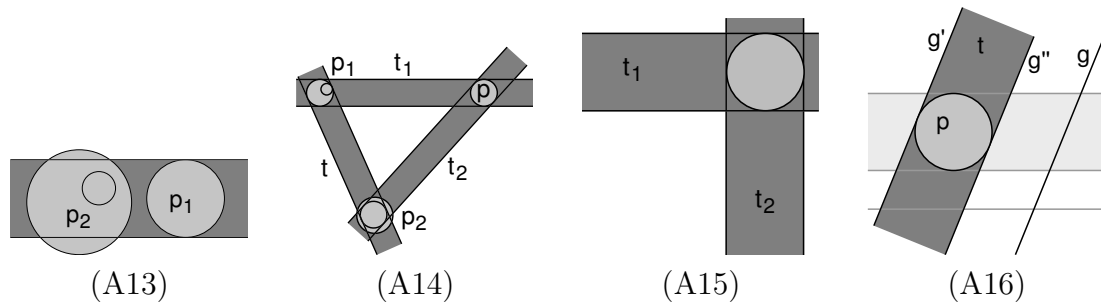


Abbildung 4.4.: Die vier Begrenzungsaxiome

Abbildung 4.4 illustriert die vier Axiome anhand eines Modells, in dem die Orte durch Kreise interpretiert werden. Andere Modelle sind in Abb. 4.5 skizziert.

Zwei Orte sollen nun mit Hilfe der Streifen nach ihrer Ausdehnung verglichen werden können. Betrachtet man einen Streifen und einen Ort, so lassen sich die Relationen  $\#$ ,  $\equiv$ ,  $\sqsubseteq$  nutzen, um die durch den Streifen gegebene Ausdehnung mit der durch den Ort gegebenen zu vergleichen. Es lässt sich zunächst feststellen: Es gibt genau dann einen Streifen  $t_1$ , der  $p_1$  bemisst und  $p_2$  kreuzt, wenn es einen Streifen  $t_2$  gibt, der  $p_2$  bemisst und  $p_1$  enthält (11).

$$\forall p_1, p_2 : [\exists t_1 : p_1 \equiv t_1 \wedge p_2 \# t_1] \leftrightarrow [\exists t_2 : p_2 \equiv t_2 \wedge p_1 \sqsubseteq t_2] \quad (11)$$

Beweis (11):  $\leftarrow$ : Gegeben  $t_1$  mit  $p_1 \equiv t_1$  und  $p_2 \# t_1$ . Liegt nun kein Punkt von  $p_2$  außerhalb von  $t_1$ , so gilt  $p_2 \equiv t_1$  und wegen  $p_1 \sqsubseteq t_1$ , ist die Folgerung erfüllt. Gibt es aber einen Punkt von  $p_2$  außerhalb  $t_1$ , so muss es nach (A16) einen Streifen  $t_2$  mit  $p_2 \equiv t_2$  geben, dessen Grenzgeraden parallel zu denen von  $t_1$  verlaufen. Da wegen  $p_2 \# t_1$  und der Eindeutigkeit der Parallelen durch einen Punkt (folgt aus (A2) und (D8)) alle Geraden in  $t_1$ , die ja alle  $p_2$  schneiden, auch Geraden in  $t_2$  sein müssen, gilt  $t_1 \sqsubseteq t_2$  und damit auch  $p_1 \sqsubseteq t_2$ .

$\rightarrow$ : Gegeben  $t_2$  mit  $p_2 \equiv t_2$  und  $p_1 \sqsubseteq t_2$ . Gibt es nun zu jeder Geraden in  $t_2$  einen Schnittpunkt mit  $p_1$ , so gilt  $p_1 \equiv t_2$  und wegen  $p_2 \# t_2$ , ist die Folgerung erfüllt. Gilt dies nicht, so muss es wieder nach (A16) einen Streifen  $t_1$  mit  $p_1 \equiv t_1$  geben, dessen Grenzgeraden parallel zu denen von  $t_2$  verlaufen. Wegen  $p_1 \sqsubseteq t_2$  und der Eindeutigkeit der Parallelen durch einen Punkt, gilt nun wiederum  $t_1 \sqsubseteq t_2$ . Es gibt aber nun zu jeder Geraden von  $t_2$  einen Schnittpunkt mit  $p_2$  und somit auch zu jeder Geraden von  $t_1$  und damit gilt  $p_2 \# t_1$ .  $\square$

Größenkongruenz und Größenvergleich können nun als Relationen definiert werden, die genau die in Abschnitt 3.2 geforderten Eigenschaften (12)–(18) aufweisen. Wird ein Ort  $p_1$  von einem Streifen bemessen, den ein Ort  $p_2$  kreuzt, so heißt  $p_1$  *kleiner oder gleich groß* ( $\leq$ ) zu  $p_2$  (D18). Ist  $p_2$  dagegen in dem  $p_1$  bemessenden Streifen enthalten, so ist  $p_1$  *größer oder gleich groß* ( $\geq$ ) zu  $p_2$  (D19).  $p_1$  und  $p_2$  sind *gleich groß* oder *größenkongruent* ( $\equiv$ ), wenn es einen Streifen gibt, der beide bemisst (D20). Die Relationen *größer* (*kleiner*)

können dann abgeleitet definiert werden (D21), (D22).

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \leq p_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists t : p_1 = t \wedge p_2 \# t \quad (\text{D18})$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \geq p_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists t : p_1 = t \wedge p_2 \sqsubseteq t \quad (\text{D19})$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \equiv p_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists t : p_1 = t \wedge p_2 = t \quad (\text{D20})$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 < p_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} p_1 \leq p_2 \wedge \neg p_1 \equiv p_2 \quad (\text{D21})$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 > p_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} p_1 \geq p_2 \wedge \neg p_1 \equiv p_2 \quad (\text{D22})$$

Aus (11) folgt nun direkt, dass  $\leq$  die Umkehrrelation zu  $\geq$  ist (12). Es gilt dann auch Asymmetrie (15). Linearität der Äquivalenzklassen bezüglich  $\equiv$  (16) folgt ebenfalls nach (A13). Die Transitivität (14) folgt aus (A14) mit (A13) und (11). Dichte (17) ergibt sich aus der Dichte von  $\beta$ , da die Eigenschaft, in einem Streifen enthalten zu sein, über die Relation  $\beta$  charakterisiert wurde. Ebenso aus der Axiomatisierung von  $\beta$  folgt, dass es zu jedem Ort größere und kleinere Orte gibt (18).

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \leq p_2 \leftrightarrow p_2 \geq p_1 \quad (12)$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \leq p_2 \wedge p_1 \geq p_2 \rightarrow p_1 \equiv p_2 \quad (13)$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 < p_2 \wedge p_2 < p_3 \rightarrow p_1 < p_3 \quad (14)$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 < p_2 \rightarrow \neg p_1 > p_2 \quad (15)$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \equiv p_2 \vee p_1 < p_2 \vee p_1 > p_2 \quad (16)$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 < p_2 \rightarrow \exists p : p_1 < p \wedge p < p_2 \quad (17)$$

$$\forall p \exists p_1, p_2 : p_1 < p \wedge p < p_2 \quad (18)$$

Die in diesem Abschnitt charakterisierten Orte erfüllen somit die einfachen Ordnungseigenschaften von in eindeutiger Weise ausgedehnten Entitäten  $s$ , die in Abschnitt 3.2 aufgestellt wurden. Die Verwendung der Symbole  $\equiv, <$  ist also gerechtfertigt. Die darauf aufbauende Charakterisierung räumlicher Granularität wird in Kap. 5 vorgestellt. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels werden die Eigenschaften der nun vollständig charakterisierten Geometrie betrachtet.

### Einfache Beispiele

Es ist plausibel, dass Orte kreisförmige Regionen sind, weil ja gesichert ist, dass sie in jeder Richtung denselben Durchmesser haben. Tatsächlich stellen die Kreise ein Modell für das hier entwickelte axiomatische System dar. Jeweils eigene Modelle ergeben sich auch, wenn z.B. gleich ausgerichtete Quadrate oder Achtecke verwendet werden. Im Hinblick auf die Polygone reicht es sogar bereits, das Gerüst der Diagonalen zu den Eckpunkten zu verwenden, damit (A12) erfüllt ist und der Ort auch projektiv zusammenhängend ist. Für die Begrenzungsaxiome sind nur die Eckpunkte relevant.

Die nicht gleich ausgerichteten Quadrate in Abb. 4.6 geraten in Konflikt mit (A14). Unterschiedliche Hauptausdehnungen sind unproblematisch: Der Raum ist dann in eine Richtung gestreckt, bzw. gestaucht. Notwendig ist lediglich, dass Orte auch in jede

4. Räumliche Granularität

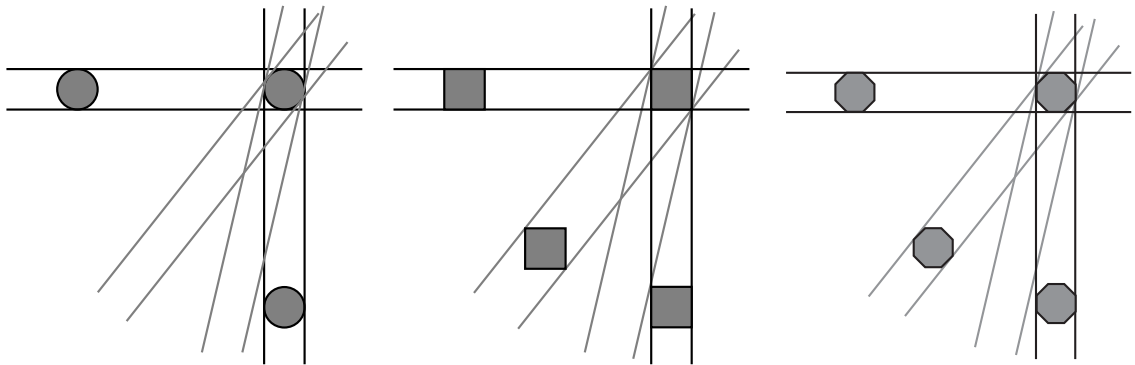


Abbildung 4.5.: Kreise, Quadrate und regelmäßige Achtecke als Orte mit sie begrenzenden Streifen.

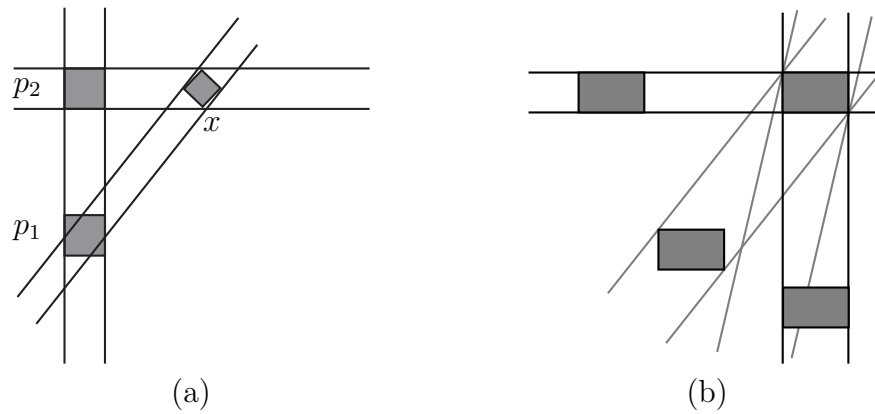


Abbildung 4.6.: Die geometrische Entität  $x$  kann in (a) kein Ort zusammen mit  $p_1$  und  $p_2$  sein, da Orte in jeder Richtung dieselbe Ausdehnung besitzen (A14). In einer Richtung gestauchte Orte (b) sind unproblematisch.



Richtung eine Ausdehnung besitzen: Strecken können daher keine Orte stellen. Werden Geraden als Streifen zugelassen, so hat dies zur Folge, dass auch Punkte Orte sind. Die Relation  $<$  hätte mit den Punkten minimale Elemente. Die Konsequenzen einer solchen Annahme wurden in Abschnitt 3.3.3 angesprochen.

Das Modell der Quadrate kann verwendet werden, um auch über räumliche Informationen im rasterbasierten Datenformat schließen zu können. Die Geometrie charakterisiert allerdings kein Raster, da die Zellen eines Rasters nicht die einzigen Orte in der Geometrie sein können. Vielmehr kann ein gegebenes Rasterbild als Menge von Orten derselben Größe verstanden werden, die den Raum oder eine bestimmte Teilregion vollständig überdecken.

In den Beispielen in Abb. 4.5 sind gefüllte Polygone und Kreise dargestellt. Tatsächlich ist die Geometrie aber bezüglich der inneren Struktur der Orte unterbestimmt, da für die Begrenzungsaxiome (A13)–(A16) nur die externe Ausdehnung der Orte benötigt wird, um das Konzept der Größe zu bestimmen. Die Relation der Kollokalisierung  $\triangleq$  (D17) abstrahiert von der inneren Struktur: ein Kreis und derselbe Kreis mit einem einzelnen isolierten Punkt im Inneren z.B. sind kollokalisiert. Für eine Anwendung der formalen Konzepte ist diese Lücke durch geeignete Restriktionen zu schließen. Eine rasterbasierte Anwendung kann z.B. darüber modelliert werden, dass nur bestimmte Orte – die Zellen des Rasters – tatsächlich die Punkte enthalten, die von ihnen umfasst werden (s. Abschnitt 5.2). Für eine Anwendung in der Roboternavigation oder für die Formalisierung von Ortskonzepten in der Routeninstruktion wäre eine kognitiv adäquate Modellierung der inneren Struktur anzustreben. Abschnitt 5.3 gibt ein Beispiel für die mögliche Modellierung einer einfachen Bürowelt.

Die Modelle der Geometrie sollen im folgenden als *Ortesysteme* bezeichnet werden.

## 4.2. Exkurs: Beziehung zur Distanz zwischen Punkten

Die Beziehung zwischen der hier aufgestellten Charakterisierung von Größenkongruenz und der in der Geometrie von Hilbert [52] aufgestellten Relation der Streckenkongruenz, die in [52] in den Axiomen III.1-3 charakterisiert wird (s.a. Kap. 2), kann nun hergestellt werden.

### Beziehung zur Kongruenz von Strecken

Es soll gezeigt werden, wie sich die vorgestellte Charakterisierung von Kongruenz von Orten mit der Kongruenz von Strecken in der ebenen Euklidischen Geometrie verträgt. Dazu muss zunächst die Kongruenz von Strecken mit den hier verwendeten Mitteln dargestellt werden können. Alle bisherigen Axiome außer (A12) sicherten lediglich Vergleichbarkeit von Orten. (A12) ist aber nicht geeignet, die beliebige Messbarkeit von Raumdistanzen sicherzustellen. Für diesen Abschnitt wird daher zunächst eine Annahme benötigt, die die *Abtragbarkeit* von Orten auf einem Streifen in jeder Richtung zusichert: Gegeben einen Streifen, eine Gerade, die den Streifen kreuzt und ein Punkt  $P$ , der nicht auf der Geraden liegt, so gibt es stets einen Ort, der auf dem Streifen liegt, die Gerade

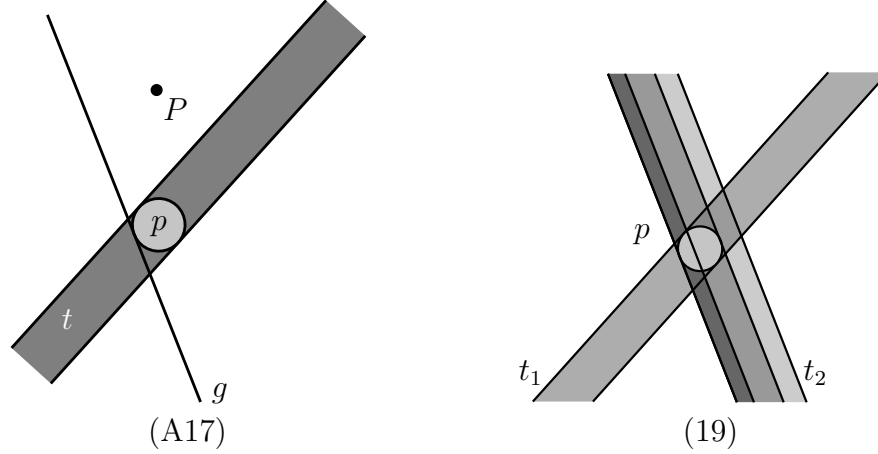


Abbildung 4.7.: Abtragbarkeit von Orten auf einem Streifen

überlappt, und keine Punkte auf der bezüglich  $P$  anderen Seite von  $g$  hat (A17).

$$\forall t, g, P : g \# t \wedge \neg P \iota g \rightarrow \exists p : p = t \wedge p \circ g \wedge \quad (\text{A17})$$

$$\forall Q : Q \iota p \rightarrow \neg \text{diffS}(g, P, Q)$$

$$\forall t_1, t_2 : t_1 \circ t_2 \rightarrow \exists p : p = t_1 \wedge (p \sqsubseteq t_2 \vee p \# t_2) \quad (19)$$

Dieses nur für diesen Abschnitt benötigte Axiom ergänzt (A12) dahingehend, dass nun jede Gerade, die den Streifen schneidet, einen Ort, der auf dem Streifen liegt auf jeder ihrer Seiten generiert. Es folgt daraus, dass alle Streifen, die einander schneiden, durch einen Ort direkt vergleichbar sind (19). Das Axiom (A17) und die Folgerung (19) sind dargestellt in Abb. 4.7. Es soll nun die Länge von Strecken von der Ordnung auf Orten abgeleitet werden.<sup>4</sup> Eine Strecke, gegeben durch Endpunkte  $P$  und  $Q$  heiße *Durchmesser* eines Ortes  $p$  ( $dm$ ), wenn  $P$  und  $Q$  in  $p$  liegen, und es einen Streifen gibt, der sowohl  $p$  als auch die Strecke  $\overline{PQ}$  bemisst (D23). Die Kongruenz von Strecken kann dann entsprechend definiert werden: Zwei Strecken sind kongruent, wenn sie Durchmesser kongruenter Orte sind (D24).

$$dm(p, P, Q) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P \iota p \wedge Q \iota p \wedge \exists t : \overline{PQ} = t \wedge p = t \quad (\text{D23})$$

$$\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists p, p' : p \equiv p' \wedge dm(p, P, Q) \wedge dm(p', P', Q') \quad (\text{D24})$$

Die Existenz eines Durchmessers für jeden Ort folgt direkt über die Definition von  $\#$  (D15). Es ist aber zum einen nicht garantiert, dass jede Strecke Durchmesser eines Ortes ist; zum anderen können Orte für einen gegebenen Streifen mehrere Strecken zum Durchmesser haben (s. Abb. 4.8). Dennoch korrespondiert die Kongruenz für Strecken

<sup>4</sup>Die hier vorgestellte Geometrie benötigt im weiteren keine Strecken. Für diesen Exkurs soll daher vereinfachend angenommen werden, dass Strecken als spezielle Regionen eingeführt seien, die für zwei beliebige Punkte  $P, Q$ , genau die beiden Endpunkte und die Punkte zwischen  $P$  und  $Q$  enthalten. Die Strecke zwischen  $P$  und  $Q$  soll wie in der Geometrie üblich  $\overline{PQ}$  geschrieben werden.

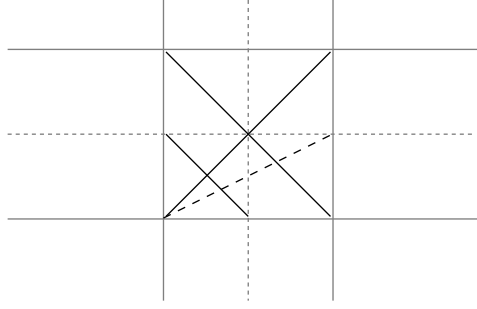


Abbildung 4.8.: Orte müssen nicht konvex sein. Das System der Diagonalkreuze von Quadraten spannt dasselbe Ortesystem auf wie das der Quadrate. Allerdings können in diesem System nur die Verbindungen zwischen Endpunkten der Diagonalen Durchmesser von Orten sein, nicht aber Strecken anderer Winkel.

(D24) direkt zur Kongruenz von Orten, denn, wenn dieselbe Strecke Durchmesser verschiedener Orte ist, so sind die Orte zumindest stets kongruent (20). Dieses Theorem ist insofern wichtig, als es garantiert, dass die hier aufgestellten Ortesysteme mit einer auf Strecken basierenden Kongruenz verträglich sind. Es gilt zudem, dass, wenn  $Q$  zwischen  $P$  und  $Q'$  liegt, die Strecken  $PQ$  und  $PQ'$  – genauer die Orte deren Durchmesser sie sind – in der Relation  $<$  stehen (22).

$$\forall P, Q, p, p' : \text{dm}(p, P, Q) \wedge \text{dm}(p', P, Q) \rightarrow p \equiv p' \quad (20)$$

$$\forall P, Q, p, p' : \text{dm}(p, P, Q) \wedge \text{dm}(p', Q, P) \rightarrow p \equiv p' \quad (21)$$

$$\forall P, Q, Q', p, p' : \beta(P, Q, Q') \wedge \text{dm}(p, P, Q) \wedge \text{dm}(p', P, Q') \rightarrow p < p' \quad (22)$$

Beweis (20): Angenommen  $p' \leq p$  und  $t$  sei der Streifen durch  $p$ , der  $\overline{PQ}$  enthält und  $t'$ , der entsprechende Streifen, der durch  $p'$  verläuft. Es gibt dann einen Streifen  $\hat{t}$  und einen Ort  $\hat{p}$  mit  $\hat{t} \sqsubseteq t$ ,  $\hat{p} \equiv \hat{t}$  und  $\hat{p} \equiv t'$ . Es folgt, dass gilt  $p \# \hat{t}$  aber auch  $p' \# \hat{t}$ , da ja jede Strecke, die  $t$  kreuzt auch jede Gerade aus  $t$  und damit auch diejenigen aus  $\hat{t}$  kreuzt. Orte aber sind nach (A11) projektiv zusammenhängend: Jede Gerade, die einen Punkt zwischen zwei Punkten des Ortes trifft, trifft auch irgendeinen Punkt des Ortes. Da aber  $\hat{p} \equiv p'$  gilt, so auch  $p' \sqsubseteq \hat{t}$  und damit, dass sowohl  $P$  als auch  $Q$  in  $\hat{t}$  liegen. Daher müssen aber  $\hat{t}$  und  $t$  dieselben Begrenzungsgeraden haben und damit identisch sein.  $\square$

Theorem (21) besagt, dass eine Strecke in beide Richtungen dieselbe Länge hat. Der Beweis verläuft analog zum obigen, da die Reihenfolge der Punkte für den Beweis von (20) nicht relevant ist. Mit (22) gilt, dass eine längere Strecke auch stets Durchmesser eines größeren Ortes bezüglich  $<$  ist: Liegt  $Q$  zwischen  $P$  und  $Q'$ ,  $\overline{PQ}$  ist Durchmesser eines Ortes  $p$ , und  $\overline{PQ'}$  Durchmesser eines Ortes  $p'$ , so ist  $p$  kleiner als  $p'$ .

Beweis (22): Seien  $t$  und  $t'$  Streifen, die  $p$  bzw.  $p'$  begrenzen in  $P, Q$  bzw.  $P, Q'$ . Gilt nun, dass Grenzgeraden von  $t$  und  $t'$  parallel verlaufen, so folgt, dass  $t \sqsubseteq t'$ ,  $t \neq t'$  und damit auch  $p < p'$ , weil  $Q$  in beiden Streifen liegt,  $Q'$  aber nur in  $t'$  und nicht in  $t$ . Bleibt der zweite Fall, dass also die Grenzgeraden nicht parallel verlaufen. In diesem Fall gilt

$p' = t'$  und  $p' \# t$ . Letzteres ist gegeben, weil Orte nach (A11) projektiv zusammenhängend sind: Jede Gerade – also auch jede Gerade aus  $t$  –, die zwischen zwei Punkten von  $p'$  – hier  $P$  und  $Q'$  – hindurchläuft, trifft einen Punkt aus der Region. Wiederum gibt es aber mit  $Q'$  einen Punkt, der nicht in  $t$  liegt. Denn alle mit  $P$  und  $Q$  kollinearen Punkte, die auch in  $t$  liegen, sind Punkte zwischen  $P$  und  $Q$ , und  $Q$  kann wegen (A $\beta$ 3) nicht zwischen  $P$  und  $Q$  liegen. Weil  $p$  mit  $Q'$  also einen Punkt außerhalb  $t$  hat, kann  $p' = t$  nicht gelten. Es folgt also  $p = t \wedge p' \# t \wedge \neg p \equiv p'$  und damit  $p < p'$ .  $\square$

### Die Kongruenzaxiome

III.1 besagt – auf die hier verwendete Terminologie angepasst –, dass zu jeder Strecke  $\overline{PQ}$  auf einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkt  $P'$  aus kongruente Strecken  $\overline{P'Q'}$  und  $\overline{P'Q''}$  abgetragen werden können, so dass  $P$  zwischen  $Q'$  und  $Q''$  liegt. III.2 besagt, dass zwei Geraden, die einer dritten kongruent sind, auch zueinander kongruent sind. III.3 verlangt die Addierbarkeit von Strecken: Wenn zwei Strecken  $\overline{PQ}$  und  $\overline{QR}$  auf einer Geraden liegen und Strecken  $\overline{P'Q'}$ , kongruent zu  $\overline{PQ}$ , und  $\overline{Q'R'}$ , kongruent zu  $\overline{QR}$ , auf derselben oder einer anderen Geraden liegen, so ist auch  $\overline{P'R'}$  kongruent zu  $\overline{PR}$ .

$$\forall P, Q, P', g' : P \neq Q \wedge P' \iota g' \rightarrow \exists Q', Q'' : Q' \iota g' \wedge Q'' \iota g' \wedge \beta(Q', P', Q'') \wedge \overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'} \wedge \overline{PQ} \equiv \overline{P'Q''} \quad (\text{III.1})$$

$$\forall P, Q, P_1, Q_1, P_2, Q_2 : \overline{P_1Q_1} \equiv \overline{PQ} \wedge \overline{P_2Q_2} \equiv \overline{PQ} \rightarrow \overline{P_1Q_1} \equiv \overline{P_2Q_2} \quad (\text{III.2})$$

$$\forall P, Q, R, P', Q', R' : \beta(P, Q, R) \wedge \beta(P', Q', R') \wedge \overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'} \wedge \overline{QR} \equiv \overline{Q'R'} \rightarrow \overline{PR} \equiv \overline{P'R'} \quad (\text{III.3})$$

Axiom (A17) korrespondiert zu einer abgeschwächten Form des Kongruenzaxioms III.1. Da ja nicht gesichert wurde, dass jede Strecke Durchmesser eines Ortes ist, lässt (A17) nur den Schluss zu, dass es zu jeder Größe und jeder Geraden, bei einer gegebenen Geraden, die den Streifen unterteilt, in jeder Hälfte des Streifens je einen Ort der Größe gibt. Es kann damit gesichert werden, dass es zu einer durch einen Ort gegebenen Größe, einem Punkt  $P$  und einer Geraden  $g$ , auf der  $P$  liegt, einen Streifen  $t$  gibt, in dem  $P$  liegt, und dessen Grenzgeraden zu  $g$  parallel verlaufen, so dass auf jeder durch eine zweite Gerade  $g'$  durch  $P$  abgetrennten Seite des Streifens dann ein Ort der Größe existiert, der  $P$  enthält (23).

$$\begin{aligned} \forall p, P, Q, g, g', P', R : \text{dm}(p, P, Q) \wedge P' \iota g \wedge P' \iota g' \wedge g \neq g' \wedge \neg R \iota g' \rightarrow \quad (23) \\ \exists t, Q', g_1, g_2, p' : \text{grenzG}(t, g_1, g_2) \wedge g_1 \parallel g \wedge \text{selbeS}(g', Q', R) \\ \wedge p' = t \wedge \text{dm}(p', P', Q') \wedge p' \equiv p \end{aligned}$$

Beweis (23): Wir wählen zunächst einen Streifen  $t'$ , dessen Grenzgerade  $g$  ist, und der zu  $p$  kongruent ist. Dass  $t'$  existiert, ist durch (A16), (A17) und (A9) gesichert. Weil  $g$  nicht parallel zu  $g'$  ist, wird  $t'$  durch  $g'$  so geteilt, dass nach (A17) auf jeder Seite von  $g'$  Orte  $p''$  auf  $t'$  entstehen, die kongruent zu  $p$  sind. Diese Orte  $p''$  müssen nun aber nicht  $P$  enthalten. Wir bilden also zunächst den Streifen  $t''$ , der  $g'$  als Grenzgerade enthält, und auf dem  $p''$  ebenfalls liegt. Dieser Streifen enthält nun nach (A12) einen Ort  $p'$ , der  $P$

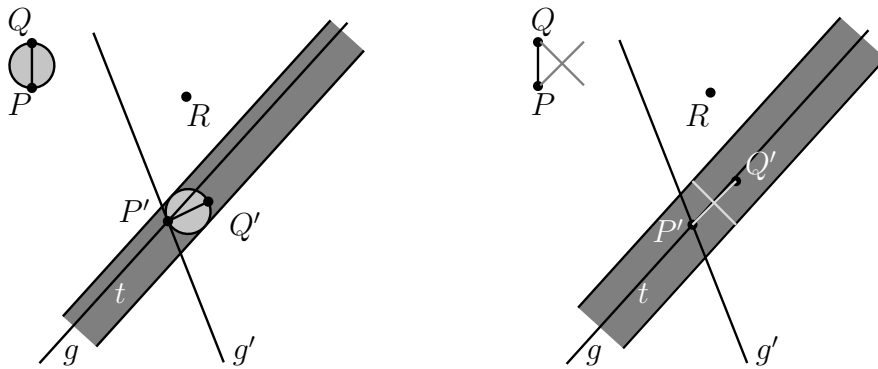


Abbildung 4.9.: Illustration zu (23)

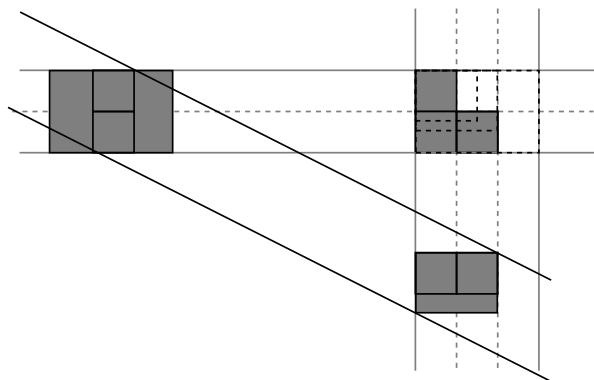


Abbildung 4.10.: Addierbarkeit von Längen muss nicht gelten: Ein Ortesystem, in dem die Orte in der horizontalen Richtung schneller wachsen als in der vertikalen.

enthält. Zu  $p'$  gibt es aber einen Streifen  $t$ , dessen Grenzgeraden, wie die von  $t'$  parallel zu  $g$  verlaufen. Für  $t$  gilt zusätzlich aber noch, dass  $P$  wie verlangt auf der Schnittstelle von  $g', g, p'$  liegt.  $\square$

Aus der Transitivität der Kongruenz zwischen Orten (13) und der Eindeutigkeit der Zuweisung von Strecken zu bestimmten Orten (20) kann das Kongruenzaxiom III.2 gefolgert werden:

Nicht folgerbar ist die Addierbarkeit (III.3). Abbildung 4.10 zeigt ein Gegenbeispiel: Hier besteht das Ortesystem aus gleich ausgerichteten Rechtecken, die aber in der horizontalen Richtung schneller wachsen als in der vertikalen. Die Bedingungen für die Ordnung  $<$  gelten hier, aber bei Addition in der horizontalen ist die resultierende Strecke kleiner als bei Addition in der vertikalen.

### Beziehung zur Metrik

Wie die Beispiele zeigen, sind sowohl die Kreise der euklidischen Metrik als auch die der Manhattan-Metrik Modelle der Geometrie. Die Beziehung zur Metrik soll daher

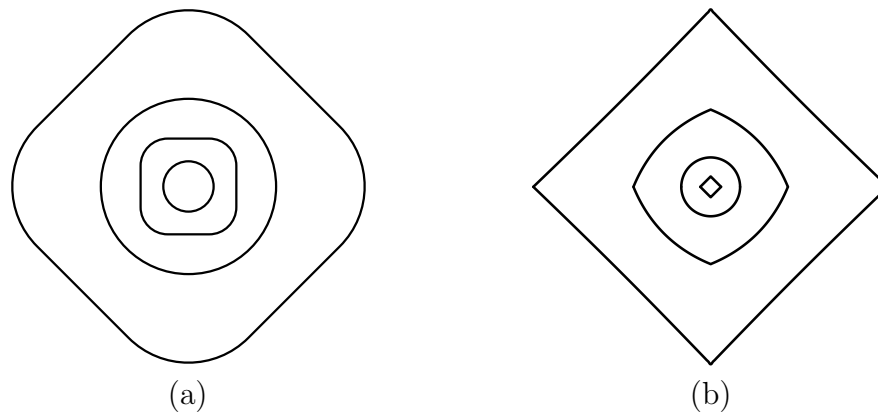


Abbildung 4.11.: Ortsysteme, die zu keiner Metrik korrespondieren.

kurz erläutert werden. Es wird skizziert, dass die Orte eines Ortsystems nicht direkt zu den Kreisen einer Metrik korrespondieren. Es lässt sich insbesondere zeigen, dass es Ortsysteme gibt, deren Durchmesser<sup>5</sup> die Dreiecksungleichung der Metrik nicht erfüllen.

In Abb. 4.11(a) sind Orte eines Ortsystems abgerundeter Rechtecke abgebildet. Bedingung ist ja lediglich, dass größere Orte in jeder Richtung größer sind, und dies ist hier gegeben. In diesem Fall wächst die Distanz zum einen wie im Beispielsystem aus Abb. 4.10 in verschiedene Richtungen verschieden schnell, und zum anderen differiert dieses unterschiedliche Verhalten auch noch zwischen verschiedenen Größen. So kann sogar ein System aus Kreisen für Ausdehnungen einer Größe und Quadraten für Ausdehnungen einer anderen Größe den Axiomen genügen, wenn ein entsprechender Übergangsbereich gewährleistet ist (s. Abb. 4.11(b)). Beim Übergang von der Ebene der Kreise zur Ebene der Quadrate muss also die Ausdehnung der Orte in den Diagonalrichtungen entsprechend schneller wachsen als entlang der Vertikal- und Horizontalrichtung. Aber auch in diesen Richtungen muss eine Größenveränderung stattfinden, damit das in Abb. 4.6 veranschaulichte Problem nicht auftritt. Es lässt sich zeigen, dass in einem solchen System die Orte nicht mehr Kreise einer bestimmten Metrik sind, da die Dreiecksungleichung nicht gilt. Diese lässt sich folgendermaßen formulieren:  $p$  sei der Ort, dessen Durchmesser die Strecke  $\overline{PR}$  ist. Entsprechend sei  $\overline{PQ}$  Durchmesser zu  $p_1$  und  $\overline{QR}$  Durchmesser zu  $p_2$ . Nun besagt die Dreiecksungleichung, dass die Länge einer Strecke  $\overline{PR}$  kürzer oder gleich der Länge der Strecke  $\overline{PQ}$  addiert zur Länge der Strecke  $\overline{QR}$  ist. Diese Addition lässt sich durch eine Verlängerung der Strecke  $\overline{PQ}$  bis zu einem Punkt  $R'$  formulieren, so dass  $Q$  auf einer Geraden zwischen  $P$  und  $R'$  liegt, und ein Ort  $p'_2$ , der größenkongruent zu  $p_2$  ist,  $\overline{QR'}$  zum Durchmesser hat. Gegeben nun einen Ort  $p'$ , dessen Durchmesser

<sup>5</sup>Es ist auch möglich, die Kongruenz von Strecken auf Basis eines Radiuskonzeptes statt dem hier verwendeten Durchmesser zu modellieren. Da diese Modellierung aber keine neuen Einsichten gewährt, wird sie in dieser Arbeit ausgelassen.

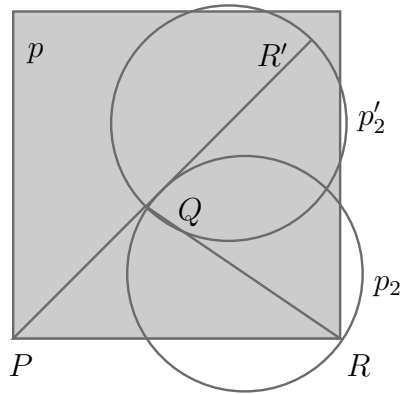


Abbildung 4.12.: In einem Ortesystem, das auf kleineren Größenebenen die Kreise und auf größeren Quadrate verwendet, gilt die Dreiecksungleichung nicht.

$\overline{PR'}$  ist, so gälte die Dreiecksungleichung, wenn nun stets  $p \leq p'$  folgte:

$$\begin{aligned} \forall p, p', p_1, p_2, p'_2, P, Q, R, R' : & \text{dm}(p, P, R) \wedge \text{dm}(p_1, P, Q) \wedge \text{dm}(p_2, Q, R) \wedge \\ & \text{dm}(p', P, R') \wedge \text{dm}(p'_2, Q, R') \wedge \beta(P, Q, R') \wedge p_2 \equiv p'_2 \\ & \rightarrow p \leq p' \end{aligned}$$

Abbildung 4.12 zeigt, dass dies nicht gegeben ist in einem Ortesystem, das auf kleineren Größenebenen die Kreise und auf größeren Quadrate verwendet. Unabhängig davon, wie der Übergangsbereich zwischen den kleineren Kreisen und den größeren Quadraten hier gewählt sei, ist in der Abbildung zu erkennen, dass die resultierende Strecke  $\overline{PR'}$ , die durch Übertragung von  $\overline{QR}$  zu  $\overline{QR'}$  in der euklidischen Metrik entstand, nicht Durchmesser eines verglichen mit  $p$  größeren Ortes sein kann. Dies bedeutet gewissermaßen, dass der Umweg über  $Q$  eine kürzere Route darstellt als der direkte Weg von  $P$  nach  $R$ .

