Studien zur Förderung mathematisch begabter Grundschulkinder

Kumulative Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades einer Doktorin
der Philosophie (Dr. phil.)
an der Fakultät für Erziehungswissenschaft
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Kirsten Pamperien
bei Prof. Dr. Marianne Nolte
Hamburg, März 2021

Gutachterinnen und Gutachter:

1. Prof. Dr. Marianne Nolte, Universität Hamburg (Betreuerin)

2. Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Universität Hamburg

3. Dr. habil. Katrin Vorhölter, Universität Hamburg

Ort und Datum der mündlichen Disputation:
Universität Hamburg, 18. Mai 2021

Inhalt

1. Einleitung: Motivation der Fragestellung

Das kumulativ angelegte Promotionsvorhaben hat als Schwerpunkte die Aufgabenentwicklung zur Förderung und Identifizierung mathematisch begabter Grundschulkinder sowie die Entwicklung, Erprobung und Analyse des Einsatzes eines Evaluationsinstruments zur Erhebung der mathematischen Begabung von Grundschulkindern, und zwar in Form eines Beobachtungsrasters. Um die Fragestellung zu motivieren, wird im Folgenden kurz die historische Entwicklung skizziert, die der Entwicklung der Fragestellung der Arbeit zugrunde liegt.

Für die Grundschule gab es bereits seit den 1990er Jahren eine breite Diskussion um eine veränderte Aufgabenkultur (siehe Radatz & Rickmeyer, 1996; Winter, 1987; Wittmann, 2000; Wittmann & Müller, 1992). In dieser Zeit des Umbruchs wurde 1999 in Hamburg die Maßnahme „Kinder in der Primarstufe auf verschiedenen Wegen zur Mathematik" (PriMa) ins Leben gerufen, eine Kooperationsmaßnahme zwischen der Universität Hamburg, der William-Stern-Gesellschaft (WSG) und der Behörde für Schule und Berufsbildung (BSB).[1] Diese Maßnahme hatte unter anderem zum Ziel, besonders begabte Kinder der dritten und vierten Klassen an der Universität Hamburg zu fördern. Dazu mussten ein Konzept für die Talentsuche sowie geeignetes Aufgabenmaterial entwickelt werden, wozu bereits 1995 erste Pilotstudien in ausgewählten Kleingruppen stattgefunden hatten (Kießwetter & Nolte, 1996; Nolte, 1999). Es gab zu dieser Zeit national und international kaum Forschung zur mathematischen Hochbegabung im Grundschulalter. Insbesondere wegen der besonderen Anforderungen an die Identifizierung von begabten Grundschulkindern begann auch die zu dieser Zeit im Bereich Hochbegabung führende Johns Hopkins University ihre Förderung erst in der Sekundarstufe (siehe Wagner, 1986). Eine Ausnahme stellt die Studie des russischen Psychologen Krutetskii (1976) dar, die bis heute auch international Forschungen zu besonderer mathematischer Begabung nachhaltig und maßgeblich beeinflusst.

Für die untere und obere Sekundarstufe gab es bereits seit Beginn der 1980er Jahre in Hamburg das sog. „Hamburger Modell" zur Identifizierung und Förderung mathematisch begabter Schüler*innen, welches von einer Arbeitsgruppe aus der Mathematikdidaktik, der Mathematik und der Psychologie in Kooperation mit der John Hopkins University entwickelt wurde (Kießwetter, 1988). In Anlehnung an dieses Modell und unter Einbeziehung der zu dieser Zeit aktuellen psychologischen Literatur zum Thema Talentsuche (siehe z. B. Heller, 1986; Wagner & Zimmermann, 1986; Wieczerkowski & Prado, 1993; Wieczerkowski & Wagner, 1985) wurde ein dreistufiges Auswahlverfahren für die Identifikation mathematisch besonders begabter Grundschüler*innen entwickelt (Nolte, 2004). In diesem Zusammenhang wurden Aufgabenformate erprobt, die für Grundschulkinder eine Herausforderung darstellen und einen der späteren Förderung vergleichbaren Komplexitätsgrad aufweisen. Während der Bearbeitung dieser soll es möglich sein, einige der von Kießwetter an mathematisch begabten Schüler*innen der Sekundarstufen beobachteten Handlungsmuster (vgl. Kapitel 2.2) zu erkennen, um Hinweise auf ein hohes mathematisches Potenzial zu erhalten. Die Problemstellungen für den Test wurden in einer interdisziplinären Arbeitsgruppe entwickelt und mit Schülerinnen und Schülern von Nolte erprobt. Anregungen für die Entwicklung eigener Test- sowie der

[1] https://www.ew.uni-hamburg.de/einrichtungen/ew5/didaktik-der-mathematik/projekte/prima.html

Förderaufgaben wurden der Aufgabenliteratur entnommen, die vorrangig für die Sekundarstufe existierte (siehe z. B. Sheffield, 1999; Shell Centre for Mathematical Education, 1984), die für diese Altersgruppe entsprechend modifiziert werden mussten. Um zu unterstreichen, dass die Schüler*innen durch diese Aufgaben zunehmend an mathematische Forschung herangeführt werden, hat sich im Laufe der Jahre in der Hamburger Arbeitsgruppe und auch darüber hinaus die Bezeichnung „Progressive Forscheraufgaben“ (vgl. Kapitel 2.3) etabliert.

Da für die Grundschule nur wenige Aufgaben existierten, die Kinder mit einem hohen mathematischen Potenzial herausfordern, fand neben der Aufgabenentwicklung auch eine Aufgabenerprobung in Grundschulklassen statt, und es zeigte sich, dass sich diese Aufgaben auch für einen Einsatz im inklusiven Unterricht leistungsheterogener Grundschulklassen eignen (Pamperien, 2008; Nolte & Pamperien, 2017a, 2017b).

Erst in den letzten Jahren wurden in der Didaktik der Grundschulmathematik immer neue Begrifflichkeiten geschaffen, die alle dasselbe Ziel verfolgen: „Durch mathematisch gehaltvolle Aufgaben- und Problemstellungen werden Schülerinnen und Schüler kognitiv aktiviert und zum aktiven Mathematiktreiben angeregt, das weit über das Entwickeln einfacher Routinen hinauszielt (Ruwisch 2003).“ (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018, S. 35; siehe dazu auch Hengartner, Hirt & Wälti, 2006; Krauthausen & Scherer, 2007; Leuders & Prediger, 2017).

In diesem Zusammenhang wurden auch für die Förderung mathematisch besonders begabter Grundschüler*innen neue Aufgabenformate kreiert (z. B. Bardy & Hrzan, 2005; Käpnick, 2001). Hierzu zählen ebenfalls die oben bereits erwähnten Progressiven Forscheraufgaben (Nolte & Pamperien, 2010). Alle diese Aufgabentypen werden durch die Merkmale, die Krauthausen und Scherer (2007) für selbstdifferenzierende Aufgaben aufstellen, beschrieben. Wichtig sind ein einfacher Zugang zur Aufgabenstellung, die Möglichkeit verschiedene Wege zur Bearbeitung zu nutzen sowie die Möglichkeit des vertieften Eindringens in den mathematischen Kontext. So können Schüler*innen unterschiedlichsten Potenzials an der gleichen Aufgabenstellung arbeiten. Inwieweit sie sich jedoch für den Einsatz für Kinder mit einem hohen mathematischen Potenzial eignen, hängt von der Möglichkeit der Vertiefung ab und wesentlich davon, wie die Lehrperson mit diesen Aufgaben im Unterricht umgeht.

Für den Einsatz dieser Aufgaben wurde im Förderprojekt PriMa ein einheitliches Konzept der Implementation entwickelt. Dabei wird die Aufgabe zunächst für alle Kinder gemeinsam eingeführt, bevor die Kinder selbständig und eigenverantwortlich an den Aufgaben arbeiten. Ein weiterer Aspekt ist die Bedeutung des Austauschs innerhalb der Lerngruppe, welche auch durch die aktuelle Forschung zur Metakognition unterstrichen wird. Vorhölter (2020) weist darauf hin, dass

> […] sie [die Lernenden] nicht nur ihr eigenes Verhalten überwachen [müssen], sondern auch das der anderen, indem sie beispielsweise Fragen stellen, die Ideen der anderen anhören und eigene Vorschläge einbringen […]. Voraussetzung dafür ist, dass sie miteinander kommunizieren und ihr Handeln koordinieren, ihre Ideen einander erklären und ihre Gedanken externalisieren. Nur auf diese Weise können sie ihr Wissen und ihre Kompetenzen teilen […]. (Vorhölter, 2020, S. 10)

Aus diesem Grund nimmt das gemeinsame Plenum nach der Arbeitsphase einen großen Raum ein, in dem die Ideen aller Kinder zusammengetragen werden, um gemeinsam mögliche Lösungswege zu diskutieren. Die Lehrpersonen benötigen dazu pädagogisches Geschick und ein ausreichendes Fachwissen, um auf die Ideen der Kinder sowohl während der Arbeitsphase als auch im Plenum eingehen zu können. Dies belegen aktuelle Studien zum Beispiel von Nolte und Koch (2021). Sie heben neben der Notwendigkeit der Verschränkung fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Inhalte bei der Ausbildung zukünftiger Mathematiklehrkräfte auch die Sensibilisierung dieser für die verschiedenen Ideen der Schüler*innen sowie die Wertschätzung dieser hervor. Für die Förderung besonders begabter Schüler*innen werden Lehrkräfte unter anderem darin geschult, das Prinzip der minimalen Hilfe nach Aebli (2006), das in der Diskussion zu mathematischen Modellierungsprozessen von Stender (2016) bzw. Leiß (2007) empirisch untersucht wurde, anzuwenden. So beschreibt Leiß (2007) adaptive Lehrerinterventionen als Hilfestellungen durch die Lehrkräfte, die den individuellen Lern- und Lösungsprozess der Schüler*innen nur minimal unterstützen, sodass ein selbständiges Arbeiten möglich ist. Bereits 1949 wies Polya auf die Relevanz der Methode des Fragens hin (S. 35): „Die Anregungen müssen einfach und natürlich sein, weil sie sonst nicht *unaufdringlich* sind." Dazu gehört der Erwerb von Kommunikationsstrukturen, die ein genaues Eingehen auf die Äußerungen der Kinder und das Verständnis dieser Äußerungen beinhalten, so dass die von Bauersfeld (1978) beschriebene „Handlungsverengung durch Antworterwartung" vermieden wird und auf die verkürzten Kommunikationsstrukturen mathematisch besonders begabter Schüler*innen eingegangen werden kann (vgl. Bauersfeld, 1993).

Die Lehrpersonen müssen daher in der Lage sein, die Unterrichtsprozesse genau zu erfassen und das Bearbeitungs- und Kommunikationsverhalten der Schüler*innen zu beobachten. Hier setzt das im Rahmen des Projekts entwickelte Beobachtungsraster an. Die eigenständige Anwendung dieses Rasters schult die mathematische Auseinandersetzung mit dem Thema, fokussiert gezielt auf bestimmte Handlungsmuster, die auch im Schulunterricht von Bedeutung sind, und gibt der Lehrperson Sicherheit im Umgang mit den Ideen der Schüler*innen (Nolte & Koch, 2021). Das Beobachtungsraster wurde in der Talentsuche des PriMa-Projekts als ein Diagnoseinstrument entwickelt und eingesetzt, aber auch in der Schule kann es wertvolle Hinweise auf die Fähigkeiten der einzelnen Schüler*innen geben (Nolte & Pamperien, 2017a).

2. Theoretischer Rahmen: Definitionsansätze und Diskussion zur Identifikation mathematischer Begabung

2.1 Hochbegabung

In der einschlägigen wissenschaftlichen Diskussion wird allgemeine kognitive Hochbegabung wie auch die besondere mathematische Begabung[2] als basierend auf einem Entwicklungsprozess modelliert. Deshalb wird im Folgenden kurz auf Fragen zur allgemeinen Hochbegabung eingegangen. Es gibt vielfältige Ansätze, Hochbegabung zu definieren.

Lange wurde die Intelligenz als wesentliches und teilweise alleiniges Kriterium dafür betrachtet, dass eine Person zu außergewöhnlichen Leistungen fähig sein kann. Infolgedessen wurde eine Identifikation anhand eines Intelligenztests mit einem bestimmten Prozentrang als ausschließliches Kriterium für eine Hochbegabung betrachtet (Rost, 2009). Rost (2009) bezeichnet es als unbestritten, dass Intelligenztests prognostische Aussagen für den Schulerfolg zulassen. Hier wird bereits deutlich, dass Intelligenz ein Kriterium ist, das mit der Leistungserbringung eng zusammenhängt. Allerdings findet sich bereits bei Stern (1916) der Hinweis, dass hohe Intelligenz bzw. Begabung nicht zu hoher Leistung führen muss. Auch Renzulli (1978) unterscheidet zwischen der Voraussetzung, besondere Fähigkeiten zu entwickeln und der gezeigten Leistung (gifted behaviour): „Gifted and talented children are those possessing or capable of developing this composite set of traits and applying them to any potentially valuable area of human performance.“ (Renzulli, 1978, S. 261). Es wird daher in der einschlägigen Diskussion zwischen dem Potenzial und der entwickelten Kompetenz unterschieden. Dies drückt sich in den Begriffen „Begabung“ als Anlage und „Talent“ als entwickelte Begabung aus, worauf z. B. Wieczerkowski & Wagner (1985) oder Gagné (2010) hinweisen. Um die verschiedenen Faktoren für Begabung zu erfassen, entwickelte Renzulli (1978) ein Begabungsmodell, das sich nicht nur auf den Intelligenzbegriff zurückzieht, sondern zwei weitere Determinanten mit in den Mittelpunkt rückt. Mit folgendem Drei-Ringe-Modell (siehe Abbildung 1) beschreibt er in seiner Theorie zur Hochbegabung einen der ersten Ansätze, um die Komplexität des Begabungsbegriffs zu erfassen:

Abbildung 1: Drei-Ringe-Modell nach Renzulli (1978) zur Begabung

[2] Hier soll nicht unterschieden werden zwischen Hochbegabung und besonderer Begabung, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde.

Renzulli betrachtete hochbegabtes Verhalten als Schnittmenge von überdurchschnittlicher Intelligenz, Kreativität und Aufgabenengagement. Neu in diesen Überlegungen ist die Motivation als weiteres Persönlichkeitsmerkmal. Diese umfasst nicht nur die Freude bei der Bearbeitung, sondern für Renzulli auch Ausdauer, Beharrlichkeit und Entschlossenheit sich einem Problem zu stellen. Dies drückt die schwer zu übersetzende Bezeichnung „task commitment“ aus, die die Bereitschaft, sich verbindlich auf eine Aufgabenstellung einzulassen und damit auch eine positive Selbstverpflichtung umfasst.

Auf der Basis dieses Modells wurden bis heute verschiedene Modelle mit Einflussfaktoren zur Begabung entwickelt. Diese intendieren, die vielfältigen Faktoren genauer zu erfassen, die Begabung kennzeichnen (z. B Gagné, 2004; Heller, 1991, 2005; Heller & Perleth, 2008; Renzulli, 1986, 2012). Exemplarisch für die mehrfaktoriellen Hochbegabungsmodelle soll hier kurz das Modell von Gagné (2005) (siehe Abbildung 2) aufgezeigt werden.

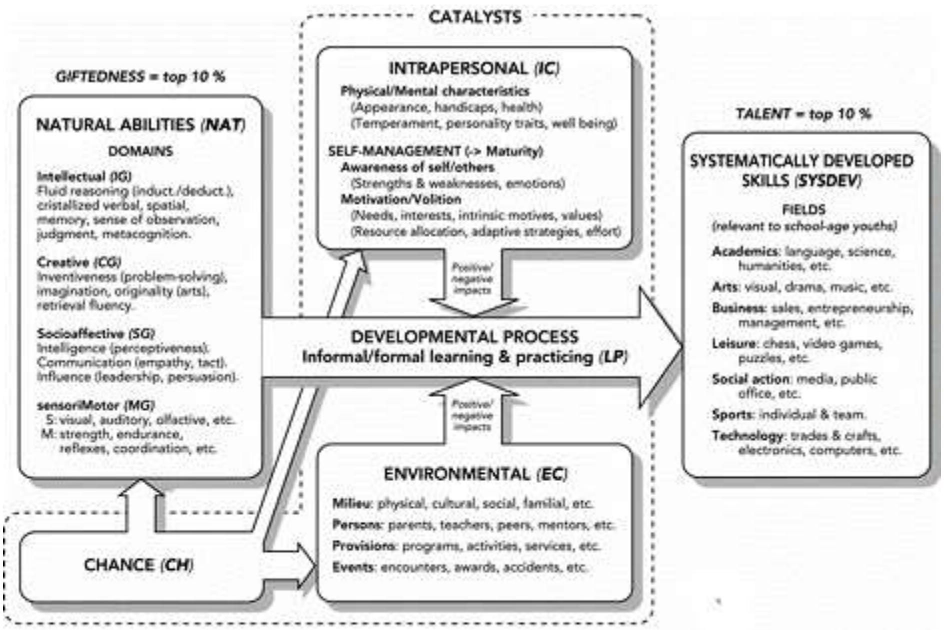


Abbildung 2: Differentiated Model of Giftedness and Talent (DMGT) nach Gagné (2005)

Gagné unterscheidet in seinem Modell, wie oben bereits erwähnt, zwischen Begabung und Talent. So sieht er die Begabung als ein angeborenes Potenzial, das sich zu einem Talent entwickeln kann. „Talents progressively emerge from the transformation of these high aptitudes into the well-trained and systematically developed skills characteristic of a particular field of human activity or performance.“ (Gagné, 2004, S. 123). Durch vielfache und angemessene Anregungen sowie systematische Aktivitäten entwickeln sich in dem jeweiligen Bereich Fähigkeiten (bzw. Expertise). Entscheidend dafür sind bei Gagné intrapersonale Faktoren wie Motivation, Selbstvertrauen, Wille, Ausdauer und umweltbezogene Faktoren wie Familie, Freunde, Schule, örtliche und zeitliche Gegebenheiten. Gemeinsam ist bei all diesen Modellen, dass sie den Prozesscharakter der Entwicklung sowie die Wechselwirkung zwischen der herausfordernden Anregung durch die Umgebung und dem aktiven Annehmen dieser hervorheben.

2.2 Mathematische Begabung

Mit den Fragen, was eine besondere mathematische Begabung kennzeichnet und wie sich Schüler*innen mit einem besonderen mathematischen Potenzial verhalten, beschäftigen sich die bahnbrechenden Arbeiten des russischen Psychologen Krutetskii (1976). Seine Forschungen zur Beantwortung dieser Fragen sind noch immer, als grundlegend für die aktuelle Diskussion zur besonderen mathematischen Begabung anzusehen (siehe z. B. Fritzlar, 2013a).

Krutetskii (1976) beobachtete Besonderheiten in den Herangehensweisen besonders begabter Schüler*innen an Mathematikaufgaben wie u. a. Reversibilität, Verallgemeinerungen und Flexibilität des Vorgehens und schlussfolgerte aus seiner Forschung, dass mathematisch besonders begabte Schüler*innen die Welt unter einer mathematischen Perspektive betrachten ("mathematical cast of mind"). Er bezeichnete als wichtigen Aspekt mathematischer Begabung:

> […] generalized curtailed and flexible thinking in the realm of mathematical relationships and number and letter symbols and by a mathematical cast of mind. This peculiarity of mathematical thinking results in an increased speed in processing mathematical information (which is related to a replacement of a large volume of information by a small volume, owing to generalization and curtailment) […]. (Krutetskii, 1976, S. 352).

Diese Komponenten in der Bearbeitung von Aufgabenstellungen wurden weltweit in vielen Studien aufgegriffen (z. B. Greenes, 1981; Sheffield, 2003).

In empirischen Studien wurde die Schnelligkeit in der Verarbeitung von Informationen und die Flexibilität im Umgang mit verschiedenen Repräsentationen bestätigt (z. B. Dassow, 1983; Krause, Seidel & Heinrich, 2004; Krause et al., 1999; Paz-Baruch et al., 2014). In den letzten Jahren ist die Rolle von Kreativität im Rahmen mathematischer Hochbegabung in den Vordergrund gerückt, z. B. in den Arbeiten von Sriraman, Haavold und Lee (2013) oder Singer und Voica (2017). Dabei kommen auch Experten-Novizen-Vergleichen und der Entwicklung von Expertise eine große Bedeutung zu (Fritzlar, 2013b).

Im deutschsprachigen Raum haben die Arbeiten von Kießwetter die Forschung zu besonderer mathematischer Begabung entscheidend geprägt. Kießwetter näherte sich der Frage nach Verhaltensweisen von mathematisch begabten Schüler*innen, indem er Handlungsmuster identifizierte, die sich in Problemlöseprozessen als günstig erwiesen hatten, und zwar im Vergleich von Expert*innen und Schüler*innen als Noviz*innen in Problemlöseprozessen (Kießwetter, 1985). Seine methodisch nur wenig kontrollierten Beobachtungen werden durch aktuelle Forschungsergebnisse bestätigt. So betonte Sheffield (2003), dass die von ihr identifizierten Vorgehensweisen als Charakteristika für besonders begabte Schüler*innen angesehen und infolgedessen als Indikatoren betrachtet werden können, wobei es Ziel des Unterrichts sein muss, möglichst vielen Schüler*innen die Gelegenheit zu geben, diese zu entwickeln. In späteren Arbeiten bezeichnete Kießwetter die von ihm berichteten Handlungsmuster als einen *Katalog mathematischer Denkleistungen* (Kießwetter, 2006). Er machte ebenfalls deutlich, dass seine Kriterien nicht als eine Definition mathematischer Begabung zu verstehen seien, sondern als förderliche Herangehensweisen in Problemlöseprozessen, die sich bereits im Noviz*innenstatus bei Schüler*innen beobachten lassen.

Werden diese Herangehensweisen in anspruchsvollen Problemkontexten gezeigt, können nach Kießwetter (1988, 2006) die Handlungsmuster[3] als Indikatoren für eine mathematische Begabung dienen. Folgende Handlungsmuster werden unterschieden:

- Organisieren von Material
- Sehen von Mustern und Gesetzen
- Erkennen von Problemen, Finden von Anschlußproblemen
- Wechseln der Repräsentationsebene (vorhandene Muster/Gesetze in „neuen“ Bereichen erkennen und verwenden)
- Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten
- Prozesse umkehren (Kießwetter, 1988, S. 29).

Notwendige Bedingung für die Möglichkeit, diese Handlungsmuster beobachten zu können, ist, wie oben bereits erwähnt, die herausfordernde Anregung, d. h. es muss für die Schüler*innen eine herausfordernde Aufgabenstellung gegeben sein, die im Bearbeitungsprozess Erfolgserlebnisse provoziert, so dass sich im Laufe des Bearbeitungsprozesses eine Prozessmotivation – im Sinne des task commitments von Renzulli (1978) ergibt. Im Unterschied zu Krutetskii sind Kießwetters Problemstellungen deutlich komplexer bezüglich der Information, die zu verarbeiten ist, worauf Fritzlar und Nolte (2019) hinweisen, da der Förderansatz von Kießwetter auf der Simulation von mathematischen Forschungsprozessen und damit zu einer Hinführung zu mathematischen Theoriebildungsprozessen basiert, was Kießwetter (1988) wie folgt beschreibt:

> Im Zentrum unserer Bemühungen steht, Vorgaben, Anreize und Anregungen für mathematisches Tun zu liefern. Deshalb versuchen wir im elementarmathematischen Bereich, Situationen zu simulieren, wie sie in der mathematischen Forschung auftreten. So wird insbesondere auch die kreative Komponente mathematischer Begabung gefordert und gefördert. Forschungssituationen sind offen. (Kießwetter, 1988, S. 33)

Der Schwerpunkt der bisher beschriebenen Studien lag auf älteren Schüler*innen. In dieser frühen Phase der Forschung zum Bereich der mathematischen Begabung gab es kaum Studien mit Grundschulkindern, weil der geringere mathematische Kenntnisstand in dieser Altersgruppe und die noch nicht so ausgeprägte sprachliche Kompetenz eine Untersuchung als sehr anspruchsvoll erscheinen ließen (Käpnick, 1998). Auch Krutetskiis Studien bezogen sich schwerpunktmäßig auf Schüler*innen der Sekundarstufen, umfassen jedoch auch Studien im Grundschulalter, die aber weniger rezipiert wurden. In diesen Arbeiten konnte gezeigt werden, dass “[…] individual components of mathematical abilities are formed even in the primary grades. Distinctive „rudimentary“ or „embrionic“ forms of the components we isolated can be observed in individual pupils even in the second grade […].” (Krutetskii, 1976, S. 330f.).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass Krutetskii sechs Parameter an Grundschulkindern untersucht hat, die vergleichbar den Komponenten mathematischer Fähigkeiten bei älteren Schüler*innen sind, allerdings konnten diese empirisch in weniger ausgeprägter Form festgestellt werden. Mittlerweile konnten einige Studien zeigen, dass auch

[3] Für eine genauere Erläuterung des Begriffs der Handlungsmuster siehe Nolte & Pamperien, 2017b.

Grundschulkinder bei angemessener Aufgabenvorgabe vergleichbare Leistungen bei diesen von Krutetskii untersuchten Kriterien zeigen können (siehe Käpnick, 1998; Aßmus, 2017; Aßmus & Förster, 2012; Dassow, 1983; Fritzlar, 2019; Lack, 2010). Die Bedeutung der Aufgabenvorgabe hält Nolte (2012) für eines der entscheidenden Kriterien im Hinblick auf die Identifikation und Entfaltung einer mathematischen Begabung. Sie verweist daher auf die Relevanz der Gestaltung dieser und den Umgang der Schüler*innen damit. Nur eine Beobachtung der Schüler*innen bei der Bearbeitung von herausfordernden Aufgaben kann Aufschluss über eine besondere mathematische Begabung geben, so schreibt Nolte (2012):

> We define children as mathematically gifted when they are able to work on complex problems. In this learning environment they recognize patterns and structures. They are able to exploit these patterns and structures while working on the problem. They can work on a high level of abstraction. They construct superordinate structures and gasp coherences. They are able to generalize their findings. So when children show special patterns of action in challenging and complex fields of problems we suppose high mathematical talent. (Nolte, 2012, S. 157)

Diese Definition folgt ebenso den multifaktoriellen Ansätzen wie die in der Forschungslandschaft inzwischen anerkannten Modelle zur mathematischen Begabung (vgl. Fritzlar, 2013; Fuchs, 2006; Heinze, 2005; Schindler & Rott, 2019).

Es kann also festgestellt werden, dass mathematische Begabung in der derzeitigen mathematikdidaktischen Forschung als ein Potenzial beschrieben wird. Die Entfaltung dieses Potenzials wird im Sinne Gagnés sowohl bezogen auf herausfordernde Umweltfaktoren als auch auf intrapersonale Faktoren verstanden, die zur Entfaltung von Talent beitragen.

2.3 Progressive Forscheraufgaben als Mittel zur Förderung und Identifikation von mathematisch begabten Kindern

Mitte der 1990er wurde im Rahmen der Fördermaßnahme PriMa eine mehrstufige Talentsuche entwickelt, erprobt und evaluiert (Nolte, 2004, 2012; Pamperien, 2004). Sie basiert auf sog. Progressiven Forscheraufgaben als Mittel zur Förderung und Identifikation von mathematisch begabten Kindern, die in ein Curriculum für die Förderung mathematisch besonders begabter Grundschulkinder eingebettet wurden (Nolte, 2006; Kießwetter & Nolte, 1996; Pamperien, 2008; Nolte & Pamperien, 2010).

Kennzeichnend für eine Progressive Forscheraufgabe ist die Orientierung an den von Kießwetter identifizierten Handlungsmustern, die auch als Heurismen bezeichnet werden können. So findet man auch bei Stender (2016) eine ausführliche Erläuterung zu den einzelnen Handlungsmustern Kießwetters im Sinne einer mathematischen Handlungsstrategie, die für das Lösen komplexer Aufgabenstellungen bzw. von Problemen hilfreich sein können.

Progressive Forscheraufgaben werden im Sinne der Heuristiken aufbereitet als Problemfelder, deren Bearbeitung nach Seel (2003) für die Problembearbeiter*innen nicht gleich ersichtlich ist. Es gibt eine Art Barriere, die überwunden werden muss. Damit die Kinder sich aber nicht in einem komplexen Problem verlieren, beginnt die Aufgabenvorgabe mit einer eingeschränkten Anfangsaufgabe, mit der das Verständnis der Aufgabe abgesichert werden soll. Mithilfe eines Beispiels können die Schüler*innen die Aufgabe erfassen und werden so in das Problemfeld eingeführt, ohne eingeengt zu werden. Wesentlich ist, dass die Komplexität der Aufgabe hoch genug ist, um mathematisch besonders begabte Kinder herauszufordern, die Aufgabe aber trotzdem mit altersangemessenen mathematischen Kenntnissen bearbeitet werden kann. Ziel ist es, dass die Kinder zunehmend mit Heuristiken bzw. Handlungsmustern im Sinne einer Enkulturation mit forschendem mathematischen Lernen vertraut werden. Daher leitet sich der Name Progressive Forscheraufgaben ab.

Die Forderung, derartige Aufgaben im Unterricht zu behandeln, ist nicht neu. Insbesondere seit der Veröffentlichung des Programms „Mathe 2000“ hat in der Mathematikdidaktik der Grundschule ein Paradigmenwechsel stattgefunden, mit dem ein deutlicher Schwerpunkt auf entdeckendes Lernen und das Erkennen von Mustern und Strukturen gelegt wird. Dies sind Forderungen, die seit den 1980er Jahren erhoben werden (Bauersfeld, 2000; Winter, 1984; Wittmann & Müller, 1992; Wittmann & Müller, 1990).

Auch in den Bildungsstandards im Fach Mathematik von 2004 werden allgemeine und inhaltliche Kompetenzen beschrieben, die ebenfalls Muster- und Strukturerkennung, Problemlösen oder Verallgemeinerungen als Ziele für alle Schüler*innen umfassen. Die Aufgabenstellungen für die Schule zeigen in der Regel allerdings eine deutlich geringere Komplexität auf als diejenigen, die in der Förderung für mathematisch besonders begabte Schüler*innen eingesetzt werden. Insgesamt besteht das langfristige Lernziel der Progressiven Forscheraufgaben nicht im Erwerb neuer mathematischer Inhalte, sondern in einer wachsenden Vertrautheit mit mathematischen Problemlöseprozessen und einer Haltung, die als ein Aspekt des „mathematical cast of mind“ nach Krutetskii (1976) aufgefasst werden kann.

2.4 Fragen zur Identifikation mathematischer Begabung

Häufig erfolgt die Identifikation besonderer Begabung und damit auch einer besonderen mathematischen Begabung – wie bereits erwähnt - über den Einsatz von Intelligenztests, was intensiv diskutiert wurde bzgl. der Tragfähigkeit von Intelligenztests für die Identifikation einer besonderen Begabung (siehe z. B. Nolte, 2004; Rost, 2008, 2009; Sternberg, 1981; Waldmann & Weinert, 1990). Insbesondere Komponententheorien wie die von Waldmann und Weinert (1990) und Sternberg (1981) verweisen darauf, dass die Leistungen, die mit Intelligenztests abgeprüft werden, in Abhängigkeit von der konkreten Aufgabenstellung variieren. Wieczerkowski, Wagner und Birx kritisieren bereits 1987 den alleinigen Einsatz von Intelligenztests zur Identifikation einer mathematischen Begabung:

> Allgemeine Intelligenztests sind auch in Untertests wie Rechenfertigkeit oder schlussfolgerndem Denken keine geeigneten Diagnoseverfahren, um mathematische Hochbegabung zu identifizieren, nicht zuletzt auch, weil sie für eine hinreichende Differenzierung im obersten Leistungsbereich nicht ausgelegt sind. (Wieczerkowski et. al., 1987, S. 219)

In den letzten Jahren wurde daher die Bedeutung der Intelligenzmessung durch die Einbeziehung weiterer Faktoren reduziert, u.a. da Studien (siehe z. B. Käpnick, 1998; Nolte, 2012; Preckel & Baudson, 2013) gezeigt haben, dass eine sehr hohe Intelligenz nicht zwangsläufig mit einer ebenso hohen mathematischen Begabung einhergehen muss. Das bedeutet nicht, dass eine hohe Intelligenz nicht mehr berücksichtigt wird, sondern dass insbesondere für Talentsuchen weitere Faktoren in Betracht gezogen werden, weil sich zudem, wie oben beschrieben, die Entwicklung der hohen Begabung abhängig von Umweltangeboten und den Aktivitäten der Kinder vollzieht.

Kießwetter hat, wie oben bereits erwähnt, als erster bei besonders begabten Schüler*innen günstige Handlungsmuster in Problemlöseprozessen beschrieben, die mit den von Krutetskii beobachteten Merkmalen vergleichbar sind. Diese Merkmale benutzt er nicht als Identifikationsmerkmale für besonders begabte Schüler*innen, sondern als Hinweise auf eine besondere Begabung und entwickelt daran orientiert für Schüler*innen der Sekundarstufe 1 einen Test, den Hamburger Test für mathematische Begabung (HTMB). Dieser Test ermöglicht durch seine spezifischen Aufgabenstellungen unterschiedliche Herangehensweisen und berücksichtigt damit auch die Kreativität der Schüler*innen. Er wird bei der Talentsuche des Hamburger Modells als ein Verfahren neben dem German Scholastic Aptitude Test (GSAT-M) eingesetzt.

Um die Fehlerquote in einem Identifikationsverfahren so gering wie möglich zu halten, schlägt Heller (2004) für Talentsuchen ein mehrstufiges Verfahren vor. Zu Beginn sollte ein Screeningverfahren mit Checklisten durchgeführt werden, gefolgt von Begabungstests, so dass sich die Anzahl der untersuchten Kinder nach jedem Schritt reduziert und am Ende des Verfahrens die besonders begabten Kinder identifiziert sind. Das im Projekt PriMa, in dem die Studien durchgeführt wurden, eingesetzte Verfahren ist ebenfalls mehrstufig, allerdings steht am Anfang keine Checkliste, die von Lehrkräften oder Eltern ausgefüllt wird, sondern ein Probeunterricht, in dem aufgabenspezifische Beobachtungsraster im Sinne der Checklisten eingesetzt werden.

Die Identifikation mathematischer Begabung im Grundschulalter bezieht sich auf die in der Literatur diskutierten Merkmale. Das im Rahmen der Dissertation zentrale Verfahren der Progressiven Forscheraufgaben zielt auf die Evaluation einer altersangemessenen Anwendung mathematischer Denk- und Arbeitsweisen. Dabei stellt sich die Frage, wie weit sich komplexe und herausfordernde Aufgabenstellungen dazu eignen, eine mathematische Begabung zu erfassen und wie sie gestaltet sein müssen, insbesondere, da die teilnehmenden Kinder bis zur Testteilnahme kaum Erfahrungen in komplexen mathematischen Problemlöseprozessen erwerben konnten. Es liegt nahe, zu überlegen, ob man durch spezifische Leistungstests einen Hinweis auf eine besondere mathematische Begabung erhalten kann, so wie dies in der Mittelstufe möglich ist (Kießwetter, 1988). Grundschüler*innen sind es jedoch in der Regel noch nicht gewöhnt, sich mit komplexen Aufgaben auseinanderzusetzen und ihre Lösungswege aufzuschreiben und zu begründen. Selbst wenn die substanziellen Aufgabenformate, die in der Grundschule auch unter der Bezeichnung „Aufgaben mit natürlicher Differenzierung“ (siehe z. B. Krauthausen & Scherer, 2007) zu finden sind, erste Ansätze dazu bieten können, weil es den Kindern möglich ist, hier eigene Wege zu gehen und unterschiedlich tief in die Aufgaben einzudringen, zeigt sich immer wieder, dass es problematisch ist, an Schulleistungen mathematisches Potenzial festmachen zu wollen. Dies macht zum Beispiel die Diskussion über Underachiever deutlich (siehe z. B. Hanses & Rost, 1998). Eine Studie zum Migrationshintergrund über an einschlägigen Aktivitäten beteiligten Kindern bestätigt, dass Schulleistungstests in der untersuchten Stichprobe nicht ausreichend differenzieren (Nolte & Pamperien, 2014). Deshalb wird in der Fördermaßnahme PriMa, in der diese Dissertation eingebettet ist, nach einem Probeunterricht neben einem Intelligenztest auch ein speziell für die Talentsuche entwickelter Mathematiktest eingesetzt, der überprüft, ob die Kinder in der Lage sind, in komplexen Problemstellungen Muster und Strukturen zu erkennen und diese zu nutzen, zu verallgemeinern sowie ihre Überlegungen zu begründen.

2.4.1 Checklisten

Folgt man dem Vorschlag Hellers, so sollten zu Beginn eines Identifikationsprozesses Checklisten entwickelt werden, die Lehrkräften und Eltern eine Hilfestellung zum Erkennen einer besonderen mathematischen Begabung geben. Über Checklisten im Allgemeinen zur Nominierung von Schüler*innen im Zusammenhang mit Förderangeboten wird schon seit vielen Jahren kontrovers diskutiert (Cao, Jung & Lee, 2017; Feger & Prado, 1998). Preckel und Vock (2013) sehen den Nutzen von Checklisten nicht in der Identifikation von besonders begabten Schüler*innen, sondern in der Sensibilisierung von Lehrkräften für die Thematik oder auch als Ergänzung innerhalb eines Verfahrens zur Identifikation.

Wieweit Lehrkräfte dazu in der Lage sind, im Unterricht Leistungsunterschiede genau zu beobachten und Checklisten auszufüllen, wird immer wieder diskutiert (Hany, 1998). In den letzten Jahren steht das professionelle Lehrerhandeln und das Lehrerprofessionswissen im Mittelpunkt der fachdidaktischen Diskussion (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2008). Auch zur mathematischen Begabung gibt es mittlerweile eine Reihe von Studien, die sich mit der Rolle der Lehrkraft befassen (z.B. Leikin, 2011; Leikin & Levav-Waynberg, 2009). Für die genaue Beobachtung von Unterricht und damit auch von Schülerleistungen spielt das Wahrnehmen und das Deuten der Ereignisse im Unterricht eine entscheidende Rolle. Dieses hängt nach Blömeke, Busse, Kaiser, König und Suhl (2016) und Blömeke, Gustafsson und Shavelson (2015) wesentlich mit deren fachlichen Qualitäten zusammen. Insbesondere kommt dies zum Tragen, wenn für die Checklisten die Kategorisierung komplexer Aufgaben zur Beobachtung genutzt wird, wie es Nolte und Pamperien (2017a) vorschlagen.