Man kann sich nun fragen, welchen Nutzen ein solches System von Orten haben kann, in dem die direkte Verbindung zwischen zwei Punkten, die Strecke, nicht den kürzesten Weg darstellt. In der Realität granularer Routenplanung ist dies tatsächlich allerdings eher die Norm, als die Ausnahme. Wer ein schnelleres Verkehrsmittel verwendet, wird wahrscheinlich eher von der kürzesten Idealverbindung abweichen als jemand, der langsamere Verkehrsmittel nutzt. Ob der Weg zum Flughafen z.B. von der Strecke zwischen Start- und Zielort abweicht, ist für die Wegeplanung in Standardsituationen nicht relevant. Für eine Strecke von wenigen Metern hingegen, wird man vermutlich eher die direkte kürzeste Verbindung wählen. In einem regelmäßigen Straßengitter hingegen ist die Umwelt so strukturiert, dass die direkte Verbindung mit einem Fahrzeug nicht befahrbar ist; die so genannte Manhattan-Metrik wird anwendbar.

Eine mögliche Strategie der hierarchisch-granularen Wegeplanung ist, für den Hauptteil einer Route zunächst die schnellste Verbindung, und dann zu geeigneten Start- und Endpunkten jeweils feiner granulare Teilrouten zu suchen. Um für eine solche Anwendung

eine geeignete Struktur zu finden, könnte ein geeignetes Ortesystem entworfen werden. Es ist dabei allerdings zu beachten, dass das hier vorgestellte Axiomensystem keine lokale Variation der Metrik, sondern nur eine granulare also von der Größe abhängige erlaubt. D.h., dass in verschiedenen Städten z.B. Straßengitter gleich ausgerichtet sein müssten, was in der Realität nicht gegeben ist. Eine geeignete Charakterisierung müsste hierzu das Axiom (A14) in einer lokalisierten Variante enthalten. Die Transitivität der Größenkongruenz ließe sich damit einschränken.

Der Verzicht auf die Dreiecksungleichung könnte aber auch Vorteile für die Berechnung bringen. Kutz, Sturm, Suzuki, Wolter und Zakharyashev [64] stellen verschiedene Arten von logischen Sprachen vor, die sie als metrische Logiken bezeichnen und in denen sich Distanz-Constraints formulieren lassen, wie z.B. für einen beabsichtigten Hauskauf: „The house should not be too far from your college, say, not more than 10 miles.“ Sie nennen ein mathematisches Modell  $\langle W, d \rangle$  mit einer Punktmenge  $W$  und einer Funktion  $d$ , die die Axiome  $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$  und  $d(x, y) = d(y, x)$  erfüllt, nicht aber die Dreiecksungleichung metrischer Räume  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  einen symmetrischen Distanzraum. [64] zeigt, dass Erfüllbarkeit von Formeln bestimmter metrischer Logiken auf symmetrischen Distanzräumen, nicht aber auf metrischen Räumen entscheidbar ist.

### 4.3. Diskussion

Da Orte in jeder Richtung dieselbe Ausdehnung umfassen, ergibt sich eine gewisse Nähe zum topologisch-metrischen Begriff der  $\epsilon$ -Umgebung eines Punktes. Unter dieser Sichtweise stellt die Charakterisierung in diesem und dem vorherigen Kapitel eine qualitative Formulierung des Begriffes dar, die soweit wie möglich auf komplexere Konzepte, wie z.B. Kontinuität und Winkel- und Streckenrechnung verzichtet. Ein weiterer Unterschied ist der Fokus auf die Betrachtung ausgedehnter Regionen: Nicht die Distanz zwischen Punkten oder die Umgebung eines Punktes werden charakterisiert, sondern die Ausdehnungen bestimmter Regionen. Die Distanz zwischen Punkten ist abgeleitetes Konzept.

Das eingeführte Distanzkonzept ist insofern kognitiv wenig plausibel, als die Größenmessung als exakt aber richtungsabhängig modelliert wird. Kognitive Distanzkonzepte sollten aber gegenüber Ungenauigkeiten und der Rotation eines Betrachters robust sein.<sup>6</sup> Wichtig ist im weiteren allerdings weniger die tatsächliche Beschaffenheit des Raumes als die prinzipielle Vergleichbarkeit von Ausdehnungen, die durch die Axiomatisierung gesichert ist. Es scheint mir daher möglich, im folgenden auf eine weitere Restriktion der Ortegeometrie zu verzichten, die angeführten Vorschläge also weiterhin als eben solche und als Beispiele zu verwenden. Auch werde ich in den Abbildungen, soweit nicht anders vermerkt, beim Kreis als Ort bleiben.

Gegenüber der herkömmlichen Metrik ist die obige Formalisierung insofern von Vorteil,

---

<sup>6</sup>Eine Beobachtung, die allerdings für eine Richtungsabhängigkeit spricht, ist, dass bestimmte Richtungen in einem gegebenen Layout für den Betrachter wichtiger sind als andere. Die Gravitation bedingt, dass der Vertikalen eine besondere Bedeutung zukommt. So ist z.B. das Relationenpaar *über/unter* auf der Erde kaum verwechselbar. Vgl. auch Levelt [66] zu Unterschieden zwischen *über/unter* und *rechts/links* bei der Wahl des Referenzsystems.



da Distanz zwischen Punkten von der Größe von Regionen abgeleitet ist und nicht umgekehrt. Der Ansatz ist qualitativ in dem Sinne, dass die Basis der Vergleich zwischen den Größen von ausgedehnten geometrischen Entitäten ist und nicht eine Zuweisung zu numerischen Werten. In der Terminologie von Carnap [15], würde ein System zum Vergleich von Größen, das Addierbarkeit nicht unterstützt, *nicht-extensiv* genannt werden. *Qualitativ* im engeren Sinne von Carnap sind nur reine Klassifikationssysteme. Im Unterschied zu den in Kap. 2 angesprochenen Ansätzen von Dugat, Gambarotto und Larvor [24], Borgo, Guarino und Masolo [13] und Bennett [6], die von einer mereotopologischen Basis ausgehend eine auch Kongruenz umfassende Geometrie entwickeln, ist der hier verwendete geometrische Ansatz formal sparsamer auf Seiten der metrischen Konzepte.

Die Beziehung zwischen dem Hilbertschen System und der hier dargestellten Charakterisierung konnte für die Axiome III.1-3 aufgezeigt werden. Es bleiben allerdings noch zwei Fragen offen. Zum einen stand der Wunsch nach Minimalität des Axiomensystems an zweiter Stelle hinter dem nach einer möglichst einfachen, plausiblen Charakterisierung. Die Unabhängigkeit der Axiome wurde daher nicht in allen Fällen nachgewiesen. Zum anderen ist zwar plausibel, dass die Axiome III.4,5 der Winkelkongruenz nicht abgeleitet werden können, eine Abhängigkeit zumindest von Axiom (III.4) besteht allerdings, da in der Hilbertschen Geometrie die Eindeutigkeit der Streckenabtragung (hier (22)) erst mit diesem Axiom beweisbar ist (vgl. [52], S. 15), hier aber ohne weitere Zusatzannahmen bereits folgt. Eine genauere Untersuchung steht allerdings noch aus. Die Korrektheit wurde insofern nachgewiesen, als verschiedene Modelle skizziert werden konnten.

Die beschriebene Charakterisierung kann mit einigen Änderungen auch auf den Fall dreidimensionaler euklidischer Räume übertragen werden. Die Streifen, als Raum zwischen zwei parallelen Geraden, müssen durch den Raum zwischen zwei parallelen Ebenen ersetzt werden. Solche Entitäten ließen sich als *Scheiben* bezeichnen. In (A16) sowie (A17) sind die Geraden dann durch Ebenen zu ersetzen. In (A15) werden drei Orte benötigt, um eine solche Scheibe zu identifizieren. Die darauf aufbauenden Folgerungen müssen eventuell angereichert werden. Als Ortesystem ergeben sich dann z.B. die Kugeln der euklidischen Metrik im  $\mathbb{R}^3$ .

Räumliche Granularität kann nun mit den Mitteln aus Kap. 3 formuliert werden: Die Relation  $<$  auf Orten erfüllt die grundlegenden Ordnungseigenschaften, um die Axiomatisierung (A5)–(A8) der Relationen *grn* und *ktx* zwischen Granularitäten – hier wiederum mit  $\gamma, \gamma_1, \gamma'$  bezeichnet – und ausgedehnten Entitäten auf räumliche Granularitäten und Orte anwenden zu können.<sup>7</sup> Auf dieser Basis lassen sich dann auch Phänomene räumlicher Kontextabhängigkeit beschreiben, wie in den nächsten Kapiteln gezeigt wird. Orte stellen eine geeignete Grundlage für die Modellierung der räumlichen Ausdehnung des Kontextes und eines im Kontext betrachteten Gebietes dar. Kleinere in einem Ort ent-

---

<sup>7</sup>Der Einfachheit halber sollen die Namen für die Relationen *grn*, *ktx* und die Granularitäten  $\gamma$  übernommen werden, da es im folgenden hauptsächlich um räumliche Granularität gehen soll. Eigentlich stellt die Axiomatisierung (A5)–(A8) allerdings nur ein Schema für bestimmte Granularitäten, die einer bestimmten Art von ausgedehnten Entitäten zugehören. Sollen hingegen z.B. zeitliche und räumliche Granularitäten zusammen verwendet werden, so wären hier zwei Sorten von Granularitäten – eine für räumlich ausgedehnte, eine für zeitlich ausgedehnte Entitäten – zu charakterisieren.

#### 4. Räumliche Granularität

haltene Orte, die ohne einen Wechsel der Granularität zugänglich sind, können dann *Teilorte* des Ortes genannt werden. Größere einen Ort enthaltende Orte, die ohne einen Granularitätswechsel zugänglich sind, heißen entsprechend *Kontextorte* des Ortes.

# **Teil II.**

## **Lokalisation und Objekt**



## 5. Ort und Objekt

Aufbauend auf den formalen Konzepten des ersten Teils der Arbeit, soll im zweiten Teil der Arbeit demonstriert werden, wie sich Phänomene der Granularität durch den Formalismus repräsentieren lassen. Hierzu werden Konzepte und Relationen charakterisiert, die bei der Beschreibung von Phänomenen der Granularität eine zentrale Rolle einnehmen. U.a. soll das Konzept der Lokalisierung von Objekten in diesem zweiten Teil genau untersucht werden. Dass ein Objekt, in einer Modellierung durch einen Punkt und in einer anderen als konvexes Polygon repräsentiert sein kann, während in einer dritten Modellierung das Objekt nur in Teilen repräsentiert wird, wirft die entscheidende Frage auf, aus welchen Gründen in verschiedenen Modellierungen dasselbe Objekt durch so unterschiedliche geometrische Entitäten lokalisiert werden kann. Talmy [106] nennt dieses Phänomen *Schematisierung* (*schematization*). Schematisierung ist u.a. wichtige Vorbedingung für die sprachliche Repräsentation von räumlichen Konstellationen. Zur Lokalisierung als Punkt schreibt Herskovits [51]:<sup>1</sup> „representing a fixed object as a point requires seeing it from a distance.“ Die Fähigkeit zur Schematisierung, also zur vereinfachenden Repräsentation, hält sie für eine Grundbedingung für die Navigation: „Navigation in large-scale spaces is guided by cognitive maps whose major components are landmarks and routes represented respectively as points and lines“ [51]. Repräsentationen dieser Art reduzieren den kognitiven Aufwand, sowohl in der Speicherung als auch in der Verarbeitung: Ist ein Wegstück als Linie repräsentiert, so hat es genau einen Start- und einen Endpunkt. Ein solches Wegstück – in einer Skizze oder in einer verbal gegebenen Routeninstruktion etwa – bietet eine Abstraktion von den unzähligen Möglichkeiten, das Wegstück in der Welt abzulaufen. Bewegt sich ein Punkt entlang einer Linie, so gibt es keine Möglichkeit der Variation außer in der Geschwindigkeit. Bewegt sich hingegen ein Fußgänger entlang einer Straße, so muss er z.B. entgegenkommenden Fußgängern ausweichen, eventuell die Straße überqueren usw., aber es ist dabei offenbar dennoch möglich, dass der Fußgänger trotz dieser Manöver nicht von der in der Instruktion oder Skizze gegebenen Route abweicht. Eine Möglichkeit zur Erklärung und Modellierung dieser Phänomene ist Granularität: Das Ablaufen der Route entspricht ungefähr dem gezeichneten Weg auf einer gröberen Granularität, also wenn man die Route im Kontext größerer Orte betrachtet. Wechselt man auf die feinere Granularität der lokalen Wegeplanung des Fußgängers, also etwa, wenn er um ein Hindernis herum geht, so mag der tatsächlich gegangene Weg von einem geraden Streckenstück der Skizze abweichen, aber diese Abweichung ist auf der gröberen Granularität irrelevant. Sie wird erst sichtbar, wenn der Betrachter auf bestimmte Teilorte fokussiert, also gleichsam in das Bild hineinzoomt.

---

<sup>1</sup>Herskovits argumentiert hier unter Bezug auf Perception. Die Sichtweise, granulare Repräsentationen in Analogie zu einer in Auflösung und Ausschnitt beschränkten Fotografie zu konzeptualisieren, ist in Abschnitt 1.2 diskutiert.

## 5. Ort und Objekt

Die obige Modellierung wirft zahlreiche Fragen auf: Was ist eine Route? Warum kann sie durch eine Linie repräsentiert werden? Lässt sie sich auch durch einen Punkt repräsentieren? Allgemein: Wie steuert räumliche Granularität die Art der räumlichen Repräsentation, die für ein gegebenes Objekt gewählt wird? Zwei wichtige Teilfragen sollen in diesem Kapitel erörtert werden:

1. Welche Arten von räumlichen Repräsentationen der Lokalisierung eines Objektes lassen sich unterscheiden?
2. Was ist ein Granularitätsebenenwechsel? Was ist eine Verfeinerung oder Vergrößerung einer räumlichen Repräsentation?

In Beantwortung der ersten Frage werden in diesem Kapitel drei Arten von Repräsentationen der Lokalisation eines Objektes durch Orte unterschieden, die zu bestimmten Granularitäten gehören, und daher als Granularitätsschichten des Objektes bzw. der Objektrepräsentation bezeichnet werden: Positions-, Form- und Substanzschicht (genauer Schicht der Lokation der substantiellen Teile). Die Verschiedenartigkeit dieser Arten der Repräsentation wird an Beispielen motiviert, und eine auf Orten basierende Analyse der Repräsentationsmöglichkeiten wird vorgestellt. Der kritische Aspekt bei der Formalisierung ist die Charakterisierung der *lokalen* Granularität einer Objektregion. Um dieses Ziel zu erreichen, werden Relationen *int*, *ext* und *subst* zum Teil mit kontextabhängigen Varianten eingeführt, die Orte charakterisieren, an denen sich wichtige Größencharakteristika, wie z.B. Länge und Breite, und damit auch die zugehörigen Granularitätsschichten von der Objektregion ablesen lassen (s. Abschnitt 5.2).

Wie in Kap. 1 motiviert, soll ein Ziel dieser Arbeit die Formulierung von Bedingungen sein, unter denen ein Objekt in einem Kontext bzw. auf einer Granularitätsebene repräsentiert wird. Die zweite Frage wird beantwortet, indem die Begriffe Kontext- und Teilort eines Ortes definiert werden: Wechsel von einem Ort zu einem Teilort entspricht einer Verfeinerung, der Wechsel zu einem Kontextort einer Vergrößerung (s. Abschnitt 5.3). Darauf aufbauend lassen sich Nachbarschaft und Überlagerung von Orten charakterisieren, ohne eine Diskretisierung in Form einer Partitionierung des Raumes vornehmen zu müssen. Es wird so möglich, den Begriff der Granularitätsschichten in der Repräsentation eines Objektes zu untersuchen, der eng mit dem in Abschnitt 1.2 diskutierten Begriff der intrinsischen Granularität zusammenhängt (s. Abschnitt 5.4).

Die Konsequenzen dieser Repräsentationsvorschläge werden im Verlauf der Kapitel 6 und 7 dann detailliert erörtert.

### 5.1. Anmerkungen zum Vorgehen

Dieses und die folgenden zwei Kapitel geben für obige Zwecke geeignete Definitionen. Die Frage, welche Objekte oder Regionen – als räumliche Ausdehnung der Materie der Objekte – tatsächlich in einer Domäne existieren, soll hier aber weiterhin offen bleiben. Die vorgestellten Werkzeuge erleichtern die Formulierung von ontologischen Entscheidungen. Durch die Offenheit aber können sie für jede Modellierung einer Domäne, in der

räumliche Granularität eine Rolle spielt, verwendet werden. Es wird also lediglich vorgestellt, wie die Definitionen auf eine gegebene Region anzuwenden sind, und es gibt auch keine Kriterien, die den hier verwendeten Regionen- und Ortsbegriff weiter einschränken, so dass Regionen z.B. unzusammenhängend oder auch unbeschränkt sein können. Auch Punkte und Geraden z.B. können damit Regionen im hier verwendeten Sinne sein. Das gesamte axiomatische Gerüst dieser Arbeit beschränkt sich auf den ersten Teil. Hier im zweiten Teil werden allein definierte Konzepte vorgestellt.

### Beispiele

Streifen und Orten konnte eine eindeutige Granularität zugewiesen werden. Sie wurden daher in der Übersicht in Tab. 2.2 als unigranulare geometrische Entitäten bezeichnet. Wie in Kap. 3 angedeutet, kann die Granularität von komplexen räumlichen Objekten nicht durch eine einzige Größe bestimmt werden. Selbst für einfache Rechtecke werden bereits Länge und Breite wichtig. Eine multigranulare Region ist daher so beschaffen, dass ihr auch Bereiche von Granularitäten zugeordnet werden können. Es kommt hinzu, dass zudem die innere Struktur eines Objektes, d.h. seine Bestandteile, beeinflussen, ob es auf einer Granularität  $\gamma$  repräsentiert ist. Wichtig für eine Analyse räumlicher Granularität ist daher ein reicher Vorrat an hinreichend komplexen Beispielobjekten, für deren korrekte Repräsentation ein Granularitätsmechanismus nützlich ist. Die Objekte einer einfachen Bürowelt sind z.B. gewissermaßen granular homogen, und benötigen daher nicht notwendigerweise einen Granularitätsmechanismus: Tische und Stühle differieren in der Größe, aber nicht in der Granularität. Erst, wenn man z.B. Flure und Büroklammern hinzunimmt, kommen weitere zwei Granularitätsebenen hinzu. Aber auch diese Objekte müssen diskutiert werden. Ihre granulare Homogenität ist ja auch ein Granularitätsphänomen. Und es ist von großem Wert zu wissen, welche die Bedingungen sind, unter denen eine solche Vereinfachung gemacht werden kann.

Demgegenüber sind natürliche Objekte, wie etwa in den Bereichen der Geographie und Ökologie, oftmals gewissermaßen granular inhomogen, d.h. sind in Kontexten verschiedener Granularität repräsentiert. Ein Wald z.B. hat eine erhebliche Ausdehnung, besteht aber zumindest nach dem Allgemeinverstand aus – sehr viel kleineren – Bäumen.<sup>2</sup> Ein Fluss ist sehr lang hat aber eine sehr kleine Breite; hier zeigt sich das Phänomen der Dimensionalität (s. Abschnitt 1.2) besonders deutlich. Zudem ist er im Bereich der Quelle und der Mündung verschieden breit. Es muss also ebenfalls modelliert werden, dass die Granularität mit dem Ort variieren kann, so dass im Beispiel des Flusses die Quelle eine andere Granularität erhält als die Mündung. Die Beispielobjekte, die repräsentiert werden sollen sind also:

- Ein Gebäudegrundriss und eine einfache Bürowelt als Beispiele konzeptuell einfacher Regionen.

---

<sup>2</sup>Die Ökologie (vgl. [114] S.121) bietet als Definition „Wälder - hohe Baumbestände über 10m, bei denen sich die Kronen mehr oder weniger berühren; es sind dementsprechend dichtere oder lichtere Wälder.“ Das Ökosystem Wald als Studienobjekt der Ökologie ist sogar von noch kleineren Bestandteilen abhängig als der Wald des Allgemeinverstandes. Im Bereich der Bodenfauna z.B. unterscheidet man explizit nach der Größe (vgl. [115] S.105) zwischen Mikrofauna (0,002mm–0,2mm), Mesofauna (bis 2mm), Makrofauna (bis 20mm) und Megafauna (bis 200mm).

## 5. Ort und Objekt

- Ein Fluss als Beispiel einer Objektregion, deren lokale Granularität über den Gesamtverlauf stark variiert.
- Ein Wald bzw. eine Baumgruppe und eine Siedlung als Beispiele von Objekten, die Aggregationen von Objekten feinerer Granularität sind.

Es wird sich dann zeigen, warum ein bestimmtes Objekt unter einer bestimmten Sichtweise bestimmte aus der Granularität stammende Schwierigkeiten für die Repräsentation bereitet.

### Anmerkungen zur Darstellung

Abbildung 5.1 zeigt Regionen, die die Repräsentationen eines Flusses, eines Waldes und eines Gebäudes darstellen könnten und im folgenden die Überlegungen visualisieren und exemplifizieren sollen. Dabei ist allerdings anzumerken, dass es technisch unmöglich ist, einen Wald oder einen Fluss in seiner gesamten Granularitätenspannbreite in einem Bild darzustellen. Der Wald besteht daher aus lediglich 1000 durch Quadrate repräsentierte Bäume und der Fluss wurde so gestaucht, dass Länge und Breite gleichzeitig sichtbar sind. Die Folge ist, dass in den Abbildungen die Granularitätsebenen zu nahe beieinander liegen, die natürlichen Objekte somit wieder ähnlich den Büroweltobjekten scheinen: 1000 Sitzplätze z.B. machen einen großen Hörsaal aus, stellen aber womöglich noch kein Granularitätsproblem dar; die Breite und Länge eines Bleistiftes mögen differieren, aber wahrscheinlich nicht um eine oder gar mehrere Granularitätsebenen.

Ein weiteres Problem liegt in der Repräsentation von materiellen Objekten durch ihre Ränder, die sich aus der Verwendung eines vektororientierten Zeichenprogramms ergibt. Wird ein Objekt durch seinen Rand repräsentiert, so ist die Granularitätsebene, auf der es betrachtet werden soll, bereits festgelegt. Beispiel: Nehmen wir an, das Haus aus Abb. 5.1 wäre nur durch einen einfachen Grundriss dargestellt.<sup>3</sup> Mit dieser Darstellung ist dann bereits festgelegt, dass die Mauern zu eindimensionalen Linien vereinfacht werden, die die Breite der Mauern und damit ihre Substanz nicht repräsentieren. Die Mauern sind nun offensichtlich in der Realität nicht substanzlos. Im Vergleich zur Ausdehnung des Hauses aber ist ihre Ausdehnung in vielen Kontexten nicht relevant. In detaillierten Baugrundrissen muss hingegen auch die Dicke der Mauern repräsentiert sein. Beim Bau des Hauses geht es ja darum, die Substanz, die Mauern zu errichten. Da in den Beispielen eine Vektorrepräsentation, d.h. eine Repräsentation durch Umrisse, also Ränder gegeben ist, gilt diese Überlegung für alle Beispielfälle.

Trotz dieser Einschränkungen halte ich die Abbildungen für geeignet, die Anschauung zu unterstützen. Die Umsetzung der definierten Konzepte kann in den Beispielen zumindest schematisch illustriert werden, auch wenn die realistische, bzw. granularitätentreue Abbildung aus den genannten technischen Gründen ausbleiben muss.

---

<sup>3</sup>In Abb. 5.1 sind auch die Mauersteine dargestellt.



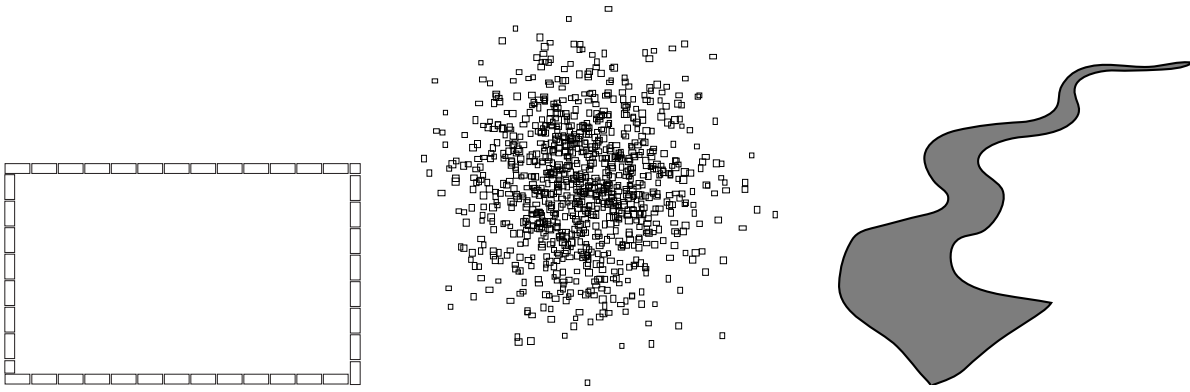


Abbildung 5.1.: Beispiele für Objekte

## 5.2. Aspekte der Lokation: Position, Form, Lokation der substantiellen Teile

Ob eine gegebene Region eine geeignete Repräsentation für ein Objekt ist, hängt entscheidend davon ab, welcher Lokalisierungsaspekt im Kontext wichtig ist. Von einer Karte, die eine gegebene Stadt als Punkt repräsentiert, lässt sich keine Aussage über den Verlauf der Stadtgrenze machen. Diese Information liefert z.B. eine Repräsentation als Polygon. Wie ich in [98] gezeigt habe, hat die Polygonrepräsentation gegenüber der Punktrepräsentation aber erhebliche Nachteile, wenn über Richtungsrelationen wie *nördlich von* geschlossen werden soll. Dass sich das Konzept der Stadt von der Besiedlungsdichte in einer bestimmten Region ableitet, kann aber auch die Repräsentation durch ein Polygon nicht wiedergeben. Eine Stadt etwa dehnt sich im Laufe der Zeit über die festgesetzte Stadtgrenze hinaus aus. So werden Ortschaften im Umland zunächst zu Randgemeinden und schließlich zu vollständig integrierten Stadtteilen. Die Stadtgrenze ist eine unzureichende Repräsentation, um das substantielle Wachstum eines Siedlungsgebietes darzustellen. Drei Aspekte räumlicher Repräsentationen sollen unterschieden werden:

**Position eines Objektes** Die Lokalisierung eines Objektes im Rahmen eines größeren räumlichen Zusammenhangs oder Layouts: globale Relationen zwischen der Gesamtregion und anderen Objektregionen.

**Form eines Objektes** Die Lokalisierung spezieller, für die Form des Objektes charakteristischer Teile: lokale Relationen zwischen bestimmten Teilregionen und anderen Objektregionen.

**Lokation der substantiellen Teile eines Objektes** Die räumliche Beziehung zwischen einem Objekt und den es konstituierenden Teilen: Relation zwischen der Gesamtregion und den Gesamtregionen von Teilen.

Die aufgeführten Lokalisationsaspekte korrespondieren jeweils zu einem bestimmten Bereich von Granularitäten von für die Aufgabe angemessenen räumlichen Kontexten. Die-

## 5. Ort und Objekt

Granularitätsschicht	Ausdehnung	Beispiel: Wald
Position	externe A.	Gesamtdurchmesser
Form	interne A.	breiteste Stelle
Substanz	substantielle A.	größter Baumdurchmesser

Tabelle 5.1.: Granularitätsschichten des Objektes und bestimmende Ausdehnungen illustriert am Beispiel *Wald*.

se korrespondierenden Bereiche von Granularitätsebenen wurden in Abschnitt 1.2 als *Granularitätsschichten* der Repräsentation eines Objektes bezeichnet.

Die Granularitätsschicht der Position ist in größeren räumlichen Kontexten gewählt. In der Schicht der Form sind Details des Objektes sichtbar, aber die weitere Umgebung wird im Kontext ausgeblendet. In der Schicht der Substanz stehen die konstituierenden Teile des Objektes im Vordergrund. Es lässt sich hier sogar die Frage stellen, ob das Gesamtobjekt in einem solchen Kontext in der selben Art wie die Konstituenten repräsentiert ist, oder ob es den Hintergrund des Kontextes stellt. Die räumliche Ausdehnung des betrachteten Kontextes spielt dabei also offensichtlich eine wichtige Rolle.

In diesem Abschnitt werden Relationen vorgestellt, mit denen komplexe Objektregionen in Beziehung zu Orten gesetzt werden können. Auf Basis der durch die Relationen so bestimmten Größen lässt sich dann entscheiden, in welcher Granularitätsschicht sich ein bestimmtes Objekt in einem gegebenen Kontext befindet: Die Granularitätsschicht der Positionsrepräsentation wird von der externen Ausdehnung bestimmt, die der Form von der internen Ausdehnung, die Schicht der Substanz von der substantiellen Ausdehnung (Tab. 5.1).

### Externe Ausdehnung

Externe Orte seien diejenigen Orte, die das Objekt vollständig enthalten. Diese Orte sind immer dann geeignet, ein Objekt zu lokalisieren, wenn der betrachtete Kontext erheblich größerer ist als der fragliche externe Ort der Objektregion. Ein kleiner gefüllter Kreis z.B. mag auf einer Karte von Europa die Lokalisation einer Stadt angeben. Die genaue Form der Stadtgrenze, d.h. die exakte Lokation des Objektes, wäre bei einer solchen kleinmaßstäbigen Karte nicht gut erkennbar. Ein weiteres Beispiel für einen externen Ort ist ein Diagonalkreuz auf einer Routenskizze, das das Ziel der Route angibt. Das Ziel befindet sich irgendwo innerhalb der von den Diagonalen aufgespannten Region.

Um das Konzept des externen Ortes zu spezifizieren, wird zunächst eine Konzeption von Enthaltensein benötigt, in der sich die spezielle Eigenschaft der Orte, sich über eine bestimmte Distanz zu erstrecken, widerspiegelt. Die Relation  $\sqsubseteq$  ist insofern nicht geeignet, als z.B. die Orte des Systems aus Diagonalkreuzen nicht die Region einnehmen, die sie überbrücken. Um diese Schwierigkeit ohne zusätzliche Forderungen an die Axiomatisierung der Orte zu umgehen, soll hierfür ein ähnlicher Weg wie in der Charakterisierung der Kollokalisierung gewählt werden. Kollokalisiert nach (D17) sind z.B. ein Kreis und der Rand eines Kreises. Die Charakterisierung der Kollokalisierung basiert einzig auf den Streifen, auf denen ein Ort liegt, nicht oder nur indirekt auf den Punkten, die tatsächlich zu dem Ort gehören. Auch ein Kreis und ein Kreis mit einem isolierten Punkt im Inneren

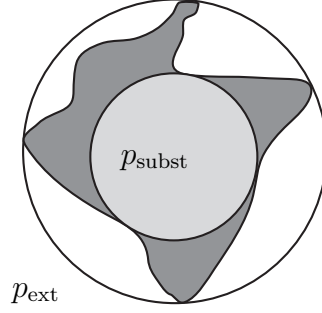


Abbildung 5.2.: Kleinster externer ( $p_{\text{ext}}$ ) und größter substantieller Ort ( $p_{\text{subst}}$ ) einer einfachen Objektregion

sind zulässige kollokalisierte Orte. Für beliebige Entitäten  $x$  einer Sorte  $\mathcal{X}$  erfüllt (D25) die aufgeführten Anforderungen:  $p$  ist *externer Ort* zu  $x$  ( $\text{ext}(p, x)$ ) genau dann, wenn alle Punkte von  $x$  auch Punkte jedes Streifens, auf dem  $p$  liegt, sind.

$$\text{ext}(p, x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall P : P \iota x \rightarrow [\forall t : p = t \rightarrow P \iota t] \quad (\text{D25})$$

$$\forall p : \text{ext}(p, p) \quad (24)$$

Es gilt, dass jeder Ort zu sich selbst externer Ort ist (24).

So wie die maximale Ausdehnung und mit ihr die Schicht der Position durch die kleinsten die Objektregion vollständig enthaltenden Orte bestimmt werden kann, so soll die Schicht der Substanz durch die größten vollständig in der Objektregion enthaltenen Orte charakterisiert sein.

### Substantielle Ausdehnung

Substantielle Orte eines Objektes seien diejenigen Orte, die vollständig in der Objektregion enthalten sind. Substantielle Orte eines Gebäudes könnten also z.B. die von Ziegeln eingenommenen Orte sein, da die Ziegel die Substanz des Gebäudes darstellen. Ähnlich der Charakterisierung der externen Orte soll Enthaltensein wiederum über den überspannten Raum definiert werden und damit von dem Inhalt der Orte des Ortesystems unabhängig sein.  $p$  heißt *substantieller Ort* zu  $x$  genau dann, wenn alle Punkte, die mit jedem Streifen, auf dem  $p$  liegt, inzidieren, auch Punkte von  $x$  sind (D26). Ein Ort, der zu sich selbst substantieller Ort ist, heiße *vollständig* (D27).

$$\text{subst}(p, x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall P : [\forall t : p = t \rightarrow P \iota t] \rightarrow P \iota x \quad (\text{D26})$$

$$\text{vollst}(p) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{subst}(p, p) \quad (\text{D27})$$

Durch die Verwendung vollständig enthaltener Orte ist gesichert, dass Objektregionen in ihren substantiellen Orten dichte Kernregionen haben. Wäre der Regionenbegriff nun auf konvexe zusammenhängende Regionen beschränkt, so könnte jedes so repräsentierete Objekt bereits vollständig durch substantielle und externe Ausdehnung beschrieben

werden. Abbildung 5.2 zeigt ein (nicht-konvexes) einfaches Objekt mit kleinstem externen und größtem substantiellen Ort. Sollen aber auch topologisch unzusammenhängende Regionen oder solche, die eine komplexe Form haben, Repräsentation von Objekten sein können, so muss ein weiterer Aspekt der Ausdehnung beachtet werden.

### Interne Ausdehnung

Auf der Schicht der Form ist die Lokation der substantiellen Teile allein nicht entscheidend. Wichtig ist z.B., dass auch Aggregationen wie Baumgruppen und Siedlungen eine bestimmte Form haben können, obwohl ihre Substanz über ein Gebiet verstreut ist, so dass sich keine zusammenhängende Region aus der Substanz ergibt. Die Ebene der Form unterscheidet sich darin von der Ebene der Substanz, dass hier auch der freie Raum zwischen den das Objekt konstituierenden substantiellen Teilen beachtet werden soll: Ein Gebäude erhält seinen Nutzen erst durch die von Mauern, Türen und Fenstern umschlossenen Regionen. In dem freien Raum zwischen den Bäumen ist der Wald ein Habitat für größere Tiere. Die Regionen von Gebäuden und Wäldern hängen also von dem umschlossenen Raum genauso ab wie von den konstituierenden substantiellen Teilen, damit die Konzepte Gebäude bzw. Wald überhaupt anwendbar sind (s. Kap. 7). Ein auf Granularität aufbauender Begriff des umschlossenen Raums wird in Kap. 7 über die Relation der *internen* oder *umschlossenen Orte* definiert.

In Kap. 2 war die Relation *int* charakterisiert worden (D10), die bestimmt, ob ein Punkt von einer Region umschlossen wird. Wir können nun eine Erweiterung auf Orte definieren, indem wir die Analogie zwischen Punkten auf Geraden und Orten auf Streifen ausnutzen. Zunächst lässt sich die Relation  $\beta$  übertragen auf Orte (D29): Ein Ort  $p$  liegt zwischen Orten  $p_1$  und  $p_2$  genau dann, wenn die drei Orte von einem gemeinsamen Streifen bemessen werden, einander nicht überlappen und alle Punkte von  $p$  zwischen Punkten von  $p_1$  und  $p_2$  liegen. Nun kann die Relation *int* definiert werden (D28): Ein Ort  $p$  ist genau dann *umschlossen* von einer Entität  $x$  einer Sorte  $\mathcal{X}$ , wenn es für jeden Streifen, auf dem  $p$  liegt, jeweils Orte  $p_1, p_2$  gibt, die  $x$  überlappen, und zwischen denen  $p$  liegt. Die von einer Entität umschlossenen Orte sollen auch als *interne Orte* der Entität bezeichnet werden. Auch die mit *int* verwandte Definition des projektiven Zusammenhangs *proj* (D9) lässt sich in einer granularen Version *gproj* formulieren (D30):  $x$  ist *granular projektiv zusammenhängend* auf einer durch  $p$  gegebenen Größe genau dann, wenn es keinen Streifen der Größe gibt, der zwischen Punkten der Region hindurchläuft, ohne selbst die Region zu schneiden. Der Ort  $p$  gibt hier nur die Größe an. Seine Position im Raum ist irrelevant.

$$\text{int}(p, x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall t : t = p \rightarrow \exists p_1, p_2 : p_1 = t \wedge p_2 = t \wedge p_1 \circ x \wedge p_2 \circ x \wedge \beta(p_1, p, p_2) \quad (\text{D28})$$

$$\beta(p_1, p, p_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists t : p_1 = t \wedge p_2 = t \wedge p = t \wedge \neg p_1 \circ p \wedge \neg p_2 \circ p \wedge \forall P : P \iota p \rightarrow \exists P_1, P_2 : P_1 \iota p_1 \wedge P_2 \iota p_2 \wedge \beta(P_1, P, P_2) \quad (\text{D29})$$

$$\text{gproj}(p, x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall t, P, Q, g_1, g_2 : p = t \wedge P \iota x \wedge Q \iota x \wedge \text{grenzG}(t, g_1, g_2) \wedge \text{diffS}(P, Q, g_1) \wedge \text{diffS}(P, Q, g_2) \rightarrow \exists R : R \iota t \wedge R \iota x \quad (\text{D30})$$

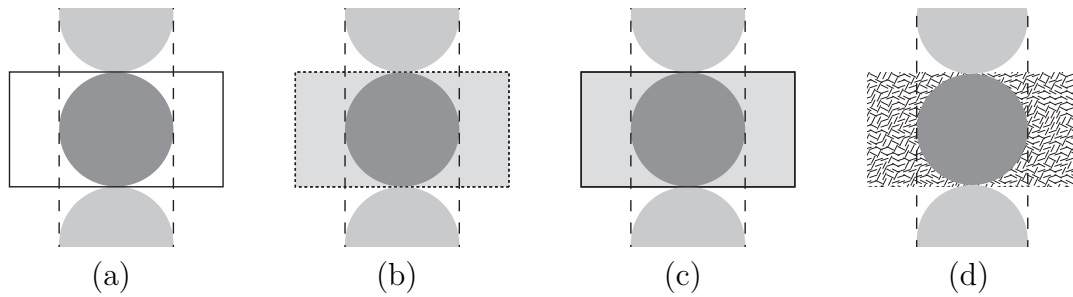


Abbildung 5.3.: Die Relation *int*: Der Rand eines Rechtecks (a), das offene Rechteck (b) und das geschlossene Rechteck (c) umschließen dieselben Orte. Eine mit einem Muster gefüllte rechteckige Form (d) umschließt ebenfalls Orte des Rechtecks. Aber die größten umschlossenen Orte hängen von der Dichte der Teilobjekte ab, aus denen sich das Muster zusammensetzt.