In der Praxis existieren genügend allgemeine Checklisten, die nach der Meinung Preckels und Vocks (2013), aber auch Urbans (1990) keine eindeutigen Aussagen über besondere Begabungen zulassen. Überwiegend gehen sie nicht differenziert genug auf die einzelnen Komponenten des Problemlösens ein. So finden sich in verschiedenen Schulbüchern oder Handreichungen wie z. B. „Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule“ (2003) oder aber auch im Projekt PIKAS gefördert vom DZLM (2011) Checklisten, die häufig sehr allgemein gehalten sind oder sich in der Regel nur auf Einzelbeobachtungen beziehen. Unabhängig von der Güte einer Checkliste ist hervorzuheben, dass es zwar möglich ist, Hinweise auf ein besonderes Potenzial zu erhalten, dass der Einsatz dieser aber die Diagnose durch Expert*innen nicht ersetzen kann (Perleth, 2010).

Da eine Identifizierung mathematisch besonders begabter Schüler*innen immer zielgerichtet auf ein bestimmtes Angebot unternommen werden sollte und vorrangig dazu dienen soll, die individuellen Lernbedürfnisse, hier der mathematisch besonders begabten Kinder zu erfassen, um darauf aufbauend geeignete Fördermaßnahmen zu entwickeln (Heller et al., 2005, S. 102), eignen sich in diesem Kontext Checklisten, die Kindern Gelegenheiten bieten, zu zeigen, wie sie in komplexen Problemstellungen mathematische Denkprozesse zeigen können.

Zusammenfassend kann man sagen, dass durch Checklisten und damit durch die Beobachtung der Schüler*innen beim Bearbeiten von mathematischen Problemstellungen erste Hinweise auf ein Potenzial gewonnen werden können, wenn sie sich an dem orientieren, was besondere mathematische Begabung kennzeichnet. Checklisten können aber kein alleiniges Instrument zur Identifizierung mathematisch begabter Schüler*innen sein.

In der Talentsuche der Maßnahme PriMa, in dessen Rahmen die Dissertation entstanden ist, wurden bzw. werden deshalb Checklisten, Beobachtungsraster genannt, zur Ergänzung eingesetzt. Im Unterschied zu einem Test, der Interaktionen mit den Testteilnehmer*innen nicht möglich macht, können die Schüler*innen zu ihren Lösungswegen befragt werden. Dies ist insbesondere günstig, da sie es in der Regel nicht gewohnt sind, sich zu komplexen Problemstellungen zu artikulieren.

3. Ziel und Anlage der Dissertation

Ziel der vorliegenden publikationsbasierten Dissertation ist es, einen Beitrag zur Förderung und Diagnostik mathematisch besonders begabter Grundschulkinder zu leisten und die Eignung systematischer Beobachtungen in Form von Beobachtungsrastern als Ergänzung zu standardisierten Tests zu zeigen. Darüber hinaus ist es auch ein Ziel, dieses Raster hinsichtlich seines Einsatzes im Regelunterricht der Grundschule zur Beschreibung mathematischer Kompetenzen bzw. Problemlösefähigkeiten zu untersuchen. Dies kann gerade in Anbetracht der Forderungen nach einer inklusiven Schule eine Hilfestellung für Lehrkräfte darstellen.

Die Untersuchungen wurden alle im Rahmen der Maßnahme PriMa an der Universität Hamburg durchgeführt und erstrecken sich über ca. 20 Jahre.

Wie bereits dargestellt, gab es zu Beginn der Fördermaßnahme nur sehr wenig Forschung auf dem Gebiet der besonderen mathematischen Begabung im Grundschulalter, so dass ein neues Konzept entwickelt werden musste, das sich insbesondere an dem Hamburger Modell von Kießwetter für Mittel- und Oberstufenschüler*innen orientierte.

Neben der Entwicklung, der als Progressive Forscheraufgaben bezeichneten Problemstellungen war es notwendig, ein Setting für den Einsatz dieser Aufgaben zu kreieren, welches auch in Regelklassen angewendet werden kann.

Da es bisher kein spezifisches Evaluationsinstrument gibt, mit dem mathematisch potenziell begabte Kinder im Grundschulalter im Gruppenunterricht durch Beobachtung identifiziert werden können, wurde im Rahmen dieser Dissertation ausgehend von Progressiven Forscheraufgaben ein solches Instrument entwickelt und einer ersten Erprobung im Hinblick auf die Validität und die Interratereliabilität unterzogen.

Folgende Fragestellungen waren für die Studien leitend:

1. Welche Art von Aufgaben eignet sich für die Talentsuche sowie für die Förderung mathematisch besonders begabter Grundschulkinder, um besondere mathematische Begabung beobachten und fördern zu können?

2. Wie müssen diese Aufgaben gestaltet sein und wie müssen sie eingesetzt werden, damit den noch jungen und mathematisch unerfahrenen Kindern ein Zugang zu komplexen mathematischen Problemstellungen möglich ist?

3. Ist es möglich, diese Aufgaben auch im Regelunterricht einzusetzen und eignen sie sich dort zu ersten Identifizierungen von Kindern mit mathematischer Begabung?

4. Wie muss ein Beobachtungsraster gestaltet sein, um mathematische Begabung bei Grundschulkindern im Gruppenunterricht zu erfassen, da diese die im Grundschulunterricht übliche Unterrichtsform darstellt?

In dieser Dissertation werden insgesamt vier Studien dargestellt. Es befassen sich sechs Artikel mit dieser Thematik, die hier entfaltet wird.

Die erste Studie befasst sich mit der Aufgabenentwicklung für die Talentsuche sowie mit deren Evaluation. In Pamperien (2004) wird beschrieben, wie aus einer anfänglichen Aufgabenidee von Sheffield (1999), die sie für den Einsatz in der Sekundarstufe für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler vorschlägt, eine Aufgabe entwickelt wird, die sich für einen Einsatz in der Grundschule eignet.

Die zweite Studie beschäftigt sich mit der Entwicklung Progressiver Forscheraufgaben und dem notwendigen Konzept für einen nicht nur in den Fördergruppen erfolgreichen Einsatz, siehe Nolte und Pamperien (2010) und Nolte und Pamperien (2017b).

Die dritte Studie untersucht anhand zweier besonders reichhaltiger Progressiver Forschungsaufgaben mathematische Problemlöseprozesse von Grundschulkindern. Dabei wird analysiert, welche Handlungsmuster im Sinne Kießwetters (1985) von Kindern in einer Regelklasse im Unterschied zu Kindern, die im Rahmen der Maßnahme PriMa als mathematisch besonders begabt getestet wurden, genutzt werden, um zu untersuchen, ob es möglich ist, erste Hinweise auf eine mathematische Begabung zu erhalten (Pamperien, 2008; Nolte & Pamperien, 2017a).

In der vierten Studie wird die Erstellung und Erprobung eines aufgabenspezifischen Beobachtungsrasters vorgestellt (Pamperien, 2021). Sie beschäftigt sich mit der Konstruktion und empirischen Überprüfung der Güte eines Beobachtungsrasters zum Erkennen besonderer mathematischer Begabung im Grundschulalter im Rahmen des Prozesses der Talentsuche.

Die sechs Artikel werden in den Kapiteln 4, 5, 6 und 7 kurz vorgestellt.

4. Publikation I

Die erste Publikation dieser kumulativen, publikationsbasierten Dissertation mit dem Titel „Strukturerkennung am Dreiecksschema“ ist in dem Buch „Der Mathe-Treff für Mathe-Fans“, herausgegeben von Marianne Nolte, bei Franzbecker im Jahr 2004 erschienen. Sie fokussiert auf die Entwicklung, Erprobung und Evaluation einer Aufgabe zur Identifikation von mathematisch besonders begabten Grundschulkindern im Rahmen der Maßnahme PriMa.

Die Aufgabenentwicklung orientierte sich an theoretischen Überlegungen zur besonderen Begabung wie auch an dem Kießwetter’schen Ansatz der Entwicklung von Problemfeldern.

Zielsetzung der Aufgabenstellung war es, die Kinder auf den Mathematiktest der Talentsuche vorzubereiten und gleichzeitig sollte untersucht werden, wie gut sich diese Aufgabe dazu eignet, dass Kinder ein besonderes Potenzial zeigen können. Ausgehend von der Aufgabenidee von Sheffield (1999) wurde ein Problemfeld entwickelt, das unter einer sachanalytischen Perspektive nicht mehr als die Inhalte der dritten Klassenstufe voraussetzt. Unter Berücksichtigung des Potenzials besonders begabter Schüler*innen sollte die Aufgabe einen hohen Komplexitätsgrad aufweisen. Die Aufgabe entspricht den Charakteristika der Progressiven Forscheraufgaben. Das ist wichtig, weil der Test später die Eignung für die Förderung mit der Art von Aufgaben, die in der späteren Förderung relevant sind, zeigen sollte. Im Sinne der Handlungsmuster nach Kießwetter wurden Kriterien wie das *Erkennen von Mustern und Strukturen*, aber auch deren Nutzung zur Bearbeitung der Aufgabe zugrunde gelegt. Die Aufgabenvorgabe orientierte sich an der von in standardisierten Testungen üblichen: Die Fragestellung und evtl. fremde Begriffe wie Zeile und Stelle werden vor der Aufgabenstellung anhand von Beispielen abgesichert. Lückentexte sollen die Antworten erleichtern und den Schreibaufwand reduzieren. Auf eine erste Aufgabe erfolgt deren Umkehrung, so dass auch das Handlungsmuster *Prozesse umkehren* berücksichtigt wird. Die Variation der Vorgabe erfordert eine Flexibilität im Denken. Mit der Veränderung im zweiten Teil der Aufgabe ist es möglich, die *Verallgemeinerung* eines Lösungswegs und dessen *Begründung* zu überprüfen.

Der erste Einsatz der Aufgabenstellung und deren Variation werden im Buchkapitel beschrieben. Ziel war die Überprüfung der Verständlichkeit sowie des möglichen zeitlichen Umfangs der Behandlung des Problemfelds in einem eingegrenzten zeitlichen Rahmen.

Nach einer Einführung in die Aufgabenvorgabe ist beschrieben, welche Handlungsmuster bei dieser Aufgabe im Fokus stehen und welche Überlegungen notwendig sind, um aus einer Aufgabenvorlage eine Aufgabenstellung im Sinne der Progressiven Forscheraufgaben zu erstellen. Da es zu dieser Zeit noch sehr wenig Forschung in diesem Bereich gab, wurde jeder Einsatz der Aufgabe dokumentiert und in einer Gruppe von Expert*innen evaluiert, insbesondere unter den Fragestellungen der Aufgabeninstruktion und der Eignung der Aufgabe für den Einsatz in einer Talentsuche für mathematisch besonders begabte Grundschulkinder. Dieser Einsatz verfolgte zwei Ziele, zum einen sollten die Kinder auf den nachfolgenden Mathematiktest vorbereitet werden, zum anderen war ein wesentliches Ziel, bereits erste Hinweise auf eine besondere mathematische Begabung zu erhalten, d.h. einige der für mathematische Begabungen charakteristischen Handlungsmuster beobachten zu können. Aufgrund dieser Basis wurde dann eine Anpassung vorgenommen, die wiederum nach jedem Einsatz diskutiert wurde. Ein zweiter wesentlicher Bereich neben der Formulierung der

Aufgabenstellungen war das methodische Vorgehen in der heterogenen Gruppe des Mathe-Treffs. Es wurden verschiedene Möglichkeiten der Rolle der Lehrperson diskutiert. Um die Eignung der Aufgabe festzustellen, wurden die Lösungen analysiert und im Rahmen der Auswertung kodiert, so dass eine Interpretation dieser einen Rückschluss auf die Eignung der Aufgabe zulässt.

4.1 Darlegung des eigenen Anteils

Das Buchkapitel wurde in Alleinautorenschaft verfasst.

4.2 Abdruck der Publikation I

Pamperien, K. (2004). Strukturerkennung am Dreiecksschema. In M. Nolte (Hrsg.), *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter* (S. 117-147). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Abdruck genehmigt durch den Verlag Franzbecker.

Kirsten Pamperien

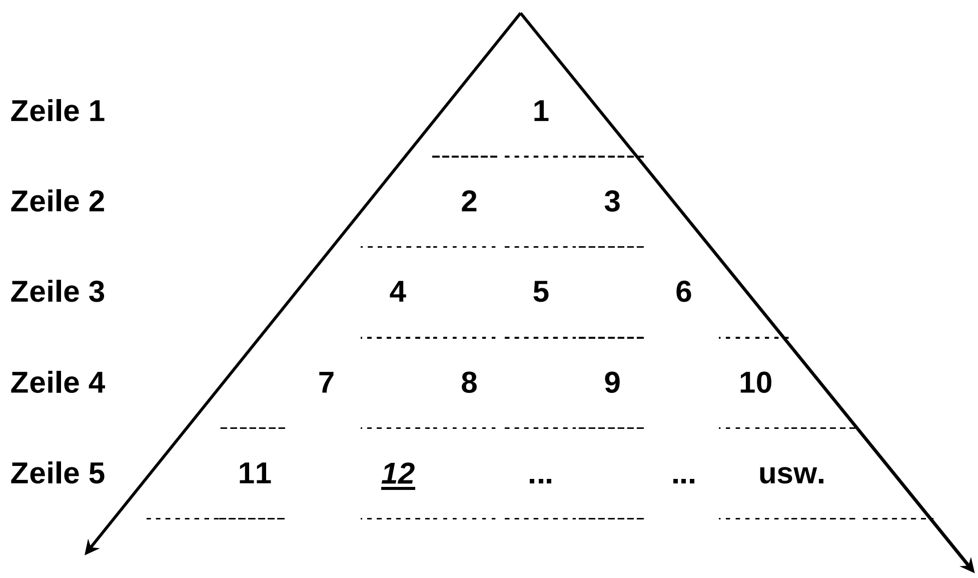
7 Strukturerkennung am Dreiecksschema

7.1 Die Vorgaben für die Kinder (in der Version 2003)

Zahlendreiecke

Zur Information:

(1) Dreiecksschema für die natürlichen Zahlen



Darin werden die Zahlen der Reihe nach und jeweils von links beginnend eingetragen. In der nächsten Zeile steht dabei jeweils eine Zahl mehr.

In diesem Schema steht die **Zahl 12** in der **Zeile 5** an der **Stelle 2 .**

Arbeitsblatt 1

Aufgaben:

Frage 1: **Wo steht dann die Zahl 23 ?**

Antwort: **Die Zahl 23 steht dann in Zeile .... an der Stelle ....**

Schreibe auf, wie du darauf gekommen bist:

Frage 2 : **Welche Zahl steht dann in Zeile 8 an der Stelle 8 ?**

Antwort: **In Zeile 8 an der Stelle 8 steht dann die Zahl ....**

Schreibe auf, wie du darauf gekommen bist:

Arbeitsblatt 2

Zur Information:

(1) Entsprechendes Dreiecksschema für die ungeraden Zahlen

Zeile 1			**1**		
Zeile 2		**3**	**5**		
Zeile 3		**7**	**9**	**11**	
Zeile 4	**13**	**15**	**17**	**19**	
Zeile 5	**21**	**23**	**...**	**...**	**usw.**

In diesem Schema steht die **Zahl 23** in der **Zeile 5** an der **Stelle 2 .**

Vergleich von Dreiecksschema (1) mit Dreiecksschema (2)

Dreiecksschema für die natürlichen Zahlen (links)

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 ... ... usw.

Dreiecksschema für die ungeraden Zahlen (rechts)

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 ... ... usw.

Dabei ist zu sehen, dass **zur linken Zeile 7 , 8 , 9 , 10**
rechts die Zeile 13 , 15 , 17 , 19 gehört.

Zur linken Zahl 7 gehört also rechts die Zahl 13.
Zur linken Zahl 9 gehört rechts die Zahl 17,
Zur linken Zahl 12 gehört rechts die Zahl 23 ... usw. ...

Arbeitsblatt 3

Aufgaben:

Frage 3: **Welche Zahl gehört zur linken Zahl 23?**

Antwort: **Zur linken Zahl 23 gehört rechts die Zahl ....**

Schreibe auf, wie du darauf gekommen bist:

Frage 4: **Welche Zahl steht im Schema (2) – also rechts – in Zeile 8 an der Stelle 8?**

Antwort: **Rechts steht in Zeile 8 an der Stelle 8 die Zahl ....**

Schreibe auf, wie du darauf gekommen bist:

Arbeitsblatt 4

In diesem Artikel sollen Erfahrungen mit den obigen Aufgaben dargestellt und analysiert werden.

7.2 Informationen zu den Aufgaben

Für diese Aufgaben werden Anfangsstücke des Dreiecksschemas der natürlichen Zahlen, hier als N-Dreieck bezeichnet, verwendet. Die Bezeichnung N-Dreieck soll helfen, uns kurz auszudrücken. Dieses (unendliche) N-Dreieck enthält alle (unendlich vielen) natürlichen Zahlen, die darin nach einer bestimmten und einfachen Vorschrift an- und eingeordnet sind. Die Anzahl der Zahlen in den aufeinanderfolgenden Zeilen erhöht sich jeweils um Eins. Aufgrund dieses Sachverhalts erhält man am rechten Rand die Folge der Dreieckszahlen (Abbildung8) und an der linken Seite wird der Abstand zwischen den ersten Zahlen der aufeinanderfolgenden Zeilen um jeweils Eins größer (Abbildung 7). Ein weiteres Muster kann man zum Beispiel an der Zahlenfolge, die senkrecht unter der Eins steht, entdecken, dort erhöht sich der Abstand zwischen den Zahlen jeweils genau um Vier (Abbildung 9).