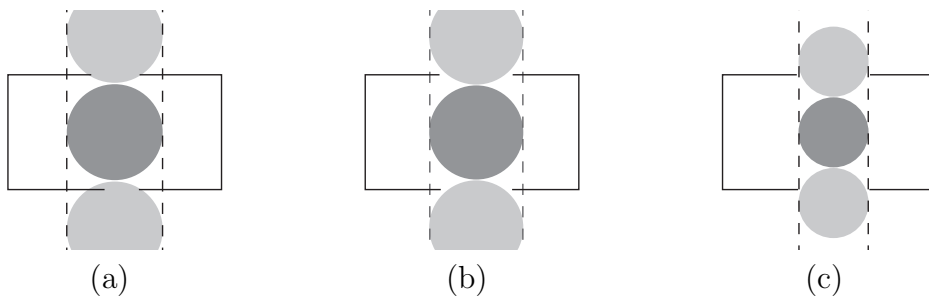


Abbildung 5.4.: Der durchbrochene Rahmen eines Rechtecks (a) umschließt Orte des Rechtecks. Aber es ergeben sich Einbuchtungen an den Lücken und die umschlossenen Orte sind kleiner. Werden die Lücken zu groß (b und c), so sind Orte der größeren Granularitätsebenen nicht mehr umschlossen (b) und die Region ist auf feineren Ebenen nicht mehr granular projektiv zusammenhängend (c).

Abbildung 5.3 illustriert, dass *int* tatsächlich geeignet ist, die Granularitätsschicht der Form eines Objektes von seiner Substanz unabhängig zu charakterisieren: Ein offenes Rechteck, der Rand des Rechtecks und das geschlossene Rechteck umschließen dieselben Orte, obwohl sie sich in der Substanz unterscheiden. Sogar eine mit einem Muster gefüllte rechteckige Form (d) umschließt Orte des Rechtecks. Aber die größten umschlossenen Orte hängen von der Dichte der Teilobjekte ab, aus denen sich das Muster zusammensetzt. Dies illustriert Abb. 5.4 genauer: Der durchbrochene Rahmen eines Rechtecks (a) umschließt Orte des Rechtecks. Aber es ergeben sich Einbuchtungen an den Lücken und die umschlossenen Orte sind kleiner. Werden die Lücken zu groß, wie bei dem in (b) und (c) dargestellten Objekt, so sind die Orte der größeren Granularitätsebenen nicht mehr umschlossen (b) und die Region ist auf feineren Ebenen nicht mehr granular projektiv zusammenhängend (c).

Es ist im Allgemeinen nicht garantiert, dass ein bestimmter größter substantieller oder kleinster externer Ort existiert, da nur Dichte angenommen wurde, nicht Kontinuität.

Zudem hat eine offene Region keinen größten substantiellen Ort, da ja die Orte nicht als offene Regionen konzipiert wurden (Abschnitt 4.1). Es gilt aber in jedem Falle, dass die substantiellen Granularitäten für kein Objekt größer werden können als die externen (25). Gleich groß werden sie allein für vollständige Orte und Ortsregionen, die ja ihr eigener substantieller Ort sind (D27) und sich selbst enthalten. Die internen Orte eines Ortes sind allerdings stets kleiner als der Ort (26). Für einen vollständigen Ort sind daher alle internen Orte kleiner als der größte substantielle Ort.

$$\forall A, p_s, p_e : \text{subst}(p_s, A) \wedge \text{ext}(p_e, A) \rightarrow p_s \leq p_e \quad (25)$$

$$\forall A, p_i, p_e : \text{int}(p_i, A) \wedge \text{ext}(p_e, A) \rightarrow p_i < p_e \quad (26)$$

Beweis (25): Zu zeigen ist, dass ein Substanzort maximal so groß wie ein externer Ort einer Region werden kann. Angenommen, es gibt zu einer Region  $A$  einen Substanzort  $p_s$  und einen externen Ort  $p_e$ , mit  $p_e \leq p_s$ , dann gibt es einen Streifen  $t_e$  mit  $p_e = t_e$  und  $p_s \# t_e$  (D18). Jeder Punkt  $Q$  von  $p_s$  muss nun nach (D26) zu  $A$  gehören, denn alle Punkte von  $p_s$  liegen in allen Streifen, auf denen  $p_s$  liegt. Wenn  $Q$  aber zu  $A$  gehört, liegt er nach (D25) auch in  $t_e$ . Wenn aber alle Punkte von  $p_s$  in  $t_e$  liegen, gilt  $p_s \sqsubseteq t_e$  und damit  $p_s = t_e$  (D16), also  $p_s \equiv p_e$  (D20).  $\square$

Der Beweis für (26) folgt ebenfalls daraus, dass kein Punkt einer Region außerhalb eines externen Ortes der Region liegen kann. Die Definition des internen Ortes (D28) aber verlangt – im Gegensatz zur Definition des substantiellen Ortes (D36) – über die Relation  $\beta$  (D29) sogar, dass es in jeder Richtung Punkte von  $A$  außerhalb des internen Ortes geben muss.

Die Schicht der Position wird gewählt in Kontexten, die das Objekt als Ganzes umfassen. Die externe Ausdehnung sollte folgerichtig unabhängig vom betrachteten Kontext sein. Die Länge des Flusses ist in etwa auf derselben Granularitätsebene wie die kleinste externe Ausdehnung. Anders verhält es sich mit den anderen beiden Aspekten der Ausdehnungen eines Objektes: Die Breite des Flusses z.B. variiert je nach betrachtetem Ort. Wir benötigen daher lokale, kontextabhängige Varianten zu *int* und *subst*, die auf den für diese Arbeit zentralen Begriffen des räumlichen Kontextes und des Granularitätswechsels aufbauen.

### 5.3. Räumlicher Kontext und Granularitätsebenenwechsel

Eines der Ziele dieser Arbeit, eine formale Grundlage für die in Abschnitt 1.2 diskutierten Begriffe *grain*, hier Granulat genannt, und räumlicher Kontext, liefern zu können, kann nun erreicht werden. Die räumlichen Granulate in einem Kontext der Granularität  $\gamma$ , können als diejenigen Orte im Kontext betrachtet werden, deren Größe gerade noch relevant ist, alle kleineren Orte haben eine nicht relevante Größe und sind damit punktförmig. Der räumliche Kontext kann entsprechend durch einen Ort formal erfasst werden, der genau den im Kontext relevanten räumlichen Bereich enthält. Alle größeren

Orte sind nur über einen Granularitätsebenenwechsel zugänglich, d.h., wenn eine gröbere Granularität  $\gamma'$  und ein entsprechend größerer Ort zur Repräsentation des räumlichen Kontextes gewählt wird.

Kleinere in einem Ort enthaltene Orte, die ohne einen Wechsel der Granularität zugänglich sind, sollen im folgenden *Teilorte* des Ortes genannt werden. Größere einen Ort enthaltende Orte, die ohne einen Granularitätswechsel zugänglich sind, sollen *Kontextorte* des Ortes heißen.

### Teilorte und Kontextorte

Die Teilortrelation  $\triangleleft$  (D32) und ihre transitive Erweiterung  $\lltriangleleft$  (D31) lassen sich nun entweder auf der Basis von *ext* oder ausgehend von *subst* formulieren. In dieser Arbeit soll letztere Variante gewählt werden:<sup>4</sup>  $p_1$  ist *indirekter Teilort* ( $\lltriangleleft$ ) von  $p_2$  genau dann, wenn  $p_1$  substantieller Ort von  $p_2$  ist, d.h. wenn  $p_1$  vollständig, also mit der gesamten Region über die er sich erstreckt, in  $p_2$  enthalten ist (D31). Ein *direkter Teilort* sei ein substantieller Ort kompatibler Granularität (D32):  $p_1$  ist direkter Teilort ( $\triangleleft$ ) von  $p_2$  genau dann, wenn  $p_1$  substantieller Ort von  $p_2$  ist, und beide kompatibel zu einer Granularität  $\gamma$  sind (D32).

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \lltriangleleft p_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{subst}(p_1, p_2) \quad (\text{D31})$$

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \triangleleft p_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{subst}(p_1, p_2) \wedge \exists \gamma : p_1 \sim \gamma \wedge p_2 \sim \gamma \quad (\text{D32})$$

Durch die Wahl von  $\text{ext}(p_2, p_1)$  statt  $\text{subst}(p_1, p_2)$  könnte gesichert werden, dass auch im Ortesystem der Diagonalenkreuze jeder Ort Teilorte hat. Die spezifische Modellierung eines Ortesystems – ein Beispiel wird weiter unten diskutiert – würde dadurch aber nivelliert: Durch die Verwendung von  $\text{ext}(p_2, p_1)$  statt  $\text{subst}(p_1, p_2)$  würden kollokalisierte Orte dieselben Teilorte erhalten.

Unter beiden Definitionen für  $\triangleleft, \lltriangleleft$  gilt, dass Teilorte kleiner oder gleich groß verglichen mit ihren Kontextorten sind (27).

$$\forall p_1, p_2 : p_1 \lltriangleleft p_2 \rightarrow p_1 \leq p_2 \quad (27)$$

Im folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die Ortesysteme zur Modellierung so gewählt seien, dass die Wahl eines geeigneten Ortesystems zu den domänenabhängigen Entscheidungen gehört, die bei der Formalisierung eines konkreten zu modellierenden Weltausschnittes getroffen werden müssen. Es gibt aber keine allgemeinen Kriterien, die hier aufgestellt werden könnten, und die für alle Domänen gleichermaßen gültig wären.

<sup>4</sup>Modellierung auf Basis von *ext*:  $p_1$  ist (indirekter) Teilort von  $p_2$  genau dann, wenn  $p_2$  externer Ort von  $p_1$  ist. Ein direkter Teilort sei ein Teilort kompatibler Granularität. Alternativ soll  $p_2$  Kontextort zu  $p_1$  genannt werden.

$$\begin{aligned} \forall p_1, p_2 : p_1 \lltriangleleft p_2 &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{ext}(p_2, p_1) \\ \forall p_1, p_2 : p_1 \triangleleft p_2 &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{ext}(p_2, p_1) \wedge \exists \gamma : \text{ctx}(\gamma, p_2) \wedge p_1 \sim \gamma \\ \forall p : p \triangleleft p &\wedge p \lltriangleleft p \end{aligned}$$

Nur unter dieser Definition, nicht aber mit (D31), ist jeder Ort zu sich selbst Teilort und Kontextort.

Hier sind domänenangepasste ontologische Axiome über die Beschaffenheit der in der Domäne existierenden Orte notwendig. Im Sinne der hier intendierten Minimalität und Offenheit gegenüber verschiedenen Domänenmodellierungen wird auf eine Einschränkung daher verzichtet. Abbildung 5.5 gibt ein Beispiel für die Modellierung einer Domäne.

### Ähnlichkeit, Überlagerung und Nachbarschaft von Orten

Es ist nun möglich, durch die Teilorte-Relationen verschiedene für Granularitätsaspekte wichtige Konzepte von Ähnlichkeit und Nachbarschaft von Lokalisation ohne Rückgriff auf Partitionierungen zu repräsentieren. Zwei größenkongruente Orte, die sich nur in Teilorten unterscheiden, die unterhalb der Granulatsgröße liegen, sollen als *granular ununterscheidbar*  $\circ$  (D33) bezeichnet werden. Zwei größenkongruente Orte, die einen gemeinsamen direkten Teilort haben, heißen *überlagernd*  $\supseteq$  (D34). Größenkongruente Orte, die zwar keinen gemeinsamen direkten aber einen indirekten Teilort haben, können nun *benachbart*  $\bowtie$  genannt werden (D35).

$$p_1 \circ p_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} p_1 \equiv p_2 \wedge \forall p : (p \triangleleft p_1 \vee p \triangleleft p_2) \rightarrow p \circ p_2 \wedge p \circ p_1 \quad (\text{D33})$$

$$p_1 \supseteq p_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} p_1 \equiv p_2 \wedge \neg p_1 \circ p_2 \wedge \exists p : p \triangleleft p_1 \wedge p \triangleleft p_2 \quad (\text{D34})$$

$$p_1 \bowtie p_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} p_1 \equiv p_2 \wedge \neg p_1 \circ p_2 \wedge \neg p_1 \supseteq p_2 \wedge \exists p : p \ll p_1 \wedge p \ll p_2 \quad (\text{D35})$$

Diese Relationen können verwendet werden, um Bewegungen und Identität von Objekten (Kap. 7) zu modellieren: Abbildung 5.5 zeigt einen Flur mit verschiedenen Büros und skizziert eine mögliche Repräsentation. Die Modellierung repräsentiert die Büros als nicht vollständige Orte (dargestellt in Abb. 5.5(c)), deren substantielle Teilorte sich aus der von jeweils einem Büro – einschließlich der es umschließenden Mauern – eingenommenen Raumregion bestimmen. Die Breite der Mauer um die Büros liege unter der Granulatsgröße der Büros, da sie erheblich kleiner als der freie Raum des Büros ist. Unter dieser Modellierung stellen ein Büro ohne Mauer und dasselbe Büro mit seiner Mauer granular ununterscheidbare Orte. Aneinandergrenzende Büros teilen sich die gemeinsame Mauer und werden daher als benachbart kategorisiert. Gehört der Türraum jeweils sowohl zum Büro als auch zu einem zum Raum größenkongruenten Flurabschnitt, so sind Flurabschnitte und Büros als überlagernd klassifiziert.

Das Beispiel zeigt, dass die in dieser Arbeit verwendete Konzeptualisierung räumlicher Granularität auch durchaus genutzt werden kann, um Aufteilungen des Raumes einer Domäne vorzunehmen. Gegenüber einer Partitionierung des Raumes bietet sich hier aber zusätzlich die Möglichkeit zur Modellierung von Überlagerung und Ununterscheidbarkeit, die bei einer echten Partitionierung des Raumes nicht unterstützt wird. Die Unterscheidung zwischen Teilorten einer relevanten Größe und Teilorten einer nicht mehr relevanten Größe eröffnet neue Optionen in der Repräsentation: die Frage, zu welchem von zwei aneinander grenzenden Büros die Wand dazwischen jeweils gehört, kann vernachlässigt werden, weil die Orte der Wand, um die es geht, als nicht relevant klassifiziert werden können. Man beachte, dass hierzu weder auf die Repräsentation der Mauer als Objekt der Domäne noch auf die Existenz ihrer nicht relevanten Ausdehnung verzichtet werden muss.

Wie das Beispiel zeigt, sind Orte gut geeignet, Punkte in der Modellierung und Reprä-



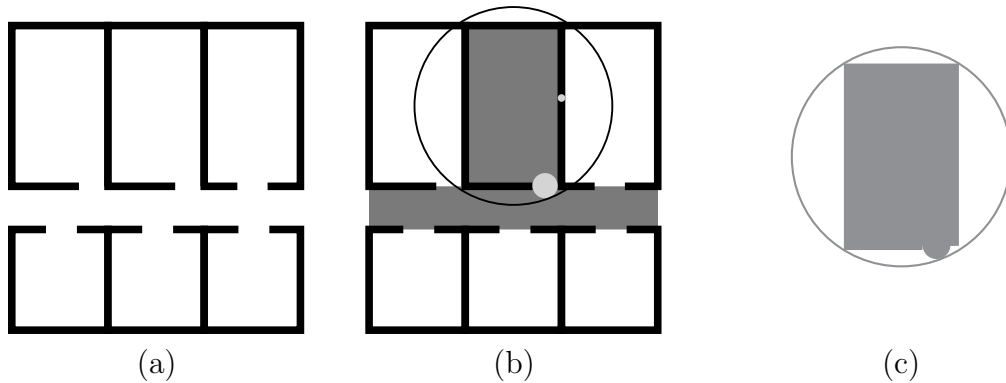


Abbildung 5.5.: Nachbarschaft und Überlagerung in der Modellierung einer einfachen Bürowelt. Der Flur und das Büro überlagern sich. Die beiden Büros sind benachbart.

sensation durch adäquate Raumregionen zu ersetzen. Für die möglichen Positionen eines Serviceroboters, der sich durch die Beispielwelt bewegt, sind etwa nur die ihm zugänglichen freien Orte, deren Ausdehnung seiner eigenen Ausdehnung entspricht, mögliche Lokationen. Selbstlokalisierung kann dann auf verschiedenen Granularitätsebenen erfolgen: der Roboter könnte auf feinsten Ebene bestimmen, wo er – genauer: der kleinste externe Ort der von ihm eingenommenen Region – sich relativ zu einem ihn umgebenden Büro befindet oder auf gröberer Ebene, wo sich das ihn umgebende Büro relativ zum gesamten Stockwerk befindet. Der kleinste Ort, den er zu einem gegebenen Zeitpunkt einnimmt, ist auf der Granularität seiner eigenen Ausdehnung seine Lokation. Dieser Ort bietet für sich allein keine adäquate Bestimmung der Position. Erfolgreiche Selbstlokalisierung bedeutet vielmehr, sich relativ zu einem größeren Kontext lokalisieren zu können.<sup>5</sup> Die zu Räumen korrespondierenden Orte, die Kontextorte seiner Position auf feinsten Ebene und ebenfalls externe Orte des Roboters sind, bestimmen seine Lokation auf der gröberen Granularität der Räume.

Die Fortbewegung des Roboters kann als Abfolge von externen Orten, die die Position repräsentieren, gesehen werden. Die Kontinuität der Fortbewegung besteht dabei darin, dass auf sehr feiner temporaler Granularität von einer Lokalisation zur nächsten keine granular relevante Bewegung stattfindet: die Positionen sind granular ununterscheidbar. Bei einer gröberen temporalen Granularität würden Positionen als überlagernd gesehen. Eine hinreichend genaue temporale Granularität für die Repräsentation von Fortbewegung ist erreicht, wenn die Positionen benachbarte Orte sind. Diese Granularität ließe sich als Schrittgranularität bezeichnen. Sie kann verwendet werden, um eine Diskretisierung der Fortbewegung zu modellieren. Werden nur Start- und Zielposition der Gesamtbewegung modelliert, so ist die gröbste temporale Granularität gewählt (s. a. Abschnitt 6.3). Eine Modellierung der Position durch Orte bietet hier entscheidende Vor-

<sup>5</sup>Eng verwandt mit dieser Feststellung ist die Diskussion zu der Frage, ob die Aussage „ich bin jetzt hier“ in einer Logik für räumliche und zeitliche Kontexte als tautologisch gelten müsse (vgl. Forbes [33]).

## 5. Ort und Objekt

teile gegenüber einer Modellierung durch Punkte. Letztere bedingt, dass zunächst eine Reduktion des sich bewegenden Objektes auf einen Punkt vorgenommen werden muss. Für die Bewegung eines Punktes entlang einer Trajektorie sind die hier aufgeführten Granularitätsebenen gleich, da ja bei der Reduktion gerade von der Größe abstrahiert wird. Zwei Punkte sind entweder disjunkt oder identisch. Die verschiedenen möglichen Abstufungen zwischen Identität und Nachbarschaft (identisch, ununterscheidbar, überlagernd, benachbart) lassen sich in dem hier präsentierten regionenzentrierten Ansatz besser umsetzen.

### Lokale Granularität der Objekte

Aufbauend auf der vorgestellten Konzeption von Teilorten und Kontextorten lassen sich nun auch die lokalen, kontextabhängigen Varianten zu *subst* und *int* definieren. Wenn auf einen bestimmten Kontextort – genauer auf die in einem bestimmten Kontextort vorhandenen Teile des Objektes – fokussiert werden soll, so lässt sich die Relation *subst* einfach auf die Teilorte des Kontextortes beschränken (D36):  $p$  ist lokal zu  $p_k$  substantieller Ort zu einer Entität  $x$  der Sorte  $\mathcal{X}$  genau dann, wenn  $p$  (indirekter) Teilort von  $p_k$  ist und alle Punkte, die in jedem Streifen liegen, auf dem  $p$  liegt, auch in  $x$  liegen. Anders ist dies bei der Relation *int*. In (D28) wurde die gesamte weitere Umgebung des Ortes betrachtet. Stattdessen soll die lokale Variante (D37) allein über die lokale Umgebung des Ortes definiert sein: Ein Ort  $p$  ist genau dann lokal zu  $p_k$  interner Ort zu einer Entität  $x$  einer Sorte  $\mathcal{X}$ , wenn  $p$  (indirekter) Teilort von  $p_k$  ist und es für jeden Streifen, auf dem  $p$  liegt, jeweils Orte  $p_1, p_2$  gibt, die  $x$  in Punkten von  $p_k$  überlappen, und zwischen denen  $p$  liegt. Es folgt, dass jeder lokale interne Ort kleiner als der Kontextort sein muss (28), da er ja von jeder Seite noch von Punkten außerhalb des Ortes, die aber vollständig im Kontextort enthalten sind, umgeben ist. Es gilt aber (29), dass jeder vollständige Ort zu sich selbst in seinem eigenen Kontext lokaler substantieller Ort ist. Dies zeigt, dass der substantielle Ort in Fällen, in denen nur die Substanz entscheidend ist, größer als der interne Ort wird, weil der interne Ort im Gegensatz zum substantiellen Ort generell ja nicht die äußeren Randpunkte einer Region umfasst. Für den nicht vollständigen Ort in Abb. 5.5(c) ist dagegen die Breite des Büros für die substantiellen Orte entscheidend, während der interne Ort hier auch größer werden kann, da es ja noch in jeder Richtung Punkte außerhalb gibt.

$$\text{subst}(p_k, p, x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \lll p_k \wedge \forall P : [\forall t : p = t \rightarrow P \iota t] \rightarrow P \iota x \quad (\text{D36})$$

$$\text{int}(p_k, p, x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \lll p_k \wedge \forall t : t = p \rightarrow \exists p_1, p_2 : \quad (\text{D37})$$

$$\begin{aligned} & \exists P_1, P_2 : P_1 \iota p_1 \wedge P_1 \iota x \wedge P_1 \iota p_k \wedge P_2 \iota p_2 \wedge P_2 \iota x \wedge P_2 \iota p_k \\ & \wedge p_1 = t \wedge p_2 = t \wedge \beta(p_1, p, p_2) \end{aligned}$$

$$\forall p_k, p, x : \text{int}(p_k, p, x) \rightarrow p < p_k \quad (28)$$

$$\forall p : \text{vollst}(p) \rightarrow \text{subst}(p, p, p) \quad (29)$$

Die Relationen sind illustriert in Abb. 5.6 anhand eines schematisiert dargestellten Flusses. Es können somit lokale und globale interne, bzw. substantielle Ausdehnung des Flusses unterschieden werden. Dies ermöglicht z.B. kontextabhängige granularitätsangepasste Planung: Als notwendige Aktion zur Überquerung eines Flusses könnte in der

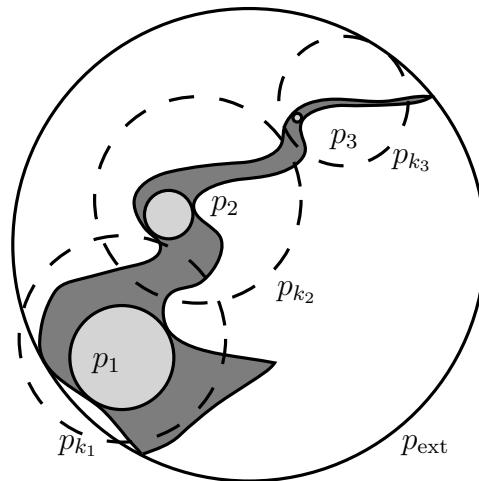


Abbildung 5.6.: Lokale substantielle Orte eines schematisiert dargestellten Flusses. Alle internen Orte sind in diesem Beispiel auch substantielle Orte.

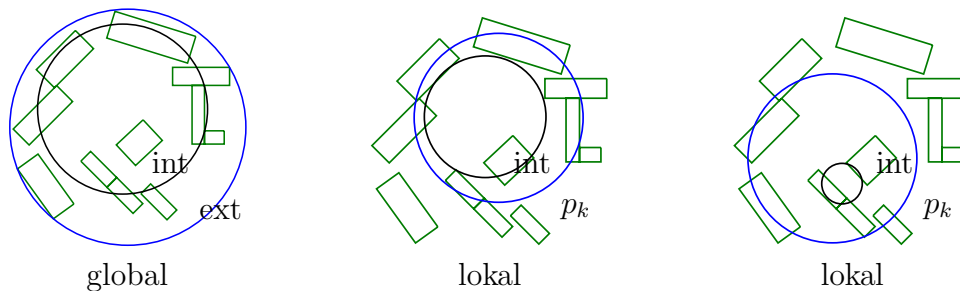


Abbildung 5.7.: Eine Siedlung mit einem möglichst großen globalen internen Ort und zwei lokalen internen Orten relativ zu verschiedenen Kontexten.

Nähe der Quelle ein einfacher Sprung ausreichen, im Bereich der Mündung hingegen muss eine Fähre oder eine große Brücke gesucht werden. Sind z.B. die möglichen Aktionen eines Agenten mit den Granularitäten, unter denen sie adäquat sind, annotiert, so lässt sich durch Vergleich der lokalen substantiellen Ausdehnung des Flusses im Kontext eine Aktion mit einer kompatiblen Granularität als eine geeignete Aktion bestimmen (s. Kap. 6).

Abbildung 5.7 zeigt ein Beispiel für die lokale Variante der Relation *int*.

## 5.4. Schlussfolgerungen

Die drei Granularitätsschichten der Objekte vom Anfang des Kapitels lassen sich nun mit den Relationen *ext*, *int* und *subst* zusammenführen:

**Positionsschicht** Interessiert der externe Ort eines Objektes, so befinden wir uns auf der

## 5. Ort und Objekt

Positionsschicht. Der externe Ort gibt die Position eines Objektes in sehr grober Form an. In einem Kontext, in dem ein externer Ort die minimal repräsentierte Größe hat oder sogar noch kleiner ist, ist das Objekt ohne relevanten Verlust als Punkt repräsentierbar.

**Formschicht** Die Form eines Objektes wird charakterisiert durch seine internen Orte. Ein sehr komplexes Objekt kann interne Orte sehr verschiedener Granularitäten haben. In Kap. 6 werden lokale und globale, einfache Formcharakteristika vorgestellt.

**Substanzschicht** Die substantiellen Orte einer Region bestimmen die Substanz eines Objektes. Diese Schicht kann nur bei hinreichend komplexen Objektregionen von der Formschicht unterschieden werden, z.B. wenn, wie im Falle der Aggregationen, die substantiellen Teile über die Ebene verstreut sind (s. Kap. 7).

Abbildung 5.8 illustriert die Granularitätsschichten eines Gebäudes, einer Siedlung und eines Flusses mit jeweils einem externen, einem internen und einem substantiellem Ort. Substanz und Form wurden in der Repräsentation getrennt. Im Beispiel haben Gebäude und Siedlung jeweils gewisse Objekte als sie konstituierende, substantielle Teile: Ziegel, bzw. Häuser. Der Innenraum der Häuser gehört damit in der Repräsentation des Hauses zur Formschicht, in der Repräsentation der Siedlung aber zur Substanzschicht. Diese Problematik ist zentrales Thema in Kap. 7. Die Konstituenten eines Objektes werden dort als Teile eines Objektes gesehen, deren Teile selbst nicht unmittelbar als Teile des Objektes angesehen werden können. Die Ziegel sind damit Konstituenten der Häuser, nicht aber (oder nur indirekt) Konstituenten der Siedlung.

Flüsse wie der in Abb. 5.8 illustrierte sind wie bereits angemerkt allgemein nur schlecht in ihrer gesamten Granularitätenspannbreite darstellbar: Es handelt sich offensichtlich um einen sehr kleinen Fluss, dessen Breite im Gegensatz zu der von größeren Flüssen kaum variiert. Zudem scheint es schwierig, von der Position eines Flusses sprechen zu wollen. In jedem Kontext, in dem der externe Ort eines Flusses nur indirekter Teilort ist, ist die Breite so klein, dass nur ein Fluss mit einer weit ausgedehnten Form, wie der hier abgebildete, überhaupt einen größeren Anteil des gesamten Ortes durchzieht. Ein gerader Fluss ist ein *lineares Objekt*, das nicht durch einen einzigen Ort lokalisiert werden kann. Die Breite eines linearen Objektes ist im Vergleich zu seiner Länge irrelevant. Bei einer größeren Granularität ist der Fluss daher einer zweidimensionalen Kurve ähnlich (s. Kap. 6).

Die folgenden zwei bereits in Abschnitt 1.2 angesprochenen Phänomenbereiche granularitätsabhängiger Repräsentation sollen mit den in diesem Kapitel erarbeiteten Mitteln in den folgenden zwei Kapiteln voneinander getrennt analysiert werden:

**Äußere Struktur** Der Fluss ist ein Beispiel dafür, dass die Dimensionalität eines Objektes über verschiedene Kontexte verschieden konzeptualisiert wird. Länge und Breite des Flusses variieren so extrem, dass die Breite und die Länge vermutlich in keinem Kontext zugleich repräsentiert werden. Auf kleinmaßstäbigen Karten können Flüsse daher oft als Linien dargestellt werden und haben auch Eigenschaften

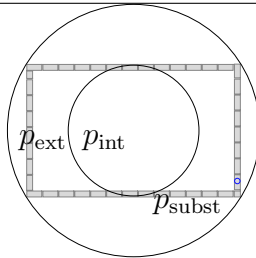
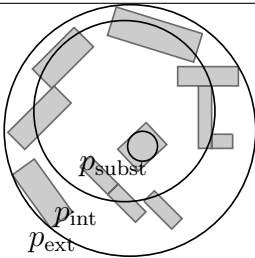
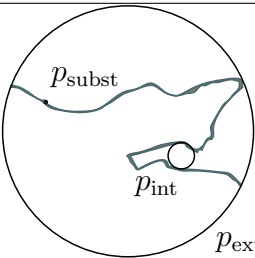
Relation	Gebäude	Siedlung	Fluss
			
Position: <i>ext</i>	das Gebäude	die Siedlung	der Fluss
Form: <i>int</i>	der Innenraum, Räume, Erker	Gebäudeketten, Straßen/Wege, offene Plätze	Biegung, Schleife
Substanz: <i>subst</i>	die Ziegel	die Gebäude	das Wasser

Abbildung 5.8.: Beispiele für Granularitätsschichten, auf denen ein Objekt betrachtet werden kann: ein Gebäude, eine Siedlung und ein Fluss jeweils mit externem, internem und substantiellem Ort. Die Tabelle listet jeweils zugehörige Objekte und Konzepte der Positions-, Form- und Substanzschicht für das Objekt auf.

linearer Entitäten, denn sie dienen z.B. als Grenzen zwischen planaren Ländern. Tatsächlich sind Flüsse aber durchaus auch in der Breite ausgedehnt, was im Kontext der Überquerung eines Flusses beachtet werden muss. Die Dimensionalität des Objektes muss also in Abhängigkeit von der Granularität im Kontext konzeptualisiert werden.

**Innere Struktur** Aggregationen wie Siedlungen und Wälder sind Beispiele für das Phänomen der Sorites-Vagheit. Aggregationen haben Regionen, die direkt von den Objektregionen der sie konstituierenden Objekte abhängen. Ein Aggregationsobjekt muss keine bestimmte räumliche Struktur aufweisen, benötigt aber eine ausreichende Menge der konstituierenden Objekte: Nicht jeder einzeln stehende Baum konstituiert einen Wald und das Fällen eines einzigen Baumes scheint für die Identität eines Waldes nicht kritisch. Zudem sind die konstituierenden Teile der Teile eines Objektes für das Objekt selbst nicht konstituierend;<sup>6</sup> ein Phänomen, das eng an die Granularitätsschichten der Objekte geknüpft ist.

In Kap. 6 wird aufbauend auf den hier eingeführten Relationen (*int*, *ext*, *subst*) eine Klassifikation der äußeren Struktur eines Objektes vorgestellt, die die konzeptualisierte Dimensionalität eines Objektes in einem Kontext bestimmt. Dort wird untersucht, unter welchen Bedingungen Objekte z.B. als linear, punktuell oder planar kategorisiert und repräsentiert werden können. Kapitel 7 beleuchtet Aspekte der inneren Struktur. Die spezifische granularitätsabhängige Beziehung zwischen einem Objekt und den es

<sup>6</sup>Die Ziegel in Abb. 5.8 waren Konstituenten der Häuser, nicht aber (oder nur indirekt) Konstituenten der Siedlung.

## 5. *Ort und Objekt*

konstituierenden Teilen wird dort genauer untersucht, so dass sich eine neue Perspektive auf Phänomene der Vagheit gewinnen lässt.

## 6. Äußere Struktur von Objekten: Position & Form

Wenn man eine Karte betrachtet, erscheinen Straßen oder Flüsse als lineare Objekte und sind u.U. sogar durch Linien repräsentiert. Und tatsächlich können sie in bestimmten räumlichen Kontexten auch Eigenschaften linearer Objekte haben: Straßen können Ortschaften verbinden, Flüsse als Grenzen zwischen (planaren) Ländern fungieren. Dabei hängt es vom Kontext ab, ob ein reales Objekt<sup>1</sup> in seiner Länge oder Breite konzipiert wird: In der Wendung *die Straße entlang gehen* wird die Straße vor allem in ihrer Länge betrachtet, während in *die Straße überqueren* ihre Breite interessiert. Auf verschiedenen Granularitätsebenen und in verschiedenen Kontexten sollte daher auch die Konzeptualisierung von Objekten variieren. In diesem Kapitel wird die geometrische Spezifikation räumlicher Granularität verwendet, um Objektregionen relativ zu einem Kontext als punktuell, linear oder planar klassifizieren zu können. Objektregionen und Kontext werden dazu auf Ausdehnungsspektren abgebildet, die dann verglichen werden können.

In diesem Kapitel sollen nur interne und externe Orte, also Orte, die für Positions- und Formebene relevant sind, betrachtet werden. Die Substanzebene ist zentrales Thema des nächsten Kapitels. In [99] habe ich eine Klassifikation nach externem Ort und Substanzorten durchgeführt. Die hier diskutierte Variante ist von Vorteil, wenn auch nicht-zusammenhängende Objektregionen wie z.B. Aggregationen zugelassen sind.

### 6.1. Ausdehnungsspektrum und Dimensionalität im Kontext

Betrachtet man ein Objekt auf Karten verschiedener Maßstäbe und Auflösungen, so zeigt sich, dass Auflösung und Maßstab die Konzeptualisierung, Repräsentation und Abbildung des Objektes beeinflussen: die Stadt Hamburg etwa ist auf einer Karte von Europa als annotierter Punkt und auf einer Karte von Norddeutschland als unstrukturierte urbane Region abgebildet. Auf einem Stadtplan zerfällt sie in Straßen und Häuserblöcke. Die Frage ist, in welchem Kontext ein Objekt wie die Stadt Hamburg, in welcher Weise angemessen repräsentiert wird. Auf der Europakarte ist die äußere Ausdehnung der Stadt im Vergleich zur Auflösung so unbedeutend, dass die exakten Abmessungen weggelassen werden können. Als urbane Region hingegen interessiert nur die ungefähre Form des Objektes. Auf dem Stadtplan ist diese Form, wenn überhaupt, nur als Grenze auf

---

<sup>1</sup>In unserer Beschränkung auf den zweidimensionalen Raum ist dies wiederum nur eine zweidimensionale Region.

## 6. Äußere Struktur von Objekten: Position & Form

den Randblättern der Karte zu sehen. In räumlichen Informationssystemen sind solche Kontexte z.B. durch den sichtbaren Bildausschnitt und die Auflösung des Monitors gegeben. Zur Modellierung dieser beiden Faktoren, sollen hier ein Kontextort für den repräsentierten Kontext (Karte, Plan, Bildausschnitt) und eine zugehörige Granularität, die die Teilortrelation  $\triangleleft$  für die in der gegebenen Auflösung noch repräsentierten Orte einschränkt, gegeben sein. Da die Granularität, zu der ein gegebener Ort maximale Ausdehnung ist, eindeutig ist (2), kann folgende abkürzende Schreibweise verwendet werden: Die durch einen Ort gegebene Granularität sei diejenige Granularität, zu der seine Größe die Kontextgröße stellt.

$$\gamma = \gamma(p) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{ctx}(\gamma, p) \quad (\text{D38})$$

Eine durch einen Ort  $p$  gegebene Ausdehnung steht zu einer Granularität  $\gamma$  wegen der Definition der Kompatibilität (D11) und der Linearität von  $<$  (16) in genau einer von drei Beziehungen:  $p$  kann mit  $\gamma$  kompatibel sein, oder  $p$  ist größer als die Kontextgröße oder kleiner als die Granulatsgröße von  $\gamma$ . Für den Vergleich von Orten  $p$  mit der Granularität  $\gamma$  eines Kontextes sollen zur Abkürzung der Schreibweise folgende Relationen definiert werden: Ein Ort  $p$  heißt *feiner als* eine Granularität  $\gamma$  (D39) genau dann, wenn es einen Granulatsort  $p_g$  von  $\gamma$  gibt und  $p$  kleiner als  $p_g$  ist. Entsprechend heißt  $p$  *größer als* eine Granularität  $\gamma$  (D40) genau dann, wenn es einen Kontextort  $p_k$  von  $\gamma$  gibt und  $p$  größer als  $p_k$  ist. Es gilt dann direkt über die Definition (D38), dass Orte genau dann größer als die Granularität des Ortes  $p_k$  sind, wenn sie größer als  $p_k$  sind (30).

$$p \prec \gamma \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists p_g : \text{grn}(p_g, \gamma) \wedge p < p_g \quad (\text{D39})$$

$$p \succ \gamma \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists p_k : \text{ctx}(p_k, \gamma) \wedge p_k < p \quad (\text{D40})$$

$$p \succ \gamma(p_k) \leftrightarrow p_k < p \quad (30)$$

Das Dimensionalitätsphänomen war in Kap. 1 und Kap. 5 auf das Konzept der im Kontext irrelevanten und relevanten Ausdehnungen zurückgeführt worden. Die Breite des Flusses ist in einem Kontext, in dem seine Länge relevant ist, irrelevant und damit nicht ohne einen Granularitätsebenenwechsel zugänglich. Umgekehrt ist seine Länge in einem Kontext, in dem seine Breite relevant ist, gleichfalls nicht im Kontext ohne einen Granularitätsebenenwechsel zugänglich. Orte, die in der Relation  $\prec$  zu einer Granularität  $\gamma$  stehen sind zu klein, solche, die in der Relation  $\succ$  zu  $\gamma$  stehen hingegen zu groß.