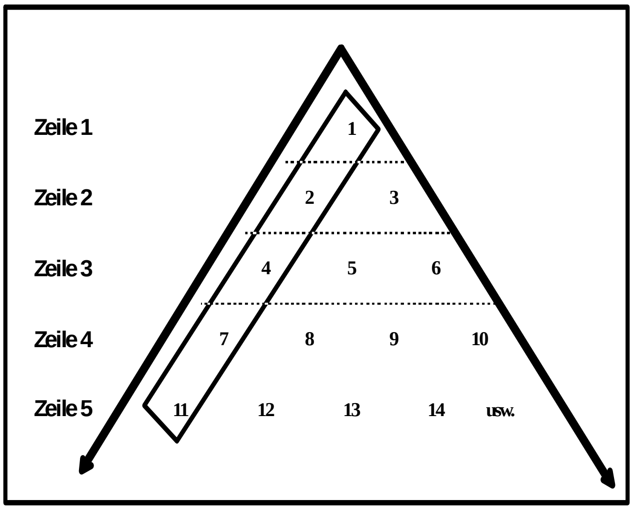


Abbildung 7

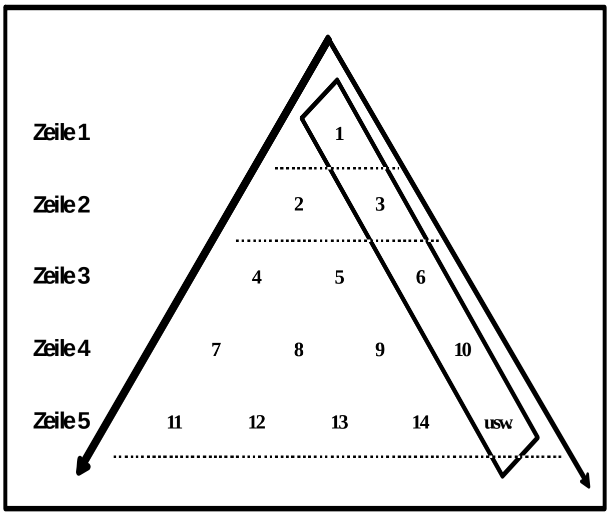


Abbildung 8

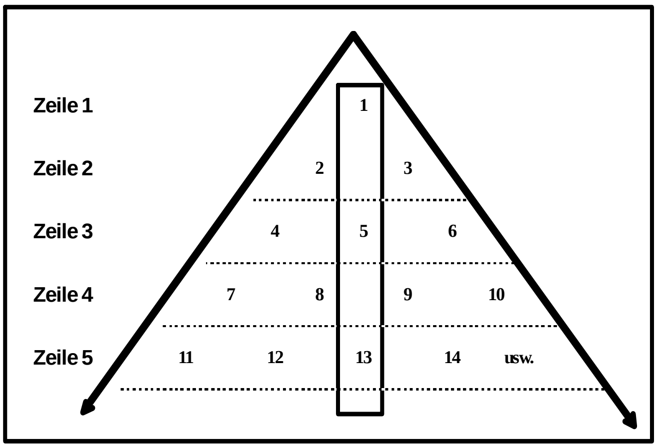
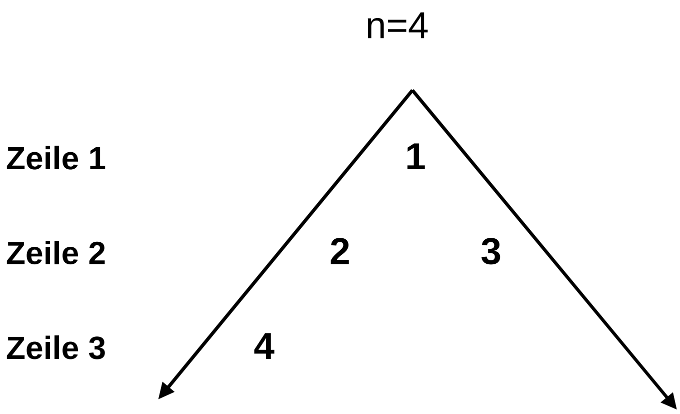


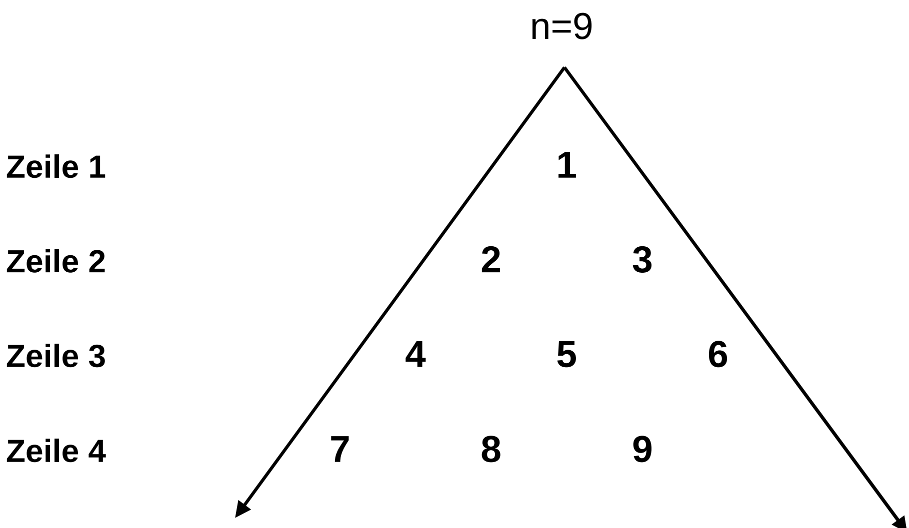
Abbildung 9

Wir gehen davon aus, dass sich an der Bearbeitung dieser Aufgaben die Fähigkeiten zur Mustererkennung und das Zurechtfinden in einem vorher unbekannten Koordinatensystem (Zeile/Stelle) beobachten lassen.

Um Informationen über die natürlichen Zahlen zu erhalten, beschäftigt man sich meist mit Anfangsstücken der natürlichen Zahlen (Nolte 1999). Analog dazu befassen wir uns mit Anfangsstücken des N-Dreiecks, die wir als n-Dreiecke bezeichnen, wobei n diejenige Zahl angibt, bis zu der das Dreieck mit dem zugehörigen Anfangsstück von N ausgefüllt ist. Nachfolgend einige Beispiele dazu:



4-Dreieck



9-Dreieck

Für die ersten Einzelaufgaben verwenden wir ein 12-Dreieck[44].

Die von den Zahlen in den n-Dreiecken gebildete „Legefigur" ist meist kein perfektes Dreieck, vielmehr gibt die Bezeichnung „n-Dreieck" Rahmen und Schema vor für das Ausfüllen mit den Zahlen 1,2,...bis n.

Die Grundidee zu unseren Aufgaben entstammt einem Artikel von Linda Jensen Sheffield (1999). Sie unterstreicht darin die Relevanz, die ihrer Ansicht nach der Aufgabenauswahl und einer korrespondierenden Art und Weise der Vorgabe und Formulierung der zugehörigen Fragestellung zukommt, wenn die Kinder zum Weiterdenken angeregt werden sollen. So empfiehlt sie, Aufgaben zu suchen, die zum einen auf verschiedene Weisen gelöst werden können, zum anderen jedoch auch Möglichkeiten zur Ausweitung anbieten und den Schülern Gelegenheit zu einer offenen Auseinandersetzung mit mathematischen Sachverhalten geben.

Sie benutzt in der oben angesprochenen Aufgabenstellung ein u-Dreieck aus dem Anfangsstück der ungeraden Zahlen bis u = 19.

Dazu beschreibt sie folgende Vorgehensweisen:

1.Skill and drill: Ergänze die folgenden drei Zahlen im Diagramm und erläutere deine Vorgehensweise.

2.Puzzle: Sag, wo die Zahl 289 in dem Diagramm stehen wird, ohne es zu vervollständigen. Erkläre deine Überlegungen.

3.Exploration: Schreibe alle Muster auf, die du im obigen Diagramm entdecken kannst. Suche nach Verallgemeinerungen und bewerte diese.

Der erste Schritt erfordert ein Verständnis der formalen Vorgabe und eine Weiterführung der Notationsweise, z.B. mit Hilfe von Weiterzäh-

---

[44] vgl. Arbeitsblatt 1 und 2

len.

Der zweite Schritt erfordert das Erkennen einfacher Beziehungen und liefert lokale Einsichten.

Erst der dritte Schritt macht es notwendig, komplexere Muster zu erkennen und diesen eine Position in der Gesamtstruktur zuzuweisen.

Die Offenheit der Fragestellung, welche wegen des Alters der Adressaten gewissen Beschränkungen unterliegen kann und die Frage nach verallgemeinerbaren Einsichten ermöglichen es, aus dem Ausgangsproblem ein ganzes Problemfeld zu entwickeln.

Genau hier möchten wir mit unserem Projekt ansetzen: Den Kindern ein „konkretes" mathematisches Problem vorzugeben, das ihnen ermöglicht, sich durch eigenständige Überlegungen längs von „Dimensionen der Veränderung und Verallgemeinerung" (Kießwetter, 1985) in ein Problemfeld hinein zu bewegen, ist eine didaktische Herangehensweise, die dem Fördergedanken des Projekts entspricht und möglichst bei jeder Aufgabenvorgabe berücksichtigt werden soll.

Aus der Aufgabe von Linda Sheffield haben wir deshalb eine Projektaufgabe entwickelt. Sie bietet die Möglichkeit, ein überschaubares Problemfeld zu entwickeln, in dem es um die Erforschung bestimmter Strukturen geht. Deshalb wurde sie für den Mathe-Treff ausgewählt, wo die Kinder erstmals an komplexe Problemstellungen herangeführt werden sollen. Insbesondere wollen wir den Kindern die Möglichkeit bieten, bestimmte Fähigkeiten zu zeigen, die wir mit mathematischer Begabung verbinden. Außerdem soll die Aufgabe auf die Testung vorbereiten.

Dazu werden die Aufgaben in einem zusammenhängenden Aufgabenkomplex sehr stark vorstrukturiert vorgegeben. Die Kinder werden gezielt zur Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben geführt. Für die Bearbeitung gibt es jedoch jeweils mehrere Möglichkeiten, und auch sonst gibt es noch etwas Offenheit, um selbständig Entdeckungen zu machen und Strukturen zu erforschen.

Ein Problem bei der Auswahl der Aufgabenstellung ergibt sich in dem

Spannungsmoment zwischen dem Ziel der Vorbereitung der Kinder auf den Test und der Fürsorgepflicht den teilnehmenden Kindern gegenüber. Kein Kind soll durch die Aufgabenvorgabe verschreckt oder durch heftige Misserfolgserlebnisse frustriert werden.

So muss man bei der Vorgabe Kompromisse eingehen. Man darf z.B. den zu bearbeiteten Zahlenraum nicht zu groß wählen, wobei die Aufgabe dennoch einen herausfordernden Charakter haben soll.

Damit alle teilnehmenden Grundschulkinder unproblematisch n-Dreiecke „vergrößern“ können, wurde mit dem Dreiecksschema der natürlichen Zahlen begonnen. Für den Anfang wurde das 12-Dreieck ausgewählt.

Hierzu gab es in der ersten Fassung (1999) folgende Aufgabenstellungen:

<u>Frage 1</u>: Wo steht die Zahl 23?

<u>Frage 2</u>: Welche Zahl steht dann in Zeile 8 an Stelle 8?

Unsere Aufgabenvorgabe ermöglicht ein konkretes Bearbeiten durch Weiterschreiben im Dreieck, ein Weiterzählen im Kopf, aber auch das Erkennen verschiedener Muster (vgl. Abbildung 7, Abbildung 8, Abbildung 9) die zur Lösung führen können. Die Vorgabe einer größeren Zahl anstelle von 12 würde die Nutzung der Muster für die Lösung vermutlich eher provozieren und Leistungsunterschiede wesentlich deutlicher hervortreten lassen. Die pädagogische Komponente im oben beschriebenen Spannungsmoment, zwang uns jedoch dazu, die ersten Teilaufgaben „relativ einfach“ zu gestalten.

Im zweiten Teil der ersten Fassung (1999) wird ein u-Dreieck (u=15) der ungeraden Zahlen mit folgender Aufgabenstellung vorgegeben:

<u>Frage 3</u>: Wo steht hier die Zahl 23?

<u>Frage 4</u>: Wo steht in diesem Schema die Zahl 71?

<u>Frage 5</u>: Welche Zahl steht darin in Zeile 7 an der Stelle 3?

Über die bereits angesprochene (Einzel-)Mustererkennung hinaus, ist für uns jede Art von erfolgreichem induktiven Denken eine wesentliche Komponente besonderer mathematischer Begabung. In diesem Fall wäre es möglich Analogien, also verbindende Musterkomplexe an beiden Dreiecken zu erkennen und unter Umständen für die Lösung zu nutzen.

Da es vielen Kindern fremd ist, sich bei einer Lösung für eine Mathematikaufgabe auf Muster zu stützen, haben wir in der 1. Version des Aufgabenblattes (wie auch sonst in den für das Projekt entwickelten Aufgaben) nach dem Abfragen einzelner Koordinaten die Fragen 6, 7 und 8, als weiterführende, das Problemfeld öffnende und dieses anbietende Aufgabenstellungen eingesetzt:

<u>Frage 6</u>: Wie kann man das herausbekommen, ohne das Dreieck weiter zu schreiben?

<u>Frage 7</u>: In dem Dreiecksschema kann man viel entdecken. Was hast du entdeckt?

<u>Frage 8</u>: Denke dir selbst ein Dreiecksschema aus. Was hast du für eine Regel verwendet und was kann man bei deinem Dreieck entdecken?

Wir mussten leider feststellen, dass die meisten Kinder (91 von 106 teilnehmenden Kindern) in der vorgegebenen Zeit (ca. 50 Minuten) keine Bearbeitungsergebnisse der erhofften Art vorweisen konnten. Und auch die meisten Antworten der wenigen Kinder, die sich schriftlich äußerten, gaben Anlass, eine momentane Überforderung zu vermuten. Die Gründe dafür können allerdings vielfältiger Art sein:

So ist es in der Schule nicht selbstverständlich, nach alternativen Lösungswegen zu suchen, unangeleitet eigene Entdeckungen zu machen oder selbständig Aufgaben zu kreieren, da meist eine enge Ergebnisorientierung im Mittelpunkt des Unterrichts steht. Vielleicht hätte man aber auch die Fragen 6, 7 und 8 in einem kurzen Zwischenplenum noch einmal erläutern können, um das Verständnis für die Fragestellung abzusichern, nachdem bereits erste Entdeckungen und eventuell auch Vernetzungen bei den Kindern stattgefunden haben. Möglich ist aber auch, dass die Kinder dieser speziellen Gruppe einfach keinen Zugang zu diesem Aufgabenkomplex gefunden haben. Oder die Kinder haben noch zu wenig Routine und deshalb zu große Schwierigkeiten beim Umgang mit Texten.

Die geschilderte Erfahrung spricht natürlich dafür, später im Rahmen des Projekts, diese Art von Aufgabenstellungen vermehrt einzusetzen. Für den Mathe-Treff jedoch, an dem die Kinder in der Regel zum ersten Mal mit weiter gefassten Aufgabenkomplexen konfrontiert werden, schien die Art der Fragestellung erst einmal wenig gewinnbringend zu sein.

So wurde das Arbeitsblatt noch im selben Jahr für den 2. Mathe-Treff in der folgenden Weise „überarbeitet“:

1. Die Fragen 5,6,7 und 8 wurden komplett gestrichen.
2. Die Fragen 3 und 4 wurden umformuliert, um die Kinder noch mehr auf die Analogie zu lenken. Bei Aufgabe 3 könnten die Kinder sich jetzt die übergeordnete Struktur (eindeutige Zuordnung, gleiche Zeile/Stelle suchen) zunutze machen. Aufgabe 4 lautet genau gleich wie Aufgabe 2 (Transfer herstellen).
3. Die Darstellung des Dreiecksschemas wurde verändert, da die als Orientierung gedachten Kästchen bei einer größeren Anzahl von Kindern wider Erwarten zur Verwirrung führten. (S.u.)

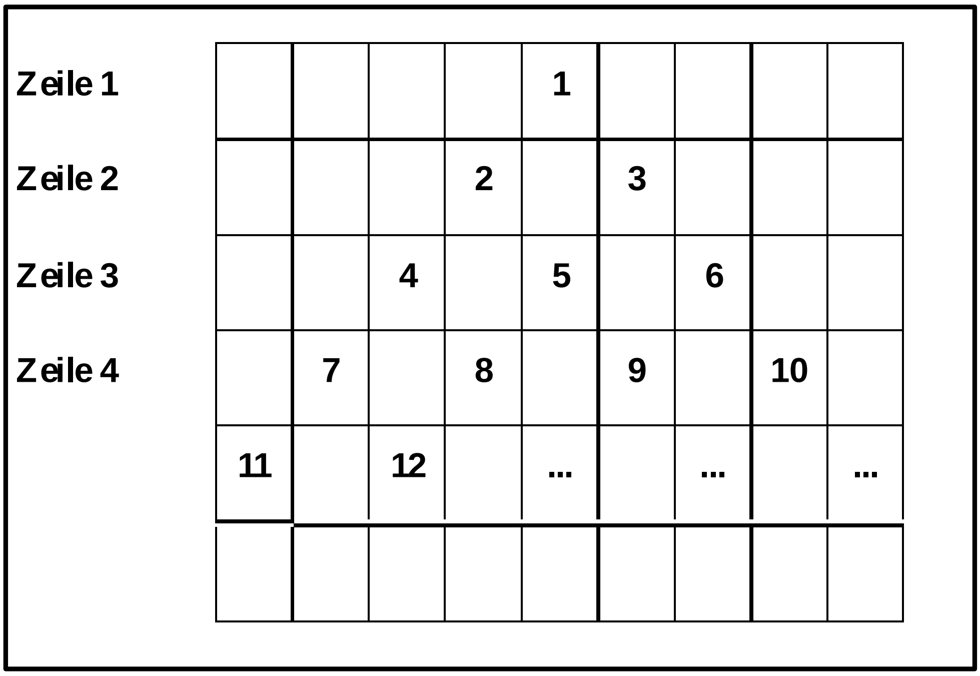


Abbildung 10 1.Version A (1999)

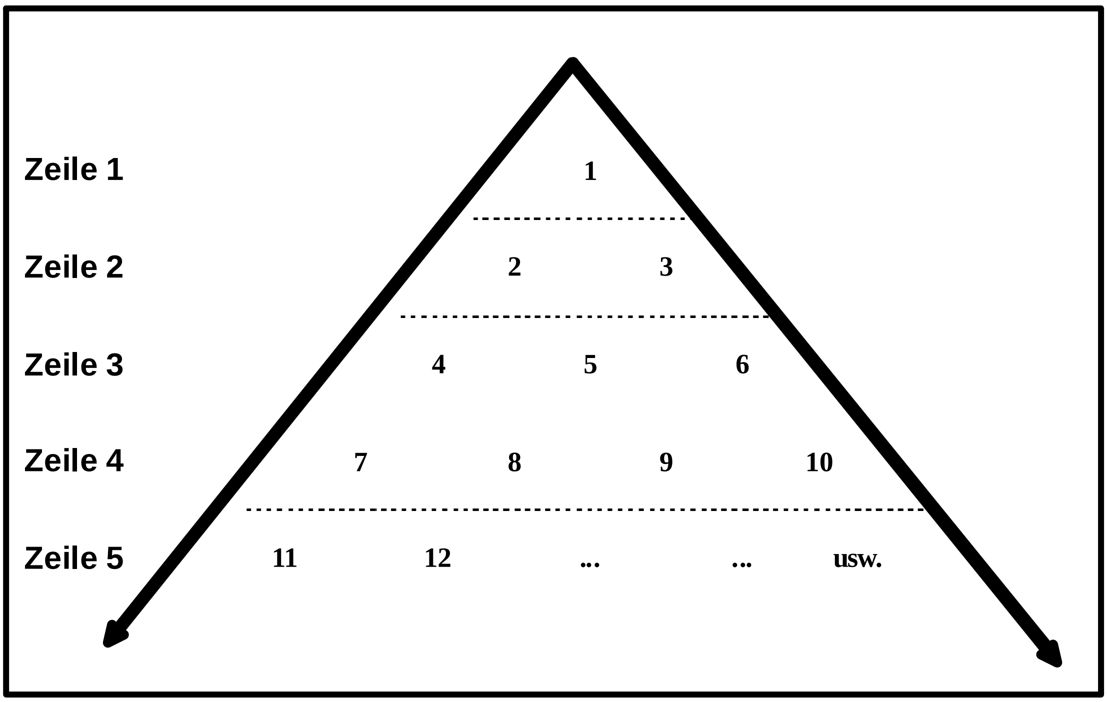


Abbildung 11 aktuelle Version (2003)

4. Das Dreiecksschema für die ungeraden Zahlen wurde ausführlicher erläutert.

Für den ersten Mathe-Treff, in dem die erste Aufgabenblattversion (A) benutzt wurde, liegen keine detaillierten Auswertungen vor, da es aufgrund der negativen Erfahrungen und der daraus resultierenden Hilfeleistungen durch die Tutoren nicht möglich war, einigermaßen objektive Aussagen über die Leistungen der Kinder anzusammeln.