Wir können nun die Granularität des Kontextortes mit Hilfe der Relationen  $\sim$ ,  $\prec$  und  $\succ$  mit der substantiellen, der internen und der externen Ausdehnung eines Objektes vergleichen, um zu bestimmen, welche seiner Ausdehnungen im Kontext relevant sind. Ein Vergleich mit der externen Ausdehnung des Objektes führt zu drei Klassen von Objekten: punktuellen, kontextlokalen und ausgedehnten Objekten, je nach dem, ob der kleinste externe Ort mit der Granularität des Kontextes kompatibel, größer als die Kontextgröße oder kleiner als die Granulatsgröße ist. Der Vergleich mit der internen Ausdehnung führt zu zwei Klassen: lineare und planare Objekte, weil der größte lokale interne Ort ja stets kleiner sein muss als der Kontext (28). Der größte interne Ort kann daher mit der Granularität des Kontextes kompatibel oder kleiner als die Granulatsgröße sein.



Vergleicht man den Kontextort mit dem externen Ort, erhält man eine Klassifikation für die *Hauptausdehnung eines Objektes im Kontext*:

**Punktuelle Objekte** haben keine relevante Ausdehnung. Ihre gesamte Region kann in einem Granulatsort des Kontextortes lokalisiert werden. Punktuelle Objekte sind in ihrer Position zu repräsentieren oder werden überhaupt nicht repräsentiert, abhängig davon, welche nicht-räumliche Relevanz sie aufweisen.

**Lokale Objekte** Regionen, deren externe Ausdehnung kleiner als die des Kontextes aber noch mit der Granularität des Kontextes kompatibel ist, sollen lokal genannt werden. In Repräsentationsformalismen, in denen der granulare räumliche Kontext nicht beachtet wird, d.h. in dem stets der Raum als Ganzes und ohne Beschränkung der Granularität betrachtet wird, sind alle Objekte lokale Objekte, da sie in ihrer Gesamtheit repräsentiert werden.<sup>2</sup>

**Ausgedehnte Objekte** Ist nun die externe Ausdehnung größer als die des Kontextes, so kann das Objekt als ausgedehnt bezeichnet werden. Es kann nur partiell im Kontext lokalisiert sein und ist im Vergleich zu jedem lokalen Objekt größer.

Beim Vergleich des Kontextortes mit den internen Orten eines Objektes ergibt sich eine Klassifikation für die *sekundäre Ausdehnung eines Objektes im Kontext*, die mit der konzeptualisierten Dimension des Objektes im Kontext zusammenhängen:

**Lineare Objekte** sind Objekte, deren interne Ausdehnung im Kontext nicht relevant ist. Wenn ihre externe Ausdehnung allerdings groß genug ist, um im Kontext repräsentiert zu sein (lokal oder ausgedehnt), können sie durch Linien repräsentiert werden.

**Planare Objekte** haben eine relevante interne Ausdehnung im räumlichen Kontext. Ihre interne Ausdehnung ist kompatibel mit der Ausdehnung des Kontextes selbst.

Die drei Kategorien der externen Ausdehnung und die zwei Kategorien der internen Ausdehnung lassen sich formal charakterisieren. Eine Objektregion  $A$  heißt *punktuell* relativ zu einem Kontextort  $p_k$  genau dann, wenn der externe Ort von  $A$  kleiner als die Granulatsgröße von  $\gamma(p_k)$  ist (D41). Eine Objektregion  $A$  ist *lokal* relativ zu einem Kontextort  $p_k$  genau dann, wenn der externe Ort von  $A$  kompatibel zu  $\gamma(p_k)$  ist (D42). Eine Objektregion  $A$  ist *ausgedehnt* relativ zu einem Kontextort  $p_k$  genau dann, wenn der externe Ort von  $A$  größer als die Kontextgröße von  $\gamma(p_k)$  und damit (30) größer als  $p_k$  ist (D43).

$$\text{punktuell}(A, p_k) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists p_{\text{ext}} : \text{ext}(p_{\text{ext}}, A) \wedge p_{\text{ext}} \prec \gamma(p_k) \quad (\text{D41})$$

$$\text{lokal}(A, p_k) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg \text{punktuell}(A, p_k) \wedge \exists p_{\text{ext}} : \text{ext}(p_{\text{ext}}, A) \wedge p_{\text{ext}} \sim \gamma(p_k) \quad (\text{D42})$$

$$\text{ausged}(A, p_k) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall p_{\text{ext}} : \text{ext}(p_{\text{ext}}, A) \rightarrow p_{\text{ext}} \succ \gamma(p_k) \quad (\text{D43})$$

<sup>2</sup>In Vektorgraphiken z.B. wird die Auflösung als unbegrenzt idealisiert und der Bildausschnitt nicht repräsentiert. Das SVG-Format (Scalable Vector Graphics) wird sogar explizit als skalierbar bezeichnet.

## 6. Äußere Struktur von Objekten: Position & Form

Die externe Ausdehnung eines Objektes wird unabhängig vom Kontext bestimmt. Die interne Ausdehnung eines Objektes hingegen variiert mit dem betrachteten Kontext. Nur solche Objekte, die den durch den Ort  $p_k$  gegebenen Kontext überlappen, sollten bezüglich ihrer relativ zum Kontextort  $p_k$  lokalen sekundären Ausdehnung klassifiziert werden können. Eine Objektregion  $A$  ist *linear* relativ zu einem Kontextort  $p_k$  genau dann, wenn  $A$   $p_k$  überlappt und jeder interne Ort von  $A$  kleiner als die Granulatsgröße von  $\gamma(p_k)$  ist (D44). Eine Objektregion  $A$  ist *planar* relativ zu einem Kontextort  $p_k$  genau dann, wenn ein interner Ort von  $A$  kompatibel zu  $\gamma(p_k)$  ist (D45). Dass  $A$   $p_k$  überlappt, folgt in diesem Fall aus der Definition von *int* (D37).

$$\text{linear}(A, p_k) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \circ p_k \wedge \forall p_{\text{int}} : \text{int}(p_k, p_{\text{int}}, A) \rightarrow p_{\text{int}} \prec \gamma(p_k) \quad (\text{D44})$$

$$\text{planar}(A, p_k) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists p_{\text{int}} : \text{int}(p_k, p_{\text{int}}, A) \wedge p_{\text{int}} \sim \gamma(p_k) \quad (\text{D45})$$

Die größten internen Orte, die die sekundäre Ausdehnung und damit die Dimensionalität des Objektes im Kontext beschreiben, und die kleinsten externen Orte, die für die Gesamtausdehnung relativ zum Kontext wichtig sind, bestimmen das *Ausdehnungsspektrum* des Objektes, also die Spanne von Größen, die mindestens notwendig ist, um das Objekt zu repräsentieren. Die Beziehung zwischen Ausdehnungsspektrum eines Objektes und der Kontextgranularität, die durch Granulatsgröße und Kontextgröße gegeben ist, lässt sich durch Größenintervalle veranschaulichen: Der Größenbereich, der für ein Objekt im Kontext wichtig ist, ist genau der Bereich zwischen der größten internen und der kleinsten externen Ausdehnung. Es ist nicht garantiert, dass diese Grenzwerte existieren, weil ja nur Dichte der Größen angenommen wurde. Die Darstellungen dienen daher nur der Veranschaulichung. Die Granularität wird durch die Relationen *grn* und *ktx* allerdings eindeutig bestimmt. Einfache Beispiele für die Klassifikation zeigt Abb. 6.1. Zu beachten ist, dass punktuelle Objekte notwendigerweise als linear klassifiziert werden, weil die externe Ausdehnung stets größer ist als die interne. Ist die externe Ausdehnung also irrelevant, so trifft dies auch auf die interne zu.

### Globale Klassifikation

Eine globale Klassifikation ergibt sich, wenn man das Objekt im Kontext seiner kleinsten externen Orte betrachtet. Es lassen sich damit global planare Objekte von global linearen unterscheiden. Diese Unterscheidung ist insofern interessant, als selbst ein einfaches global lineares Objekt in keinem Ort in seinem gesamten Ausdehnungsspektrum repräsentiert ist. Die Breite eines Flusses ist in einem Kontext, in dem seine Länge relevant ist, irrelevant und damit nicht ohne einen Granularitätsebenenwechsel zugänglich. Umgekehrt ist seine Länge in einem Kontext, in dem seine Breite relevant ist, gleichfalls nicht im Kontext ohne einen Granularitätsebenenwechsel zugänglich. Dieses im Zusammenhang mit dem Fluss aus Abb. 5.8 in Kap. 5 diskutierte Phänomen wird also durch die Klassifikation als global lineares Objekt erfasst. Ein Objekt wie der Fluss gehört damit stets zu mehr als einer Granularitätsebene. Es ist ein granular inhomogenes Objekt. In [97, 98] habe ich Richtungsrelationen im Zusammenhang mit ausgedehnten Objekten diskutiert. Lineare Objekte wie Flüsse waren dabei besonders adäquate Testfälle. Dies ergibt sich daraus, dass alle Kontextorte, die die interne Ausdehnung des Objektes überhaupt repräsentieren, das Objekt als ausgedehnt repräsentieren. Aber gerade im Fall

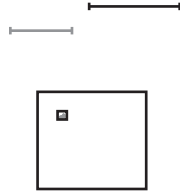
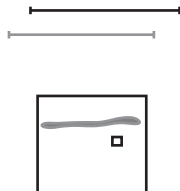
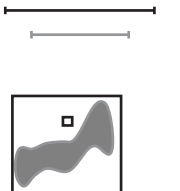
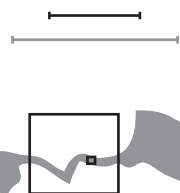
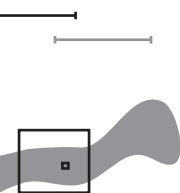
	linear	planar
punktuell		
lokal		
ausged.		

Abbildung 6.1.: Ausdehnungstypen für Objektregionen (grau) in einem granularen Kontext (schwarz) in einem Ortesystem von Rechtecken: Der Ausdehnungstyp wird bestimmt durch die Relation zwischen der Granularität des Kontextes ( $\gamma$ ) und den Größen der lokalen internen und externen Orte des Objektes.

## 6. Äußere Struktur von Objekten: Position & Form

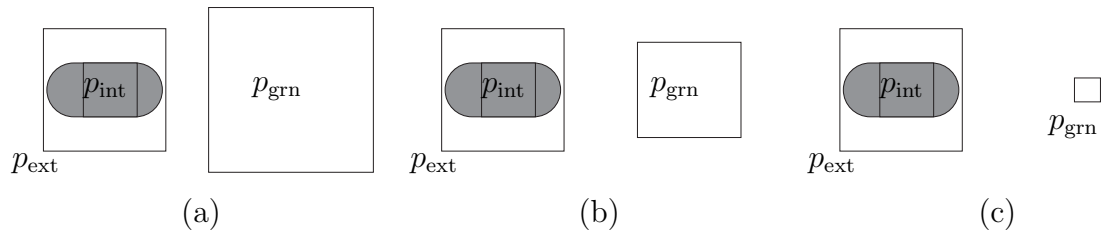


Abbildung 6.2.: Lokale Objekte: beim Wechsel vom punktuellen (a) zum lokal planaren Objekt (c), wird das Stadion auf einem sehr kleinen Bereich von Granularitäten als lokal linear klassifiziert (b). Die Granularität wird hier visuell durch einen Granulatsort  $p_{grn}$  dargestellt (ein zugehöriger Kontextort ist nicht dargestellt).

der Flüsse liegen zwischen der Repräsentation als lineares und der als planares Objekt sicherlich sogar mehrere Granularitätsebenen. Beispiel: Will ein Agent die Handlung *den Fluss überqueren* ausführen, so ist die interne Ausdehnung, die Breite des Flusses in der Nähe seines aktuellen Standpunktes wichtig. In der Nähe der Quelle genügt ein größerer Schritt, in der Nähe der Mündung benötigt er eine Fähre oder große Brücke. Die Ausführung der *Überquerung* ist damit von der lokalen Klassifikation abhängig, während sich die Notwendigkeit zur Überquerung, wenn man auf die andere Seite will, aus der globalen Linearität ergibt. Der Fluss hat ja gerade deshalb eine andere Seite, weil es praktisch nicht möglich ist, ihn zu umgehen.

### Lokale Klassifikation

Die Beispiele zeigen, dass der räumliche Kontext (z.B. der sichtbare Bildausschnitt) die Konzeptualisierung eines Objektes beeinflusst. Eine leichte Verschiebung des Kontextortes kann die Klassifikation von linear zu planar verändern. Genauso kann sich beim Hineinzoomen die Klassifikation verändern. Ein zunächst punktuell Objekt wird, wenn es nicht tatsächlich ein Punkt ist, zum kontextlokalen Objekt und dann zum ausgedehnten, planaren oder linearen Objekt.

Lokale Objekte stellen gewissermaßen einen Grenzfall zwischen ausgedehnten und punktuellen Objekten dar. Wegen (28) findet beim Verfeinern eines Objektes, wie z.B. beim Zoomen auf ein Objekt, beim Übergang vom punktuellen zum lokalen Objekt stets eine Klassifikation als lokal lineares Objekt statt. Diese Klassifikation als lokal lineares Objekt kann im Fall global planarer Objekte fehlerhaft sein. Ein Rechteck, das in der Maximalausdehnung nur wenig größer als ein Granulatsort des Kontextes ist, und dessen Sekundärausdehnung nur wenig kleiner als ein Granulatsort des Kontextes ist, würde beim Verfeinern in einem kleinen Bereich von Granularitäten als linear klassifiziert. Wählt man einen nur geringfügig größeren Kontextort, so wird das Objekt bereits als planar klassifiziert. Dieser Zwischenschritt wird am Beispiel der Klassifikation eines Stadions in Kontexten verschiedener Granulatsgrößen in Abb. 6.2 visualisiert.

In Abb. 6.3 sind die möglichen Veränderungen, die sich beim Zoomen ergeben können, am Beispiel eines global linearen und eines global planaren Objektes veranschaulicht.

Abbildung 6.4 visualisiert die möglichen Veränderungen der Klassifikation, die sich beim sukzessiven Hineinzoomen auf ein Objekt ergeben. Die Unterscheidung in lineare und planare Objekte wird entsprechend der obigen Überlegungen erst ab der Ebene der ausgedehnten Objekte angezeigt. Bei Hineinzoomen neben die Region oder auch auf Lücken in der Region (vgl. auch Kap. 7) wird die Klassifikation gemäß der sekundären Ausdehnung unmöglich, sobald der Kontextort die Region nicht mehr überlappt (hier dargestellt als *außerhalb*).

Ein solcher Klassifikationsmechanismus könnte z.B. für kartographische Anwendungen wie die von Frank und Timpf [36] vorgeschlagenen *multi-scale trees* genutzt werden. Der *multi-scale tree* speichert verschieden detaillierte Repräsentationen eines Objektes in einer Baumstruktur, von denen eine dann abhängig vom im Kontext aktuellen Maßstab und Detailgrad als Repräsentation des Objektes ausgewählt wird. Die Repräsentationen eines Objektes werden in [36] mit Hilfe verschiedener externer Quellen semi-automatisch generiert. Das Problem der kartographischen Generalisierung ist schwierig zu automatisieren, da hierfür sowohl komplexes kartographisches Expertenwissen als auch Konzeptualisierungen des Allgemeinverständnisses eine wichtige Rolle spielen [36]. Die hier vorgeschlagenen kontextabhängigen Klassifikationen stellen ein Hilfsmittel dar, mit dem sich einige Aspekte der Maßstabsabhängigkeit von Repräsentationen erklären lassen.

### Diskussion

Der Unterschied zwischen linearen und planaren Objekten besteht einzig darin, dass die interne Ausdehnung planarer Objekte größer ist als die linearer. Punktuellen und lokalen Objekten ist gemeinsam, dass beide von der externen Ausdehnung her kleiner sind als der Kontext. Dabei fallen punktuelle Objekte unter die durch die Granularität bestimmte Schranke, während lokale Objekte oberhalb dieser Schranke sind. Sie müssen den Kontext lediglich so überlappen, dass es einen internen Ort im Kontext gibt. Ausgedehnte Objekte sind größer als der Kontextort, im Kontext ist also nur ein Teil des Objektes repräsentiert. Nur lokale und ausgedehnte Objekte können nach ihrer internen Ausdehnung unterschieden werden.<sup>3</sup> Ein ausgedehnt planares Objekt fungiert häufig als Hintergrund eines Kontextes.

Eine Klassifikation als lineares Objekt bedeutet aber nicht, dass das Objekt tatsächlich eindimensional ist. Auch in Kontextorten am Rand einer Objektregion wird das Objekt als linear klassifiziert, wobei man intuitiv hier nicht sagen würde, dass man das Objekt selbst, sondern nur seinen Rand betrachtet. Ränder und Grenzen halten wir für lineare Objekte. Aber nicht nur der äußere Rand, auch Ränder im Inneren, an Löchern in der Objektregion werden im Bereich einer bestimmten Kontextortgröße als linear klassifiziert. Hier ist auch die Position des Kontextortes wichtig: Ist z.B. der Kontextort am Rand einer Lichtung (vgl. Abb. 6.5 (a)), so dass die größten internen Orte im Vergleich zum Kontextort sehr klein sind, so wird der Wald, der hier nur durch wenige Bäume im Kontext präsent ist, als ausgedehnt lineares Objekt klassifiziert. Dies ist insoweit gerechtfertigt, als der Wald in diesem Kontext nur als Rand der Lichtung erscheint. Im

---

<sup>3</sup>Punktuelle Objekte würden stets als linear klassifiziert werden. Die Klassifikation als linear bedeutet also lediglich, dass höchstens zwei Dimensionen relevant sind, nicht jedoch, dass es zwei sein müssen. Dies sichert erst das Kriterium der Ausgedehtheit. Lokale Objekte bilden den Übergangsbereich.

6. Äußere Struktur von Objekten: Position & Form

Klassifikation	Stadt	Fluss
punktuell		
lokal linear		
lokal planar		
ausg. linear		
ausg. planar		

Abbildung 6.3.: Klassifikationen beim Zoomen: ein global planares und ein global lineares Objekt in verschiedenen Kontextorten.

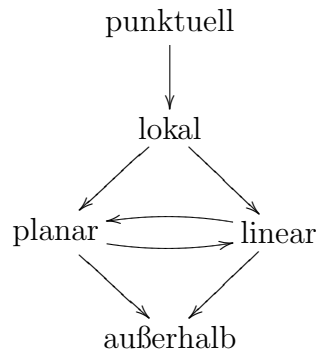


Abbildung 6.4.: Beim Hineinzoomen verändert sich die Klassifikation. Ein zunächst punktuell Objekt kann zum kontextlokalen Objekt und dann zum ausgedehnten, planaren oder linearen Objekt werden.

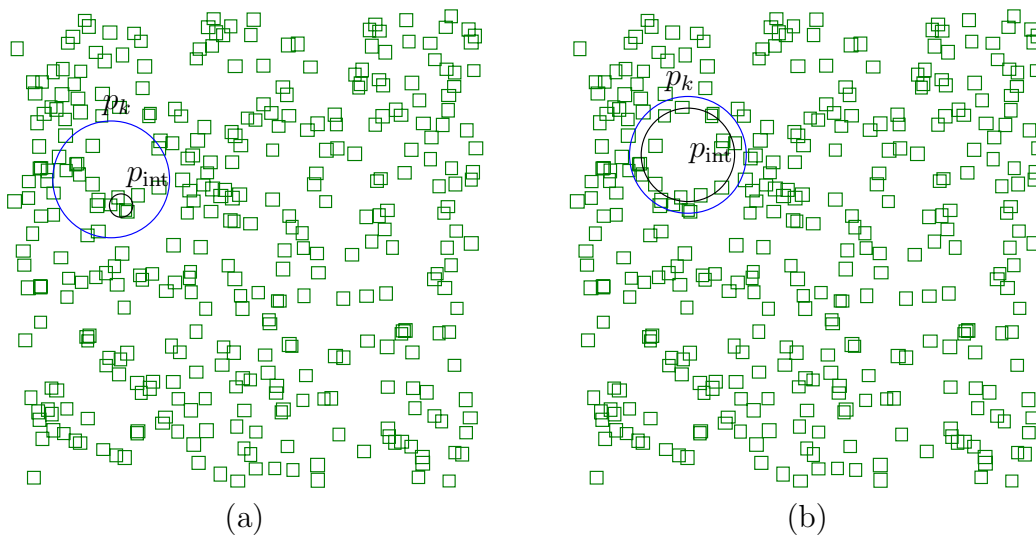


Abbildung 6.5.: Lokale Klassifikation des Waldes an einer Lichtung: (a) am Rand einer Lichtung, (b) in der Mitte der Lichtung.

Vergleich mit Abb. 6.5 (b) fällt auf, dass hier die größten internen Orte des Waldes im Kontext die gesamte Lichtung umschließen.  $p_{\text{int}}$  ist hier annähernd so groß wie der Kontextort selbst. Die Klassifikation bestimmt den Wald dann als planaren Hintergrund der Lichtung.

Die Bezeichnungen *punktuell*, *linear* und *planar* haben aber auch einen Bezug zum mathematischen Begriff der Dimension einer geometrischen Entität. Eine Strecke oder Gerade hat keine internen Orte und wird daher in jedem Ort nach (D44) als linear klassifiziert. Die externen Orte eines Punktes können beliebig klein werden, so dass ein Punkt unabhängig vom Kontextort stets als punktuell nach (D41) klassifiziert wird. Die zweidimensionale Ebene als Ganzes wird in jedem Kontext, der Teilorte hat, als planar (D45) klassifiziert.

Weniger einfache geometrische Entitäten erhalten hingegen ein komplexeres Ausdehnungsspektrum. Eine eindimensionale Kreislinie z.B. wird im Ortesystem der Kreise als global planar klassifiziert. Für Kontextorte hingegen, die so klein sind, dass sie nur Abschnitte der Kreislinie beinhalten, wird der Kreis ähnlich der Strecke (s.o.) stets als lineares Objekt klassifiziert. Raumfüllende Kurven hingegen, wie z.B. die Peano-Kurve, werden genauso klassifiziert wie die Fläche, die sie füllen. Komplexere Kurven haben ein komplexeres Verhalten. Die Kurve  $A$  in Abb. 6.6 würde z.B. relativ zu  $p_3$  als lokal linear mit  $p_1$  als maximal lokal internem Ort klassifiziert werden, wenn in der Modellierung der Granularitäten  $\gamma$   $p_1$  kleiner als die Granulatsgröße zu  $\gamma(p_3)$  ist. Relativ zu  $p_2$  wiederum mit  $p_1$  als maximal lokal internem Ort könnte  $A$  als ausgedehnt planar klassifiziert werden, wenn die Granularitäten  $\gamma$  so modelliert sind, dass  $p_1$  kompatibel zu  $\gamma(p_2)$  ist. Lokal zu Orten der Größe von  $p_1$  – und auch lokal zu kleineren Orten – umschließt  $A$  keine Orte mehr, für diese Größe und kleinere wird  $A$  daher, wie die Strecken aus denen es besteht, als lineares Objekt klassifiziert. Bei fraktalen Kurven,<sup>4</sup> die eine hohe Selbstähnlichkeit aufweisen, so dass sich bei der sukzessiven Verfeinerung stets dieselben wiederkehrenden Abfolgen von Strukturen ergeben, wiederholt sich entsprechend auch die Abfolge der Klassifikationen. Bei fraktalen Kurven, die in einem geringeren Maße selbstähnlich strukturiert sind, wie z.B. bei einem natürlichen Objekt wie einer Küstenlinie, können sich bei jedem Verfeinerungsschritt neue komplexe Strukturen ergeben. Bei variierenden Strukturen kann dann entsprechend auch die Klassifikation variieren. Eine genauere Untersuchung der Beziehungen zwischen dem hier aufgestellten Begriff von Dimensionalität und verschiedenen mathematischen Dimensionsbegriffen, wie etwa dem der Hausdorff-Dimension, steht allerdings noch aus.

## 6.2. Orte als räumliche Kontexte

In Abschnitt 3.1 wurde angekündigt, dass der hier aufgestellte Formalismus der Orte auch für die Formalisierung eines granularen räumlichen Kontextbegriffes geeignet ist. Hierzu soll zunächst der Begriff der Nähe genauer untersucht werden. Nähe spielt eine wichtige Rolle für die Semantik und Verwendbarkeit von präpositionalen Ausdrücken

---

<sup>4</sup>Eine Einführung in die fraktale Geometrie findet sich in [83].



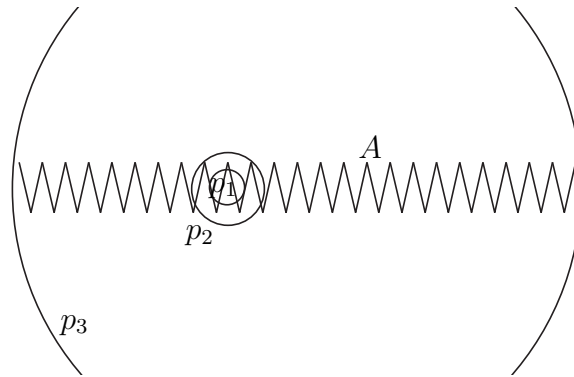


Abbildung 6.6.: Eine Kurve mit bei Verfeinerung variierenden Klassifikationen.

(Levinson [68], Regier und Carlson [91]), die z.B. in einer Routeninstruktion Entscheidungspunkte, die man als lokale räumliche Kontexte betrachten kann, kennzeichnen können (vgl. Wunderlich und Reinelt [121]). Das Konzept der Nähe ist für die Semantik der Präposition *bei* entscheidend (s. Wunderlich und Herweg [120]). Aber sogar die projektiven Terme *vor*, *links von*, *nördlich von*, die im wesentlichen Richtungsinformation kodieren, sind auf einen maximalen Geltungsbereich beschränkt (s. Levinson [68]), der vermutlich mit der Größe des Referenzobjektes zusammenhängt, die Größe der Region *vor dem Haus*<sup>5</sup> z.B. hängt von der Größe des Hauses ab. Nach Talmy [106] wird ein Objekt auch bevorzugt in Beziehung zu einem größeren, stabilen Referenzobjekt lokalisiert: *das Fahrrad vor dem Haus* erscheint natürlicher als *das Haus hinter dem Fahrrad*.

Auf den ersten Blick scheint Nähe nur eine Variante der Distanzrelation zwischen zwei Objekten zu sein. Worboys [119] stellt fest, dass Nähe in der menschlichen Wahrnehmung sich von metrischen Distanzrelationen in zwei entscheidenden Punkten unterscheidet:

- Nähe ist eine kontextabhängige und
- nicht symmetrische Relation.

Ein kleineres Objekt *A* mag in der Nähe eines größeren (*B*) liegen, ohne dass man sagen würde, dass das größere nahe bei dem kleineren ist. Hierzu passen auch die Ergebnisse von Talmy [106]. Worboys modelliert Kontext mit Hilfe einer Vergleichsmenge. Interessante Schlussfolgerungen ergeben sich allerdings bereits bei Verwendung eines rein räumlichen Kontextbegriffs, der im folgenden skizziert werden soll.

Ein Objekt soll als im räumlichen Kontext repräsentiert gelten, wenn es zumindest partiell in einem den Kontextbereich repräsentierenden Ort liegt und eine bezüglich der Granularität des Kontextes kompatible Ausdehnungsspektrum besitzt. Eine Mindestbedingung dafür ist, dass das Objekt an dem Ort gemäß primärer und sekundärer Ausdehnung klassifiziert werden kann: Nur diejenigen Orte, an denen es einen internen Ort hat, sollen hierfür in Betracht kommen, weil die sekundäre Ausdehnung (D44), (D45) ja

<sup>5</sup>Oder nach Levinson [68]: die Länge der *vor*-Achse.

## 6. Äußere Struktur von Objekten: Position & Form

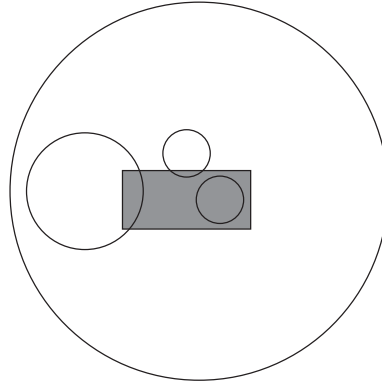


Abbildung 6.7.: Ein Objekt mit Beispielen für Orte, an denen sich das Objekt befindet gemäß (D46).

über den lokalen internen Ort bestimmt wird; hinzu kommt, dass nur Objektregionen, die einen externen Ort haben, sich nach der Hauptausdehnung klassifizieren lassen. Orte  $p$ , an denen sich eine Region  $A$  klassifizieren lässt, sollen im folgenden durch die Relation  $\alpha$  ( $A$  befindet sich an  $p$ ) bestimmt sein:  $A$  befindet sich an  $p$  ( $A \alpha p$ ) genau dann, wenn  $A$  einen externen Ort hat, und im Kontext von  $p$  auch ein interner Ort existiert.

$$A \alpha p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists p_{\text{ext}}, p_{\text{int}} : \text{ext}(p_{\text{ext}}, A) \wedge \text{int}(p, p_{\text{int}}, A) \quad (\text{D46})$$

Abbildung 6.7 illustriert die Definition anhand eines Objektes  $A$  und vier Orten  $p$ , für die  $A \alpha p$  gilt.

Angenommen, dass räumliche Kontexte durch räumliche Präpositionalphrasen gesetzt werden, wie in Abschnitt 3.1 motiviert wurde, so ist mit dem Satz  $A$  ist bei  $B$ , mit der intendierten Bedeutung  $A$  ist in der Nähe von  $B$ , durch die Ausdehnung von  $B$  eine Kontextgranularität festgesetzt, die die maximale Größe eines Ortes bei  $B$  beschränkt, in dem sich  $A$  befindet: Ist  $B$  groß, so ist der Nähebereich, in dem sich  $A$  befinden kann, ebenfalls groß. Ist  $A$  nun sehr klein, so spannt es nur einen entsprechend kleinen Nähebereich auf, der eventuell nicht weit genug ist, um an  $B$  heranzureichen. Die Umkehrung des Satzes, d.h.  $B$  ist bei  $A$ , wäre in diesem Fall nicht korrekt. Betrachten wir nun Kontextorte, in denen sowohl  $A$  als auch  $B$  klassifiziert werden können, so können sich die folgenden Beziehungen zwischen den beiden lokalen Spektren der Objekte ergeben:

- $A$  und  $B$  können sich unterscheiden in der maximalen Ausdehnung: ausgedehnt, lokal oder punktuell.
- Sind  $A$  und  $B$  lokal oder ausgedehnt, also nicht punktuell, so kann auch ihre lokale sekundäre Ausdehnung relevant sein: linear oder planar.

Betrachtet man nun diejenigen Orte, an denen ein bestimmtes Objekt als punktuell, lokal, oder ausgedehnt lokalisiert ist, so ergeben sich für die von diesen Orten eingenommenen jeweiligen Regionen bestimmte maximale Distanzbereiche um das Objekt herum.

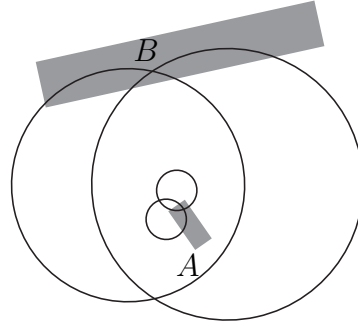


Abbildung 6.8.:  $A$  ist nahe  $B$ , aber  $B$  ist nicht nahe  $A$ . Es gibt Orte, in denen  $B$  als ausgedehnt lokalisiert ist, und in denen auch  $A$  lokalisiert ist. Aber keiner der Orte, an denen  $A$  als ausgedehnt lokalisiert ist, lokalisiert auch  $B$ .

Nähe lässt sich daher diesen Distanzbereichen entsprechend staffeln und klassifizieren: Sind z.B. die einzigen Orte, die beide Objekte  $A$  und  $B$  lokalisieren, solche, in denen  $B$  als punktuell Objekt klassifiziert wird, so sind die Objekte zu weit entfernt. Gibt es aber auch Orte, an denen  $B$  als ausgedehnt klassifiziert wird, so ist  $A$  nahe  $B$ . Wir erhalten damit genau die postulierte Asymmetrie im Fall eines im Vergleich kleineren Objektes  $A$ , dargestellt in Abb. 6.8: Sind die kleinsten Kontextorte, die  $A$  lokalisieren und auch  $B$ , Orte, an denen  $A$  als punktuell und  $B$  als ausgedehnt klassifiziert wird, so ist  $A$  in der Nähe von  $B$ , aber  $B$  nicht in der Nähe von  $A$ . Nähe lässt sich daher als abhängig von der Klassifikation von  $B$  in einem geeigneten Kontextort modellieren:  $B$  wird klassifiziert als

**punktuell:**  $A$  ist entfernt von  $B$ . Es gilt, dass ein Kontextort, der zwei Objektregionen als punktuell repräsentiert immer existiert, wenn die beiden Objekte einen externen Ort haben, also beschränkt sind. Gibt es allein solche Kontextorte, so liegen die Objekte weit auseinander im Verhältnis zu ihrer eigenen Ausdehnung.

**lokal:** Dieser Fall stellt einen Grenzfall oder Übergangsbereich dar.

**ausgedehnt:**  $A$  ist nahe  $B$ . Gibt es Orte, an denen  $A$  lokalisiert und  $B$  als ausgedehnt klassifiziert wird, so ist der minimale Abstand zwischen den Objekten kleiner als die Maximalausdehnung von  $B$ .

Ebenfalls müssen für *nahe* auch Enthaltensein und Überlappung von  $A$  und  $B$  ausgeschlossen werden. Zudem sollte auch  $A$  nicht beliebig klein sein. Eine einfache Charakterisierung für Nähe  $\nu$  ergibt sich:  $A$  ist *nahe*  $B$  in einem durch  $p$  gegebenen räumlichen Kontext genau dann, wenn  $B$  in  $p$  als ausgedehntes und  $A$  in  $p$  als lokales Objekt lokalisiert ist, und  $A$  und  $B$  keine internen Orte gemeinsam haben.

$$A \nu_p B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \alpha p \wedge B \alpha p \wedge \text{ausgedehnt}(B, p) \wedge \text{lokal}(A, p) \wedge \neg \exists p_{\text{int}} : \text{int}(p, p_{\text{int}}, A) \wedge \text{int}(p, p_{\text{int}}, B) \quad (\text{D47})$$

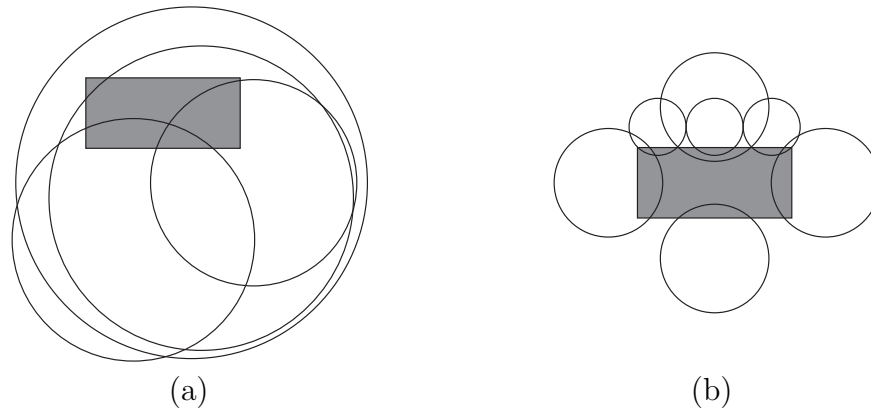


Abbildung 6.9.: Orte, in denen das Objekt als lokal klassifiziert werden könnte (a) sind größer als Orte in denen das Objekt als ausgedehnt klassifiziert wird (b). Für die Abbildung sei vorausgesetzt, dass die Granularitätenstruktur so modelliert ist, dass die Granulatsgröße zu den Granularitäten  $\gamma(p)$  für jeden dargestellten Ort  $p$  hinreichend klein, zumindest aber kleiner als die externe Ausdehnung des Objektes ist. Anderenfalls wäre das Objekt punktuell im Kontext von  $p$ .

### Diskussion

Die Bedingung für *Nähe* ließe sich zusätzlich verschärfen, wenn man fordert, dass  $B$  auch in der lokalen sekundären Ausdehnung im Granularitätsbereich des Kontextortes liegen soll, also indem man fordert, dass  $B$  als ausgedehnt planar in einem Kontextort klassifiziert wird, in dem auch  $A$  lokalisiert ist. Ein Objekt ist z.B. nach dem Allgemeinverstand nur dann *nahe dem Fluß*, wenn der Kontextort, der beide Objekte lokalisiert, sehr viel kleiner als die Maximalausdehnung (Länge) des Flusses ist. Zu beachten ist allerdings, dass topologisch lineare Objekte, wie die Grenze zwischen zwei Ländern z.B., keine sekundäre Ausdehnung haben, *nahe der Grenze* wäre dann mit der zusätzlichen Folgerung in jedem Falle falsch. Aber auch wenn die interne Ausdehnung nicht beachtet wird, bleibt für das Objekt *Grenze* dasselbe Problem wie für den Fluss.

Anzumerken ist, dass mit obiger Definition auch für  $A$  Einschränkungen gelten. Vergleicht man extrem unterschiedlich große Objekte wie eine Fliege und einen Fluss, so ist die Fliege nur in solchen Kontextorten nahe dem Fluss, an denen die Fliege als lokales Objekt lokalisiert ist, also in vergleichsweise kleinen Kontextorten. Man würde dann eventuell die Beschreibung *die Fliege ist nahe dem Wasser* vorziehen. Das Beispiel illustriert die generelle Problematik: die Objekte Fluss und Fliege sind gewissermaßen *granular inkompatibel*: Ein Kontext, der das eine Objekt geeignet lokalisiert, lokalisiert das andere unzureichend.<sup>6</sup> Kontextorte für die Lokalisation der Fliege lokalisieren nur einen winzigen Teil des Flusses, eben *etwas Wasser*; umgekehrt ist die Fliege in Kontextorten, die den Fluss lokalisieren, so unbedeutend, dass sie als nicht repräsentiert gelten kann. Tatsächlich kann man zudem in Kontextorten, die den Fluss und nicht nur

<sup>6</sup>Zur kognitionspsychologischen Evidenz für diese Eigenschaft räumlicher Kontexte vgl. Kosslyn [59].

etwas Wasser lokalisieren, sicher eine zu große Anzahl Fliegen finden, als dass sich der definite Artikel in *die Fliege* in textuellen Standardkontexten rechtfertigen ließe. Diese Restriktion deutet auf die von Worboys [119] postulierten Vergleichskontexte hin. An dieser Stelle wird also möglicherweise ein über das rein Räumliche hinausgehender Kontextbegriff benötigt.