Daher bezieht sich der nun folgende Teil der Ausführungen auf die Version (B) und folgende. Nach jedem Mathe-Treff wurden noch kleinere Veränderungen insbesondere am Layout vorgenommen, mit dem Ziel, den Kindern weitere Hilfen für das Verstehen des Aufbaus der Zeilen zu geben und Links-Rechts-Schwierigkeiten zu minimieren.

7.3 Präsentation der „Aufgabe“[45]

An dem eben erläuterten Aufgabenmaterial arbeiten die Kinder am 2.Tag des Mathe-Treffs. Wie in Kapitel 5. beschrieben gibt es an diesem Tag drei Aufgaben (eigentlich jeweils Aufgabensets) für die Kinder, die in einem begrenzten zeitlichen Rahmen (je Aufgabe ca. 1 Zeitstunde) bearbeitet werden. Es geht hierbei in erster Linie um die Vorbereitung auf die Testsituation, die in diesem Umfang den Kindern aus der Schule in der Regel nicht bekannt ist.[46] Aus diesem Grund ist es wichtig, dass die Kinder bestimmte Rahmenbedingungen kennen lernen und üben, wie z.B. das Sitzen an Einzeltischen, unsere Art der Aufgabenpräsentation, die relativ lange Stillarbeitsphase, das Vorgeben von Lückensätzen für die Antwort, das Kennenlernen der immer wiederkehrenden Frage nach der Begründung, aber auch das gemeinsame Beschriften und Wegheften der Arbeitsblätter. Eine weitere Hilfestellung im Hinblick auf den Test ist das gemeinsame Formulieren und Aufschreiben der Ideen, um den Kindern zu zeigen, welche verschiedenen Formen der Notation für ihre Lösungsansätze möglich

[45] Hier und später bezeichnen wir das Set von zusammenhängenden Teilaufgaben vereinfachend als Aufgabe.

[46] Thematisch bereiten die Aufgaben nicht auf die Testaufgaben vor. Wir überlegen zur Zeit, ob eine inhaltliche Hinführung, im Hinblick auf den Bereich (Arithmetik, Geometrie...), sinnvoll sein könnte.

sind. Nach unseren Erfahrungen sind die meisten Kinder es aus der Schule nicht gewohnt, Begründungen aufzuschreiben. Aus Gesprächen mit den Kindern ergab sich, dass sie häufig nicht einmal dazu ermuntert werden, über ihre Lösungswege nachzudenken.

Zur Vorgehensweise:

Die zu bearbeitende Aufgabe wird mittels einer Folie durch die Tutoren frontal den jeweiligen Gruppen vorgestellt. Das Aufgabenformat ist den Kindern bereits vom Freitag bekannt, d.h. es gibt zuerst einen Text zur Information und dann die dazugehörigen Fragen. Beides wird den Kindern vorgelesen. Der Schwerpunkt bei der Vorstellung liegt auf der Sicherung des Verstehens der Vorgabe. Erst danach erhalten die Kinder ihr Aufgabenblatt, welches sie sofort mit ihrem Namen versehen sollen. Damit werden die Kinder zunächst allein gelassen, weitere inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet, da die Kinder dazu angehalten werden sollen, sich das Informationsblatt genau anzuschauen und diesem Hilfestellungen für die Lösung zu entnehmen (so führen manche Beispiele bei genauer Betrachtung bereits zu einem möglichen Muster, sind in gewisser Weise also paradigmatisch).

Das Aufgabenmaterial zum Dreiecksschema besteht aus zwei Informationsblättern und zwei Aufgabenblättern. Daraus ergibt sich für die Vorgehensweise folgendes Problem:

In der realen Testsituation werden den Kindern alle zur Aufgabe gehörigen Informations- und Aufgabenblätter vor der Stillarbeitsphase vorgestellt. Da es sich am Samstag des Mathe-Treffs um die Testvorbereitung handelt, müsste dort eigentlich ebenso verfahren werden. Andererseits weicht die Aufbereitung der Aufgaben erheblich von der üblichen schulischen Darstellung ab, und auch der Umgang mit Informationsblättern zu mathematischen Sachverhalten ist für die meisten Kinder recht ungewohnt, so dass diese Vorgehensweise die Kinder überfordern könnte. Wieder befinden wir uns in einem Spannungsverhältnis. Die Kinder sollen einerseits eine Vorstellung davon bekommen, was sie in der Testsituation erwartet. Wir wollen sie damit in die Lage versetzen, selbst zu entscheiden, ob sie sich diese Prozedur zutrauen. Auf der anderen Seite jedoch, wollen wir sie nicht durch die Folgen von organisatorischen Maßnahmen frustrieren.

Daher haben wir uns entschieden, den Kindern zunächst nur den ersten Teil der Aufgabe vorzustellen. Nach der Vorstellung dieses Aufgabenteils gibt es kaum Verständnisschwierigkeiten. Es ist bemerkenswert, dass sich fast alle Kinder in der für sie ungewohnten Koordinatenzuordnung (Zeile/Stelle) sicher zurechtfinden.

Zum weiteren Verlauf der Sitzung gibt es nun unterschiedliche Möglichkeiten:

- Um die Gedankengänge der Kinder, nicht durch eine gemeinsame Einführung für den zweiten Aufgabenteil zu unterbrechen, und da diese Kinder unterschiedlich schnell Lösungen finden, könnte es angebracht sein, das zweite Informationsblatt individuell nach Bedarf einzugeben. Es wäre dann möglich zu beobachten, inwieweit die Kinder in der Lage sind, sich selbständig Informationen zu erschließen. Dieses Vorgehen erfordert jedoch ein hohes Maß an Lesekompetenz, das nicht als selbstverständlich vorausgesetzt werden kann.
- Außerdem widerspräche dies dem Prinzip der Absicherung unserer Vorgaben. Wir wollen, dass es für die Kinder keine Unklarheiten darüber gibt, was getan werden soll. Wir halten es für notwendig, dass die Kinder ihre Energien und ihre Motivation für die Bearbeitung der Aufgabe verwenden, und sich nicht zu sehr in den Prozess vertiefen, die Aufgabe zu erschließen, so dass es ihnen am Ende an Zeit und womöglich auch an Konzentration mangelt, wohl wissend, dass dieses Postulat keinen Bestand haben kann, wenn die Erfordernisse der Testung im Vordergrund stehen.
- Es wäre auch denkbar jedem Kind einzeln nach Bedarf das Informationsblatt vorzulesen und Verständnisfragen zu klären. Dies ist zum einen aus organisatorischen Gründen nur schwer durchführ-

bar[47], zum anderen wäre die Auswertbarkeit der Ergebnisse nur eingeschränkt gegeben, da die Erklärungen und Hilfestellungen nicht standardisiert sein könnten, vielmehr vermutlich sogar recht unterschiedlich wären.

- Dies würde die Feststellung von besonderer Begabung in mehrfacher Hinsicht erschweren. Am Samstag geht es nämlich nicht nur um die Vorbereitung der Kinder auf den Test.

  Es werden vielmehr, wie auch schon am Freitag, die Lösungsstrategien der Kinder beobachtet und anhand der Aufzeichnungen[48] in eigens dafür konzipierte Protokollbögen eingetragen. Wir sind bemüht, möglichst viel an Informationen über die einzelnen Kinder zusammenzutragen, um später auf einer möglichst breiten Informationsbasis unsere Entscheidung über die Aufnahme in die Förderung fällen zu können.

- Die dritte Möglichkeit das zweite Informationsblatt einzugeben, ist eine Vorstellung im Plenum, so wie es auch mit dem ersten Teil geschieht. Durch die Unterbrechung der Arbeitsphase können vielleicht nicht alle Gedankengänge für den ersten Teil der Aufgabe zu Ende geführt werden. Andererseits müssen sich die Kinder im Test auch an bestimmte Zeiteinheiten halten. Ein weiterer Aspekt, der für diese Vorgehensweise spricht, ist die so eröffnete Möglichkeit, die Ergebnisse und Lösungswege für den ersten Aufgabenteil zusammentragen zu können. Es werden also vor der Vorstellung des zweiten Teils des Aufgabenmaterials die verschiedenen Lösungsansätze der Kinder mit Hilfe der Tutoren notiert und mit den Kindern reflektiert.

- Dadurch erhalten die Kinder möglicherweise Anregungen im Sinne der Zone der nächsten Entwicklung (Wygotski, 1986, 1987) für die Bearbeitung der weiteren Aufgaben. Wir können später jedoch nur

[47] (ca. 20 Kinder / 3 Betreuer)

[48] Während der testähnlichen Situation sind Gespräche unter den Kindern verboten. Die Betreuer sind angehalten, darauf zu achten.

Vermutungen darüber anstellen, inwieweit bestimmte Kinder im Plenum angesprochene Ideen (Muster, Vorgehensweisen) für die Bearbeitung der Fragen 3 und 4 aufgreifen und einen sinnvollen Bezug herstellen konnten. Solches ist nach unserer Meinung ein wichtiger Aspekt mathematischer Begabung. Es ist zu vermuten, dass durch gezielte Interviews interessante Erkenntnisse zu diesem Bereich zu gewinnen wären. Leider war uns ein derartiger Erkenntnisgewinn während der Mathe-Treffs aufgrund mangelnder Ressourcen nicht möglich.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich der nachfolgende Ablauf im Vergleich als sehr günstig herausgestellt hat:

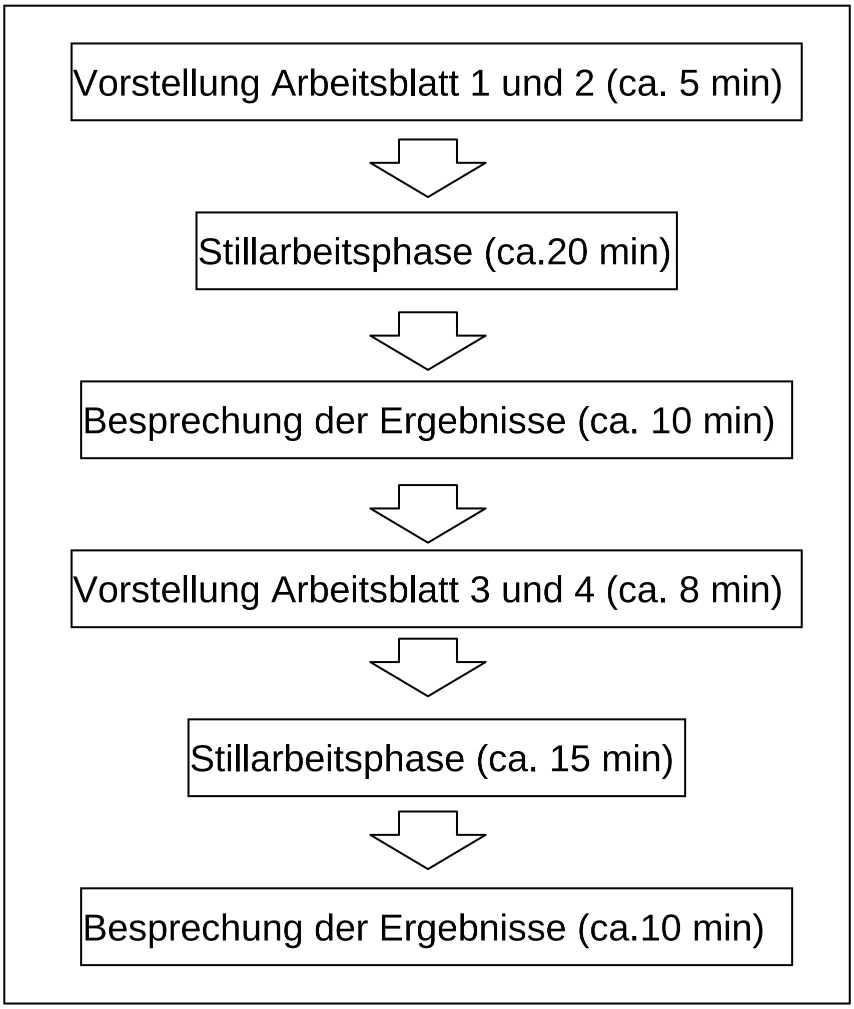


Abbildung 12

Dabei hat sich die zusätzliche Aufforderung durch den Tutor, nach mehreren Möglichkeiten zu suchen, sehr positiv auf das Arbeitsverhalten der beobachteten Kinder ausgewirkt. Es haben dabei jedoch nicht mehr Kinder die Struktur erkannt, vielmehr haben die Kinder, die eine Struktur näher betrachtet haben, noch weitere Muster erkannt, während die anderen Kinder im Rahmen ihrer Möglichkeiten agiert haben, (z.B. weitere Zahlen in ihr Dreieck eingetragen haben).

7.4 Die Arbeitsergebnisse der Kinder

7.4.1 Zu Teilaufgabe 1

Wo steht dann die Zahl 23?

Richtige Lösungen[49]:

a. Zeile 7	83% der Kinder
b. Stelle 2	74% der Kinder
c. a und b	73% der Kinder

Etwa 56% aller Kinder versuchen, das Dreiecksschema bis zur gefragten Zahl weiter auszufüllen oder zeichnen ein eigenes Dreiecksschema auf.

Doch längst nicht alle Kinder gelangen so zum richtigen Ergebnis, 10% schaffen dies nicht.

70% der Kinder, welche die richtige Lösung (c) finden konnten, haben das 12-Dreieck schriftlich erweitert, wobei es für sie im Plenum bei der Frage: „Wie hast du das herausgefunden?“ auffallend wichtig zu sein scheint, welche Art der Weiterführung gewählt wurde. Und jede Art wird als andere Lösung angesehen:

[49] In diesem Bericht wurden die Arbeitsblätter von 763 Kindern berücksichtigt.

Ein kurzer Ausschnitt aus einem Plenum macht dies deutlich. An der Tafel stand die Lösung der ersten Frage: 7.Zeile, 2.Stelle:

> L: Wie kommst du darauf?
>
> K1: Ich hab das Dreieck weitergemalt, dann hab ich´s aufgeschrieben.
>
> K2: Ich hab das Dreieck einfach weiter nach unten geführt.
>
> L: Wer hat das Dreieck noch aufgemalt?
>
> Etwa 2/3 der Kinder melden sich.
>
> K3 : Ich, ich
>
> L: Und du?
>
> K3: Ich hab auf ein Schmierpapier eine Pyramide gemalt und dann weitergeschrieben.
>
> K4: Ich hab das auf der Rückseite weitergeschrieben.
>
> K5: Man muss das nicht extra aufmalen, man kann es einfach weitermalen.

Die Leiterin versucht durch die Frage: „Wer hat das Dreieck noch aufgemalt?“ alle Kinder zu beteiligen, die das Dreieck schriftlich fortgeführt haben, um dann auf andere Lösungsmöglichkeiten eingehen zu können. Die Kinder reagieren jedoch nicht wie gewünscht. Da die meisten Kinder in irgendeiner Form das Dreieck „aufgemalt“ haben, fühlen sie sich vielmehr dazu angeregt, weitere Formen des Weiterführens zu benennen und als andere, eigenständige Lösungsvarianten vorzustellen. Dies sind sie vermutlich aus der Schule gewohnt. So erhalten sie auch hier durch die Tutorin die persönliche Rückmeldung, dass auch ihre Fortführung richtig ist.

30% der Kinder mit der richtigen Lösung haben das Dreieck nicht weitergeschrieben[50], sondern im Kopf fortgesetzt[51]. Viele dieser Kinder

[50] weiter gemalt, weitergemacht, weitergeführt, weiter ergänzt, vervollständigt, weiter gezeichnet, erweitert, weiter eingetragen

[51] nachgedacht, gezählt, vorgestellt, gerechnet

haben uns nur das richtige Ergebnis aufgeschrieben und nicht erklärt, wie sie darauf gekommen sind.

Anders dagegen **Lina**, sie schreibt:

> In der 5. Zeile steht die letzte 15
>
> und dann + 5 +1= 21
>
> das ist die letzte Zeile 6
>
> aber die 23 haben wir noch immer nicht
>
> aber bald
>
> deswegen muss sie ja in der 7. Zeile sein
>
> und von 21 wissen wir ja, das es nur noch 2 sind.

Oder **Ole:**

> Jede Zeile hat eine Zahl mehr als die vorherige,
>
> deswegen musste ich nur 15+6 rechnen und das sind 21,
>
> aber ich musste ja die Zahl 23 suchen
>
> und die war in Zeile 7 an der Stelle 2.

Beide Kinder zeigen uns durch ihre Äußerungen, dass sie etwas von der Besonderheit der Struktur des Dreiecks erkannt haben und so zur richtigen Lösung gekommen sind.

Natürlich können auch andere Kinder, die das Dreieck nur weitergeschrieben haben und uns keine Erklärung dazu notierten, dieses Strukturwissen zusätzlich zur Lösung genutzt haben. Eine prinzipielle Unsicherheit bei den Interpretationen lässt sich nicht vermeiden.

Ole und **Lina** haben sich nicht direkt an den Randzahlen orientiert, sondern an der <u>Anzahl der Zahlen in einer Zeile</u>, die dem Abstand der rechten Randzahlen entspricht,

anders dagegen **Johann:**

> Ich hab mir die rechte Seite angeguckt

und gesehen, dass von der 1 zu 3 zwei Abstand sind

3 zu 6 und so weiter bis zu 21

und in der nächsten Reihe 2 vor.

(Dazu hat er die rechten Randzahlen bis zur 55 in einem Dreiecksschema notiert)

Folgendes ließ sich bei **Florian** beobachten:

F:“Darf ich auch weiterschreiben?"

L: „Ja, musst du aber nicht.“

F: Hm, erst mal gucken- ich hab was gemerkt

+5 sind es 15

+6 sind es 21

+7 sind es 28

+8 sind es 36, darf ich das hier aufschreiben und es ausprobieren?

Weiterhin erklärt **Florian**, dass immer soviel dazukäme, wie Zahlen in der Zeile stünden. Er schreibt zur Überprüfung zunächst das Dreieck weiter, hält aber bei 21 inne und orientiert sich dann nur noch an den rechten Randzahlen.

Christoph hat scheinbar spontan das Muster der rechten Randzahlen erkannt und formuliert, *hier geht es immer +1+2+3+4+5*. Er kann dies jedoch nicht für seine Lösung nutzen und schreibt die Zahlen bis zur 23 weiter. Offen bleibt die Frage, ob er nur partiell dieses Muster wahrgenommen hat oder durch das Weiterschreiben seine Vermutung überprüfen wollte.

Daniel beschreibt zunächst das Muster der rechten Randzahlen:

Von der 1 bis zur 3 sind es 2

Von der 3 bis zur 6 sind es 3

Von der 6 bis zur 10 sind es 4,

doch dann bewegt er sich nur noch in kleineren für ihn vermutlich überschaubaren Schritten weiter:

Von der 10 bis zur 13 sind es 3

Von der 13 bis zur 16 sind es 3

Von der 16 bis zur 19 sind es 3

Von der 19 bis zur 23 sind es 4

Auch dies führt zum richtigen Ergebnis. Ob er sich im Kopf das Raster bzw. Dreiecksschema denkt und sich dann die Zahlen gedanklich vorstellt oder welche Repräsentation er sonst wählt, um auf die richtige Zeile/Stelle zu kommen, bleibt ungeklärt.

Dennis vervollständigt das Dreieck bis zur 15 und markiert dann sowohl <u>die linken</u> als auch <u>die rechten Randzahlen</u>. Dazu schreibt er:

In der ersten Reihe sieht man die 11/7/4/2/1 bei der 11 und die 7 sind in einer Reihe. Erst hast du bei der 11-4 gemacht =7-3=4-2=2-1=1.

Diese Teileinsicht kann er jedoch nicht für die Lösung nutzen. Vielmehr verliert er sich in der detaillierten Betrachtung eines Ausschnitts des n-Dreiecks. Er nennt uns keine Lösung.

An diesen Beispielen kann man erkennen, dass es die vielfältigsten Bearbeitungsmöglichkeiten für diese Frage gibt, und dass **jedes Kind** etwas für sich entdecken bzw. bearbeiten könnte.

Viele Kinder haben geschrieben, dass sie <u>*einfach weiter gezählt*</u> hätten. Darunter sind Kinder, die die Randzahlen im Dreiecksschema markiert haben oder auch Kinder die einen Rechenweg aufgeschrieben haben.

Wir wissen nicht genau, was für diese Kinder weiter zählen oder weiter rechnen bedeutet. Da man nicht zwangsläufig linear weiter zählen muss, so wie man dies im ersten Moment vermutet, denn auch die

Randzahlen kann man „weiter zählen“ und den Abstand kann man auch „weiter rechnen“.

Wir können nur sagen, dass mindestens 8% aller Kinder mit der richtigen Lösung sich dabei für uns nachvollziehbar an den rechten Randzahlen orientiert haben und mindestens 3% an den linken Randzahlen

Auch hier gibt es wieder Kinder mit partiellen Einsichten, die dann über das Weiterschreiben die richtige Lösung gefunden oder bestätigt haben.

Einige Kinder, die nur die Lösung aufgeschrieben haben äußerten sich wie folgt im Plenum:

> **Jan**: „Ich habe das Dreieck mir im Kopf genommen, also 1+2+3+4+5+6+7=28 und 28-5=23“

Oder **Stefan,** der sich links an den Randzahlen orientiert :

> Ich hab einfach so im Kopf gerechnet.
>
> 1+1+2+3+4+5+6=22
>
> 22+1=23

Ausgehend von der 1 ermittelt er die 1. Zahl der 6. Zeile und gelangt so zur 23.

Beide Kinder haben das Dreieck nicht schriftlich weitergeführt, aber auch sonst keine Erläuterungen notiert. Leider wissen wir nichts Genaueres über ihre Denkprozesse (dazu müssten wir die Kinder genau beobachten können, z.B. und nach Möglichkeit ein lautes Denken anregen) oder über die Schnelligkeit, mit der sie ihre Lösung gefunden haben. Anders dagegen bei **Mats,** der bereits während der Aufgabenvorstellung das richtige Ergebnis sagen möchte.

Er kann sofort beeindruckende Erläuterungen zur Struktur des Dreiecksschemas geben und ist auch in der Lage, diese fehlerfrei zu notieren.

7.4.2 Zu Teilaufgabe 2

Welche Zahl steht dann in Zeile 8 an Stelle 8?

Die richtige Antwort **36** haben ca 65% der 763 Kinder aufgeschrieben.

Bei dieser Frage haben etwa 62% der Kinder mit der richtigen Lösung das Dreieck schriftlich vergrößert (absolut 42%). Insgesamt waren es 56% aller Kinder, die im Dreieck weitergeschrieben haben.

Zur richtigen Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, eine zumindest lokale Einsicht in die Struktur des Dreiecks gewonnen zu haben, denn auch das Weiterschreiben erfordert wenigstens das Verständnis des Aufbaus des Dreiecks. Mit dieser zweiten Frage wollen wir uns also vergewissern, ob die Kinder die zu 1 „umgekehrte“ Fragestellung bearbeiten können, und ob sie sich ihr erkanntes Muster dann auch für die Bearbeitung dieser Aufgabenstellung zunutze machen können.

Im Weiteren beschreiben wir nun, was einige - uns schon bei der ersten Frage aufgefallene Kinder - herausgefunden haben.

Johann schreibt:

> Genauso wie bei Aufgabe 1.
>
> Ich bin da bis zur 8. Zeile gekommen und zur 8. Stelle gegangen.

Er bezieht sich auf seine Zeichnung, in die er die rechten Randzahlen eingetragen hat.

Florian schreibt:

> In der Zeile 8 steht dann die 36 denn 1+2=3+3=6+4=10+5=15+6=21+7=28+8=36

Stefan, der sich im ersten Teil an den linken Randzahlen orientierte, schreibt in einer mathematisch korrekten Gleichung ohne Zwischenschritte: *1+2+3+4+5+6+7+8 = 36.*

Dies lässt vermuten, dass er sowohl das Muster der rechten als auch das der linken Randzahlen erkannt und dann das der gesuchten Zahl am nächsten stehende Muster für die weiteren Überlegungen ausgewählt hat.

Des Weiteren kann man feststellen, dass die meisten Kinder ihre Lösungswege zu Frage 1 auch für die Frage 2 genutzt haben. So haben sich zu dieser Frage mindestens 7% mit den rechten Randzahlen auseinandergesetzt und mindestens 4 % haben die linken Randzahlen zur richtigen Lösung genutzt, d.h. wiederum nur 11% haben sich, für uns nachvollziehbar, mit Randzahlen und deren Mustern auseinandergesetzt.

Im Plenum gab es noch einige interessante Äußerungen:

Jens (hat das Dreieck weitergeschrieben) :

> Ich hab einfach abgemessen, was für einen Durchmesser die Zeile hat und dann habe ich noch mehr Zeilen dazugeschrieben.

Obwohl er ein ungewöhnliches Vokabular für die Anzahl der Zahlen in einer Zeile benutzt, scheint allen Kindern der Gruppe bei der Abschlussbesprechung deutlich zu sein, was er meint und wie er vorgegangen ist.

Franz:

> Ich habe auch weitergezählt. Ich wusste, dass die Schräge rechts „fibonatsche Zahlen“ sind und dann habe ich gekuckt, wie die 8.fibonatsche Zahl ist.

Franz erklärte weiter, er kenne dies aus dem Zahlenteufel. Er verwechselte jedoch die Begrifflichkeiten, denn bei den rechten Randzahlen handelt es sich um die Dreieckszahlen, nicht aber um die Fibonacchi-Zahlen[52].

[52] Jede Zahl in der Fibonacci-Folge ist die Summe der 2 letzen Zahlen. Die Folge

Kinder, die sich an den Randzahlen orientierten und dies im Plenum erklärten, sprachen meist von einem **Trick** und einige meinten, sie hätten einen **Geistesblitz** gehabt.

Einem Mädchen war diese Teilaufgabe zu einfach. Schon nach 10 Minuten meldete sie sich, um ihre Lösungen zu zeigen.

Lotta:

> **Lo**: Bei Aufgabe1 musste ich ja nur noch 5 dazurechnen und dann noch plus 8, weil ja Zeile8 8 Zahlen hat.
>
> L: Du hast noch viel Zeit, willst du noch eine andere Zahl versuchen?
>
> **Lo**: *Ich versuch das mal bis 100.*

Sie will das Dreieck bis zur 50 aufschreiben, weil ihre erste spontane Vermutung ist, dass man die Zeile und den Platz verdoppeln könne. Nach einem kurzen Blick auf das Dreiecksschema verwirft sie ihre Idee und murmelt, während sie schreibt:

> Reihe 2 die 3 - Reihe 4 die 6, das ist falsch, das kann nicht sein:
>
> Ich nehme mir die 1, verdopple und dann +2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=92
>
> 92 steht in Zeile 14 an erster Stelle.

Sie schreibt von der 92 bis zur 100 weiter und kommt so zu Zeile 14 Platz 9.

Nun scheint sie zufrieden zu sein und in Ruhe auf das Plenum warten zu können. Weitere Zusatzangebote, wie Knobelaufgaben, die stets bereitgehalten werden, lehnt sie ab.(Sie darf ihre Idee später auch im Plenum vortragen, wobei **Marta** erklärt, dass man auch mit den rechten Randzahlen rechnen könne, da man dann immer die letzte Zahl einer Reihe erhalten würde.)

---

beginnt mit 0 und 1. Also 0,1,1,2,3,5,8...

Auch **Mats** löst die 2. Teilaufgabe spontan richtig. Die Bitte, seine Lösungsidee aufzuschreiben, erfüllt er zügig. Daher erhält auch er die Zusatzaufgabe, die „Koordinaten“ für die Zahl 100 zu bestimmen. Dabei orientiert er sich an der senkrechten mittleren Zahlenreihe, *„weil da die Zahlen schneller größer werden“* und ordnet dann grob die 100 ein. Eine genaue Überprüfung der richtigen Zeile und Stelle (nach dieser Schätzung) nimmt er mit Hilfe der linken Randzahlen vor. **Mats**, der bereits bei der Vorstellung der Aufgabe die Struktur des Dreiecks intuitiv erkannte, erforscht nun das ganze Konstrukt.

Diese Aufgabenerweiterung gehört zwar nicht zum engeren Konzept der Vorbereitung auf die Testung, sie zeigt vielmehr auf, welche Möglichkeiten und welcher Aufforderungscharakter in diesem Aufgabenkomplex liegen und wie wichtig es für begabte Kinder sein kann, dass ihnen derartige Möglichkeiten zur Vertiefung gegeben und dass nicht nur „kurztaktische“ Knobelaufgaben angeboten werden.

7.4.3 Zu Teilaufgabe 3 und 4

Teilaufgabe 3: Welche Zahl gehört (rechts) zur linken Zahl 23?

Die richtige Antwort **45** haben 45% der Kinder aufgeschrieben.

Schriftlich weitergeführt wurde das Dreieck der ungeraden Zahlen von 32% aller Kinder und von 49% der Kinder mit der richtigen Lösung.

Bei dieser Fragestellung ergibt sich eine weitere Lösungsmöglichkeit, die **Stefan** im Plenum erklärt:

> Man muss 23+23 rechnen minus 1 ist gleich 45.
>
> L: Wieso hast du das gemacht?
>
> Ich habe auf das Informationsblatt gekuckt.
>
> (7+7)-1=13
>
> (9+9)-1=17
>
> (12+12)-1=23, also muss man so rechnen.

Stefan, der uns schon bei Aufgabe 1 und 2 aufgefallen ist, hat sich hier das Informationsblatt genau angesehen und sich dort die für ihn nötige Information beschafft. Er rechnete also (23+23)-1=45

Diesen Rechenweg hat er mit 21% (diese machen 10% aller Kinder aus) der Kinder gemeinsam, die auch das Verdoppeln zur Lösung der Aufgabe genutzt haben.

Johann schreibt:

> 45. Ich habe mir im linken Dreiecksschema die Zahl 23 gesucht und mit dem Rechten verglichen

Wir können bei den meisten Kindern anhand der Aufzeichnungen keine Aussage darüber treffen, ob sie mit Hilfe der Zusatzinformationen oder durch eigenständige andere Überlegungen auf diese Lösung gekommen sind.

Es gab in diesem Plenum viele verschiedene Lösungsvorschläge:

> 71,43,47,23,34,33,12,44

Die 44 war **Florians** Lösung, der als Rechenweg aufschrieb:

> (23+23)-2=44

Die Verdopplung hat Florian erkannt. Dass er 2 abzieht, liegt vermutlich daran, dass dies der Abstand zwischen zwei ungeraden Zahlen ist. Merkwürdig scheint es, dass er nicht bemerkt, dass 44 nicht richtig sein kann, da es eine gerade Zahl ist. (In unseren Gruppensitzungen zeigt sich immer wieder, dass die Kinder von ihren Ideen sehr überzeugt sind und dass sie noch nicht gelernt haben, diese zu hinterfragen oder zu überprüfen. Dies könnte eine Erklärung für Florians Verhalten sein.)

Man kann erkennen, dass diese Aufgabe eine erhöhte Schwierigkeit darstellt. Zum einen ist diese Schwierigkeit sprachlicher Art: linkes Schema (N-Dreieck)- rechtes Schema (U-Dreieck), zum anderen erfordert es ein hohes Maß an Konzentration, beide Schemata gleichzeitig ins Auge zu fassen.

Es gibt Kinder, die das Muster der linken Randzahlen übertragen können (sie zeigen es uns durch das Eintragen in die Schemata), welche dies jedoch nicht zur Lösung der 3.Teilaufgabe nutzen können. Die Vermutung liegt nahe, dass sie sich über die Position der 23 im Dreieck der natürlichen Zahlen nicht bewusst sind und diese somit nicht auf das U-Dreieck übertragen. Teilaufgabe 4 ist dagegen leichter zu bearbeiten, da dort keine eigenständige Analogie verlangt, sondern wie in Teilaufgabe 2 nach einer Zeile und Stelle gefragt wird.

Teilaufgabe 4: Welche Zahl steht im Schema (2) – also rechts- in Zeile 8 an der Stelle 8?

43% aller teilnehmenden Kinder haben das richtige Ergebnis (**71**) herausgefunden. Für uns nachvollziehbare Lösungswege waren:

- das Weiterschreiben bei 52% der Kinder,
- die Orientierung an den Randzahlen bei 5% der Kinder
- die Herstellung der richtigen Beziehung zum N-Dreieck bei 11%,

Bei 32% der Kinder bleibt es unklar, wie sie die Lösung herausgefunden haben.

Florian hat uns bei Aufgabe 4 keine Lösung aufgeschrieben.

Stefan hat auch hier die richtige Lösung gefunden, aber keine Begründung dazu geschrieben.

Johann hat an den rechten Rand des u-Schemas den Abstand der Randzahlen in Form einer „Treppenfunktion" gezeichnet bis zur 71 und er schreibt:

> Ich habe die Funktion von oben nach unten benutzt.
>
> Die 2-er Abstände sind, weil immer mehr gerade Zahlen fehlen.

Mats war sich nicht sicher, ob das Ergebnis 71 oder 73 ist. Auf die Frage, wie er das überprüfen könne, antwortete er:

„Ich kuck an den rechten Randzahlen nach, denn das ist ja wieder Zeile 8 Stelle 8.“

Johann, Stefan und **Mats,** die in diesem Mathe-Treff durch besondere Lösungsansätze aufgefallen sind, haben bei der nachfolgenden Aufnahmetestung die Kriterien für die Aufnahme in unsere Gruppe erfüllt.

Viele Kinder, die wir ebenfalls aufnehmen konnten, haben bei dieser Aufgabe im Mathe-Treff zwar die richtigen Lösungen notiert, aber das Dreieck schriftlich fortgesetzt. Ein in unserer Gruppe besonders leistungsstarkes Kind hat bei dieser Aufgabe zu jeder Frage vor allem „wunderschöne“ neue Dreiecke gezeichnet Die Reproduktion in sauberer Form entspricht sicherlich den ihm bekannten Erwartungen aus der Schule.
So geht es mehreren Kindern, die sich erst im Laufe der Gruppenarbeit daran gewöhnen, dass sie bei uns ihre eigenen, manchmal unkonventionellen Lösungsansätze verfolgen dürfen – ja sogar sollen!-, ohne bestimmten einengenden Erwartungen entsprechen zu müssen.

Interessant ist in diesem Zusammenhang eine Äußerung von

Lisa: „Man kann das sicher weiter zeichnen, aber ich will das nicht. Ich mach das nicht. Ich schreib die Zahlen nicht auf.“

Lisa hat zu allen Fragen die richtigen Lösungen, leider ohne Begründung.

7.5 Abschließende Bemerkungen

Wenn man von der Gesamtgruppe ausgeht, haben sich nur ca. 10% aller Kinder (bei Frage 3) zum Bezug vom N-Dreieck zu dem U-Dreieck geäußert und nur ca. 8% sind auf die Randzahlen eingegangen. Von daher lässt sich sagen, dass sich die Aufgabe durchaus nicht nur zur organisatorischen Vorbereitung auf den Mathe-Test eignet, sondern auch diskriminierende Wirkung hat. Wobei es, wie oben bereits mehrfach erwähnt, nicht auszuschließen, sondern sogar zu vermuten ist, dass auch einige durch diese Prozentzahlen nicht erfasste Kinder mit der richtigen Lösung sich dieser Muster bedient haben, die Information darüber aber in der vorgegebenen Zeit und mit den ihnen zur Verfügung stehenden sprachlichen Mitteln nicht an uns weiterzugeben vermochten. Besonders zu erwähnen ist, dass Kinder, die sich bei dieser Aufgabe durch besondere Leistungen ausgezeichnet haben und zum Teil zitiert wurden, später die Aufnahmekriterien für unsere Uni-Fördergruppe voll erfüllten.

Die Aufgabe eignet sich insbesondere für die Testvorbereitung, weil die Kinder ihre Gedanken auf verschiedene Weise verschriftlichen können. Sie können bestimmte Markierungen an den Dreiecken vornehmen, die auf Mustererkennungsprozesse hinweisen. Sie zeigen uns, dass sie weitergezählt haben, wenn sie die Dreiecke weiterschreiben und teilweise beschreiben sie, was sie erkannt haben. Die große Ähnlichkeit in den Antwortmöglichkeiten der verschiedenen Aufgabenteile kann quasi als kleine Normierung der Notationsweise durch die Abschlussbesprechung angeregt werden.

Unter Berücksichtigung der oben erläuterten Spannungsmomente bei der Auswahl der Art der Aufgabenformulierungen und -präsentationen wäre es wünschenswert, diese Aufgabe durch weitere Teilaufgaben anzureichern, z.B. weitere und größere Zahlen einzubinden, um ganz besonders leistungsfähige Kinder (wie Lotta und Mats) herauszufordern. Dann könnte man insbesondere noch genauere Aussagen über die besondere Qualität der Lösungswege gewisser Kinder und somit über deren ganz besondere mathematische Begabung machen. Allerdings muss beibehalten werden, dass die Anfangsaufgabe stets auch durch Weiterschreiben gut zu lösen ist, um keine frühzeitige Frustration aufkommen zu lassen.

5. Publikation II und III

5.1 Publikation II

Die zweite Publikation mit dem Titel „Bausteine zur Konzeption eines Förderkonzepts - Aufgabengestaltung und Anregungen zum propädeutischen forschenden Lernen“ ist in der Monographie „Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schüler“, herausgegeben von Marianne Nolte, 2010 erschienen. Hier werden wesentliche theoretische Aspekte des Konzeptes der Förderung in den Gruppen des PriMa-Projektes zusammengefasst und theoretische Begründungen zu den Aufgabenvorgaben diskutiert.