### 6.3. Schlussfolgerungen

Es wurde gezeigt, wie Objektregionen nach ihrer lokalen Form klassifiziert werden können. Punktuelle Objekte können von linearen und planaren unterschieden werden. Diese Klassifikation ist nützlich, um formale Rahmenbedingungen für in einem Kontext adäquate Repräsentationen beschreiben zu können: Unter welchen Bedingungen können Objekte mit einer Ausdehnung in einem Kontext als Punkte oder Linien repräsentiert werden? Unter welchen Bedingungen müssen sie als Regionen repräsentiert werden?

Die Klassifikation ist daher z.B. nützlich, um Aspekte der Schematisierung nach Herskovits [51] (s. Abschnitt 1.2.2) formal modellieren zu können. Anhand eines einfachen Beispiels soll nun kurz erläutert werden, wie sich die Klassifikation als punktuelles Objekt zu der in [51] erwähnten Repräsentation durch einen Punkt verhält. Herskovits schreibt:

There is much linguistic evidence that one central sense of *at* is “coincidence of a movable point object with a point place in a cognitive map.”  
[51, S. 158] (Hervorhebung im Original)

Sie gibt das folgende Kriterium für Punktartigkeit von Objekten:

[...] Jack is at the supermarket.  
is typically infelicitous if the speaker herself is in the supermarket, because a space that surrounds you cannot be seen as a point; representing a fixed object as a point requires seeing it from a distance. [51, S. 158]

Eine für die Präposition *at* taugliche Konstellation kann in dem hier vorgestellten Ansatz in folgender Weise wiedergegeben werden: Ausgangspunkt sei ein Kontextort  $p_k$ , zu dem die Regionen der Sprecherin ( $S$ ), des Supermarktes ( $B$ ) und der Person Jack ( $A$ ) in der Relation  $\alpha$  stehen, d.h. der zumindest partiell die drei Regionen überlappt. Sind nun die Region des Supermarktes  $B$  und die von Jack eingenommene Region  $A$  beide punktuell im Kontext, so bedeutet dies gemäß dem hier verwendeten Ansatz, dass der kleinste externe Ort von  $B$  und damit erst recht der kleinste externe Ort  $A$  kleiner als die Granulatsgröße zu  $\gamma(p_k)$  ist. Wenn nun einer der externen Orte  $p$  von  $B$ , die kleiner als die Granulatsgröße zu  $\gamma(p_k)$  sind, auch externer Ort zur Region  $A$  ist, so modelliert dies die Koinzidenz der punktartigen Lokationen von  $A$  und  $B$ .<sup>7</sup>

Unter der zusätzlichen Annahme, dass die Sprecherin den Kontextort so klein wie möglich wählt, also genau so, dass  $p_k$  gerade ihre Position  $S$  zusammen mit den beiden

<sup>7</sup>Eine schwächere Variante für die Relation der Koinzidenz zweier punktueller Objekte wäre die Relation der granularen Ununterscheidbarkeit (D33).

## 6. Äußere Struktur von Objekten: Position & Form

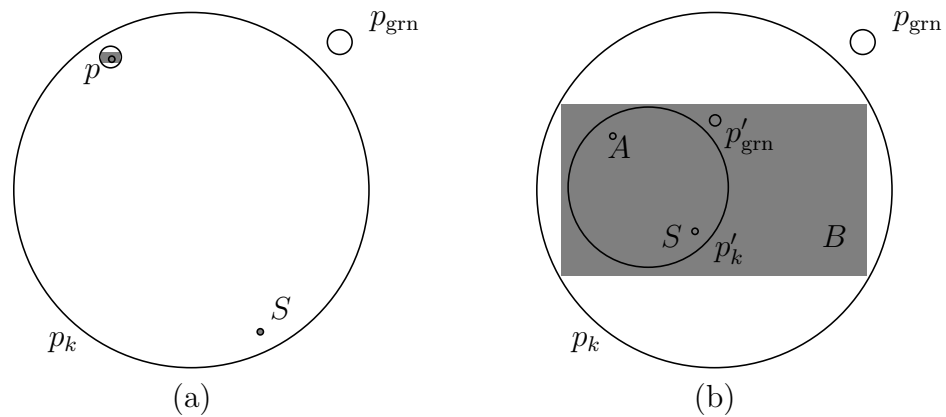


Abbildung 6.10.: Der Satz *A is at B* kann von der Sprecherin  $S$  zur Beschreibung der in (a) dargestellten Situation verwendet werden, in der  $A$  und  $B$  einen gemeinsamen externen Ort  $p$  haben, der kleiner als die Granulatsgröße (hier visuell repräsentiert durch  $p_{\text{grn}}$ ) von  $\gamma(p_k)$  ist. In (b) befindet sich die Sprecherin gemeinsam mit  $A$  in der Region von  $B$ . Unter der Annahme, dass die Sprecherin den Kontextort so klein wie möglich wählt, wäre  $p'_k$  hier ein adäquaterer Kontextort.

anderen Regionen  $A$  und  $B$  enthält, muss ihre Position ausreichend weit von den beiden anderen Regionen lokalisiert werden. Abbildung 6.10 zeigt zwei unter dieser Annahme resultierende Varianten: in (a) ist  $S$  weit entfernt von  $A$  und  $B$ , und der kleinste alle drei beinhaltende Ort ist im Vergleich zur größten Region  $B$  groß; in (b) ist die Sprecherin selbst im Supermarkt:  $S$  ist innerhalb der Region  $B$ . Der kleinste, alle drei Regionen umfassende, Ort ist der externe Ort von  $B$ . In diesem ist  $B$  allerdings kein punktuell Objekt. Geht es der Sprecherin darum, Jack zu lokalisieren, so könnte sie als Kontextort besser den kleineren Ort  $p'_k$  und ein anderes Referenzobjekt wählen.  $B$  ist in  $p'_k$  ein planares Objekt und kann daher im Kontext von  $p'_k$  eher als Hintergrundobjekt fungieren.

In Abschnitt 1.1.1 wurde erklärt, dass der hier aufgestellte Begriff des Ortes an den Begriff des Ortes in der Forschung zur Navigation natürlicher und künstlicher Agenten und an den Begriff des Entscheidungspunktes in der Forschung zu Routeninstruktionen angelehnt ist. Inwieweit die hier charakterisierten Konzepte tatsächlich für die Forschung zu instruierter Navigation brauchbar sind, soll nun anhand eines weiteren Beispiels ausgeführt werden.

Zunächst ist zu bemerken, dass Aspekte der Dimensionalität auch in den in Abschnitt 1.1.1 dargestellten Theorien zu Routeninstruktionen eine Rolle spielen: Entscheidungspunkte sind ihrer Benennung nach punktartige Lokationen. Die Pfade, die in einer Routeninstruktion beschrieben werden, werden z.B. von Eschenbach, Tschander, Habel und Kulik [31] als Trajektorien, die die Punkte, die auf ihnen liegen, linear anordnen, analysiert. Pfade werden dadurch als lineare, eindimensionale Entitäten charakterisiert. Es ist nun möglich, anhand eines einfachen Beispiels zu zeigen, dass eine Sequenz von Positionen eines instruierten Agenten, der erfolgreich einer Routeninstruktion folgt, mit der

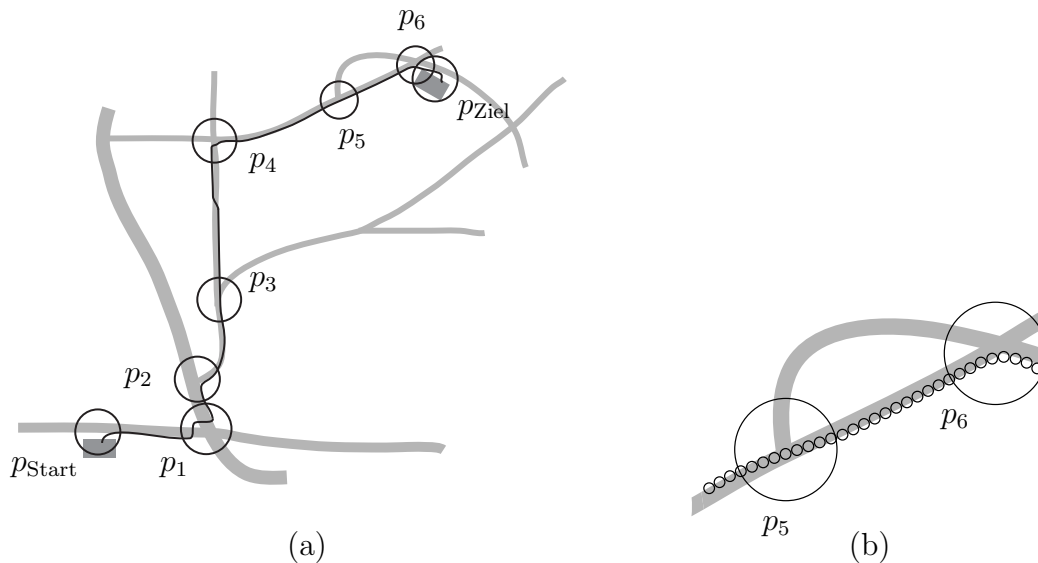


Abbildung 6.11.: Eine Route wird durch eine Routeninstruktion als Sequenz von Entscheidungspunkten/-orten (a) beschrieben. In einer detaillierten Sicht (b) auf ein konkretes Ablaufen der Route können Entscheidungs-orte als Kontextorte von konkreten Positionen eines der Routeninstruktion folgenden Agenten aufgefasst werden.

vorgestellten Klassifikation als lineares Objekt angesehen werden kann, und zu erörtern, inwiefern Entscheidungspunkte punktuell sind.

Die Route kann sprachlich beschrieben werden, indem die Entscheidungspunkte auf dem Weg, und die dort benötigten Handlungen sprachlich charakterisiert werden (s. Abschnitt 1.1.1). Abbildung 6.11 zeigt ein Beispiel: das Ablaufen einer Route besteht aus vielen einzelnen Schritten. Die exakten Positionen eines die Route ablaufenden Agenten sind aber für die Routeninstruktion irrelevant. Entscheidungen auf der Ebene der Instruktion betreffen eine gröbere Granularitätsebene. Bei einer gröberen Granularität, auf der externe Orte des Agenten, d.h. seine Positionen in der Terminologie aus Kap. 5, zu einzelnen Zeitpunkten kleiner als die Granulatsgröße sind, ist die abgelaufene Route, als Sequenz dieser externen Orte verstanden, zusammengenommen ein lineares Objekt: die tatsächliche abgelaufene Trajektorie. Die in der Routeninstruktion beschriebene Trajektorie muss aber auf einer gröberen Granularität angesiedelt sein, wenn auch abweichende Trajektorien, die die Sequenz der Entscheidungsorte einhalten, als Ablaufen *derselben Route* gelten sollen. Abbildung 6.12 zeigt, wie die Beziehung zwischen der Trajektorie auf der gröberen Ebene und zwei tatsächlich abgelaufenen Trajektorien einer feineren Granularitätsebene modelliert werden kann. Es gibt in Abb. 6.12 zahlreiche mögliche Wege von einer Kreuzung zur nächsten. Diese Unterschiede sind allerdings irrelevant auf der gröberen Ebene: Welche Straßenseite ein der Route folgender Agent wählt ist z.B.

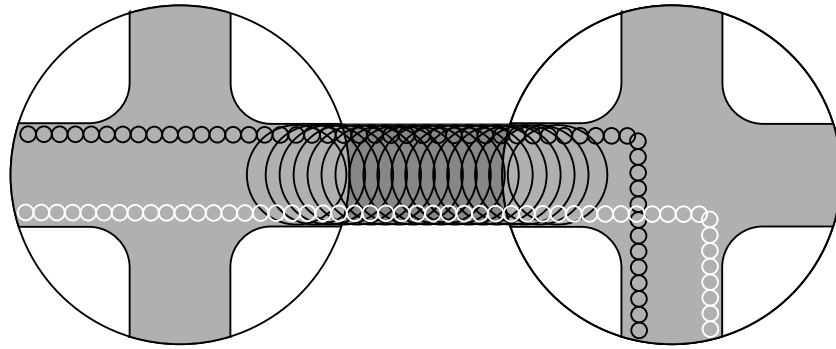


Abbildung 6.12.: Zwei Sequenzen von tatsächlich abgelaufenen Routen (weiß und schwarz), die zu derselben Route auf größerer Ebene gehören. Der begehbare Raum ist grau schattiert dargestellt.

in vielen Fällen, wie dem in Abb. 6.12 dargestellten, irrelevant. Die größeren Orte, die zwischen den beiden Kreuzungen liegen und interne Orte der Straße sind, sind – wie die kleineren Orte der tatsächlich abgelaufenen Route – externe Orte des sich bewegenden Agenten. Auf einer noch größeren Granularitätsebene, auf der die Kreuzungen punktuelle Objekte, also kleiner als die Granulatsgröße sind, sind diese größeren externen Orte des sich bewegenden Agenten ebenfalls kleiner als die Granulatsgröße. Auch die vergrößerte Trajektorie aus Abb. 6.12 ist daher auf der größten Ebene ein lineares Objekt.

Anzumerken ist, dass im Beispiel für die Entscheidungsorte eine feste Größe festgelegt ist, diese Vereinfachung dient allein der Übersichtlichkeit. In der Realität ist die Region der Kontextorte, die eine Route bestimmen, und die wir bei jedem Ablaufen wiedererkennen und in Routenbeschreibungen charakterisieren, von einer Vielzahl von Parametern abhängig, wie z.B. dem Bereich der Sichtbarkeit salienter Landmarken (vgl. Winter [118]).



## 7. Innere Struktur von Objekten: Substanz und Form

Zentrale Frage dieses Kapitels ist die Frage, welche Beziehungen zwischen den Lokationen substantieller Teile auf feinerer Granularität und der Region eines Objektes auf gröberer Granularität bestehen. Es geht also um den Übergang zwischen der Granularitätsschicht der Form und der der Substanz eines Objektes.

Für die Repräsentation von Objekten ist es nützlich repräsentieren zu können, bei welcher Granularität im Kontext ein bestimmtes Objekt einer Kategorie zu repräsentieren ist, und ab welcher verfeinerten Granularität nicht mehr das Objekt, sondern die es *konstituierenden* Teilobjekte einer anderen Kategorie zu repräsentieren sind. Die entsprechenden Kategorien können in einer Hierarchie angeordnet und bestimmten Granularitätsebenen zugeordnet werden. Vgl. hierzu auch die Erläuterungen in Abschnitt 1.2.2 zu Galtons [40] Begriff der intrinsischen Granularität.

Für eine Analyse dieses Übergangsbereiches zwischen Form- und Substanzschicht ist es besonders wichtig, die Rolle sehr kleiner Konstituenten genau zu betrachten. Diese scheinen in vielen Fällen für die Objektregion irrelevant zu sein: einen Baum zu fällen verändert eine Waldregion in den meisten Fällen wohl nicht wesentlich; entfernt man bei einem Haus einige Ziegel, etwa um ein Fenster zu vergrößern, so ist diese Veränderung wohl auch in den meisten Fällen nicht wesentlich. Zumindest ist es auch nach der Veränderung noch angebracht, das jeweilige Objekt noch als dasselbe Objekt auszuweisen. Anders ist dies, wenn große Teile aber auch wenn kritische, zur Form beitragende Konstituenten entfernt werden. Aber auch beim sukzessiven Entfernen unkritischer Konstituenten muss es eine Schwelle geben, ab der eine wesentliche, relevante Veränderung bemerkt wird. Dieses in der Philosophie als Sorites-Vagheit bekannte Phänomen wurde in Abschnitt 1.2.2 bereits eingeführt.

Es kann nun gezeigt werden, wie das vorgestellte formale Gerüst genutzt werden kann, um die beschriebenen Phänomene der Vagheit zu analysieren. Es wird dazu zunächst das Konzept des *granularen Kerns* vorgestellt, mit dem es möglich ist, abhängig von einer gegebenen Granularität, die Regionen von Objekten aus den Regionen ihrer Konstituenten zu bestimmen. Ein vages Konzept von Objektidentität über Veränderungen hinweg kann darauf aufbauend formal als Ununterscheidbarkeitsrelation modelliert werden. Die Adäquatheit dieser Modellierung wird dann anhand eines größeren Beispiels behandelt: Wälder – verstanden als Aggregationen von Bäumen – zeigen die oben beschriebene Form von Vagheit und wurden daher z.B. von Bennett [7] als prototypische Vertreter vager geographischer Objekte genau studiert.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Der Begriff der Aggregation wird in dieser Arbeit allein im Sinne räumlicher Aggregation verstan-

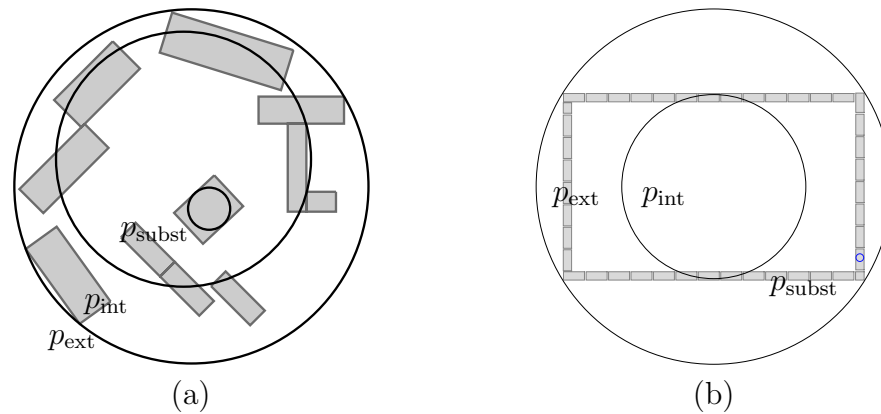


Abbildung 7.1.: Substanzschichten verschiedener Objekte: Die Substanzschicht der Siedlung (a) bilden die Häuser, die Substanzschicht eines Hauses (b) wiederum bilden die Ziegel.

## 7.1. Konstituenten

Im Zusammenhang mit der Einführung der Granularitätsschichten der Objekte in Kap. 5 waren in den Beispielen stets bestimmte Teile eines Objektes als substantielle Konstituenten angenommen worden (vgl. Abb. 7.1). Die Ziegel stellen die Substanz des Hauses dar, die Häuser wiederum die der Siedlung. Die enthaltenen Orte der Substanzschicht eines Objektes konnten so von den umschlossenen Orten der Formschicht unterschieden werden. Diese Vereinfachung hat allerdings den Nachteil, dass die Teilobjekte in der Substanzschicht, d.h. die Konstituenten des Gesamtobjektes stets gewissermaßen als massiv angenommen werden müssen, damit die substantielle Ausdehnung des Gesamtobjektes nicht von den kleinsten Teilen der Teile abhängt. Im Beispiel der Siedlung sollte die substantielle Ausdehnung von der Ausdehnung der Häuser abhängen, nicht etwa von der der Ziegel, oder – im Extremfall – der Moleküle oder Atome der Ziegel. Dies kann vermieden werden, wenn statt der substantiellen Ausdehnung der Konstituenten ihre interne Ausdehnung als charakteristische Ausdehnung für die Bestimmung der Substanzschicht des konstituierten Gesamtobjektes betrachtet wird. Damit ist allerdings die Bestimmung der Substanzschicht einer abgebildeten Objektregion keine rein geometrische Aufgabe mehr. Vielmehr muss hierzu eine Hierarchie von Konstituenten angenommen werden. Die Substanzschicht eines Objektes soll dann statt von substantiellen Orten von den internen Orten seiner Konstituenten abhängen. Dabei möchten wir natürlich nicht erst die Ziegel, dann die Mauer und schließlich das Haus identifizieren, vielmehr soll der Sand der Ziegel, den wir erkennen können, uns das Haus liefern, wenn wir das Gesamtobjekt *auf einer*

---

den. Er meint hier ein Objekt, das als – meist unstrukturierte – Ansammlung anderer räumlicher Objekte in Erscheinung tritt. Eine Verbindung zum Begriff der Aggregation, wie er im Bereich objekt-orientierter Datenbanken verwendet wird, existiert im Bereich der Daten-Visualisierung, da die Eigenschaften räumlicher Aggregationen eventuell bedacht werden müssen, wenn eine angemessene Visualisierung angestrebt wird. Vgl. auch Montello, Fabrikant, Ruocco und Middleton [76] zu Aspekten der Gruppierung in der Daten-Visualisierung.

*bestimmten Granularität* betrachten, ohne den Umweg über die ganze Hierarchie. Dass dies in vielen Fällen möglich ist, liegt an dem Phänomen der intrinsischen Granularität (Galton [40, S. 29f], s. hierzu auch die Erläuterungen in Abschnitt 1.2.2): Objekte weisen nur auf bestimmten Granularitätsebenen eine signifikante Struktur auf; nur auf diesen Ebenen sind individuierbare Objekte erkennbar.

Ausgehend von dieser Voraussetzung soll hier nun zunächst eine mögliche Hierarchie von Konstituenten für die oben erwähnten Beispiele Haus, Siedlung und Wald skizziert werden. Es ist dann möglich, eine granularitätsabhängige Definition der Region eines Objektes einer bestimmten Kategorie zu geben.

Für die hier charakterisierten einfachen materiellen Objekte soll angenommen werden, dass sich ein materielles Objekt einer Kategorie stets aus Objekten anderer Kategorien zusammensetzt. Wir können somit entscheiden, ob ein Objekt einer bestimmten Kategorie vorliegt, wenn wir Bestandteile anderer Kategorien in der richtigen Anordnung vorfinden. Eine Mauer z.B. besteht aus Ziegelsteinen, die in einer bestimmten, geeigneten Art übereinander gelegt sind, so dass sich eine längliche, lineare Struktur ergibt. Könnten wir also die Ziegel identifizieren, so ließe sich das Objekt Mauer daraus ableiten. Nehmen wir nun an, ein Haus sei vor allem von den Mauern bestimmt.<sup>2</sup> Auf den Aspekt der Anordnung soll hier nicht näher eingegangen werden. Das Hauptaugenmerk der Untersuchung liegt entsprechend auf unstrukturierten Aggregationen wie Wäldern und Baumgruppen. Bei diesen Objekten bestimmt allein die Nähe der Konstituenten die Zusammengehörigkeit des Gesamtobjektes. Abbildung 7.2 zeigt für die Beispiele eine einfache Konstituentenhierarchie im Überblick: Wälder, die als unstrukturierte Aggregationen von Bäumen betrachtet werden. Bäume wiederum werden als bestehend aus Stamm, Ästen, Zweigen und Blättern betrachtet. Stamm,<sup>3</sup> Äste und Zweige sollen vereinfacht aus Holzfasern bestehen. Blätter und Holzfasern sollen als Basisbausteine dienen. Entsprechend sollen die Ziegel der Mauer als aus kleinen Steinen oder Sandkörnern bestehend gedacht sein.

Die Konstituentenhierarchie allein legt noch keine Granularitätsebenen im hier charakterisierten Sinne von räumlicher Ausgedehtheit fest. Dies zeigt sich z.B. daran, dass im Beispiel Ast und Zweig beide als direkte Konstituenten der Baumkrone bestimmt wurden, obwohl Zweige ja gerade kleine Äste sind. Das Blatt wurde lediglich deshalb auf der untersten Ebene angesiedelt, weil es als Basisbaustein vorausgesetzt wird. Es muss also noch eine Beziehung zu Ausdehnung und Größe festgelegt werden.

Für eine Verwendung der im folgenden spezifizierten Konzepte in einem granularen Wissensrepräsentationssystem müsste eine entsprechende Konstituentenhierarchie für die grundlegenden in der Domäne wichtigen Objektkategorien modelliert oder z.B. aus einer bereits vorliegenden Partonomie abgeleitet werden. Im Unterschied zu einer Partonomie müssen hier aber nicht alle Objektkategorien eingetragen werden. Eine Lichtung z.B. ist ein Teil eines Waldes, aber keine Konstituente des Waldes (s. Abschnitt 7.4).

<sup>2</sup>Das trifft zumindest auf die hier analysierten zweidimensionalen Häuser zu. Reale Häuser haben zu meist auch ein Dach. Die Überlegungen lassen sich aber wiederum einfach auf den dreidimensionalen Fall übertragen.

<sup>3</sup>Auch bezüglich der Bäume wird wiederum nur die zweidimensionale Aufsicht betrachtet, obwohl damit die Hauptausdehnungsrichtung der Bäume vernachlässigt wird.

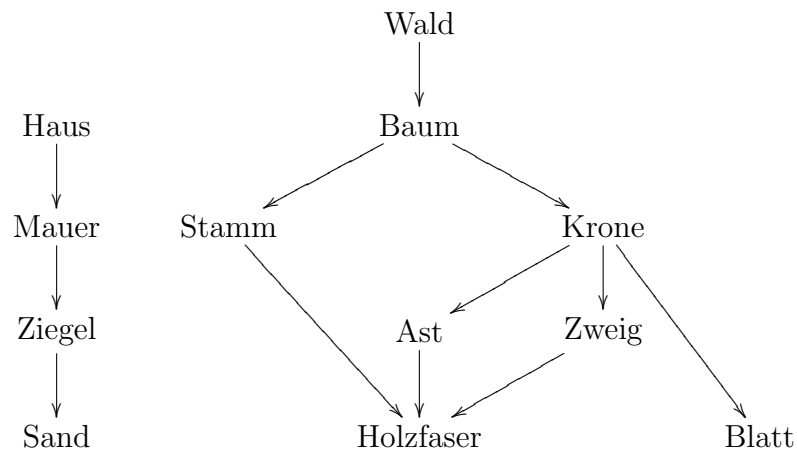


Abbildung 7.2.: Ausschnitt einer einfachen Konstituentenhierarchie.

### Sichtweisen auf die Substanzschicht

In Kap. 5 wurde die Substanzschicht an der substantiellen Ausdehnung einer Region festgemacht. In diesem Kapitel wird gemäß den obigen Überlegungen die Substanzschicht hingegen an der Konstituentenhierarchie festgemacht, die substantielle Ausdehnung also nicht mehr benötigt. Es ergeben sich nun zwei Sichtweisen auf die substantielle Ausdehnung:

**Repräsentationsperspektive** In Abbildungen sind die Granularitätsebenen der Substanzschicht die feinsten Granularitätsebenen des Objektes, auf denen es repräsentiert ist. Die Substanzschicht in einer Abbildung wird durch die gefüllten Formen vorgegeben oder, wenn ein lineares Objekt dargestellt wird, von der Dicke der Linie. Die zur Substanzschicht gehörenden Granularitäten lassen sich anhand der substantiellen Ausdehnung bestimmen.

**Wahrnehmungsperspektive** In der Wahrnehmung von Objekten der Welt ist die Substanzschicht durch die Granulatsgröße des Wahrnehmungsprozesses bestimmt. Diese wird (a) von der Auflösung des Wahrnehmungssystems beschränkt, (b) aber auch von den gesuchten oder den im Kontext aktiven Objektkonzepten beeinflusst. Die zur Substanzschicht gehörenden Granularitäten lassen sich hier für den Fall (a) direkt aus der Auflösung oder der Größe einer Rasterzelle (oder in der Terminologie von Kosslyn: der Größe eines *grains*) bestimmen, oder im Fall (b) anhand der internen Ausdehnung derjenigen Objekte bestimmen, die als Konstituenten eines Objektes erkannt werden.

Beide Perspektiven zusammengenommen können verwendet werden, um Kriterien für die Adäquatheit einer Repräsentation formal zu spezifizieren: In dem Grundriss eines Hauses können z.B. die Mauern als Linien dargestellt werden. In der Abbildung sind dann die substantiellen Orte der Mauern als die Substanzschicht des abgebildeten Objektes ab-

lesbar. Die Ziegel sind in dieser Abbildung allein als Substanz des Hauses repräsentiert.<sup>4</sup> Die Abbildung ist eine Abbildung des Hauses, aber keine Abbildung der Ziegel. Die substantielle Ausdehnung gibt somit ein Kriterium, um die Skalierbarkeit einer Repräsentation automatisch beschränken und ihr einen granularen Gültigkeitsbereich zuweisen zu können. Dies könnte z.B. für das Problem der Automatisierung der Generalisierung in kartographischen Anwendungen (s. Frank und Timpf [36]) nützlich sein.

## 7.2. Die granulare Kernregion

Betrachtet man nun die Granulatsorte einer im Kontext gegebenen Granularität, die von einem Objekt einer bestimmten Kategorie umschlossen werden, so ist es möglich eine Abschätzung zu erhalten, ob auf dieser Granularität tatsächlich das Objekt oder die es konstituierenden Teilobjekte einer anderen Kategorie zu repräsentieren sind. Die Region, die von den internen Orten eines Objektes auf einer bestimmten Granularität eingenommen wird, soll im folgenden als *lokaler granularer Kern LGK* des Objektes bezeichnet werden. Die Punkte dieser Region können folgendermaßen bestimmt werden:<sup>5</sup> Ein Punkt  $P$  liegt im lokalen granularen Kern einer Region  $A$  auf einer Granularität  $\gamma$  genau dann, wenn es einen Granulatsort  $p$  von  $\gamma$  und einen Kontextort  $p_k$  von  $p$  gibt, so dass  $P$  in  $p$  liegt, und  $p$  in  $p_k$  von  $A$  umschlossen ist (D48). Auch eine globale Variante dieser Definition lässt sich ableiten (D49):  $P$  liegt im globalen granularen Kern einer Region  $A$  auf einer Granularität  $\gamma$  genau dann, wenn es einen Granulatsort  $p$  von  $\gamma$  gibt, so dass  $P$  in  $p$  liegt und  $p$  global von  $A$  umschlossen ist.

$$\text{LGK}(A, P, \gamma) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists p, p_k : \text{grn}(\gamma, p) \wedge P \iota p \wedge \text{int}(p_k, p, A) \quad (\text{D48})$$

$$\text{GGK}(A, P, \gamma) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists p : \text{grn}(\gamma, p) \wedge P \iota p \wedge \text{int}(p, A) \quad (\text{D49})$$

In Abb. 7.3(b) ist der lokale granulare Kern für zwei Granularitätsebenen des Hauses dargestellt. Abbildung 7.3(b) wurde mit dem in Abschnitt A.2 beschriebenen approximativen Algorithmus berechnet. Das Bild in Abb. 7.3(a), welches genau genommen nur die Umrisse der Ziegel des Hauses zeigt, wurde hierzu auf den in Abb. 7.3(c) skizzierten Granularitätsebenen nach lokal umschlossenen Orten durchsucht. Die dunklere Schattierung zeigt die Punkte, die zu Orten einer sehr feinen Ebene gefunden wurden; die hellere Schattierung zeigt Punkte von Orten einer gröberen Ebene.<sup>6</sup> Zu beachten ist, dass hier

<sup>4</sup>Zum Begriff der Substanz vgl. auch Hobbs [53].

<sup>5</sup>Es wurde in Abschnitt 2.3 nicht garantiert, dass eine solche Kernregion, in der genau die so bestimmten Punkte liegen, in derselben Weise existiert wie die Objektregion  $A$ . Die Definition (D48) ist daher als Relation zwischen Punkten, Objektregionen und Granularitäten definiert.

<sup>6</sup>Für die Beispiele wurde in Ermangelung empirisch validierter Kriterien und aufgrund der in Abschnitt 5.1 erwähnten Beschränkungen eine sehr einfache Granularitätenstruktur gewählt: eine Granularität mit Granulatsgröße  $x$  erhält hier stets die maximale Ausdehnung  $5*x$  (vgl. auch das Beispiel in Abschnitt 3.4.1). Für die hier verwendeten Kreise als Orte  $p$  ergibt sich folgende Spezifikation der Granularitäten in Abhängigkeit vom Durchmesser  $d(p)$  von  $p$ :

$$\forall p, p' : [\exists \gamma : \text{grn}(\gamma, p) \wedge \text{ktx}(\gamma, p')] \leftrightarrow d(p') = d(p) * 5$$

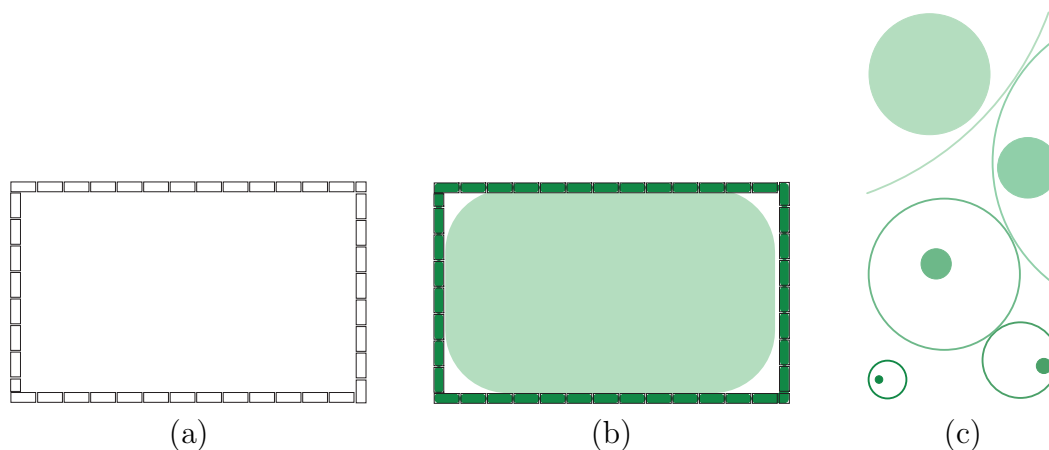


Abbildung 7.3.: Der lokale granulare Kern (*LGK*) für ein Haus, nachdem wenige Ziegel entnommen wurden. Die verschiedenen schattierten Regionen in (b) stellen Approximationen des *LGK* für verschiedene Granularitäten dar und wurden aus den Eingabedaten in (a) berechnet. Die verwendeten Granularitäten sind in (c) dargestellt, jeweils repräsentiert durch einen Ort der Granulatsgröße (gefüllt dargestellt) und einen Ort der Kontextgröße (als Umriss dargestellt, für sehr große Kontextorte im Ausschnitt). Dunklere Schattierungen entsprechen einer feineren Granularität.

mehr als zwei Ebenen geprüft wurden (s. Abb. 7.3(c)), aber nur die zwei dargestellten Ebenen umschlossene Orte aufweisen. Unterhalb der hell schattierten Ebene finden sich in der modellierten Granularitätsstruktur erst auf der Ebene der Ziegel wieder umschlossene Orte. Dieses Beispiel legt nahe, dass die interne Ausdehnung tatsächlich Aspekte der Granularitätsschicht der Form bestimmt, auf der Objektindividuation stattfindet. Dies verwundert insofern nicht, als die Orte einer Granularität ja gerade ein Kriterium für Nähe oder kurze Distanz charakterisieren (s.a. Abschnitt 6.2). Distanz wird auch in der Forschung zu Gruppierungsmechanismen in der Objekterkennung genutzt. Dies soll im folgenden näher betrachtet werden.

Wie Konstituenten sich abhängig von räumlicher Nähe zu Aggregationen gruppieren lassen, kann mit Cluster-Analyse-Techniken der statistischen Musterklassifikation quantitativ analysiert werden. Han, Kamber und Tung [48] klassifizieren räumliche Clustering-Techniken, die besonders für das Data-Mining in der geographischen Domäne geeignet sind. Besonders die dichte-basierten (*density-based*) Algorithmen (DBSCAN, OPTICS, DENCLUE) sind nach [48] nützlich, um solche für das menschliche Auge natürliche Cluster-Regionen gleichförmiger Dichte aber beliebiger Form zu finden. Die dichte-basierten Clustering-Mechanismen nutzen die Eigenschaft lokaler Dichte und Nähe, die auch durch die Relation *int* beschrieben wird. DBSCAN erhält der Darstellung [48] zufolge als Parameter einen Radius  $\epsilon$  und eine Anzahl *MinPts* und prüft dann für jeden einzelnen Punkt in der Datenbank, ob die Anzahl der Punkte in seiner  $\epsilon$ -Umgebung mehr als *MinPts* beträgt. Ist dies der Fall, so wird der Punkt als *core object* bezeichnet und

bildet das Zentrum eines neuen Clusters, das durch die Punkte in der  $\epsilon$ -Umgebung des *core object* bestimmt wird. Liegt ein *core object* in der  $\epsilon$ -Umgebung eines anderen, so gehören sie nach der Konzeption des dichte-basierten Clustering zu demselben Cluster. Der Algorithmus bestimmt nun sukzessive maximale Cluster.

Diese Konzeption ist eng verwandt mit der von Bennett [7] vorgeschlagenen ebenfalls auf Dichte und maximalen Zusammenhangskomponenten aufbauenden Konzeption für das Schließen über die Regionen von Wäldern. Auch Bennett geht von Kreisscheiben einer von der Granularität abhängigen Größe aus. Zwischen Bennetts Konzeption wie auch der der  $\epsilon$ -Umgebung und der hier verwendeten Konzeption des Ortes gibt es ebenfalls Ähnlichkeiten (s. Abschnitt 4.3). Unterschiede zwischen einem nach obiger Methode erzeugten Cluster und dem *LGK* bestehen vor allem darin, dass für den *LGK* nicht nur Objektpunkte sondern (theoretisch) alle Granulatsorte des Raums betrachtet werden.<sup>7</sup> Ein wichtigerer Unterschied ist allerdings, dass für den *LGK* nicht eine bestimmte Anzahl von Objektpunkten in der Umgebung wichtig ist, sondern ob die Konstituenten in der Umgebung dicht genug nebeneinander stehen, damit die Relation *int* gilt. Die Konstituenten in der Umgebung müssen für den *LGK* zudem nicht durch Punkte repräsentiert sein, können also auch durch andere geometrische Entitäten repräsentiert sein. Der Verzicht auf Zählbarkeit der Konstituenten hat den Vorteil, dass die Bestimmung des *LGK* für ein Objekt von der Objektindividuierung auf der feineren Ebene der Konstituenten des Objektes unabhängig ist. Für das Beispiel der Siedlung bedeutet dies, dass der *LGK* der Siedlung auf Basis der Lokation von Ziegeln vorgenommen werden kann, ohne dass zunächst die Regionen der Häuser bestimmt werden müssten.

Ein etwas realistischeres Beispiel ist die Bestimmung der groben Region einer Siedlung aus einem geeignet vorverarbeiteten Rasterbild (vgl. Heipke und Straub [49]). Angenommen, die Pixel sind durch eine Analyse als zu einer versiegelten oder nicht versiegelten Region gehörend klassifiziert worden. Dann korrespondiert – unter einer idealisierten Sichtweise, unter der Faktoren wie Verdeckung und perspektivische Verzerrung außer Acht gelassen werden – jedes Pixel zu einem Ort oder einer Region in der Welt, die entweder versiegelt oder nicht versiegelt ist. Die bebauten Orte oder Regionen, auf die die versiegelten Orte oder Regionen einen Hinweis geben, können ähnlich wie die Ziegel im obigen Beispiel als mögliche Konstituenten der Siedlung betrachtet werden. Der *LGK* der gesamten versiegelten Region kann dann – eine geeignete Granularität für das Konzept der Siedlung vorausgesetzt – in derselben Weise wie im Beispiel der Ziegel berechnet werden.

Auch Gestaltprinzipien [117] sind wichtig für die Frage, welche Objekte mögliche Konstituenten eines größeren Ganzen sind. Das Prinzip der Nähe und das der Gleichheit sind hier zu beachten. Die Konstituenten gehören in den hier gezeigten Beispielen stets zu derselben Kategorie, komplexere Beispiele, in denen ein Objekt durch einen bestimmten Aufbau charakterisiert wird, werden hier nicht behandelt.<sup>8</sup> Das Gestaltprinzip der Nähe kann durch den *LGK* – für einfache Beispiele mit sehr klarer Struktur – formal spezifi-

<sup>7</sup>In dem in Abschnitt A.2 dargestellten Algorithmus wird hierzu ein geeigneter Ausschnitt des Raums in einem möglichst engen Raster abgetastet.

<sup>8</sup>Die Konstituenten eines Kraftfahrzeugs z.B. müssen eine bestimmte räumliche Anordnung haben, damit das Objekt als Kraftfahrzeug bezeichnet werden kann.

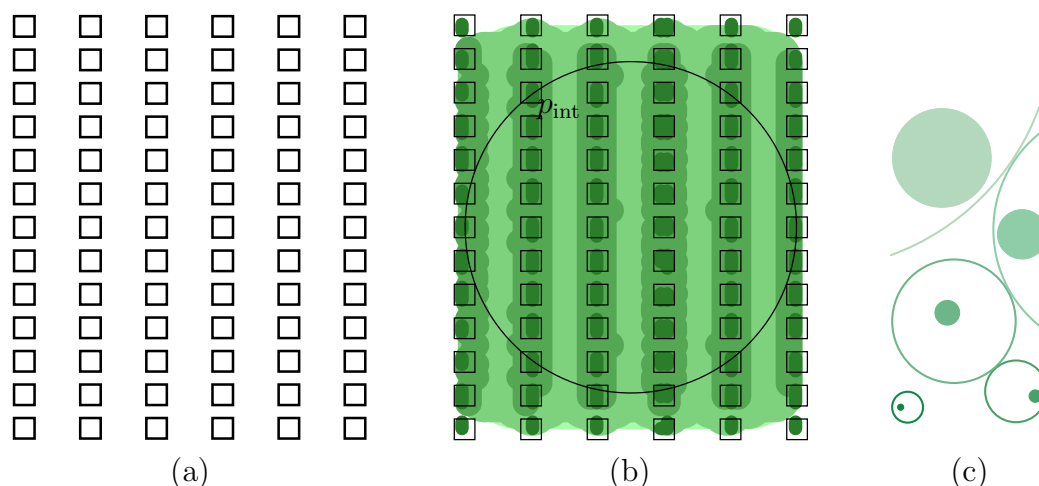


Abbildung 7.4.: Der lokale granulare projektive Kern (*LGK*) stellt ein gutes Beschreibungsmittel für das Gestaltprinzip der Nähe dar. Die verschiedenen schattierten Regionen in (b) stellen Approximationen des *LGK* für verschiedene Granularitäten dar und wurden aus den Eingabedaten in (a) errechnet. Die verwendeten Granularitäten sind in (c) dargestellt, jeweils repräsentiert durch einen Ort der Granulatsgröße (gefüllt dargestellt) und einen Ort der Kontextgröße (als Umriss dargestellt).

ziert werden. Es besagt, dass in einer Anordnung solche Objekte gruppiert werden, die nahe beieinander liegen.

Die Adäquatheit des granularen Kerns als Gruppierungskriterium für das Gestaltprinzip der Nähe lässt sich anhand von Abb. 7.4 zeigen, wenn man die Zusammenhangskomponenten des *LGK* betrachtet. Auf der feinsten Ebene ist die Anordnung eine Ansammlung einzelner Quadrate, auf der Ebene darüber finden wir eine Reihe senkrechter Balken, auf der größten Granularität ergibt sich eine fast rechteckige Gesamtform. Bei zunehmendem Abstand zerfällt allerdings das erkannte Muster (Abb. 7.5).

Eine Sonderstellung nehmen diejenigen Konstituenten und umschlossenen Orte einer Region  $A$  ein, die *am Rand* von  $A$  liegen. Die Konstituenten von  $A$ , die oben und unten am Rand in Abb. 7.4(b) liegen, umschließen ihre internen Orte und sie sind auch wichtig dafür, dass die Orte größerer Granularität im Inneren umschlossen sind; sie selbst gehören aber nicht zum *LGK* auf den größeren Ebenen. Dies ist ein Phänomen, das besonders im Zusammenhang mit Aggregationen (s. Abschnitt 7.4) – und nicht so sehr bei strukturierten Objekten wie dem Haus – auftritt.

Einen qualitativen Ansatz zur Formerkennung, der ähnlich wie der hier vorgestellte, auf einer Geometrie kreisförmiger Regionen beruht, präsentieren Dugat, Gambarotto und Larvor in [24]. Sie formulieren einen Mittelachsen-Ansatz zur Formrepräsentation (für einen Überblick vgl. [85]) in einer an Borgo, Guarino und Masolo [13] anschließenden mereotopologischen Geometrie. Im Gegensatz dazu zielt der hier präsentierte Ansatz darauf ab, räumliche Regionen zu finden, die überhaupt Basis für eine Form sein



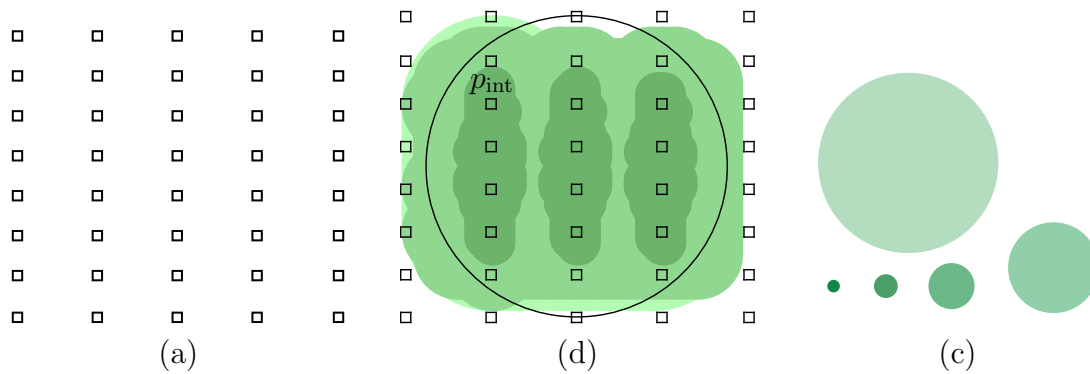


Abbildung 7.5.: Bei zunehmendem Abstand zerfällt das erkannte Muster gegenüber Abb. 7.4. Hier wurde der *GGK* berechnet, um möglichst viel der Struktur einzubeziehen. Die verwendeten Granularitäten sind in (c) dargestellt, jeweils repräsentiert durch einen Ort der Granulatsgröße (gefüllt dargestellt).

können, welche dann erkannt und repräsentiert werden könnte, wie in [24] beschrieben. Eingabe des verwendeten approximativen Algorithmus zur Berechnung des *LGK* ist eine unstrukturierte Ansammlung etwa von Strecken oder Punkten, die mögliche Konstituenten repräsentieren; Ausgabe ist eine eventuell unzusammenhängende Region, aus der erst in einem weiteren Schritt die maximal zusammenhängende Teilregion als die Region der Aggregation ausgewählt werden könnte, wobei dieser letzte Schritt allerdings nicht in dieser Arbeit behandelt wird.

### 7.3. Veränderung und Identität

Folgt man der Argumentation von Galton [40] und nimmt eine zu den Objektkonzepten gehörende intrinsische Granularität an, auf der allein sich individuierbare Objekte zeigen, so sollte unter der in Kap. 5 aufgestellten Annahme, dass die Granularitätsschicht der Form durch die internen Ausdehnungen bestimmt wird, folgen, dass auch Phänomene granularitätsabhängiger Vagheit im Konzept der Objektidentität über die Zeit mit Hilfe des *LGK* beschreibbar sein müssten. In diesem Abschnitt soll kurz skizziert werden, wie eine Relation vager Objektidentität über die Zeit als Ununterscheidbarkeitsrelation modelliert werden kann, die auf dem oben beschriebenen Formalismus zur granularitätsabhängigen Objektindividuation aufsetzt.

Eine ontologisch wichtige und schwierige Frage ist, ob der Verlust oder Austausch von Konstituenten für die Objektidentität kritisch ist.<sup>9</sup> Der hier vorgestellte Entwurf folgt der Konzeption von Gabbay und Moravcsik [38]. Nach [38] kann die Objektidentität über die Zeit auf sog. *Persistenzkriterien* zurückgeführt werden, mit Hilfe derer wir Objekte perzeptuell mit früher wahrgenommenen Objekten *identifizieren*. Ist die Materie oder

<sup>9</sup>Für einen Überblick über die philosophische Diskussion zum Thema der Identität über die Zeit s. Noonan [78].

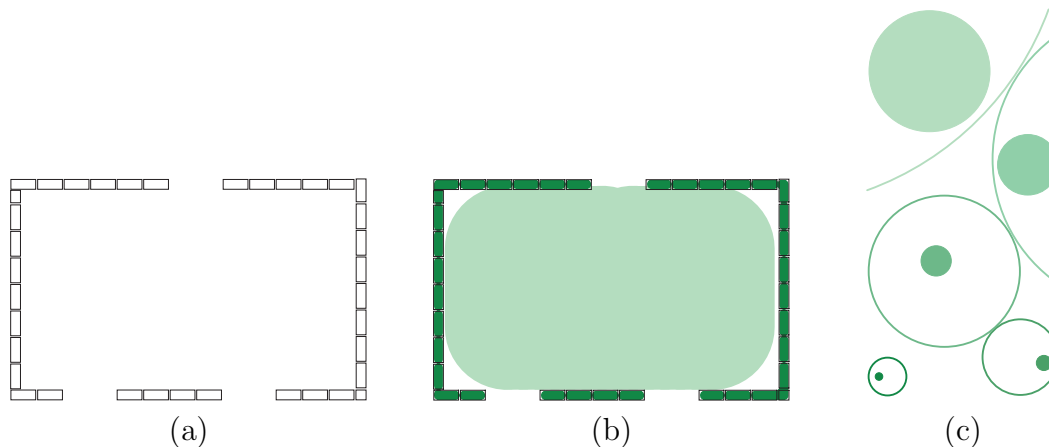


Abbildung 7.6.: Wenn nur wenige Ziegel entnommen werden, unterscheidet sich der lokale granulare Kern (*LGK*) des Hauses nicht wesentlich von dem des Hauses in Abb. 7.3. Die verwendeten Granularitäten sind in (c) dargestellt, jeweils repräsentiert durch einen Ort der Granulatsgröße (gefüllt dargestellt) und einen Ort der Kontextgröße (als Umriss dargestellt).

Substanz das ausschlaggebende Persistenzkriterium, so müsste gelten, dass die Ziegel, die die Mauern eines Hauses konstituieren, auch das Haus konstituieren und so seine Identifikation bestimmen. Für eine am Allgemeinverstand orientierte Konzeption von Identität über die Zeit müssen aber offenbar Granularitätsebenen beachtet werden: Die Ziegel konstituieren das Haus, nicht aber die Siedlung. Vom Standpunkt der Identität von Objekten gesehen, sollte der Verlust einiger Partikel eines Ziegels keine Veränderung des Hauses oder gar der Siedlung darstellen. Biologische Organismen wie Tiere und Menschen, aber auch die im nächsten Abschnitt behandelten Wälder, besitzen eine Identität über die Zeit, obwohl durch den Stoffwechsel ein ständiger Austausch von Teilen stattfindet.

Beim Vergleich von Abb. 7.3 und Abb. 7.6 sehen wir, dass die *LGK*-Regionen der beiden Objekte hauptsächlich auf der Ebene der Ziegel und Mauern differieren. An den Lücken geht nur eine kleine Fläche verloren. Mit Hilfe der Relation  $\sqsubset$  (D33) lassen sich relevante von irrelevanten Änderungen unterscheiden (vgl. Abschnitt 5.3). Die skizzierten Häuser differieren zwar erheblich auf der Substanzebene, nicht aber auf der Formebene. Die Unterschiede auf der Formebene sieht man nur bei genauerer Betrachtung, weil die Orte, die in Abb. 7.3 aber nicht in Abb. 7.6 zum *LGK* gehören, stets ununterscheidbar (Relation  $\sqsubset$ ) zu Orten aus Abb. 7.6 sind und umgekehrt. Dies soll spezifiziert werden durch eine Relation  $\subset$  (D50): Eine Region  $A$  ist *sublokalisiert* in einer Region  $B$  auf einer Granularität  $\gamma$  genau dann, wenn jeder Ort der Granulatsgröße von  $\gamma$ , der von  $A$  lokal granular umschlossen wird, granular ununterscheidbar ist von einem Ort, der von  $B$  lokal granular umschlossen ist. Entsprechend können zwei Regionen  $A$  und  $B$  auf einer Granularität  $\gamma$  *äquilokalisiert*  $\simeq$  genannt werden genau dann, wenn  $A$  sublokalisiert in  $B$  und  $B$  sublokalisiert in  $A$  ist (D51). Es muss also zu jedem Ort  $p$ , der im *LGK* einer

der beiden Regionen liegt, einen korrespondierenden Ort  $p'$  im LGK der anderen Region geben, der sich nur wenig von  $p$  unterscheidet.

$$A \subset_{\gamma} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall p_A : \text{grn}(p_A, \gamma) \wedge [\exists p_k : \text{int}(p_k, p_A, A)] \rightarrow \quad (\text{D50})$$

$$\exists p_B : \text{grn}(p_B, \gamma) \wedge [\exists p_k : \text{int}(p_k, p_B, B)] \wedge p_A \sqsubset p_B$$

$$A \simeq_{\gamma} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset_{\gamma} B \wedge B \subset_{\gamma} A \quad (\text{D51})$$

Im Beispiel gilt nun für die Granularitätsebene  $\gamma_1$  der dunkel schattierten Orte, die von den Ziegeln des Hauses umschlossen sind, dass für das Objekt  $H'$  in Abb. 7.6 einige Orte keine korrespondierenden Orte in dem Objekt  $H$  in Abb. 7.3 haben. Zu jedem Ort der durch hellere Schattierung angedeuteten Granularitätsebene  $\gamma_2$  sind die Kriterien für Äquivalenz gegeben. Es gilt demnach:

$$\neg H \simeq_{\gamma_1} H'$$

$$H \simeq_{\gamma_2} H'$$

Ist  $H'$  also durch Umbau aus  $H$  hervorgegangen, so könnte ein Beobachter feststellen,  $H$  habe sich verändert. Erst bei einer Änderung, die sich auch auf  $\gamma_2$  zeigt, ließe sich die Identität von  $H$  anzweifeln. Es lässt sich feststellen, dass die Ziegel für das Haus zwar konstituierend sind, die Identität des Hauses aber nicht von einzelnen Ziegeln, sondern von der Gesamtheit, d.h. von einer ausreichenden Menge an Ziegeln abhängig ist. Wenn man dieses Argument zuspitzt, bedeutet dies: Wichtig für Veränderung ist die umschlossene Region, nicht die umschließende Substanz. Die Granularität der Konstituenten spielt dabei eine wichtige Rolle. Dem sollte Rechnung getragen werden, indem in der Konstituentenhierarchie Beziehungen, die einen Granularitätsebenenwechsel beinhalten, von solchen unterschieden werden, die auf derselben Granularitätsebene wie das Objekt liegen können. In Abb. 7.7 ist eine solche erweiterte Hierarchie aufgestellt. Hier ist die Beziehung zwischen der Mauer und ihren Ziegeln als *Aggregationskonstitution* ( $a$ ) bezeichnet, die zwischen Haus und Mauer hingegen als *Komplexkonstitution* ( $k$ ). Das Haus ist ein Komplex aus Mauern. Die Aggregation der Ziegel konstituiert die Mauer. Austausch oder Veränderung einzelner Aggregationskonstituenten ist seltener mit einer Veränderung auf höherer Ebene verbunden als Austausch oder Veränderung eines Teiles in der Komplexkonstitution.

Für die Repräsentation hat dies eine entscheidende Konsequenz: Die genauen Regionen der Aggregationskonstituenten sind für das Gesamtobjekt irrelevant und können ohne Verlust durch Vereinfachungen ersetzt werden. Im Fall des Waldes reicht es z.B., die externen Regionen von Bäumen zu verschiedenen Zeitpunkten zu kennen, um die Waldregion und ihre Veränderungen beobachten zu können. Es spielt auch keine Rolle, ob die externen Regionen der Bäume im Sommer (also mit Laub) oder im Winter (ohne) bestimmt werden. Die Basisgranularität des Waldes ist gröber als die Positionsgranularität der Bäume, und auf dieser Basisgranularität wird die Kernregion des Waldes bestimmt. Erst wenn ein Ort der Basisgranularität verloren oder dazugewonnen wird, ändert sich die Kernregion und damit der Wald. Hierbei ist natürlich der Betrachtungszeitraum zu beachten: Eine sehr langsame Änderung kann nicht über kurze Zeiträume festgestellt werden (vgl. auch die Bemerkungen zu Bewegung in Abschnitt 5.3).

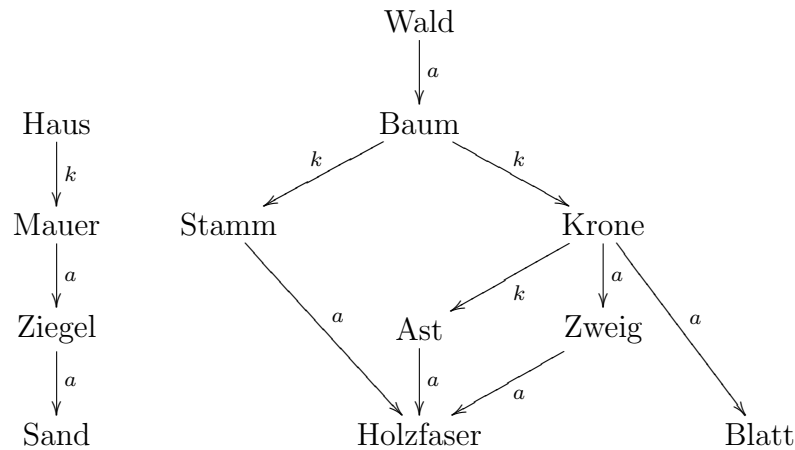


Abbildung 7.7.: Die Konstituentenhierarchie aus Abb. 7.2 mit verfeinerten Konstituentenrelationen. Aggregationskonstitution ist mit  $a$  gekennzeichnet, Komplexkonstitution mit  $k$ .

Offensichtlich ist die aus der Äquivalenzlokalisierung resultierende vage Objektidentität wieder eine Ununterscheidbarkeitsrelation also symmetrisch und reflexiv (vgl. Kap. 3). Betrachten wir nun eine Kette von jeweils einzeln nicht relevanten Veränderungen, so kann dennoch, weil Ununterscheidbarkeitsrelationen ja nicht transitiv sein müssen, die Änderung vom ersten Element der Kette zum letzten eine relevante Änderung ergeben. Ob eine Änderung vorliegt oder nicht, hängt also ab von der Größe des zu betrachtenden Zeitintervalls, also von der temporalen Granularität der Beobachtung. Aber auch die Größe des Objektes ist zu beachten: Das Schmelzen eines Gletschers führt z.B. erst bei Betrachtung großer Zeitintervalle auf der Granularität der Formsicht von Gletschern zu relevanten Veränderungen. Das Schmelzen eines Schneeballs hingegen ist bereits auf einer dem Menschen direkt zugänglichen temporalen Granularität wahrnehmbar.

## 7.4. Aggregationen: Beispiel Wald

Die Überlegungen sollen nun anhand einer für Phänomene der Vagheit in geographischen Informationssystemen prototypischen Klasse von Objekten, den Wäldern vertieft werden. Wälder sind deshalb interessante Studienobjekte, weil sie zum einen als Aggregationen von Bäumen verstanden dem Phänomen der Sorites-Vagheit (s. Abschnitt 1.2.1) unterliegen, zum anderen aber auch zu den Objekten gehören, die der Wahrnehmung als Ganzes nicht direkt zugänglich sind. Hier können in kanonischen Situationen nur die einzelnen Bäume, nicht aber das gesamte Objekt Wald wahrgenommen werden. Die in Kap. 5 eingeführte Relation *int* ist gut geeignet, die lokale Wahrnehmungssituation eines einen Wald erkundenden Agenten zu modellieren. Der auf *int* aufbauende *lokale granulare Kern* kann daher auch als eine granularitätsabhängige an lokaler Perzeption orientierte Spezifikation der Region eines Waldes verwendet werden. Die Ausdrucksmächtigkeit der vorgeschlagenen Repräsentation kann dann an verschiedenen Konzepten des Allgemein-

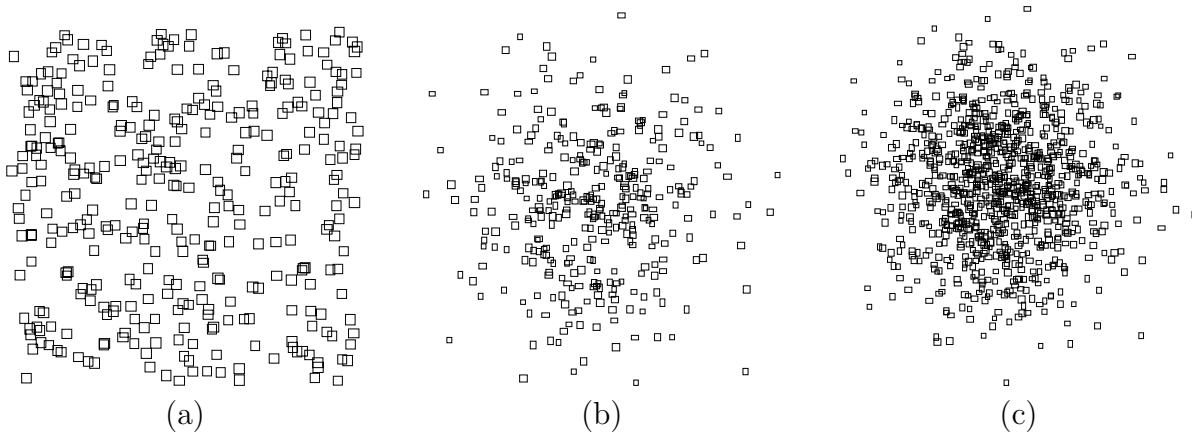


Abbildung 7.8.: Test-Fälle: eine gleichverteilte (a) und zwei normalverteilte (b,c) Aggregationen bestehend aus 350 (a,b) und 1000 (c) Rechtecken.

verstandes demonstriert werden, die prototypisch für die in Abschnitt 1.2.1 diskutierten Phänomene der Vagheit und daher besonders schwer formal zu erfassen sind.

Wenn man Abb. 7.8 unter der Annahme betrachtet, dass durch die Rechtecke die (ungefähre) Position von Bäumen gegeben sei, so mag es vielleicht schwer erscheinen, anzugeben, wo sich die Region des Waldes befindet, und schlüssige Argumente für oder gegen eine bestimmte Begrenzungslinie zu geben. Dies gilt besonders für die Fälle (b) und (c). Andererseits scheint es intuitiv einfach zu entscheiden, wann ich mich im Wald, am Rande eines Waldes oder außerhalb befinde: Ich muss mich nur umsehen. Wenn ich von Bäumen umgeben bin und sonst nicht viel mehr sehe, dann bin ich vermutlich in einem Wald. Wälder gehören zur Klasse der sog. *large-scale objects*, Objekte, die nicht ohne weiteres als Ganzes sichtbar sind zu einem Zeitpunkt (s. Frank [37]). Sie sind typische Beispiele für Objekte des Umgebungsraums *environmental space* (s. Montello [75]). Nur in der Navigation durch oder um solche Objekte ist ihre Gesamtausdehnung erfahrbar.

Von einem wissenschaftlichen Standpunkt aus ist der Wald ein komplexes Ökosystem, das entsprechend nicht einfach als Ansammlung von Bäumen charakterisiert werden kann. Daher mögen auch andere Kriterien für die Bestimmung der Waldregion notwendig sein: Im Inneren des Waldes ist es z.B. im Sommer schattiger und kühler als außerhalb, und die Luftfeuchtigkeit ist höher. Zudem gibt es neben den Bäumen auch andere charakteristische Vegetationsarten. Dennoch sind die Bäume offenbar das Hauptkriterium des Allgemeinverstandes für Wälder: es ist kaum denkbar, *den Wald vor lauter Bäumen nicht zu sehen*. Es gibt aber auch eine kausale Beziehung zwischen den physikalischen Bedingungen, die durch eine große Ansammlung von Bäumen verursacht werden, und dem Ökosystem Wald: werden die Bäume des Waldes gefällt, so wird man wohl auch eine Änderung des Ökosystems vorhersagen wollen. Folgt man dem Programm der naiven Geographie (*naive geography*, Egenhofer und Mark [26]), so sollten durch eine am Allgemeinverstand orientierte auf lokaler Perzeption basierende Spezifikation der Waldregion viel versprechende Ergebnisse zu erwarten sein.

Aber es gibt noch einen anderen Grund anzunehmen, dass Bäume allein kein hinrei-

chendes Kriterium für eine Waldregion sind. Es gibt in der natürlichen Sprache, die hier die Konzeption im Allgemeinverstand anzeigt, einen semantischen Unterschied zwischen den Präpositionalphrasen „im Wald“ und „unter/zwischen Bäumen.“ Die zwei Terme sind sicher nicht gleichbedeutend. Ein Gebäude, welches von nur 20 Bäumen umgeben ist, befindet sich „unter/zwischen Bäumen,“ aber nicht in einem Wald. Das Konzept des Waldes scheint eine hinreichend große Anzahl und Dichte von Bäumen zu verlangen (vgl. Bennett [7]). Der Begriff der *hinreichend großen Anzahl* signalisiert, dass das Konzept des Waldes vermutlich der in der Philosophie als *Sorites-Vagheit* bezeichneten Art von Vagheit unterliegt (s. Abschnitt 1.2.1). Sorites Vagheit (abgeleitet vom griechischen *sōrós* = Haufen) ist eine charakteristische Eigenschaft von Aggregationen umfassenden Konzepten. Der *Sorites-Fehlschluss* lässt sich gut am Beispiel Wald illustrieren: (a) ein Baum ist kein Wald; (b) wenn eine bestimmte Ansammlung von Bäumen kein Wald ist, so wird durch einen zusätzlichen Baum auch kein Wald daraus. Dieses Argument ist offensichtlich falsch, denn jeder Wald besteht ja nur aus endlich vielen Bäumen. Wenn sich die Anzahl der Bäume also über die Zeit immer vergrößert, muss irgendwann aus einer Baumgruppe ein Wald werden. Ansätze aus der Philosophie und der Forschung zur Sprachverarbeitung nutzen Schwellwerte und Kontextmengen für Vergleiche, um allgemeine Sorites-Vagheit zu erfassen. Van Deemter [22] etwa zeigt, wie sich die Vagheit in der Semantik von Adjektiven wie *klein* formal behandeln lässt. Aggregationen sind prototypische Fälle für räumliche Sorites-Vagheit, weil dem Konzept der Aggregation keine andere Struktur unterliegt, als dass sich eine hinreichende Anzahl oder Menge von Konstituenten in relativer Nähe zueinander befinden. Die Bäume sind also gemäß obiger Überlegungen die einzigen Konstituenten des Waldes in der Konzeptualisierung nach dem Allgemeinverstand.

Ein Kontextfaktor, der zumindest im Fall der räumlichen Sorites-Vagheit von Aggregationen relevant ist, ist die räumliche Granularität. Der Wald als ein Objekt großer Ausdehnung (*large-scale object*) wird nur in Kontexten repräsentiert, die ausreichende Größe haben, etwa in geographischen Kontexten, wohingegen der Baum in Kontexten zugreifbar ist, die mit der Größe eines Menschen, der sich in einem Wald orientiert, noch kompatibel ist. Der Wanderer, der sich durch den Wald bewegt, erfährt diesen nach Frank [37] als Abfolge von Orten, die umgeben sind von Bäumen, und kann, indem er diese Abfolge sukzessive zu einem räumlichen Gesamtbild integriert, Wissen über die Ausdehnung des Waldes sammeln. Die Charakterisierung des lokal granularen Umschlossen-Seins *int* (D37) bildet diese perzeptive Situation eines Navigierenden Agenten formal gut ab: ein Agent dessen externer Ort einer bestimmten Basisgröße von Bäumen umschlossen ist bezüglich einem Kontextort, dessen Größe an einem Bereich lokaler Perzeption orientiert ist, befindet sich vermutlich im Wald. Der *LGK*, der ja auf *int* aufbaut, kann unter dieser Annahme auch verwendet werden, um die Vagheit räumlicher Aggregationen im Umgebungsraum aus einer neuen formalen Perspektive analysieren zu können.

Der Sorites-Fehlschluss lässt sich nun mit Hilfe des erarbeiteten Granularitätsbegriffs formulieren: die Region der Bäume hat im Vergleich zur Region des Waldes eine irrelevante Ausdehnung; die irrelevante Ausdehnung einer endlichen Anzahl einzelner Konstituenten wird nicht repräsentiert auf der gröberen Granularitätsebene der Ausdehnung

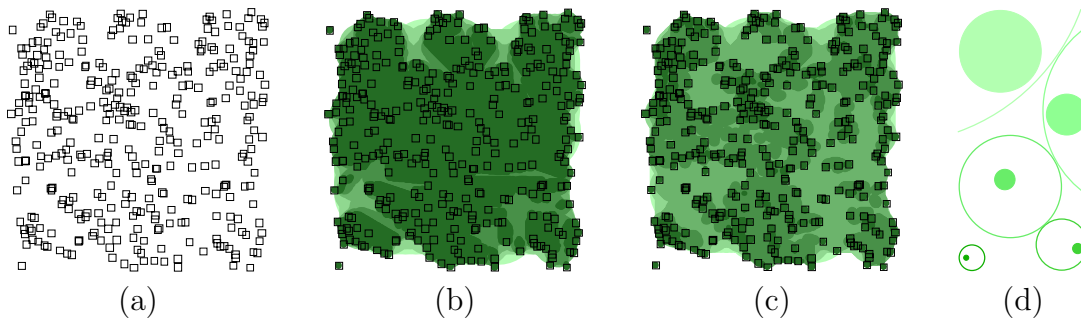


Abbildung 7.9.: Eine Gruppe von 350 Bäumen (Rechtecke) gleichverteilt über eine quadratische Region (a) mit Approximationen des globalen (b) und lokalen (c) granularen Kerns auf 5 verschiedenen Granularitätsebenen: Hellere Schattierungen repräsentieren Waldregionen größerer Granularität. Die verwendeten Granularitäten sind in (d) dargestellt, jeweils repräsentiert durch einen Ort der Granulatsgröße (gefüllt dargestellt) und einen Ort der Kontextgröße (als Umriss dargestellt).

der Aggregation, und die Aggregation ist zu groß, um auf der feineren Ebene der Konstituenten repräsentiert zu sein. Auf der Ebene der Konstituenten fungiert die Aggregation allein als Hintergrundobjekt. Die beiden Ebenen können verbunden werden über eine granuläre Spezifikation räumlicher Dichte der Konstituenten.

Bennett [7] analysiert verschiedene alternative Charakterisierungen für das Konzept der *bewaldeten Region* u.a.: (a) basierend auf der Anzahl der Bäume, bzw. der Dichte der Bäume in Kreisscheiben einer gegebenen Größe, und (b) basierend auf Nähe als einer gegebenen maximalen Distanz zwischen Bäumen. Auch in der Konzeption von Bennett spielt Granularität von Größen eine wichtige Rolle: verschiedene Basisgrößen resultieren in verschiedenen Regionen.<sup>10</sup> Hauptvorteile des *LGK* gegenüber beiden Alternativen sind, dass nur solche Orte zur Waldregion gehören, die *in allen Richtungen* von Bäumen umgeben sind, und dass die Bäume in ihrer *Ausdehnung*, nicht in ihrer Anzahl, wichtig sind. Eine Gemeinsamkeit ist die besondere Bedeutung der Granularität.

Der *LGK* ergibt besonders für Aggregationen, also Objekte, für die allein das Vorhandensein der Substanz – nicht etwa die Anordnung – wichtig ist, eine gute Annäherung für die Objektregion. Nehmen wir die externen Orte der Bäume als gegeben an – hier der Hervorhebung halber mit Rechtecken dargestellt –, so berechnet der oben skizzierte *LGK*-Algorithmus für die Beispiele aus Abb. 7.8 die in Abb. 7.10 schattiert dargestellten Waldregionen.

### Arten von Konstituenten einer Aggregation

Vergleicht man die verschiedenen Konstituenten des in Abb. 7.9 dargestellten Waldes nach ihrer Funktion für die Kernregion, lassen sich verschiedene Arten von Konstituenten

<sup>10</sup>Ein weiterer wichtiger Aspekt in [7], der hier aber nicht näher behandelt wird, ist das mereotopologische Konzept des maximalen Zusammenhangs (*self-connectedness*), welches bestimmt, ob eine gegebene bewaldete Region die Region eines zusammenhängenden Ganzen, des Waldes, ist.

ausmachen.

**Kritische Konstituenten** liegen an lichten Stellen der *LGK*. Werden sie entfernt, so entsteht im Inneren ein Loch; am Rand und außen zieht sich die *LGK* zurück. Betrachtet man die *LGK*-Regionen auf verschiedenen Ebenen in Abb. 7.10, so zeigt sich, dass die Grenze in der Nähe kritischer Konstituenten am stärksten variiert zwischen den Ebenen. Der Rand der Objektregion hängt hier stark von der gewählten Granularität ab, da nur größere Orte – d.h. Orte einer gröberen Granularität – umschlossen sind. Aufgrund dieser Granularitätsabhängigkeit kann der Rand entsprechend als vage klassifiziert werden.

**Unkritische Konstituenten** liegen in einer besonders dichten Ansammlung von Konstituenten. Sie überlappen benachbarte Konstituenten oder sind zumindest sehr nah zu anderen Konstituenten. Wenn ein einzelnes Element der Ansammlung entfernt wird, sind die benachbarten Konstituenten noch ausreichend, um die Region zu konstituieren, und der *LGK* ändert sich daher wenig. Es ist dabei gleich, ob diese Ansammlung im Inneren, außen oder am Rand liegt. In der Nähe von unkritischen Konstituenten ist der Rand des Objektes sehr dicht und daher auch auf allen Granularitätsebenen gleich scharf abgegrenzt.

**Isolierte Konstituenten** sind so weit von ihren Nachbarn entfernt, dass sie keinen Ort der *LGK*-Region abschirmen können. Sie liegen außerhalb des *LGK*. Bei größeren Aggregationen kann zusätzlich unterschieden werden zwischen granular isolierten und universell isolierten Konstituenten. Auf feineren Ebenen isolierte Konstituenten können auf gröberen Ebenen zu kritischen Konstituenten werden.

Abbildung 7.10(a) hat eine universell isolierte Konstituente in der unteren linken Ecke nahe dem scharf abgegrenzten Bereich. Der Baum in der oberen linken Ecke ist eine kritische Konstituente, da er tatsächlich innere Orte abschirmt, obwohl er auf gröberen Ebenen nicht zum *LGK* gehört. In Abb. 7.10(b) und (c) sind Baumgruppen mit besonders vagen Grenzen zu sehen. Zu beachten ist, dass die kritischen Konstituenten kritisch sind bezüglich ihrer Funktion als Konstituenten, aber nicht bezüglich ihrer Existenz als Individuen. Natürliche Entitäten wie Wälder unterliegen einem permanenten Austausch von Teilen. Der *LGK* bildet dies ab: Ein sich verändernder Wald muss nicht immer dieselben kritischen Konstituenten haben. In der Nähe eines einzeln stehenden, kritischen Baumes am Waldrand kann über die Zeit eine Ansammlung von Bäumen entstehen. Der erste Baum verliert dann die Eigenschaft, kritisch für den Verlauf des Waldrandes zu sein.