Im Beitrag werden zunächst allgemeine Überlegungen zur Förderung mathematisch besonders begabter Grundschulkinder dargestellt, bevor die Frage der Aufgabengestaltung in den Mittelpunkt rückt, die eine gewisse Komplexität aufweisen muss, um mathematisch besonders begabte Kinder herauszufordern. Es wird dargelegt, dass es notwendig ist, dass die Aufgaben auf verschiedenen Niveaus bearbeitet werden können, so dass eine unterschiedliche Tiefe in der Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt entstehen kann. Diese Überlegungen werden anhand eines Aufgabenbeispiels verdeutlicht. Im zweiten Teil des Aufsatzes wird die Thematik der Relevanz der Komplexität der Aufgabe in den Ansatz zum propädeutischen forschenden Lernen eingebettet, das in Anlehnung an Ulm (2009) in vier Phasen an die Kinder herangetragen wird und so den Schüler*innen nicht nur kognitive Kompetenzen vermittelt, sondern auch Haltungen und Einstellungen, die mit einem forschenden Lernen verbunden sind.

5.2 Darlegung des eigenen Anteils

Der vorliegende Artikel ist in enger Zusammenarbeit mit der Betreuerin meiner Dissertation, Marianne Nolte, entstanden. Mit den Ansätzen von Kießwetter zum Umgang mit komplexen Aufgaben in der Förderung mathematisch begabter Schüler*innen habe ich mich schon während meiner Studienzeit als Mitarbeiterin im Hamburger Modell bei Karl Kießwetter auseinandergesetzt und dieses auch während meiner aktiven Zeit als Lehrerin in der Schule praktiziert. Basierend auf diesen theoretischen und praktischen Erfahrungen habe ich grundlegende Ideen zum Umgang mit den Aufgaben in das Kapitel miteingebracht. Insbesondere habe ich mich mit der Anfangsmotivation und der Prozessmotivation auseinandergesetzt sowie dem forschenden Lernen und diese Teile des Buchkapitels auch verfasst.

5.3 Abdruck der Publikation II

Nolte, M. & Pamperien, K. (2010). Bausteine zur Konzeption eines Förderkonzepts - Aufgabengestaltung und Anregungen zum propädeutischen forschenden Lernen. In M. Nolte (Hrsg.), *Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schüler* (S. 67-78). Münster: WTM

Marianne Nolte und Kirsten Pamperien

Bausteine zur Konzeption eines Förderkonzepts – Aufgabengestaltung und Anregungen zum propädeutischen forschenden Lernen

Vernetzung, Arbeitsgedächtnis, Superzeichenbildung, Anfangs- und Prozessmotivation gehören zu den wesentlichen Begriffen, die nach Kießwetter entscheidend in der Arbeit mit besonders begabten Schülerinnen und Schülern bedacht werden müssen.

Was kennzeichnet Schülerinnen und Schüler mit besonderen mathematischen Begabungen? Eine wesentliche Fähigkeit liegt in der Verarbeitung komplexer Informationen. Mit dieser Fähigkeit ist auch das Bedürfnis verbunden, auf eine Weise herausgefordert zu werden, wie es durch einfache mathematische Aufgabenstellungen nicht gewährleistet ist. Das bezieht sich auf Inhalte, auf die Komplexität der Aufgabenstellungen und die damit verbundene Zeit, die für eine Bearbeitung notwendig ist.

Ein besonderes Interesse an Mathematik führt bei vielen mathematisch begabten Kindern dazu, dass sie sich sehr früh mit mathematischen Inhalten befassen. Daten, die sie interessieren wie Länge und Gewicht von Flugzeugen, wie schnell und wie hoch diese fliegen, veranlassen Kinder, große Zahlen zu lesen und zu vergleichen, lange bevor es in der Schule thematisiert wird. Darüber hinaus interessieren sich einige Kinder für die Zahlen selbst, für deren Darstellungen für strukturelle Fragen, für Zahlenräume wie negative Zahlen usw.. Elternbefragungen entnehmen wir, dass viele der bei uns im PriMa-Projekt geförderten Kinder[1] sich in großen Zahlenräumen bewegen können, bevor sie eingeschult werden. Viele dieser Kinder sind zum

[1] PriMa steht für "Kinder in der Primarstufe auf verschiedenen Wegen zur Mathematik". Ziel von PriMa ist die Steigerung der Effizienz des Mathematikunterrichts an Grundschulen. Das Programm läuft unter der Federführung von OSR Werner Renz. Maßnahmen im

Schuleintritt mehr als andere mit großen Zahlen vertraut, viele interessieren sich für andere Zahlbereiche und auch die rechnerischen Kompetenzen liegen deutlich über denen der Eingangsklasse. Dieses Wissen ist jedoch unsystematisch. So konnte Johannes mit fünf Jahren im Zahlenraum bis zu einer Million zählen, Vorgänger und Nachfolger nennen, er kannte die Anzahl der Nullen verschiedener Zehnerpotenzen, als Lieblingsaufgabe bezeichnete er 98 + 98 = 196 und löste auch vergleichbare Aufgaben rasch. Allerdings konnte er noch nicht multiplizieren und war nicht besonders an geometrischen Aufgaben interessiert. Er konnte nur seinen Namen lesen und schreiben und auf italienisch hatte er sich im Urlaub die Zahlwortreihe bis 100 angeeignet.

Bereits bezogen auf Johannes' mathematische Kompetenzen ist die Zuordnung zu einer bestimmten Klassenstufe problematisch. Deshalb ist es einerseits erforderlich, das Wissen zu systematisieren, gleichzeitig aber auch Angebote für mathematische Tätigkeiten zu machen, die dem Wissenshunger und der Fähigkeit entsprechen, sich mit deutlich komplexeren Inhalten, als es für die Klassenstufe vorgesehen ist, zu befassen.

Das Überspringen von Klassenstufen oder das Bearbeiten von Aufgaben aus höheren Klassen kommt diesen Kindern nur bedingt entgegen, da sie neue Inhalte nicht nur sehr schnell aufgreifen, sondern sich insgesamt mit Fragen höherer Komplexität befassen können. Wie am Beispiel von Johannes deutlich wird, ist dies jedoch nicht in allen Bereichen zwangsläufig mit einem Vorwissen verbunden, das über dem der Klassenstufe liegt. Deshalb halten wir eine Förderung in Form von Enrichmentangeboten für sinnvoll. Im PriMa-Projekt werden in der Regel keine Inhalte der zukünftigen Schuljahre angesprochen, abgesehen davon, dass wir bereits in der dritten Klasse keine Einschränkungen des Zahlenraums der natürlichen Zahlen mehr vorsehen.

Zur Aufgabengestaltung

Für viele Kinder sind nicht die Inhalte neu, sondern der Umgang mit ihnen. Wir geben den Kindern Problemstellungen, die sie durch ihre Komplexität herausfordern. Die Aufgaben ermöglichen verschiedene Wege der Bearbeitung. Sie lassen in der Regel mehrere Fragestellungen zu und sind auf

---

Rahmen von PriMa sind eine Qualifizierung von Lehrkräften (MMod) und die Förderung von mathematisch interessierten und begabten Schülerinnen und Schülern der Primarstufe. (Für weitere Informationen: http://www.mint-hamburg.de/PriMa/). Die Förderung an der Universität ist eine Kooperationsmaßnahme von der Behörde für Schule und Berufsbildung, der Universität Hamburg und der William-Stern-Gesellschaft. Die wissenschaftliche Leitung seitens der Universität liegt bei Prof. Dr. Marianne Nolte.

verschiedenen Niveaus zu bearbeiten, so dass unterschiedlich weit in die mathematischen Fragestellungen eingedrungen werden kann. Damit eignen sich die meisten Aufgaben sowohl für einen Einsatz in Gruppen von besonders begabten Kindern als auch in Regelklassen, natürlich mit unterschiedlicher Bearbeitungstiefe.

Die Verbindung von Problem und Komplexität stellt die entscheidende Herausforderung dar. Entsprechend der Definition eines Problems ist dem Kind der Weg zur Lösungsfindung nicht bekannt. Die Anzahl der dabei zu verarbeitenden Informationen und die Schwierigkeit, weitere zu gewinnen, bestimmen sowohl die Komplexität als auch den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben.

Beispiel 1:

> *„Problemfeld 1: Zahlendarstellungen aus Anfangsstücken der natürlichen Zahlen*
>
> **Das Eingangsproblem**
>
> Es sei $A_n = \{ k \mid k \text{ natürliche Zahl mit } 1 \leq k \leq n \}$,
>
> also die Menge der Elemente aus einem Anfangsstück der nat. Zahlen.
>
> Man denke sich nun jede dieser Zahlen mit einem der Vorzeichen + oder – versehen und bildet dann die Summe. Beispiele:
>
> $A_5 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$; $S = 5-4+3+2-1 = 5$ oder $S = 4+3+2-5-1 = 3$ oder $S = ...$
>
> Problem: Was kann man dann über die S aussagen?" (Kießwetter, Manuskript)

Arbeitsgedächtnis

Aufgaben wie diese bezeichnet Kießwetter „[…] als Eingangspforten für umfangreiche Problemfelder mit einiger mathematischer Relevanz, die man entdecken muss, genauso wie die Art der Verwendung für die interessierende Altersgruppe von mathematisch besonders begabten Schülern." (Kießwetter, Manuskript).

Da diese „Eingangspforten" Anregungen für verschiedene Altersgruppen bieten, sind ihre Gestaltung in Form von Aufgaben sowie der Umgang damit entscheidend dafür, wie weit sie sich für eine bestimmte Altersgruppe eignen.

Die Arbeit im Grundschulprojekt hat zwar Gemeinsamkeiten mit der Arbeit in der Mittel- und Oberstufe, aber basiert dennoch auf entscheidenden Unterschieden, die der unterschiedlichen Belastbarkeit des Arbeitsgedächtnisses und der noch fehlenden Routine in der Verwendung von Heuristiken, von Darstellungen und Notationsweisen der Grundschulkinder geschuldet sind.

Die umfangreiche Ausgestaltung von Aufgaben ist den Kindern aus der Schule nicht vertraut. Es dauert nicht nur deutlich länger, sich in solchen Problemfeldern zu orientieren, es ist für viele auch unbefriedigend nicht zu wissen, welches Ziel angesteuert werden soll und wann eine Aufgabe als „fertig" angesehen werden kann. Komplexe Fragestellungen bergen in sich die Gefahr der „Verzettelung". Aus diesen Gründen ist es insbesondere im Grundschulalter wichtig, die Kinder in bestimmten Phasen des Problemlöseprozesses zu entlasten. Deshalb geben wir ihnen eine Ausgangsfrage vor. Wir vermeiden bewusst ein eigenständiges Entdecken von Eingangsfragen, weil wir sie nicht mit einem für sie noch ungeordneten Problemfeld allein lassen wollen. Auf diese Weise soll den Beschränkungen des Arbeitsgedächtnisses, sowie der noch geringen Belastbarkeit der Kinder entsprochen werden, um die notwendige Kapazität für die Arbeit in den noch folgenden komplexen Strukturen und Fragestellungen nicht unnötig zu beanspruchen. Wie eine strukturierende Einführung des angesprochenen Problemfelds aussehen kann, wird hier dargestellt (Nolte, 1999):

Zur Information:
1, 2, 3, **4** ist ein **Anfangsstück** der natürlichen Zahlen mit der **Endzahl 4.**
1, 2, 3, 4, 5, 6, **7** ist ein **Anfangsstück** der natürlichen Zahlen mit der **Endzahl 7.**
Wenn man es geschickt macht, kann man aus Anfangsstücken Aufgaben bilden, die entweder 1 oder 0 als Ergebnis haben.

Bedingungen

1. Man darf nur + oder - rechnen.
2. Man muss jede Zahl genau einmal verwenden.
3. Die Zahlen müssen ein Anfangsstück der natürlichen Zahlen sein.

Beispiele:

4 - 3 + 1 - 2 = 0	4 + 1 - 3 - 2 = 0
5 + 2 - 4 - 3 + 1 = 1	5 - 4 + 2 - 3 + 1 = 1
6 - 5 + 3 - 4 + 2 - 1 = 1	6 + 3 - 5 - 4 + 2 - 1 = 1
7 + 4 - 6 - 5 + 3 - 2 - 1 = 0	7 - 6 + 4 - 5 + 3 - 2 - 1 = 0
8 - 7 + 5 - 6 + 4 - 3 + 1 - 2 = 0	8 + 5 - 7 - 6 + 4 + 1 - 3 - 2 = 0
9 + 6 - 8 - 7 + 5 + 2 - 4 - 3 + 1 = 1	9 - 8 + 6 - 7 + 5 - 4 + 2 - 3 + 1 = 1

Aufgaben:

1. Bei der Endzahl 10 erhält man 1. Wie heißt die Aufgabe?

Die Vorgabe der Aufgabe ist nicht redundant. Die Beispiele bieten weitere Informationen an. Sie erhöhen damit die vorgegebene Informationsfülle und zeigen implizit eine Bearbeitungsmöglichkeit der ersten Aufgabe an, die von den Kindern jedoch nicht genutzt werden muss, da die erste Frage auch noch auf anderen Wegen bearbeitet werden kann. Neben der Lösungsfindung wird auf diese Weise das tiefere Eindringen in die Fragestellung unterstützt.

2. Ordne die Endzahlen 11, 12, 13, 14, 15, 16, 3, 2, 1, 44, 81, 98 in den passenden Kasten.

Endzahlen, bei denen **0** errechnet werden kann	Endzahlen, bei denen **1** errechnet werden kann
4, 7, 8, 35, 96, 99	5, 6, 9, 10, 61, 62

Hier wird die enge Führung der Kinder durch die Präsentation wieder verlassen und eine breite Vielfalt an Vorgehensweisen und Gedanken ermög

Hier wird die enge Führung der Kinder durch die Präsentation wieder verlassen und eine breite Vielfalt an Vorgehensweisen und Gedanken ermöglicht, die weiterverfolgt werden können.

Die Frage 2 der Beispielaufgabe lösten einige Kinder anhand eines Musters aus den Beispielaufgaben: Sie erkannten die Folge der Lösungszahlen 1,1,0,0,1,1... und konnten diese weiterführen. Diese induktive Erkenntnis ermöglicht zwar das Einordnen der vorgegebenen Zahlen, enthält aber noch keine Begründung. Die Notation der Folge der Lösungszahlen ist so mühselig, dass sich das Suchen nach einer anderen Form der Lösung des Problems anbietet. Weitere Fragen nach Regelmäßigkeiten und nach Verallgemeinerungen sind notwendig, damit die Kinder zur Entwicklung von Hypothesen angeleitet werden.

Die Aufgabenvorgabe in dieser Weise zu gestalten, hat zur Entwicklung der folgenden, im Grundschulprojekt verwendeten Konzeption geführt:

Detaillierte und nichtredundante Einführung in das Thema
Eingrenzung durch Beispiele / engführende Fragen

Offenheit im Bearbeitungsprozess
Zusammenführung entscheidender Ideen im Plenum

Eigene weiterführende Fragestellungen

Anfangsmotivation und Prozessmotivation

Die Lenkung in der ersten Phase soll sicherstellen, dass sich die Kinder nicht im Erschließen des Problems verausgaben. Die einführende Aufgabe wird von den Kindern unterschiedlich rasch gelöst. Damit werden für alle Kinder erste Erfolge gewährleistet und gleichzeitig das Verständnis für das Problem vertieft.

An der obigen Aufgabe arbeiten wir oft zweimal 90 Minuten. Für die Entwicklung eines angemessenen Durchhaltevermögens sind diese ersten Erfolge als Zwischenerfolge wichtig. Wir orientieren uns an dem Kießwetter'schen Ansatz, der davon ausgeht, dass über eine Anfangsmotivation hinausgehend die Prozessmotivation entscheidend für die Fähigkeit ist, über einen längeren Zeitraum an mathematischen Fragen zu arbeiten.

In unseren Gruppen konnten wir beobachten, dass die Motivation auch mit der Dauer der Bearbeitung nicht nachlässt, sondern sogar wächst. Es wirkt sich negativ auf das Verhalten und das Durchhaltevermögen der Kinder aus, wenn die Fragestellungen zu einfach sind. Mehrere, voneinander unabhängige Aufgaben (im Sinne von Knobelaufgaben) hintereinander erzeugen wesentlich weniger Motivation, als die Vorgabe eines Problemfeldes, bei dem von einer Eingangsfrage ausgehend die Kinder Angebote erhalten, dieses Problemfeld zu erforschen. Auf diese Weise arbeiten die Kinder eigenständig in einer vernetzten Struktur, in die sie im Verlaufe der Bearbeitung vertiefend eindringen. Sowohl in der individuellen Arbeit, als auch im Austausch mit anderen in der Kleingruppe oder im Plenum werden sie sich der Vernetzungen zunehmend bewusster.

„Neugierde stellt eine besondere Art von Selbstbelohnung für Wissenserwerb dar und ist begleitet von einer starken Aktivierung des Frontalhirns. Das Frontalhirn ist, besonders im Bereich des sogenannten Arbeitsgedächtnisses, reich an Rezeptoren für Dopamin, was als eine Grundlage für Kreativität und Unternehmensgeist angesehen wird (Fuster; 2002)" (Roth 2009, S. 70). Neugierde und damit die Aktivierung des körpereigenen Belohnungssystems, stellt sich ein, wenn eine Aufgabe als angemessen schwer bewertet wird. Die Neurobiologie bestätigt die bekannten Beobachtungen der Motivationsforschung, dass die Motivation zur Bearbeitung einer Aufgabe von internen Bewertungsprozessen abhängt, mit dem der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe erfasst wird. Wenn sie individuell als angemessen empfunden wird und eine echte zu bewältigende Herausforderung darstellt, wird Dopamin ausgeschüttet, eine wesentliche Voraussetzung für die Steuerung und Kontrolle von Prozessen im Arbeitsgedächtnis (Korte 2009). Auf diese Weise werden günstige Voraussetzungen zum Lernen geschaffen.

Fälschlicherweise könnte man aus diesen Beobachtungen den Schluss ziehen, dass die Vorgabe komplexer und anspruchsvoller Aufgaben allein dazu ausreicht, mathematisch besonders begabte Kinder zu fördern. Auch die-se Kinder können jedoch eine ihren Fähigkeiten entsprechende Aufgabe als Überforderung erfahren, wenn sie mit einer zu hohen Vielfalt an Informationen konfrontiert werden. Mit der oben angesprochenen Aufgabenvorgabe geben wir den Kindern einen Rahmen und damit eine gewisse Sicherheit, sich für sie neuen Problemen zu nähern. Die Aufgabenvorgabe bietet ihnen die Möglichkeit, die von Kießwetter (1993) angeführten günstigen Handlungsmuster wie Organisation des Materials, Mustererkennung, Superzeichenbildung usw. zu entwickeln. Immer wieder diese Handlungsmuster anwenden zu können, ist gerade bei der noch mangelnden Routine eine nicht zu unterschätzende Unterstützung in Problemlöseprozessen.