Wenn man die für verschiedene Granularitätsebenen berechneten *LGK*-Regionen betrachtet, zeigt sich, dass die *LGK*-Regionen gröberer Granularität zunehmend zusammenhängend sind, wobei Raum zur Mitte hin dazugewonnen wird, während außerhalb liegende Gruppen von Bäumen, die auf feineren Ebenen noch eine Region bildeten, verloren gehen. Betrachtet man Abb. 7.10(a), so zeichnet sich die scharfe Grenze dadurch aus, dass die *LGK* feinerer Granularität bis an den Rand der *LGK* gröberer Granularität und sogar leicht darüber hinaus reicht. Eine Folge ist, dass die Granularitätsebenen



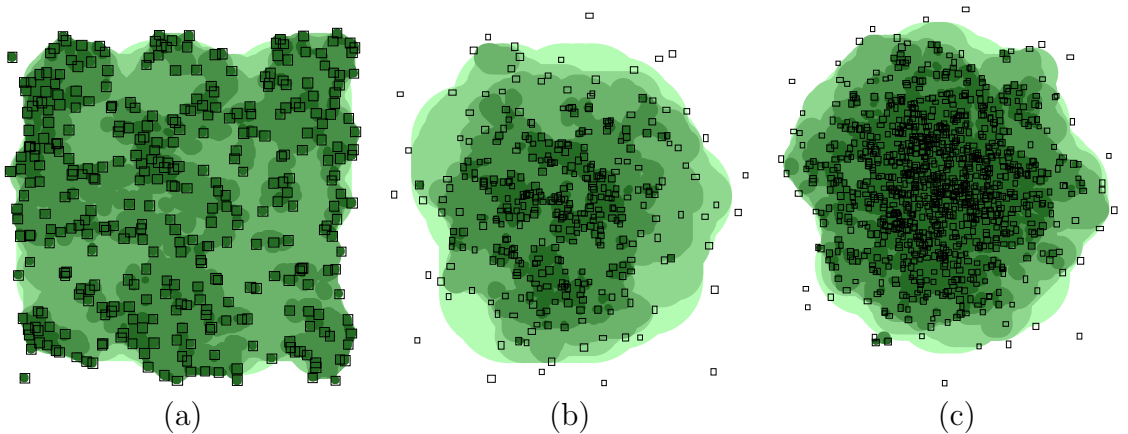


Abbildung 7.10.: Approximationen des *LGK* für die Beispiele aus Abb. 7.8. Die Abbildungen haben, verwendet man Orte derselben Schattierung als Maßstab, verschiedene Größen. Hellere Schattierungen repräsentieren Waldregionen größerer Granularität.

keine strikte Hierarchie von einander enthaltenden Verfeinerungen darstellen, wie sie im Rahmen einiger Ansätze zur Behandlung vager Regionen benötigt werden, z.B. in aus der Fuzzy-Logik abgeleiteten Ansätzen oder in der Egg-Yolk-Theorie (s. Cohn und Gotts [19]). So kann vor allem nicht geschlossen werden, dass ein Punkt, der auf sehr feiner Granularität im *LGK* enthalten ist, auch auf allen gröberen Ebenen zum *LGK* gehört. Der isolierte Baum in Abb. 7.10(a) (unten links) gehört z.B. nur auf der feinsten dargestellten Ebene zum *LGK*, auf jeder höheren Ebene liegt er außerhalb. Zum Schließen über verschiedene *LGK*-Regionen ist daher ein Ansatz nötig, der diese Hierarchie nicht fordert, wie der Supervaluationsansatz von Kulik in [62], der in ähnlicher Weise auch von Bennett [5] verwendet wird. In der Supervaluationstheorie kann es zu jedem Konzept eine Reihe von Präzisierungen geben, die strukturell nicht eingeschränkt sein müssen; im Fall einer unscharfen Region ist im Allgemeinen also nicht gefordert, dass die Präzisierungen in der Enthaltenseinsrelation stehen.

### Lichtungen

Abbildung 7.10 zeigt, dass der *LGK* auch geeignet ist, ein schwieriges Konzept wie das der Lichtung zu modellieren. Die Lichtung kann beschrieben werden als eine Region im Inneren eines Waldes, die zwar auf einer gröberen Ebene zum *LGK* des Objektes gehört, nicht aber auf einer feineren Ebene.<sup>11</sup> Die in Zusammenhang mit Abb. 6.5(b) diskutierte baumlose Region, die sich auch in Abb. 7.10(a) wiederfindet, ist eine Lichtung im Wald. Die Bedeutung des Wortes Lichtung lässt sich beschreiben als „eine baumlose Region in einem bewaldeten Gebiet.“ Hier zeigt sich der Vorteil des Granularitätsansatzes deutlich: Die Prädikate *baumbestanden*, als dessen Gegenteil *baumlos* aufgefasst werden kann, und *bewaldet* unterscheiden sich nur in der Granularitätsebene. Sie setzen beide als Konstituenten Bäume voraus. Es kann damit ohne Widerspruch eine Lichtung als nicht

<sup>11</sup>Lichtungen können auch als Löcher in der Waldregion verstanden werden. Vgl. Casati und Varzi [16].

baumbestandene Teilregion einer bewaldeten Region definiert werden.<sup>12</sup> Ein Ring von Bäumen um einen leeren Platz ist daher keine Lichtung.<sup>13</sup> Es kann sogar (in größeren Wäldern, nicht in den Beispielen hier) ein Baum auf einer Lichtung stehen.

Bennett [7] gibt ein weiteres gutes Testbeispiel: Ein Haus mit Garten in einem Wald, wobei im Garten ein Baum stehen soll. Wie wird dieses Beispiel mit den hier gegebenen Mechanismen verarbeitet? Der *LGK* basiert auf den Bäumen. Ohne Vorinformationen wird der *LGK*-Mechanismus, der ja nur die Kategorie möglicher Konstituenten beachtet, also den Baum des Gartens unter die Konstituenten des Waldes rechnen. Ist der Garten groß genug, um als Lichtung berechnet zu werden, wird der Baum zum isolierten Baum auf der Ebene der Lichtung und zur kritischen Konstituente des Waldes auf größeren Ebenen. Will man dies vermeiden, muss der Baum einer anderen Kategorie zugeordnet werden. Es ist aber zu vermuten, dass der Wald als natürliche Einheit, als Ökosystem Wald, von diesem Baum genauso gut konstituiert wird, wie von anderen Bäumen. Waldtiere z.B. würden sich sicher nicht durch eine einfache Gartenbegrenzung davon abschrecken lassen, den Baum wie andere Waldbäume zu nutzen.

Betrachten wir nun zusammenfassend die verwendeten Granularitätsebenen, so ergibt sich, dass die zum Konzept der Lichtung gehörenden Granularitäten kleinere Ausdehnungen umfassen sollten als diejenigen Granularitäten, mit denen *LGK*-Regionen eines Waldes bestimmt werden sollten. Die Granularitäten der Lichtung müssen aber größere Ausdehnungen umfassen als die zum Konzept des Baumes gehörenden Granularitäten. Für drei Orte  $p_{\text{Baum}}$ ,  $p_{\text{Lichtung}}$ ,  $p_{\text{Wald}}$ , die jeweils interne Orte einer Objektregion eines Objektes der entsprechenden Kategorie sein sollen, ließe sich entsprechend folgende Beschränkung der möglichen Größen fordern:  $p_{\text{Baum}} < p_{\text{Lichtung}} < p_{\text{Wald}}$ .

### 7.5. Schlussfolgerung

Der *LGK* ist eine wahrnehmungsbasierte Formalisierung für die Region eines Objektes, die vollständig durch die Kategorien der Konstituenten, die Regionen möglicher Objekte der Kategorie und eine Granularität, die eine oder mehrere Ebenen über der der Konstituenten liegt, spezifiziert ist. Gegeben eine Kategorie von Konstituenten, eine Möglichkeit, Konstituenten der Kategorie zu erkennen, und die Granularität des gewünschten Objektes, bietet die hier dargestellte Methode eine Möglichkeit, beliebige – auch vage – Objekte zu erkennen. In unserem Beispiel ist es also allein notwendig, Holzfasern, Sand und Blätter erkennen zu können, um einfache Beispielobjekte der Konstituentenhierarchie zu finden. Auch Einschränkungen der Erkenntnismöglichkeit können einbezogen werden: Ein grüner Luftballon im Baum könnte z.B. von weitem für ein Blatt gehalten werden. Die *LGK*-Region ändert sich vermutlich nicht signifikant, wenn wir beim Näherkommen unseren Fehler feststellen. Auch wurde Individuierbarkeit der Bäume nicht vorausgesetzt für die Bestimmung der Waldregion. Mehrere Bäume einer Baumgruppe

---

<sup>12</sup>Diese Eigenschaft teilt der *LGK* mit anderen granularitätsabhängigen Definitionen, wie denen aus [7].

<sup>13</sup>Hier ist zu beachten, dass der *GGK* diesen Unterschied nicht abbilden kann, da auch ein hinreichend dichter Ring von Bäumen einen von der Granularität her geeigneten *GGK* hat, und innere Konstituenten des *GGK* stets unkritisch sind.

können überlappende Baumkronen haben. Die menschliche Wahrnehmung ist robust gegenüber solchen Phänomenen: Die Baumgruppe oder der Wald werden auch erkannt, selbst wenn der einzelne Baum nicht bis ins Detail individuiert werden kann. Zu beachten ist, dass es kritische Konstituenten gibt, die, obwohl sie nicht selbst in der Region sind, die Region konstituieren. Dies mag zunächst als Nachteil erscheinen. Tatsächlich deutet aber manches darauf hin, dass gerade diese räumliche Kontextabhängigkeit eine charakteristische Eigenschaft von Aggregationen wie Wäldern sein könnte, die ihre Ursache eben in genau jener schwierig formalisierbaren Eigenschaft hat, dass das Ganze mehr als die Summe seiner Teile ist.

Die Relation *int* des lokal Umschlosseneins kann als Formalisierung granularen Enthaltenseins in der Region einer Aggregation gesehen werden. Aber auch für stärker strukturierte Objekte, wie Häuser, ist die Relation geeignet. Hier ergeben sich Strukturen aus Orten, die an die Mittelachsenansätze der Bildverarbeitung erinnern (vgl. Kap. 1 aber auch den Ansatz von Dugat, Gambarotto und Larvor [24]). Im Gegensatz zu diesen werden hier aber nicht die in der Region enthaltenen Kreise betrachtet, sondern die umschlossenen, auch soll ja nicht die Achse oder eine möglichst kurze Beschreibung, sondern zu allererst die Region des Objektes gefunden werden. Unter dieser Perspektive kann die vorgestellte Formalisierung des *LGK* auch als Versuch gesehen werden, Konzepte, die dem räumlichen Clustering zu Grunde liegen, dem qualitativen räumlichen Schließen zugänglich zu machen. Die vorgestellten Charakterisierungen tragen somit auch dazu bei, Konzepte der höheren Wissensverarbeitung in perzeptionsnahen Konzepten zu verankern. Hier ist hervorzuheben, dass die Analyse des Hauses aus Ziegelsteinen Abb. 7.6 genau zwei Granularitätsebenen findet: die des Hausinnenraums und die der Ziegelinnenräume. Gegenüber kleineren Lücken in der Mauer ist das Verfahren im Test robust. Für das Beispiel des Waldes als eines Objektes mit einer vagen Region hingegen werden auf mehreren Ebenen *LGK*-Regionen gefunden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mit dem *LGK* eine gute Annäherung an die von der Gestaltwahrnehmung geforderte über die Summe der Konstituenten hinausgehende Einheit des Ganzen vorgelegt wird. Erklären lassen sich die Ergebnisse aus der Kombination von lokaler Geradheit und Nähe, die für die Gestaltphänomene der Nähe und der guten Fortsetzung ausschlaggebend sind. Die Granularität liefert hier sowohl die verschiedenen Ebenen von Strukturen als auch die formale Grundlage für Bewertung von Relevanz auf den Ebenen.

## 7. *Innere Struktur von Objekten: Substanz und Form*

## 8. Zusammenfassung und Ausblick

Ausgangshypothese der vorliegenden Arbeit war, dass räumliche Granularität vom Konzept der Ausdehnung in einem Kontext wesentlich bestimmt wird. Diese Hypothese, für die sowohl Ergebnisse kognitionswissenschaftlicher Untersuchungen wie auch Ergebnisse der Forschung zu geographischen Informationssystemen sprechen (s. Kap. 1), wurde formalisiert und genau untersucht. Im ersten Teil der Arbeit wurde eine formale Charakterisierung von Granularität und räumlicher Ausdehnung erarbeitet, die auf besonderen ausgedehnten Entitäten, den Orten basiert. Hierzu mussten sowohl die mathematischen Grundlagen von Ausdehnung und Distanz als auch die – für die Gewährleistung kognitiver Adäquatheit wichtigen – mathematischen Grundlagen vager Klassifikation beachtet werden. Im zweiten Teil der Arbeit wurde ausgeführt, dass die im ersten Teil vorgestellte Konzeption tatsächlich viele der von der Kognitionswissenschaft geforderten, in Kap. 1 dargestellten, Eigenschaften räumlicher Granularität aufweist.

Die im zweiten Teil aufgestellten Definitionen können als formale Spezifikationen für Anwendungen im Bereich intelligenter Systeme aufgefasst werden. Die Ergebnisse der Untersuchung sind durch die Verwendung der axiomatischen Methode formal exakt und nachprüfbar. Die Berücksichtigung verschiedener möglicher Modelle erlaubt aber genügend Offenheit, um für eine bestimmte Anwendung spezialisierte Konzepte ableiten zu können.

Der Ansatz modelliert verschiedene vage, kontextabhängige und sogar zu Paradoxa führende Konzepte des Allgemeinverständes in klarer und formal exakter Form, ohne ihre Vagheit und Kontextabhängigkeit wesentlich zu vereinfachen. Modellierte Begriffe, die gegeben eine Granularitätsstruktur und ein Ortesystem eindeutig bestimmt sind, sind:

**Räumliche Kontexte** Der formale, geometrische Begriff des Ortes, der in dieser Arbeit vorgestellt wurde, konnte als Repräsentant für räumliche Kontexte verwendet werden: Die Relation der Nähe ließ sich auf die Ausdehnung der Objekte an einem Ort zurückführen. Asymmetrie und Kontextabhängigkeit der Relation konnten hierdurch erfasst werden.

**Dimensionalität** Die konzeptualisierte Dimension eines Objektes in einem räumlichen Kontext konnte formal bestimmt werden. Objekte können als punktuell, linear oder planar im Kontext klassifiziert werden.

**Granularitätsschichten der Objekte** Die Formschicht wurde als diejenige Schicht ausgezeichnet, in der das Objektkonzept gemäß dem Prinzip der intrinsischen Granularität (s. Galton [40]) tatsächlich zu Tage tritt. Substanz- und Positionsschicht wurden als Randbereiche der Objektkonzeptualisierung bestimmt.

**Regionen vager Objekte** Regionen von Wäldern aber auch Regionen von Lichtungen sind als vage Regionen, d.h. als Menge von Regionen auf verschiedenen Granularitäten, oder – bei Beschränkung auf eine Granularität – als exakte Regionen durch den *LGK* berechenbar.

**Veränderung und Bewegung** Wahrnehmung von Veränderung und Bewegung ist abhängig von den betrachteten Zeiträumen. Es kann unterschieden werden zwischen diskreten Bewegungen von einer Position zu einer benachbarten Position auf gröberer temporaler Granularität und einer kontinuierlichen nicht oder kaum wahrnehmbaren Bewegung bei einer feineren temporalen Granularität.

Es konnte auch erklärt werden, wie sich Granularität und Vagheit durch den zentralen Begriff der in einem Kontext irrelevanten Ausdehnung in Verbindung bringen lassen. Die betrachteten Phänomene konnten auf bestimmte in einem Kontext irrelevante Ausdehnungen zurückgeführt werden: für das Phänomen der Dimensionalität im Kontext wurde zwischen den relevanten und den irrelevanten Ausdehnungen eines Objektes im Kontext unterschieden; für das Phänomen vager Regionen wurde die irrelevante Ausdehnung einzelner Konstituenten von der relevanten Ausdehnung des konstituierten Objektes unterschieden.

In der Untersuchung wurden verschiedene nicht-transitive Ununterscheidbarkeitsrelationen betrachtet. Nicht-transitive Ununterscheidbarkeit ist ein in der kognitionspsychologischen Forschung experimentell (für einen Überblick s. Palmer [81]) und formal (Suppes und Zinnes [105]) gut untersuchtes Phänomen, das aber im Bereich der Forschung zum qualitativen räumlichen Schließen bislang wenig beachtet wurde (Cohn und Hazarika [18]). Die Kompositionstabelle zum Schließen über Granularitäten (Abschnitt A.1) deutet hier auf interessante Möglichkeiten der Weiterentwicklung.

Das Konzept der Kontextabhängigkeit wurde an vielen Stellen explizit mit einbezogen. Für die Relationen des internen Ortes (*int*) und des granularen Kerns (*GGK* und *LGK*) z.B. wurden sowohl globale ((D28) bzw. (D49)) als auch lokale Varianten ((D37) bzw. (D48)) vorgestellt. Die Relation *int* stellt in diesem Zusammenhang ein besonders interessantes Konzept dar. Zum einen konnte sie verwendet werden, um Aspekte der Gruppierung in der Bildwahrnehmung zu modellieren. Zum anderen ist diese Relation auch lokal in einer größeren Umgebung einsetzbar: Ein navigierender Agent etwa stellt leicht fest, dass er sich im Wald befindet, wenn er von Bäumen umgeben ist. Hier gibt es also eine direkte Verbindung zwischen der visuellen Wahrnehmung eines insgesamt präsentierten Bildes und lokalen Wahrnehmungen eines sich bewegenden Agenten. Damit ist ein formaler Baustein gegeben, mit dessen Hilfe Ähnlichkeiten zwischen dem Aufbau von Überblickswissen aus der lokalen Wahrnehmung ausgedehnter Objekte und der Bestimmung von Gruppierungen aus in ihrer Gesamtheit wahrnehmbaren Bildern weiterführend untersucht werden können.

Die Ergebnisse der Kapitel 6 und 7 legen aber auch nahe, dass das vorgestellte granulare Konzept des Ortes zu einem für die Forschung zu Routenbeschreibungen, hierarchischer Routenplanung und Roboternavigation tauglichen Konzept lokaler, räumlicher Kontexte ausgebaut werden kann. Die vorgestellten geometrisch charakterisierten Konzepte bieten eine ausdruckskräftige formale Sprache für die Verwendung in der Wissens-

und Sprachverarbeitung aber auch für die Raumrepräsentation allgemein. Erhöhte Ausdruckskraft wird allerdings stets zum Preis erhöhter Komplexität erkaufte (s. Levesque und Brachman [67]). Hier sind weiterführende Studien notwendig, um handhabbare Fragmente des charakterisierten Formalismus zu finden.

## 8. Zusammenfassung und Ausblick



# Anhang



# A. Anwendungen

## A.1. Schließen über Granularitäten

Wie in Kap. 3 angedeutet, lassen sich aus den Granularitätsaxiomen auch Kompositionstabellen ableiten. Die Granularitäten  $\gamma$  mit den (nicht disjunkten aber exhaustiven) Relationen  $\prec, =, \approx$  und  $\succ$  bilden eine eingeschränkte Intervallstruktur abgeschlossener Intervalle, da sie formal genau durch eine bezüglich einer linearen strikten Ordnung  $<$  minimale und maximale Basisentität bestimmt sind und bezüglich  $\sim$  alle Entitäten zwischen diesen Grenzen einschließlich der Grenzen enthalten. Schlussmechanismen für Intervallstrukturen wurden für das Schließen über temporale Intervalle untersucht von Allen [3]. Die Granularitäten sind gegenüber beliebigen Intervallen dahingehend eingeschränkt, dass eine Granularität nicht in einer anderen enthalten sein kann. Eine Kompositionstabelle für das Schließen über Granularitäten ergibt sich daher, wenn man aus der Allenschen Kompositionstabelle [3] alle Einträge für Relationen, die Enthaltensein erfordern, entfernt, bzw. durch  $=$  ersetzt. Allen unterscheidet zwischen zwei richtungsabhängigen Formen des Überlappens von Intervallen.<sup>1</sup> In Kap. 3 war hingegen die symmetrische Relation  $\approx$  verwendet worden, die auch Gleichheit umfasst. Für das Schließen über Granularitäten ist es nützlich, diese Relation aufzuspalten in drei disjunkte Relationen: zwei indifferente Granularitäten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind identisch, oder die Granulatsentitäten von  $\gamma_1$  sind echt kleiner oder echt größer als die von  $\gamma_2$ . Sind Granulatsentitäten von  $\gamma_1$  echt kleiner als die von  $\gamma_2$ , so soll  $\gamma_1$  *echt indifferent feiner* ( $\preceq$ ) als  $\gamma_2$  genannt werden (D52). Sind Granulatsentitäten von  $\gamma_1$  echt größer als die von  $\gamma_2$ , so heißt  $\gamma_1$  *echt indifferent gröber* ( $\succeq$ ) als  $\gamma_2$  (D53).

$$\gamma_1 \preceq \gamma_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma_1 \approx \gamma_2 \wedge \exists s_1, s_2 : \text{grn}(\gamma_1, s_1) \wedge \text{grn}(\gamma_2, s_2) \wedge s_1 < s_2 \quad (\text{D52})$$

$$\gamma_1 \succeq \gamma_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma_1 \approx \gamma_2 \wedge \exists s_1, s_2 : \text{grn}(\gamma_1, s_1) \wedge \text{grn}(\gamma_2, s_2) \wedge s_1 > s_2 \quad (\text{D53})$$

Es ergibt sich dann die in Tab. A.1 dargestellte Kompositionstabelle.

## A.2. Berechnung des lokalen granularen Kerns

In diesem Abschnitt werden approximative Algorithmen der für den zweiten Teil dieser Arbeit zentralen Definitionen des umschlossenen Ortes (D37) und des lokalen granularen Kerns vorgestellt. Wichtig ist dabei, dass die vorgeschlagenen Algorithmen weitgehend

<sup>1</sup>Allen [3] verwendet zusätzlich noch die Relation *meets* und ihr Inverses, die zwischen zwei Intervallen gelten, die sich allein in einer Grenze überlappen. Diese Relationen werden hier als spezielle Varianten des Überlappens nicht genauer betrachtet. Eine entsprechende Erweiterung ist aber leicht ableitbar.

## A. Anwendungen

	$\prec$	$\sphericalangle$	$\parallel$	$\succcurlyeq$	$\succ$
$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec, \sphericalangle$	$*$
$\sphericalangle$	$\prec$	$\sphericalangle, \prec$	$\sphericalangle$	$\succcurlyeq, \parallel, \sphericalangle$	$\succcurlyeq, \succ$
$\parallel$	$\prec$	$\sphericalangle$	$\parallel$	$\succcurlyeq$	$\succ$
$\succcurlyeq$	$\sphericalangle, \prec$	$\succcurlyeq, \parallel, \sphericalangle$	$\succcurlyeq$	$\succ, \succcurlyeq$	$\succ$
$\succ$	$*$	$\succcurlyeq, \prec$	$\succ$	$\succ$	$\succ$

Tabelle A.1.: Kompositionstabelle der fünf (disjunkten und exhaustiven) Relationen  $\prec$ ,  $\sphericalangle$ ,  $\parallel$ ,  $\succcurlyeq$ ,  $\succ$  für das Schließen über Granularitäten

unspezifisch bezüglich der verwendeten internen Repräsentation räumlicher Objekte, bzw. des Raumes sind. So kann der Algorithmus zur Berechnung umschlossener Orte z.B. sowohl auf einer Rasterrepräsentation einer Aggregation als auch auf einer Vektorrepräsentation arbeiten. Es wird also weitgehend davon abstrahiert, ob die Aggregation als Menge von Strecken oder Punkten, oder als Menge von Rasterzellen gegeben ist. Dies wird durch die axiomatische Spezifikation der Konzepte möglich.

Ein von einer Region  $A$  umschlossener Ort  $p$  ist ein Ort, der in jeder Richtung von Teilen der Region umgeben ist. In der Definition (D37) ist dies dadurch gesichert, dass der Ort bezüglich jedem Streifen, auf dem er liegt, zwischen Orten liegt, die die Region überlappen. Im unten dargestellten Algorithmus spiegelt sich dies darin wider, dass für jeden Basisbestandteil  $B$  von  $A$ , also z.B. für eine Strecke oder für eine Rasterzelle bestimmt wird, welche Hälften von Streifen  $B$  abdeckt. Wird dann auch die zweite Hälfte eines Streifens  $t$  durch einen anderen Basisbestandteil abgedeckt, so liegt  $p$  in  $t$  zwischen Orten, die  $A$  überlappen.

Um zu speichern, welche Hälften von Streifen bereits überdeckt sind zu einem Zeitpunkt in der Abarbeitung des Algorithmus, wird als Datenstruktur eine Menge von *Richtungsintervallen* (gespeichert als *Winkelintervalle*) verwendet. Die Basisbestandteile überdecken dabei stets ein bestimmtes Intervall von Richtungen. Eine Rasterzelle z.B. überlappt mehrere der zu untersuchenden Streifen. Aber auch ein einzelner Punkt liegt bereits in mehreren der zu untersuchenden Streifen. Die Berechnung des Verdeckungsintervalls für einen Punkt ist illustriert in Abb. A.1.<sup>2</sup> Die Berechnung für eine Strecke zeigt Abb. A.2.

Bei der Berechnung des Verdeckungsintervalls muss zwischen zwei Fällen unterschied-

<sup>2</sup>Der Winkel  $\frac{\alpha}{2}$ , mit dessen Hilfe das Winkelintervall bestimmt wird, kann für das Verdeckungsintervall eines Punktes im Ortesystem der Kreise ausgehend vom Radius  $r$  des untersuchten Kreises und der Distanz  $d$  zwischen dem Mittelpunkt des Kreises und dem untersuchten Punkt für den Nahbereich ( $d \leq \sqrt{5}r$ ) nach dem Cosinussatz durch

$$\frac{\alpha}{2} = \cos^{-1} \frac{3r^2 + d^2}{4rd}$$

für den Fernbereich ( $d \geq \sqrt{5}r$ ) durch

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1} \frac{r}{d}$$

berechnet werden.

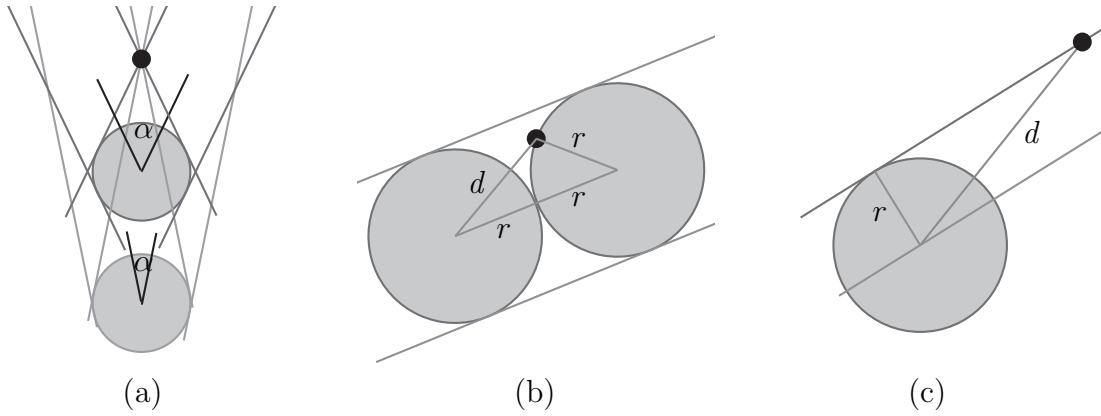


Abbildung A.1.: Verdeckungsintervall für einen Punkt bei verschiedenen Entfernungen (a), Berechnung einer Grenze des Nahbereich- (b) und Fernbereich-Verdeckungsintervalls (c).

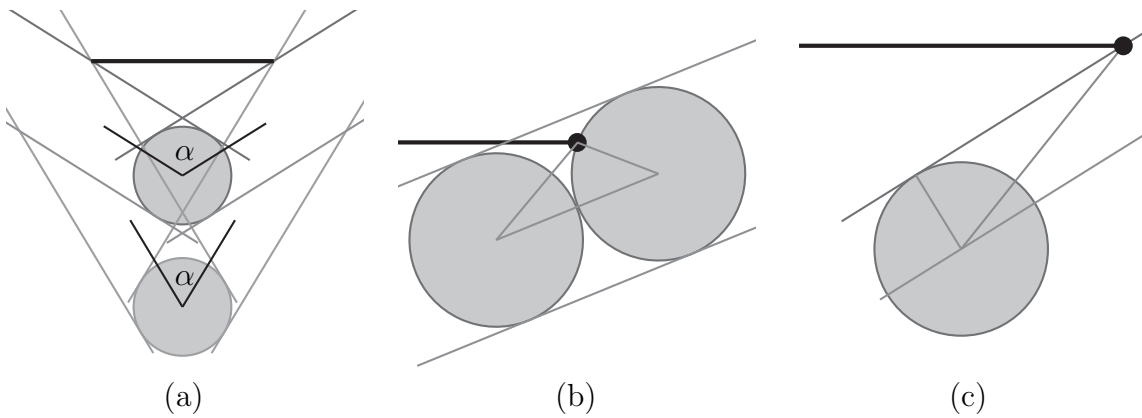


Abbildung A.2.: Verdeckungsintervall für eine Strecke bei verschiedenen Entfernungen (a), Berechnung einer Grenze des Nahbereich- (b) und Fernbereich-Verdeckungsintervalls (c).

## A. Anwendungen

den werden. Ist der untersuchte Basisbestandteil  $B$  nahe dem Ort  $p$ , so ist der Winkel, den er abdeckt, kleiner. Dies ergibt sich durch die Verwendung von  $\beta$  (D29) in (D28), da ja für jeden Streifen gefordert wird, dass  $p$  zwischen Orten  $p_1$  und  $p_2$  liegt, die die Region überlappen. Es reicht also nicht aus, dass der Streifen die Region überlappt, es muss auch entsprechende Orte geben. Im hier verwendeten Ortesystem der Kreise heißt dies, dass es in einem untersuchten Streifen  $t$  einen Kreis geben muss, der die Region überlappt. Ist  $B$  also nahe bei  $p$ , so muss das in Abb. A.1(b) und Abb. A.2(b) dargestellte Nahbereich-Verdeckungsintervall berechnet werden, ansonsten das in Abb. A.1(c) und Abb. A.2(c) dargestellte Fernbereich-Verdeckungsintervall. Bestandteile  $B$ , die in den Ort  $p$  hineinragen, müssen zunächst entsprechend aufgeteilt werden, da ja Teile von  $A$ , die innerhalb von  $p$  liegen, nicht zur Relation *int* beitragen. Für die von einem Kontextort  $p_k$  abhängige Variante von *int* (D37) sind zudem nur die in  $p_k$  enthaltenen Teile von  $A$  zu prüfen.

Der Algorithmus für die Bestimmung, ob ein gegebener Ort  $p$  von einer Region  $A$  umschlossen ist, Alg. 1, geht von einer Menge von Winkelintervallen aus, die die noch zu prüfenden Richtungen enthält. Zunächst enthält diese Menge das Winkelintervall von  $0^\circ$ – $360^\circ$ . Für jeden Basisbestandteil der Region wird dann das entsprechende Verdeckungsintervall berechnet und aus der Menge der zu prüfenden Winkel entfernt. Wird z.B. der Winkel von  $45^\circ$ – $90^\circ$  durch das erste Element überdeckt, so enthält die Menge der noch abzudeckenden Winkel  $w$  im nächsten Schritt die Winkelintervalle  $0^\circ$ – $45^\circ$  und  $90^\circ$ – $360^\circ$ . Andere Realisierungen dieser Struktur sind natürlich möglich.

Der Algorithmus kann effizienter gemacht werden:

- Sobald alle Richtungen überdeckt sind, kann der Algorithmus **WAHR** ausgeben und abbrechen.
- Sind die Elemente von  $A$  so geordnet, dass von  $p$  ausgehend nach außen hin gesucht wird, so lässt sich die Suche nach verdeckenden Elementen beschleunigen:
  - Bei gleich großen Strecken verdeckt eine näher bei  $p$  liegende Strecke im Fernbereichsfall einen größeren Winkel als eine weiter entfernte.
  - Liegen in einer noch nicht verdeckten Richtung keine weiteren Elemente, so kann die Suche abgebrochen werden.

Im Fall vektorbasierter Repräsentation müssen hierzu die Bestandteile von  $A$  nach ihrer Entfernung von  $p$  vorsortiert werden. Rasterrepräsentationen sind per se räumlich sortiert.

Für die Berechnung des lokalen granularen Kerns muss für jeden Ort  $p$  geprüft werden können, ob es einen Kontextort gibt, bezüglich dem  $p$  lokal umschlossen ist von der Region  $A$ . Dies kann Alg. 1 nicht leisten. Eine Annäherung an dieses Problem bietet Alg. 2. Der Algorithmus geht von einer nach der Entfernung zu  $p$  vorsortierten Liste von Bestandteilen von  $A$  aus und löscht jeweils wie in Alg. 1 das Verdeckungsintervall aus der Menge noch zu prüfender Winkel, sammelt aber jeweils die Bestandteile von  $A$ , die zur Löschung des Winkelintervalls beigetragen haben, in einer Menge  $C$ . Sind

---

Algorithmus 1: Umschlossener Ort

---

**function** INT( $p, A$ )

Sei  $A$  eine Region gegeben als Menge von Strecken  $s$ . Sei  $p$  ein Ort.  $w$  sei eine Menge von Winkeln (zu Beginn das Winkelintervall von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ ).

**while**  $A \neq \emptyset$  **do**

    Wähle  $s \in A$ .

    Entferne  $s$  aus  $A$ .

**if**  $s \circ p$  **then**

        Lösche den in  $p$  enthaltenen Teil von  $s$ , so dass null bis zwei Teilstrecken  $s_1, s_2$ , die außerhalb von  $p$  liegen, entstehen. Füge  $s_1, s_2$  zu  $A$  hinzu.

**else**

$w_s$  sei das durch  $s$  bestimmte Verdeckungsintervall.

        Lösche  $w_s$  aus  $w$ .

**end if**

**end while**

**if**  $w$  ist leer **then**

    Liefere **WAHR** zurück

**else**

    Liefere **FALSCH** zurück

**end if**

**end function**

---

alle Richtungen abgeprüft, ist also  $p$  als umschlossen berechnet, so wird geprüft, ob die Elemente von  $C$  nahe genug bei  $p$  liegen, so dass es einen direkten Kontextort  $p_k$  zu  $p$ , mit  $p \triangleleft p_k$  geben kann, in dem alle Elemente von  $C$  enthalten sind. Der Algorithmus kann beschleunigt werden, wenn nur die Teile von  $A$  genauer untersucht werden, die überhaupt nahe genug an  $p$  liegen, um in einem direkten Kontextort von  $p$  zu liegen. Hierzu werden nur die Teile von  $A$  betrachtet, die in einem Ort  $p_x$  liegen, der alle Kontextorte von  $p$  enthält.

In der jetzigen Form arbeitet der Algorithmus nur dann korrekt, wenn ausgeschlossen ist, dass sich Strecken zwischen den Endpunkten schneiden. Ansonsten könnte es vorkommen, dass ein Endpunkt einer Strecke  $s_1$  hinter einer anderen relevanten Strecke  $s_2$  verschwindet, also nicht relevant ist, der Algorithmus diesen Endpunkt aber und nicht etwa den Kreuzungspunkt für die Berechnung des Intervalls verwendet. Für kurze Strecken ist dieser Fehler gering. In der Implementation wurde daher vor der Berechnung eine entsprechende Aufteilung aller Strecken vorgenommen.

Auch der Algorithmus für lokal umschlossene Orte profitiert von einer räumlichen Vorsortierung der Menge  $A$ . Die Einordnung der Elemente in die Liste kann dadurch erheblich beschleunigt werden. Die Komplexität der Berechnung von  $p_{\min}$  dem kleinsten umschließenden Ort der Punktmenge  $C$  mit Kardinalität  $n$  variiert je nach dem für die Modellierung einer Domäne gewählten Ortesystem: Der minimale umschließende Kreis einer Punktmenge lässt sich in  $O(n \log n)$  berechnen,<sup>3</sup> das minimale, umschließende Rechteck in  $O(n)$  [87].

Die Komplexität der beiden Algorithmen hängt von zwei Parametern ab: der Anzahl  $n$  der Elemente  $s$  von  $A$ , die behandelt werden müssen, und der Anzahl  $m$  der Intervalle, die für die Ausführung der Operation *Lösche  $w_s$  aus  $w$*  maximal betrachtet werden müssen. Es ergibt sich damit eine Komplexität  $O(n \cdot m)$ . Je nach Implementation der Winkelmenge variiert auch  $m$ . Im schlimmsten Fall, der in der verwendeten Implementation durch eine Menge von Winkelintervallen theoretisch möglich ist, gilt  $m = n$ . Für die berechneten Beispiele war  $m$  allerdings stets erheblich kleiner. Ist  $w$  hingegen z.B. als Boolean-Array implementiert, so ist  $m$  konstant. Die Array-Implementation ist allerdings bei zu grober Rasterung der Winkleinheiten eventuell nicht ausreichend exakt.

Mit Hilfe von Alg. 2 kann nun auch der approximative Algorithmus zur Berechnung des lokalen granularen Kerns aufgestellt werden, der für die Berechnung der Abbildungen in Kap. 7 verwendet wurde. Für den Algorithmus muss eine Menge aller zu prüfender Orte der Granularität aufgestellt werden, z.B. indem man die ganze Region  $A$  oder einen bestimmten Bildausschnitt mit einem Raster von Orten überdeckt. Zwei im Raster benachbarte Orte sollten einander überlagern gemäß  $\sqsupseteq$  (D34) oder sogar voneinander granular ununterscheidbar sein gemäß  $\sqsupseteq$  (D33). Für jeden dieser Orte kann dann bestimmt werden, ob er von der Region granular umschlossen gemäß Alg. 2 ist. Für alle Punkte, die in einem umschlossenen Ort liegen, gilt  $\text{LGK}(A, P, \gamma)$ .

---

<sup>3</sup>Es existiert sogar ein Algorithmus, der den minimalen umschließenden Kreis in linearer Zeit berechnet (s. Dyer und Megiddo [25]) und sich daher auch für große Mengen von Punkten eignet.



## Algorithmus 2: Granular umschlossener Ort

---

**function** INT-G( $p, A$ )

Sei  $A$  eine Region gegeben als Menge von Strecken  $s$ . Sei  $p$  ein Ort und  $\gamma$  diejenige Granularität, so dass  $\text{grn}(\gamma, p)$ .  $w$  sei ein Winkelintervall von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ ,  $L$  eine leere Liste.  $p_x$  sei der kleinste Ort, der jeden möglichen direkten Kontextort  $p_k$  von  $p$  enthält.

**while**  $A \neq \emptyset$  **do**Wähle  $s \in A$ .**if**  $s \circ p_x$  **then****if**  $s \circ p$  **then**

Lösche den in  $p$  enthaltenen Teil von  $s$ , so dass maximal zwei Teilstrecken  $s_1, s_2$ , die außerhalb von  $p$  liegen, entstehen. Füge  $s_1, s_2$  zu  $A$  hinzu.

**else**

Berechne  $s'$ , den in  $p_x$  enthaltenen Teil von  $s$ .

Sei  $d$  die Distanz zwischen  $s'$  und  $p$ .

Ordne  $s'$  nach  $d$  in  $L$  ein.

**end if****end if**Entferne  $s$  aus  $A$ .**end while**

Sei  $C$  eine leere Menge von Punkten.

**while**  $L \neq \text{leereListe} \wedge w$  ist nicht leer **do**Nimm das erste Element  $s$  aus  $L$ . $w_s$  sei das durch  $s$  bestimmte Verdeckungsintervall.**if**  $w_s$  ist noch in  $w$  **then**Lösche  $w_s$  aus  $w$ .Füge die Endpunkte der benötigten Teilstrecken von  $s$  zu  $C$  hinzu.**end if**Entferne  $s$  aus  $L$ .**end while****if**  $w$  ist leer **then**Sei  $p_{\min}$  der kleinste umschließende Ort von  $C$ .**if**  $p_{\min} \sim \gamma$  **then**Liefere **WAHR** zurück**else**Liefere **FALSCH** zurück**end if****else**Liefere **FALSCH** zurück**end if****end function**


---

---

Algorithmus 3: Lokaler granularer Kern

---

**function** LGK( $\gamma, A$ )

Sei  $M$  eine Menge von zu prüfenden Orten  $p$  wie z.B. ein möglichst enges Raster von Orten. Für die Orte  $p$  gelte  $\text{grn}(\gamma, p)$ . Sei  $K$  die zu Beginn leere Menge aller bereits gefundenen Punkte des lokalen granularen Kerns von  $A$  bezüglich  $\gamma$ .

**for all**  $p \in M$  **do**

**if** INT-G( $p, A$ ) **then**

$K \leftarrow K \cup p$

**end if**

**end for**

Liefere  $K$  zurück

**end function**

---

# Literaturverzeichnis

- [1] Aiello, M. und J. van Benthem: *A modal walk through space*. Journal of applied non classical logics, 12(3-4), 2002.
- [2] Allen, G.: *From knowledge to words to wayfinding: Issues in the production and comprehension of route directions*. In: Hirtle, S. und A. Frank (Hrsg.): *Spatial Information Theory*, S. 363–372. Springer, Berlin, 1997.
- [3] Allen, J.: *Towards a general theory of action and time*. Artificial Intelligence, 23:123–154, 1984.
- [4] Asher, N. und L. Vieu: *Toward a geometry for common sense: A semantics and a complete axiomatization for mereotopology*. In: Mellish, C. (Hrsg.): *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, S. 846–852, San Francisco, 1995. Morgan Kaufmann.
- [5] Bennett, B.: *Application of supervaluation semantics to vaguely defined spatial concepts*. In: Montello, D. (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, S. 108–123, Berlin, 2001. Springer.
- [6] Bennett, B.: *A categorical axiomatisation of region-based geometry*. Fundamenta Informaticae, 46:145–158, 2001.
- [7] Bennett, B.: *What is a forest? on the vagueness of certain geographic concepts*. Topoi, 20(2):189–201, 2001.
- [8] Bettini, C., S. Jajodia und X. S. Wang: *Time granularities in databases, data mining, and temporal reasoning*. Springer, 2000.
- [9] Bittner, T. und B. Smith: *A theory of granular partitions*. In: Duckham, M., M. F. Goodchild und M. F. Worboys (Hrsg.): *Foundations of Geographic Information Science*, S. 117–151. Taylor & Francis, London, New York, 2003.
- [10] Bittner, T. und B. Smith: *Vague reference and approximating judgments*. Spatial Cognition and Computation, 3(2 & 3):137–156, 2003.
- [11] Bittner, T. und J. G. Stell: *Stratified rough sets and vagueness*. In: Kuhn, W., M. Worboys und S. Timpf (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, S. 270–286, Berlin, 2003. Springer.

- [12] Blum, H.: *Biological shape and visual science*. Journal of Theor. Biol., 38:205–287, 1973.
- [13] Borgo, S., N. Guarino und C. Masolo: *A pointless theory of space based on strong connection and congruence*. In: Aiello, L. C., J. Doyle und S. Shapiro (Hrsg.): *KR'96: Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, S. 220–229. Morgan Kaufmann, San Francisco, California, 1996.
- [14] Carnap, R.: *Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen*. Springer, Wien, 1960.
- [15] Carnap, R.: *Philosophical Foundations of Physics*. Basic Books, New York, NY, 1966.
- [16] Casati, R. und A. C. Varzi: *Holes and Other Superficialities*. Bradford Books, paperback edition (with revisions) Aufl., 1995.
- [17] Casati, R. und A. C. Varzi: *Parts and places: the structure of spatial representations*. MIT Press, 1999.
- [18] Cohn, A. G. und S. M. Hazarika: *Qualitative spatial representation and reasoning: An overview*. Fundamenta Informaticae, 46(1-2):1–29, 2001.
- [19] Cohn, A. und N. Gotts: *The 'egg-yolk' representation of regions with indeterminate boundaries*. In: Burrough, P. und A. Frank (Hrsg.): *Geographic Objects with Indeterminate Boundaries*, S. 171–187, London, 1996. Taylor & Francis.
- [20] Curry, M. R.: *Discursive displacement and the seminal ambiguity of space and place*. In: Lievrouw, L. und S. Livingstone (Hrsg.): *The Handbook of New Media: Social Shaping and Consequences of ICT*, Kap. 29, S. 502–517. Sage Publications, London, 2002.
- [21] Davis, E.: *Order of magnitude comparisons of distance*. Journal of Artificial Intelligence Research, 10:1–38, 1999.
- [22] Deemter, K. van: *The sorites fallacy and the context-dependence of vague predicates*. In: Kanazawa, M., C. Pinon und H. de Swart (Hrsg.): *Quantifiers, Deduction, and Context*, S. 59–86, Stanford, Ca., 1995. CSLI Publications.
- [23] Denis, M.: *The description of routes: A cognitive approach to the production of spatial discourse*. Cahier de Psychologie Cognitive, 16:409–458, 1997.
- [24] Dugat, V., P. Gambarotto und Y. Larvor: *Qualitative geometry for shape recognition*. Applied Intelligence, 17:253–263, 2002.
- [25] Dyer, M. und N. Megiddo: *Linear programming in low dimensions*. In: Goodman, J. E. und J. O'Rourke (Hrsg.): *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Kap. 38, S. 699–710. CRC Press LLC, 1997.

- [26] Egenhofer, M. J. und D. M. Mark: *Naive geography*. In: Frank, A. U. und W. Kuhn (Hrsg.): *Spatial Information Theory: A Theoretical Basis for GIS*, S. 1–15. Springer, 1995.
- [27] Erikson, C.: *Hierarchical Levels of Detail to Accelerate the Rendering of Large Static and Dynamic Polygonal Environments*. Dissertation, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, 2000.
- [28] Eschenbach, C., C. Habel und L. Kulik: *Representing simple trajectories as oriented curves*. In: Kumar, A. und I. Russell (Hrsg.): *Proc. of the 12th International FLAIRS Conference*, S. 431–436, Menlo Park, CA, 1999. AAAI Press.
- [29] Eschenbach, C., C. Habel, L. Kulik und A. Leßmöllmann: *Shape nouns and shape concepts: A geometry for ‘corner’*. In: Freksa, C., C. Habel und K. Wender (Hrsg.): *Spatial Cognition: An Interdisciplinary Approach to Representing and Processing Spatial Knowledge*, S. 177–201. Springer, Berlin, 1998.
- [30] Eschenbach, C. und L. Kulik: *An axiomatic approach to the spatial relations underlying ‘left’–‘right’ and ‘in front of’–‘behind’*. In: *KI-97: Advances in Artificial Intelligence*, S. 207–218. Springer, Berlin, 1997.
- [31] Eschenbach, C., L. Tschander, C. Habel und L. Kulik: *Lexical specifications of paths*. In: Freksa, C., W. Brauer, C. Habel und K. Wender (Hrsg.): *Spatial Cognition II*, S. 127–144. Springer, Berlin, 2000.
- [32] Fine, K.: *Vagueness, truth, and logic*. *Synthese*, 30:265–300, 1975.
- [33] Forbes, G.: *Indexicals*. In: Gabbay, D. und F. Guenther (Hrsg.): *Handbook of Philosophical Logic*, Bd. IV, S. 463–490. D. Reidel, 1989.
- [34] Fraczak, L.: *Generating ‘mental maps’ from route descriptions*. In: Olivier, P. und K.-P. Gapp (Hrsg.): *Representation and Processing of Spatial Expressions*, S. 185–200. Erlbaum, Mahwah, NJ, 1998.
- [35] Franceschet, M. und A. Montanari: *Branching within time: an expressively complete and elementarily decidable temporal logic for time granularity*. *Research on Language and Computation*, 1(3–4):229–263, 2003.
- [36] Frank, A. U. und S. Timpf: *Multiple representations for cartographic objects in a multi-scale tree – an intelligent graphical zoom*. *Computers and Graphics*, 18(6):823–829, 1994.
- [37] Frank, A.: *The prevalence of objects with sharp boundaries in GIS*. In: Burrough, P. und A. Frank (Hrsg.): *Geographic Objects with Indeterminate Boundaries*, S. 29–40. Taylor & Francis, London, 1996.
- [38] Gabbay, D. und J. M. Moravcsik: *Sameness and individuation*. *Journal of Philosophy*, 70:513–527, 1973.

- [39] Galton, A.: *A critical examination of allen's theory of action and time*. Artificial Intelligence, 42:159–188, 1990.
- [40] Galton, A.: *Qualitative Spatial Change*. Oxford University Press, 2000.
- [41] Galton, A.: *A formal theory of objects and fields*. In: Montello, D. (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, S. 458–473, Berlin, 2001. Springer.
- [42] Goodchild, M.: *A geographer looks at spatial information theory*. In: Montello, D. (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, S. 1–13, Berlin, 2001. Springer.
- [43] Habel, C.: *'zwischen'-Bericht*. In: Habel, C., M. Herweg und K. Rehkämper (Hrsg.): *Raumkonzepte in Verstehensprozessen*, S. 37–69. Niemeyer, Tübingen, 1989.
- [44] Habel, C.: *Hierarchical representations of spatial knowledge: Aspects of embedding and granularity*. In: *Second International Colloquium on Cognitive Science (ICCS-91)*, 1991.
- [45] Habel, C.: *Discreteness, finiteness, and the structure of topological spaces*. In: Eschenbach, C., C. Habel und B. Smith (Hrsg.): *Topological Foundations of Cognitive Science: Papers from the Workshop at the FISI-CS Buffalo, NY. July 9-10, 1994*, S. 81–90, 1994.
- [46] Habel, C. und C. Eschenbach: *Abstract structures in spatial cognition*. In: Freksa, C., M. Jantzen und R. Valk (Hrsg.): *Foundations of Computer Science – Potential – Theory – Cognition*, S. 363–378. Springer, Berlin, 1997.
- [47] Halpern, J. Y.: *Intransitivity and vagueness*. In: *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proc. 9th Intl. Conf. (KR 2004)*, S. 121–129, 2004.
- [48] Han, J., M. Kamber und A. K. H. Tung: *Spatial clustering methods in data mining: A survey*. In: Miller, H. und J. Han (Hrsg.): *Geographic Data Mining and Knowledge Discovery*, S. 188–217. Taylor & Francis, 2001.
- [49] Heipke, C. und B.-M. Straub: *Relations between multi scale imagery and GIS aggregation levels for the automatic extraction of vegetation areas*. In: *Proceedings, ISPRS Joint Workshop, Sensors and Mapping from Space 1999*, 1999.
- [50] Herskovits, A.: *Semantics and pragmatics of locative expressions*. Cognitive Science, S. 341–378, 1985.
- [51] Herskovits, A.: *Schematization*. In: Olivier, P. und K.-P. Gapp (Hrsg.): *Representation and Processing of Spatial Expressions*, S. 149–162. Erlbaum, Mahwah, NJ, 1998.
- [52] Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Stuttgart, 1956.

- [53] Hobbs, J.: *Granularity*. In: *Proceedings of IJCAI-85*, S. 432–435, 1985.
- [54] Hörhammer, M. und M. Freeston: *Spatial indexing with a scale dimension*. In: Güting, R., D. Papadias und F. Lochovsky (Hrsg.): *SSD'99*, Bd. 1651 d. Reihe LNCS, S. 52–71. Springer, 1999.
- [55] Hornsby, K. und M. J. Egenhofer: *Modeling moving objects over multiple granularities*. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 36(1–2):177–194, 2002.
- [56] Hyde, D.: *Sorites paradox*. In: Zalta, E. N. (Hrsg.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. CSLI (internet publication), Stanford, Ca., Fall 2002. <http://plato.stanford.edu/archives/fall2002/entries/sorites-paradox/>.
- [57] Jain, A., R. Duin und J. Mao: *Statistical pattern recognition: A review*. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(1):4–37, January 2000.
- [58] Klein, W.: *Wegauskünfte*. *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik*, 33:9–57, 1979.
- [59] Kosslyn, S.: *Image and Mind*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1980.
- [60] Kosslyn, S.: *Image and Brain: the Resolution of the Imagery Debate*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1994.
- [61] Krifka, M.: *Be brief and vague! and how bidirectional optimality theory allows for verbosity and precision*. In: Restle, D. und D. Zaefferer (Hrsg.): *Sounds and Systems. Studies in Structure and Change. A Festschrift for Theo Vennemann*, S. 439–458. Mouton de Gruyter, Berlin, 2002.
- [62] Kulik, L.: *Geometrische Repräsentation scharf und vage begrenzter Objekte*. Dissertation, Universität Hamburg, 2002. <http://www.dissertation.de/buch.php3?buch=1507>.
- [63] Kulik, L.: *Spatial vagueness and second-order vagueness*. *Spatial Cognition and Computation*, 3(2 & 3):157–183, 2003.
- [64] Kutz, O., H. Sturm, N. Suzuki, F. Wolter und M. Zakharyashev: *Logics of metric spaces*. *Transactions on Computational Logic*, 4(2):2–35, 2003.
- [65] Landau, B. und R. Jackendoff: *‘what’ and ‘where’ in spatial language and spatial cognition*. *Behavioural and Brain Sciences*, 16:217–238, 1993.
- [66] Levelt, W. J. M.: *Perspective taking and ellipsis in spatial description*. In: Bloom, P., M. A. Peterson, L. Nadel und M. F. Garrett (Hrsg.): *Language and Space*, S. 77–107. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [67] Levesque, H. J. und R. J. Brachman: *Expressiveness and tractability in knowledge representation and reasoning*. *Computational Intelligence*, 3(2):78–93, 1987. Canada.

- [68] Levinson, S. C.: *Frames of reference and Molyneux's question: Crosslinguistic evidence*. In: Bloom, P., M. A. Petersen, L. Nadel und M. F. Garrett (Hrsg.): *Language and Space*, S. 109–491. The MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [69] Lovelace, K., M. Hegarty und D. Montello: *Elements of good route directions in familiar and unfamiliar environments*. In: Freksa, C. und D. Mark (Hrsg.): *Spatial Information Theory*, S. 65–82. Springer, 1999.
- [70] Luebke, D., B. Watson, J. D. Cohen, M. Reddy und A. Varshney: *Level of Detail for 3D Graphics*. Elsevier, New York, 2002.
- [71] Mallot, H.: *Spatial cognition: Behavioural competences, neural mechanisms, and evolutionary scaling*. *Kognitionswissenschaft*, 8:40–48, 1999.
- [72] Marr, D. und H. K. Nishihara: *Representation and recognition of the spatial organization of three-dimensional shapes*. *Proceedings of the Royal Society of London*, 200:269–294, 1978.
- [73] Montanari, A., A. Peron und A. Policriti: *The way to go: Multi-level temporal logics*. In: Gerbrandy, J., M. Marx, M. de Rijke und Y. Venema (Hrsg.): *Liber Amicorum for the Fiftieth Birthday of Johan van Benthem*, S. 1–12. ILLC, 1999.
- [74] Montanari, A., A. Peron und A. Policriti: *The taming (timing) of the states*. *The Logic Journal of IGPL*, 8(5):681–699, 2000.
- [75] Montello, D. R.: *Scale and multiple psychologies of space*. In: Frank, A. U. und I. Campari (Hrsg.): *Spatial Information Theory: A Theoretical Basis for GIS*, S. 312–321, Berlin, 1993. Springer.
- [76] Montello, D. R., S. I. Fabrikant, M. Ruocco und R. S. Middleton: *Testing the first law of cognitive geography on point-display spatializations*. In: Kuhn, W., M. Worboys und S. Timpf (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, Berlin, 2003. Springer.
- [77] Moratz, R. und J. Wallgrün: *Spatial reasoning about relative orientation and distance for robot exploration*. In: Kuhn, W., M. Worboys und S. Timpf (Hrsg.): *Spatial Information Theory*, S. 61–74. Springer, 2003.
- [78] Noonan, H. W.: *Objects and Identity*. Nijhoff, Den Haag, 1980.
- [79] Ohlbach, H. J. und D. M. Gabbay: *Calendar logic*. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 8(4), 1998.
- [80] Palmer, S. E.: *Fundamental aspects of cognitive representations*. In: Rosch, E. und B. L. Lloyd (Hrsg.): *Cognition and Categorization*, S. 259–302. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1978.



- [81] Palmer, S. E.: *Vision science—photons to phenomenology*. MIT Press, Cambridge, MA, 1999.
- [82] Pawlak, Z.: *Rough sets*. International Journal of Computer and Information Science, 11:341–356, 1982.
- [83] Peitgen, H.-O., H. Jürgens und D. Saupe: *Bausteine des Chaos: Fraktale*. Springer, Berlin, 1992.
- [84] Pinto, H., A. Gómez-Pérez und J. P. Martins: *Some issues on ontology integration*. In: Benjamins, V. (Hrsg.): *Proceedings of the IJCAI'99 Workshop on Ontology and Problem-Solving Methods: Lesson Learned and Future Trends*, S. 7–1–712, Amsterdam, 1999. CEUR Publications.
- [85] Pizer, S. M., K. Siddiqi, G. Székely, J. N. Damon und S. W. Zucker: *Multiscale medial loci and their properties*. International Journal of Computer Vision, 55:155–179, 2003.
- [86] Pratt, I. und O. Lemon: *Ontologies for plane, polygonal mereotopology*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 38(2):225–245, 1997.
- [87] Preparata, F. und M. Shamos: *Computational Geometry*. Springer, Berlin, 1985.
- [88] Pylyshyn, Z.: *Mental imagery: In search of a theory*. Behavioral and Brain Sciences, 25(2):157–237, 2002.
- [89] Raiman, O.: *Order of magnitude reasoning*. In: *Proc. American Conf. on AI (AAAI-86)*, S. 100–104, 1986.
- [90] Randell, D., Z. Cui und A. Cohn: *A spatial logic based on region and connection*. In: *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proc. 3rd Intl. Conf. (KR'92)*, S. 165–176. Morgan Kaufmann, 1992.
- [91] Regier, T. und L. Carlson: *Grounding spatial language in perception: An empirical and computational investigation*. Journal of Experimental Psychology: General, 130:273–298, 2001.
- [92] Reiter, R.: *A logic for default reasoning*. Artificial Intelligence, 13:81–132, 1980.
- [93] Reitsma, F. und T. Bittner: *Scale in object and process ontologies*. In: Kuhn, W., M. Worboys und S. Timpf (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, S. 13–27, Berlin, 2003. Springer.
- [94] Rigaux, P., M. Scholl und A. Voisard: *Spatial Databases with Application to GIS*. Morgan Kaufmann, 2002.
- [95] Russell, B.: *Our Knowledge of the External World*. Routledge, London, New York, 1914.

- [96] Schilder, F. und C. Habel: *From temporal expressions to temporal information: Semantic tagging of news messages*. In: *Proceedings of ACL 01 workshop on temporal and spatial information processing*, Toulouse, France, 2001.
- [97] Schmidtke, H.: *Relative Lokalisierung ausgedehnter Objekte in 2-dimensionalen Layouts*. Diplomarbeit, Arbeitsbereich WSV, Fachbereich Informatik, Universität Hamburg, 1999. <ftp://ftp.informatik.uni-hamburg.de/pub/unihh/informatik/WSV/RelLokAuscg.pdf>.
- [98] Schmidtke, H.: *The house is north of the river: Relative localization of extended objects*. In: Montello, D. (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, S. 414–430, Berlin, 2001. Springer.
- [99] Schmidtke, H.: *A geometry for places: Representing extension and extended objects*. In: Kuhn, W., M. Worboys und S. Timpf (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, S. 235–252, Berlin, 2003. Springer.
- [100] Schmidtke, H., L. Tschander, C. Eschenbach und C. Habel: *Change of orientation*. In: Zee, E. van der und J. Slack (Hrsg.): *Representing Direction in Language and Space*, S. 166–190. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [101] Schulz, S. und U. Hahn: *Parthood as spatial inclusion – evidence from biomedical conceptualizations*. In: *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proc. 9th Intl. Conf. (KR 2004)*, S. 55–63, 2004.
- [102] Simons, P.: *Parts – A Study in Ontology*. Oxford University Press, Oxford, 1987.
- [103] Smith, B. und A. C. Varzi: *Fiat and bona fide boundaries : Towards on ontology of spatially extended objects*. In: Hirtle, Stephen C.; Frank, A. U. (Hrsg.): *Spatial Information Theory*, S. 103–119, Berlin, 1997. Springer.
- [104] Stell, J. und M. Worboys: *Stratified map spaces*. In: Poiker, T. und N. Chrisman (Hrsg.): *Proceedings of the 8th International Symposium on Spatial Data Handling*, S. 180–189, British Columbia, 1998. Taylor and Francis.
- [105] Suppes, P. und J. Zinnes: *Basic measurement theory*. In: Luce, R., R. Bush und E. Galanter (Hrsg.): *Handbook of Mathematical Psychology*. John Wiley & Sons, New York, 1963.
- [106] Talmy, L.: *How language structures space*. In: Pick, H. und L. Acredolo (Hrsg.): *Spatial Orientation: Theory, Research, and Application*, S. 225–282. Plenum, New York, 1983.
- [107] Tarski, A.: *Foundations of the geometry of solids*. In: *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, S. 24–29. Clarendon, Oxford, 1956.

- [108] Timpf, S. und W. Kuhn: *Granularity transformations in wayfinding*. In: Freksa, C., W. Brauer, C. Habel und K. F. Wender (Hrsg.): *Spatial Cognition*, S. 77–88. Springer, 2003.
- [109] Trullier, O., S. Wiener, A. Berthoz und J.-A. Meyer: *Biologically based artificial navigation systems: Review and prospects*. *Progress in Neurobiology*, 51:483–544, 1997.
- [110] Tschander, L., H. Schmidtke, C. Eschenbach, C. Habel und L. Kulik: *A geometric agent following route instructions*. In: Freksa, C., W. Brauer, C. Habel und K. Wender (Hrsg.): *Spatial Cognition III*. Springer, Berlin, 2002.
- [111] Tversky, B. und P. Lee: *On pictorial and verbal tools for conveying routes*. In: Freksa, C. und D. Mark (Hrsg.): *Spatial Information Theory*, S. 51–64. Springer, Berlin, 1999.
- [112] Varzi, A.: *Vagueness*. In: Nadel, L. (Hrsg.): *Encyclopedia of Cognitive Science*, S. 459–464. Macmillan and Nature Publishing Group, London, 2003.
- [113] Venema, Y.: *Temporal logic*. In: Goble, L. (Hrsg.): *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, S. 203–223. Blackwell Publishers, Malden, USA, 2001.
- [114] Walter, H. und S.-W. Breckle: *Ökologische Grundlagen in globaler Sicht*, Bd. 1 d. Reihe *Ökologie der Erde: Geo-Biosphäre*. Gustav Fischer Verlag, 1991.
- [115] Walter, H. und S.-W. Breckle: *Spezielle Ökologie der gemäßigten und arktischen Zonen Euro-Nordasiens*, Bd. 3 d. Reihe *Ökologie der Erde: Geo-Biosphäre*. Gustav Fischer Verlag, 1994.
- [116] Werner, S., B. Krieg-Brückner und T. Herrmann: *Modelling navigational knowledge by route graphs*. In: Freksa, C., W. Brauer, C. Habel und K. Wender (Hrsg.): *Spatial Cognition II*, S. 295–316. Springer, Berlin, 2000.
- [117] Wertheimer, M.: *Untersuchung zur Lehre von der Gestalt*. *Psychologische Forschung*, 4:301–350, 1923.
- [118] Winter, S.: *Route adaptive selection of salient features*. In: Kuhn, W., M. Worboys und S. Timpf (Hrsg.): *Spatial Information Theory: Foundations of Geographic Information Science*, Berlin, 2003. Springer.
- [119] Worboys, M.: *Metrics and topologies for geographic space*. In: Kraak, M.-J. (Hrsg.): *Advances in GIS research II : proc. of the 7th International Symposium on Spatial Data Handling*, S. 365–376, 1996.
- [120] Wunderlich, D. und M. Herweg: *Lokale und Direktionale*. In: Stechow, A. von und D. Wunderlich (Hrsg.): *Handbuch der Semantik*, S. 758–785. De Gruyter, Berlin, 1991.

- [121] Wunderlich, D. und R. Reinelt: *How to get from here to there*. In: Jarvella, R. und W. Klein (Hrsg.): *Speech, Place, and Action*, S. 183–201. Wiley, Chichester, 1982.
- [122] Zadeh, L.: *Fuzzy sets and information granularity*. In: Gupta, M., R. Ragade und R. Yager (Hrsg.): *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, S. 3–18. North-Holland, Amsterdam, 1979.

# Index

- < 43, 63
- $\times$  123
- $\beta$  30, 84
- $\bigcirc$  30
- $\approx$  46
- $\equiv$  42, 63, 66
- $\sphericalangle$  46, 96
- $\sphericalcap$  139
- $\sqcap$  30
- $\sphericalcup$  96
- $\sphericalcup$  139
- $\#$  60
- $\triangleleft$  87
- $\trianglelefteq$  87
- $\#$  60
- $\alpha$  106
- $\iota$  29
- $\nu$  107
- $\parallel$  31
- $\sim$  45
- $\subset$  123
- $\boxtimes$  88
- $\square$  88
- $\boxtimes$  88
- $\triangleq$  60
- GGK 117
- LGK 117
- ausged 97
- col 30
- dm 66
- ext 83
- gproj 84
- grenzG 58
- grn 45
- int 33, 84, 90
- ktx 45
- linear 98
- lokal 97
- planar 98
- proj 33
- punktuell 97
- subst 83, 90
- vollst 83
- Addierbarkeitsaxiom 68 f., 73
- äußere Struktur 92
- Aggregationen 93, 95, 113, 124–130
- Anordnung 28 ff.
- Archimedisches Axiom 28, 48
- Auflösung 1, 5, 95 f.
- Ausdehnung 39–43, 55, 57, 97
- Ausdehnungsspektrum 97–100
- Ausgedehntheit 26
- axiomatische Methode 25 f.
- Axiomengruppen 28
- Axiomensysteme 25
- Begrenzungsaxiome 61
- Beschreibungsformalismus 28
- Clustering 19, 118 f., 131
- Data-Mining 38
- Datenformat 8 ff.
  - rasterbasiertes 65
  - vektororientiertes 80
- Default 15
- Detailgrad 1 f., 9, 11, 40
- Dichte 19, 119, 126

- dichte Struktur 38, 42 f., 48  
Dimension 27, 34, 41, 73, 104  
Dimensionalität 3, 10, 17, 77, 81, 92, 96–104, 109–112  
diskrete Struktur 53  
Diskretisierung 89  
dreidimensionaler Raum 34 f., 73  
Dreiecksungleichung 70 ff.
- Einbettung 5  
Enthaltensein 34, 82, 122, 131  
Entscheidungspunkte 7, 39, 105, 110 f.  
environmental space 125  
externe Ausdehnung 82  
externer Ort 82
- Formbeschreibung 19  
Formschicht 20, 78, 81, 92, 113, 121  
Fortbewegung 89  
Fotometapher 44  
Fraktal 31, 104
- geographische Informationssysteme 1, 12  
Geometrie 25 f., 28 f., 57 f.  
geometrischer Agent 7  
Geraden 29  
Gestaltprinzipien 119 f., 131  
GIS *siehe* geographische Informationssysteme  
grain 5, *siehe auch* Granulat  
granulare Homogenität 79, 98  
granulare Partitionen 12, 37  
Granularität 1 ff., 10, 40, 42, 44  
    als Kontextparameter 39, 51 ff.  
    temporale 38, 48–54  
Granularitätsebene *siehe* Granularität  
Granularitätsebenenwechsel 51 ff., 78, 86–90  
Granularitätsmechanismus 6, 11  
Granularitätsschichten 2 f., 20 f., 78, 82, 92  
Granulat 5, 45, 86  
Granulatsgröße 10, 16 f., 44 f.  
Grenzen 8, 19, 101  
Größenkongruenz 62
- Halbordnung 46 f.  
Hauptausdehnung 41, 97  
hierarchisches Planen 55 f., 71, 77
- Identität 90  
indexikalische Ausdrücke 39  
Indifferenz von Granularitäten 46  
Individuierung von Objekten 19  
innere Struktur 93  
interne Ausdehnung 84  
interner Ort 84  
intrinsische Granularität 18, 78, 121  
Inzidenz 28
- just noticeable difference 13
- Kalenderlogiken 39  
Kalendersysteme 11, 38 f., 53  
Karte 95 f.  
kartographische Generalisierung 1, 81, 101  
Kognitionswissenschaft 3 f., 26  
kognitive Karten 7, 17, 77  
Kongruenz 26, 28, 55, 58  
Konstituente 20, 113 ff.  
Kontext 3, 39, 78  
Kontextabhängigkeit 51, 73, 90 f.  
Kontextbereich 5, 18, 78  
Kontextgröße 44 f.  
kontinuierliche Struktur 48  
konvexe Hülle 33, 35  
Kreise 56 f., 62 f.
- Längen 55  
large-scale objects 125  
layered metric temporal logics 38 f.  
Lokalisationsaspekte 81, *siehe auch* Granularitätsschichten  
Lokalisierung 78
- Maßstab 9 f., 95  
maximale Ausdehnung 45  
mentales Bild 5  
Mereologie 26  
Mereotopologie 26 f., 37  
Messtheorie 44

- Messung 9, 42 f.  
 Metrik 26, 57, 69–73  
 Mittelachsenansatz 19, 27, 131  
 multigranulare Entitäten 29  
 Multimodalität 5  
  
 Nähe 39, 104–109  
 naive Geographie 125  
 Navigation 55, 65, 89, 110 ff.  
 nicht-extensiv 42  
  
 Objekterkennung 19  
 Objektidentität 113, 121–124  
 Ontologie 31, 55, 78, 88, 121  
 order of magnitude calculus 54  
 Ort (geometrisch) 8, 57, 61–65  
 Ort (kognitiv) 6  
 Ortesysteme 65, 83, 87  
 Ortserkennung 6, 55  
  
 Parallelenaxiom 28  
 Partitionierung 78, 88  
 Partitionierungsansätze 16, 37 ff., 41, 53,  
     57  
 Partonomie 115  
 Persistenzkriterien 121  
 Pfad 7, 89, 110  
 Positionsschicht 20, 78, 81, 91  
 projektiver Zusammenhang 32  
     granularer 84  
 Punkte 29  
  
 qualitativ 42, 73  
 qualitatives räumliches Schließen 27  
  
 Ränder 101  
 räumliche Präpositionen 16 f., 26, 39, 104  
 räumlicher Kontext 17, 86 ff., 104, *siehe*  
     *auch* Kontextbereich  
 Raumlogiken 39  
 Raumrepräsentation 8  
 Region 31 f., 79, 84  
     eines Objektes 113 ff., 117 ff.  
     konvexe 83  
     nicht zusammenhängende 85  
     offene 86  
     vage 129  
 region connection calculus 27  
 Regionen 29, 31–34  
 regionenbasierte Ansätze 26 f., 55, 90  
 relevante Prädikate 12  
 Relevanz 2 f.  
 Repräsentation 1, 3–10, 78, 95, 116  
 Repräsentationstheorie 3  
 Richtung 57  
 Routeninstruktionen 7, 39, 55, 65, 77, 105,  
     110 ff.  
  
 Schematisierung 16 ff., 77, 109 f.  
 sekundäre Ausdehnung 41, 97  
 Selbstlokalisierung 89  
 Skalierbarkeit 9  
 Sorites-Vagheit 13 ff., 52 f., 93, 126  
 Sorten 28  
 Stetigkeit 28  
 Strecken 55 f.  
 Streckenkongruenz 65–69  
 Streifen 57–61  
 substantielle Ausdehnung 83  
 substantieller Ort 83  
 Substanzschicht 20, 78, 81, 92, 113  
 symmetrischer Distanzraum 72  
  
 temporale Datenbanken 11, 38  
 temporale Logiken 11  
 Topologie 26  
  
 Überdeckungsaxiom 61  
 unigranulare Entitäten 29  
 Ununterscheidbarkeit 3, 11–16, 37, 44  
     von Granularitäten 44–47  
     von Objektregionen 121–124  
     von Orten 88 ff.  
 Vagheit 2, 8 f., 13, 19, 94, 113, 121, 124,  
     129, 131  
     höherer Ordnung 51  
 Veränderung 2  
 Verfeinerung 5, 45 f., 52 f., 78, 100  
 Vergrößerung *siehe* Verfeinerung

## *Index*

visueller Puffer 5

Zeiteinheit 38

Zeitintervalle 40, 42, 53

Zusammenhang 32, 84



# Glossar

- $<$  kleiner als 43, Größenvergleich von Orten (D21) 63
- $\asymp$  äquivalenz (D51) 123
- $\beta$  zwischen 30, zwischen (von Orten) (D29) 84
- $\bigcirc$  Überlappung (D3) 30
- $\approx$  Indifferenz von Granularitäten (D13) 46
- $\equiv$  Ausdehnungsgleichheit 42, Größenkongruenz von Orten (D20) 63, Größenkongruenz von Strecken (D24) 66
- $\prec$  feiner als (D12) 46, Ort ist feiner als eine Granularität (D39) 96
- $\preceq$  echt indifferent feiner (D52) 139
- $\sqsubseteq$  Teil von (D2) 30
- $\succ$  Ort ist gröber als eine Granularität (D40) 96
- $\succeq$  echt indifferent gröber (D53) 139
- $\approx$  Bemessen (D16) 60
- $\triangleleft$  direkter Teilort (D32) 87
- $\triangleleft\triangleleft$  indirekter Teilort (D31) 87
- $\#$  Kreuzen eines Streifens (D15) 60
- $\alpha$  eine Region befindet sich an einem Ort (D46) 106
- $\iota$  Inzidenz 29
- $\nu$  Nähe (D47) 107
- $\parallel$  Parallelität (D8) 31
- $\sim$  Kompatibilität zwischen einer Basisentität und einer Granularität (D11) 45

- $\subset$  Sublokalisierung von Regionen (D50) 123
- $\supset$  überlagernd (D34) 88
- $\square$  granular ununterscheidbar (D33) 88
- $\lrcorner$  benachbart (D35) 88
- $\triangle$  Kollokalisierung (D17) 60
- GGK** globaler granularer Kern (D49) 117
- LGK** lokaler granularer Kern (D48) 117
- ausged** ausgedehnte Objektregion in einem Kontext (D43) 97
- col** Kollinearität (D5) 30
- dm** Durchmesser eines Ortes (D23) 66
- ext** externer Ort (D25) 83
- gproj** granular projektiv zusammenhängend (D30) 84
- grenzG** Grenzgeraden eines Streifens (D14) 58
- grn** Granulatsgröße 45
- int** interner oder umschlossener Punkt (D10) 33, interner Ort (global) (D28) 84, interner Ort (lokal) (D37) 90
- ctx** Kontextgröße 45
- linear** lineare Objektregion in einem Kontext (D44) 98
- lokal** lokale Objektregion in einem Kontext (D42) 97
- planar** planare Objektregion in einem Kontext (D45) 98
- proj** projektiver Zusammenhang (D9) 33
- punktuell** punktuelle Objektregion in einem Kontext (D41) 97
- subst** substantieller Ort (global) (D26) 83, substantieller Ort (lokal) (D36) 90
- vollst** vollständiger Ort (D27) 83
- Ausdehnungsspektrum** Spanne von Größen, die mindestens notwendig ist, um ein komplexes Objekt vollständig zu repräsentieren 98

- Detailgrad** Stellung einer Repräsentation in einer Hierarchie gröberer und feinerer Repräsentationen 2
- externer Ort** Ort, der das Objekt vollständig enthält 82
- Formschicht** Bereich von Granularitätsebenen, in dem das Objekt in seiner diskreten Struktur individuiert wird (*siehe auch* Granularitätsschichten) 20
- Grain** *siehe* Granulat
- Granularität** Kontext-Parameter, der einen Mechanismus steuert, durch den eine komplexe Aufgabe handhabbar gemacht werden kann 2, 3, 10, 44
- Granularitätsebene** *siehe* Granularität
- Granularitätsschichten** Bezogen auf ein zu repräsentierendes Objekt diejenigen Bereiche von Granularitäten, in denen ein spezifischer räumlicher Aspekt des Objektes (Position, Form oder Substanz) relevant ist 2
- Granulat** Basisregion minimaler Größe in einer Raumrepräsentation, wie z.B. eine Rasterzelle 5
- interner Ort** Ort  $p$ , der bezüglich einer Objektregion so liegt, dass in jeder Richtung – d.h. in jeder Hälfte jedes Streifens, der den Ort bemisst – auch Orte liegen, die die Objektregion aber nicht  $p$  überlappen 84
- Konstituente** Teilobjekte eines Objektes, die die Substanz eines Objektes bilden, die Ziegel oder Mauern sind die Konstituenten eines Hauses 113, 114
- Kontextbereich** Region, die einen räumlichen Kontext darstellt, relativ zu dem Objekte repräsentiert sind 18
- Ort (geometrisch)** Geometrische Entität mit in allen Richtungen gleicher Ausdehnung, verwendet zur Charakterisierung räumlicher Granularität und räumlicher Kontexte (*siehe auch* Grain, Granulatsort, Kontextort, Ort (kognitiv)) 8
- Ort (kognitiv)** Durch einen Kontext konstituierte, individuierbare Lokation (*siehe auch* Ort (geometrisch)) 6
- Ortesysteme** Modelle der in Kapitel 2 und 4 vorgestellten Größenkongruenz-Geometrie 65
- Positionsschicht** gröbste Schicht der Repräsentation, in der nur die grobe punktartige Lokation des Objektes relevant ist (*siehe auch* Granularitätsschichten) 20
- Schicht der Lokation der substantiellen Teile** *siehe* Substanzschicht

**substantieller Ort** Ort, der vollständig in der Objektregion enthalten ist 83

**Substanzschicht** (Schicht der Lokation substantieller Teile) feinste Schicht der Repräsentation, in der auch die substantiellen Teile des Objektes repräsentiert sind (*siehe auch* Granularitätsschichten) 20