Propädeutisches forschendes Lernen

Die Bearbeitung der Fragestellungen in den vorgegebenen Problemfeldern bezeichnen wir als propädeutisches forschendes Lernen. „Als forschendes Lernen können schulische Arbeitsformen dann bezeichnet werden, wenn sie dem Suchen und Finden von Erkenntnissen dienen, die für die Lernenden neu sind, und in Haltung und Methode analog den Einstellungen und dem systematischen Vorgehen erfolgen, wie es für wissenschaftliches Arbeiten charakteristisch ist“ (Messner 2009, S. 23). Da der Begriff „Forschendes Lernen“ in verschiedenen Kontexten verwendet wird und damit nach Reiber (2007, S. 8) „unscharf“ geworden ist, soll hier der Versuch einer Präzisierung für die Arbeit in unseren Fördergruppen vorgenommen werden.

Forschung enthält die systematische Auseinandersetzung mit einer Fragestellung, die aktiv und auf eigenen Wegen bearbeitet wird. Dabei ist es das Ziel, etwas Neues herauszufinden, darzustellen und zu belegen und auf diese Weise das theoretische Wissen, bezogen auf einen Themenbereich, zu erhöhen.

Die eigenständige Auseinandersetzung und die individuell unterschiedlichen Wege machen die Nähe zum entdeckenden Lernen und zum Problemlösen deutlich. Im Unterschied zur wissenschaftlichen Forschung geht es beim forschenden Lernen um subjektiv Neues, das die Kinder entdecken können, ähnlich wie ein Problem im schulischen Kontext individuumsbezogen definiert ist. Die Individualität der Vorgehensweisen sowie die Notwendigkeit, Bearbeitungswege selbstständig zu entwickeln und zu überprüfen werden als Aspekte forschenden Lernens genannt, sind jedoch ebenfalls bestimmende Momente des Problemlösens. Messner (2009) bezeichnet das entdeckende Lernen als Vorform des forschenden Lernens, da das wissenschaftliche Vorgehen beim entdeckenden Lernen weniger ausgeprägt sei (a.a.O., S. 24).

Die von Messner (2009) genannten Kennzeichen für forschendes Lernen lassen sich in unseren langjährigen Beobachtungen bei Grundschulkindern nicht in dieser Weise bestätigen. „Wenn Forschen als Grundhaltung und –fähigkeit verstanden wird, die das ganze menschliche Leben durchzieht, dürfte kein Zweifel sein, dass Zehnjährige ihrer mächtig sind. Neugier und Wille, Dinge zu klären, sind bei ihnen ebenso vorhanden wie experimentelles Vorgehen, genaues Beobachten und Überprüfen von Vermutungen“ (Messner 2009, S. 24). Auf diese Weise setzt Messner Fähigkeiten bei den

Kindern voraus, die wir in unserer Förderung quasi als Keime angelegt sehen, von denen zwar „Neugier und Wille, Dinge zu klären“ (a.a..) von vielen Kindern gezeigt werden. Weitere Aspekte, die Forschen ausmachen, müssen allerdings im Prozess der immer wieder neuen Konfrontation mit Problemfeldern behutsam entwickelt werden.

Der wesentliche Aspekt des forschenden Lernens, der es von anderen, auf konstruktivistischen Ansätzen beruhenden Lernformen unterscheidet, liegt u. E. im Theoriebildungsprozess. Ein solcher bezieht über eine einzelne Fragestellung hinausgehend Anschlussfragen mit ein, aus denen sich aus einem einzelnen Problem ein Problemfeld entwickeln lässt. Arbeiten in einem Problemfeld führt nicht allein zur Lösung von Fragen, sondern auch zur Entwicklung neuer Fragestellungen.

„Innerhalb eines Theoriebildungsprozesses werden nicht nur Probleme gelöst, sondern auch ge- bzw. erfunden, es entstehen neue Beweisverfahren, es werden aber auch noch andere neue Strukturen erkannt und als neue Einheiten des Denkens verwendet[…]“ (Kießwetter, 1993, S. 5).

Kinder im Grundschulalter verfügen in der Regel weder über ein großes Repertoire an Techniken des Problemlösens noch über Routinen in solchen Prozessen. Ihnen fehlen Hilfsmittel zur Darstellung von Ergebnissen, Handlungsmuster zum Ordnen von Information und Orientieren in einem komplexen Problemfeld. Es ist ihnen oft noch nicht bewusst, dass eine Frage nicht nur gelöst, sondern die Antwort auch begründet werden muss. Auch das eigenständige Entwickeln von Anschlussproblemen ist etwas, das wir in unserer Arbeit als eine echte Herausforderung für die Kinder erleben.

Deshalb stehen wesentliche Elemente von Kompetenzen für Theoriebildungsprozesse noch nicht oder erst in Ansätzen zur Verfügung. Mit unserem Aufgabenformat und den dabei erworbenen Handlungsmustern, Haltungen und Kompetenzen werden die Kinder jedoch darauf vorbereitet, später an vergleichbaren Problemfeldern eigene kleine Theorien zu entwickeln. Aus diesem Grund sollte „Forschendes Lernen“ im Grundschulalter auch den Entwicklungsaspekt der Lernenden ansprechen. Wir schlagen deshalb den Begriff „propädeutisches forschendes Lernen“ vor.

Ulm (2009) beschreibt als Phasen des forschenden mathematischen Lernens

„- Konfrontation mit einem mathematischen Phänomen […]
- Exploration des Themenfelds […]
- Einordnung in ein bestehendes Wissensnetz […]
- Strukturieren des Themenfelds […]
- Schriftliche Fixierung der Ergebnisse […]

- Präsentation, Publikation, Diskussion […]“ (S. 91f).

Für das propädeutische forschende Lernen führen wir daran angelehnt folgende Schritte auf:

Bereitstellen eines mathematischen Problemfeldes	Informationen zum Inhalt Absichern der gegebenen Informationen durch ausgewählte Beispiele (und damit die Anbindung an Vorwissen)
Erforschen ausgewählter Aspekte	Erste engführende Fragestellung, mit der eine Strukturierung des Themenfeldes angeregt wird Weiterführende Fragestellungen und vertiefendes Eindringen in das Problem Hypothesen entwickeln und überprüfen
Präsentieren der Ergebnisse	Schriftliche Darstellung von Vorgehensweisen und Ergebnissen Zusammenführung entscheidender Ideen im Plenum u. U. Vernetzung der gewonnen Erkenntnisse zu einer kleinen „Theorie“
Entwickeln und Bearbeiten von weiterführenden Fragestellungen	Hinführung zur Entwicklung eigener weiterführender Fragestellungen durch Aufforderung zur Konzeption neuer Aufgaben

In den beschriebenen Schritten lernen die Kinder, sich mit einem Inhalt auseinander zu setzen und gewinnen dabei Erkenntnisse über Zusammenhänge, Muster und Strukturen. Gleichzeitig erwerben sie mathematische Kompetenzen, die zu mathematischen Problemlösefähigkeiten gehören. In Diskussionen mit anderen lernen sie von und miteinander auf diese Weise unterschiedliche Herangehensweisen kennen. Individuelle Repräsentationen des Problemfelds werden um Aspekte erweitert, die von anderen aus anderen Perspektiven eingebracht werden. Auf diese Weise erweitert sich die Vernetzung des eigenen Wissens zu dem Problemfeld und darüber hinaus.

Propädeutisches forschendes Lernen betrachtet forschendes Lernen als einen Lernprozess, der sich an den zukünftigen Tätigkeiten des mathematischen Forschens orientiert. Geschult werden dabei kognitive Kompetenzen, aber auch solche Haltungen und Einstellungen, die mit einem forschenden Lernen verbunden sind.

Methodisch steht es den Kindern dabei frei, allein, mit einem Partner oder in einer Kleingruppe zu arbeiten. Das vertiefende Eindringen in ein Problemfeld und die damit verbundene Einsicht in Muster und Strukturen, unterstützen wir durch die Vorgabe von strukturierenden Elementen wie Tabellen oder Kästen wie in der Beispielaufgabe. Die schriftliche Fixierung von Ergebnissen fällt Kindern ebenfalls schwer. Wie man etwas aufschreiben kann, gehört deshalb mit zu dem, was in der Förderung entwickelt wird. Im Austausch mit anderen erweitern die Kinder ihre Einsicht auf die verschiedenen Perspektiven auf ein Problem. Sie lernen, ihre Vorgehensweisen und Erkenntnisse darzustellen und argumentativ zu vertreten.

Auf welche Weise für alle natürlichen Zahlen eine Regel entdeckt werden kann, ist die letzte Frage der Beispielaufgabe.

An dieser Stelle greifen die Kinder auf die Erkenntnisse zurück, die sie in den verschiedenen Phasen des Prozesses gewonnen haben. Sie erkennen die in den vorgegebenen Beispielaufgaben versteckten Strategien und ziehen den Aufbau der natürlichen Zahlen als Begründung für eine verallgemeinernde Aussage heran. Auf diese Weise verbinden sich die verschiedenen gewonnenen Informationen zu einer kleinen Theorie.

Literatur

Fuster, J. M. (2002). Frontal lobe and cognitive development. Journal Neurocytol. 31, S. 373-385.

Kießwetter, K. (1993). "Vernetzung als unverzichtbare Leitidee für den Mathematikunterricht." mathematik lehren Heft 58: 5-7.

Korte, M. (2009) Im Gespräch zum Vortrag: Lernen lernen – Lehren lernen – Lernen fördern: Anmerkungen aus Sicht der Hirnforschung. XIX. Fachtagung FiL, Erkner 8./9. Mai 2009

Messner, R. (2009). Forschendes Lernen aus pädagogischer Sicht. Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. R. Messner. Hamburg, edition Körber-Stiftung: 15-30.

Nolte, M. (1999). Are elementary school pupils already able to perform creatively substantial bricks of knowledge? - A report on first striking findings from working with smaller groups of highly gifted and motivated elementary school pupils aged 8-10. In H. Meissner, M. Grassmann, & S. Mueller-Philipp (Eds.), *Creativity and Mathematics Education. Proceedings of the International Conference July 15-19, 1999 in Münster, Germany*. Münster: Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Reiber, K. (2007). Forschendes Lernen als hochschuldidaktisches Prinzip – Grundlegung und Beispiele. Forschendes Lernen als hochschuldidaktisches Prinzip – Grundlegung und Beispiele. K. Reiber. Tübingen, Christine Baatz und Regine Richter. Tübinger Beiträge zur Hochschuldidaktik. URN: urn:nbn:de:bsz:21-opus-29248, URL: http://tobias-lib.ub.uni-tuebingen.de/volltexte/2007/2924/. 1/3.

Roth, G. (2009). Die Bedeutung von Motivation und Emotion für den Lernerfolg. Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. R. Messner. Hamburg, edition Körber-Stiftung: 57-74.

Ulm, V. (2009). Eine natürliche Beziehung. Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. R. Messner. Hamburg, edition Körber-Stiftung: 89-105.

5.4 Publikation III

Die dritte Publikation „Mathematisch besonders begabte Kinder. Förderung im inklusiven Unterricht mit progressiven Forscheraufgaben“ erschien im Band „Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen“, herausgegeben von U. Häsel-Weide und M. Nührenberger, 2017. Der Beitrag setzt sich zunächst theoretisch mit dem Begriff der mathematischen Begabung im Grundschulalter auseinander.

Ausgehend von Entwicklungsmodellen mathematischer Kompetenzen werden Problemlösekompetenzen analysiert bzgl. der Handlungsmuster nach Kießwetter sowie weiterer im Problemlöseprozess wesentlicher Komponenten wie metakognitive Kompetenzen, Emotion und Kommunikation und Interaktion.

Des Weiteren werden die Merkmale Progressiver Forscheraufgaben vorgestellt, die ähnliche Charakteristika aufweisen wie die Aufgaben mit natürlicher Differenzierung nach Krauthausen und Scherer (2007), ein im Mathematikunterricht der Grundschule weitverbreiteter Ansatz. Anhand einer Beispielaufgabe werden die vielfältigen Bearbeitungsmöglichkeiten erklärt und das Konzept der Aufgabenbearbeitung im PriMa-Projekt vorgestellt.

Abschließend wird auf die besondere Bedeutung der Lehrkraft in diesen Settings in Anlehnung an Heller (1996) und Fielker (1997) verwiesen.

5.5 Darlegung des eigenen Anteils

Auch dieser Artikel ist in enger Zusammenarbeit mit Marianne Nolte entstanden. Da dieser Beitrag praktische Erfahrung mit Theorie verknüpft, konnte ich die während meiner Arbeit an der Schule als Lehrerin erworbenen Erfahrungen mit Progressiven Forscheraufgaben im Sinne des Konzeptes der PriMa-Förderung einbringen. Von mir stammen daher die praktischen Anteile in diesem Kapitel, für die ich den Erstentwurf verfasst habe.

5.6 Abdruck der Publikation III

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017b). Mathematisch besonders begabte Kinder. Förderung im inklusiven Unterricht mit progressiven Forscheraufgaben. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen*. Frankfurt: Grundschulverband e.V.

Abdruck genehmigt durch den Grundschulverband e.V.

Marianne Nolte/Kirsten Pamperien

Mathematisch besonders begabte Kinder

Förderung im inklusiven Unterricht mit progressiven Forscheraufgaben

Einleitung

Verwendet man im Rahmen der Inklusionsdebatte einen breiten Inklusionsbegriff, der alle Schülerinnen und Schüler in ihrer jeweiligen Besonderheit in den Blick nimmt, stellt sich die Frage, wie auch Kinder, die bereits über außergewöhnlich hohe Vorkenntnisse oder über ein sehr hohes Potenzial verfügen, im Unterricht gefördert werden können. Dieser Artikel will dazu Anregungen geben.

Besondere mathematische Begabung – Annäherungen an den Begriff

Dass auch besonders begabte Kinder gefördert werden müssen, wird aus einer wissenschaftlichen Perspektive nicht angezweifelt. Wir wissen, dass sich Potenziale entfalten müssen und dass dazu geeignete Umweltbedingungen ebenso wichtig sind wie Aktivitäten des Kindes.

Das drückt sich auch in aktuellen Modellen zur Hochbegabung aus. Sie beschreiben Begabung nicht als ein statisches Persönlichkeitsmerkmal, sondern zeigen, dass Begabung einer Entwicklung unterliegt, auf die verschiedene Faktoren in ihrer Wechselwirkung Einfluss nehmen (siehe z. B. (Fischer / Fischer-Ontrup 2016; Gagné 2004;). Das Model von Gagné dient verschiedenen mathematikdidaktischen Modellen als Grundlage (siehe z. B. Käpnick 2006; Heinze 2004). Im Folgenden soll das Modell zur Entwicklung von mathematischen Kompetenzen von Nolte (2017) weiter ausgeführt werden. Es bezieht sich allgemein auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen, unabhängig von dem Potenzial eines Kindes (s. Abb. 1).

Ausgehend von Lernvoraussetzungen und Vorkenntnissen finden Entwicklungs- und Lernprozesse statt, die zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen führen. Zu diesen gehören z. B. begriffliches Wissen, Vorstellungen zu mathematischen Inhalten, die Vernetzung des Wissens, aber auch die Verfügung über Prozeduren zur Bearbeitung von Aufgabenstellungen. Wann und auf welche Weise die Kompetenzen erarbeitet werden, hängt auf Seiten des Kindes davon ab, was es tut. Die Aktivitäten des Kindes werden u. a. gesteuert von seinem Interesse, von seiner Ausdauer, von seiner Lernbiographie, seiner Erfolgserwartung usw., aber auch von seiner Motorik

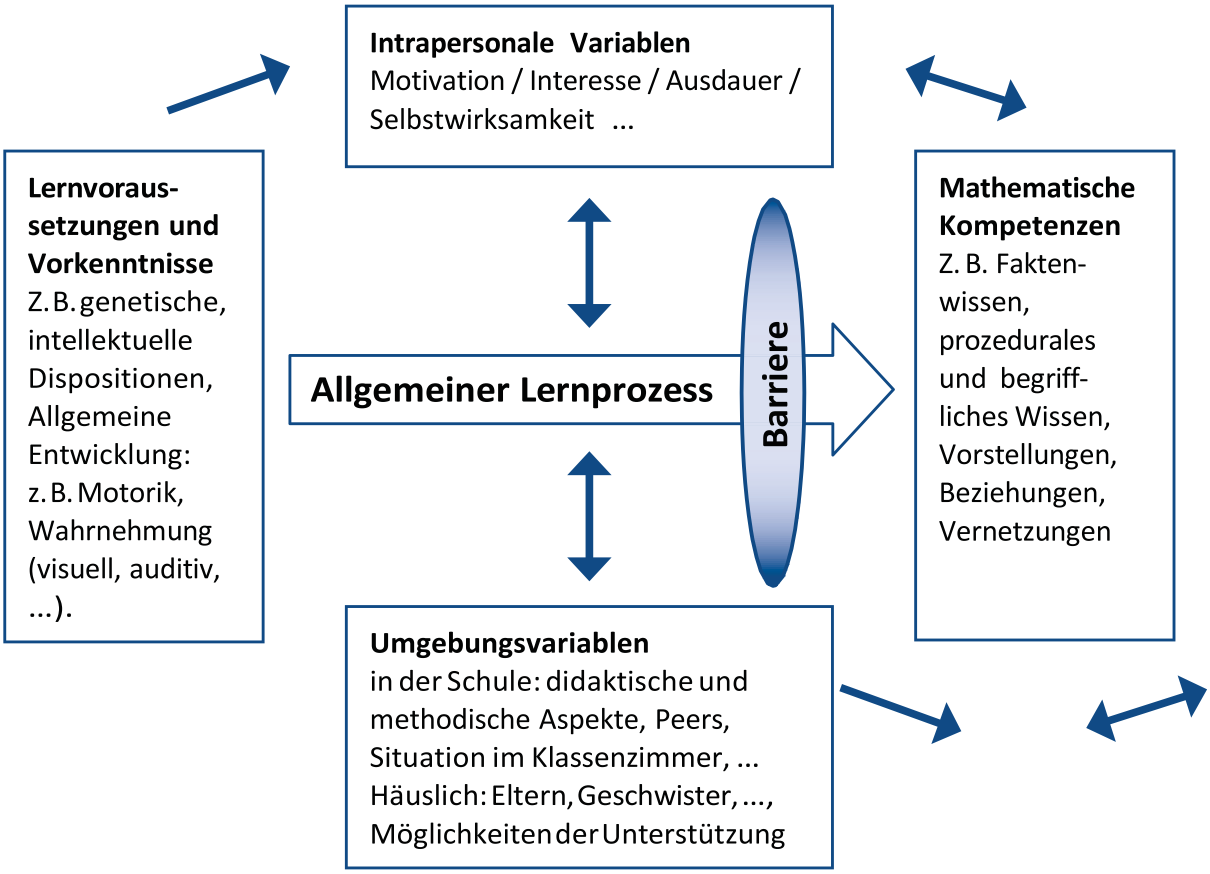


Abb. 1: Entwicklungsmodell mathematischer Kompetenzen (Nolte 2017)

und seiner Wahrnehmung. Die Aktivitäten werden jedoch ebenfalls von der Umgebung beeinflusst: Welche Angebote findet das Kind in seinem Elternhaus und in der Schule? Erlebt das Kind die Situation in der Klasse eher als anregend oder als frustrierend (usw.)? Sind die Angebote so ausgewählt, dass sie zu den Lernmöglichkeiten des Kindes passen? Wenn das nicht der Fall ist, kann das als eine Barriere wirken, genauso wie Behinderungen oder Entwicklungsbeeinträchtigungen als Barrieren im Lernprozess wirksam werden können.

Die Pfeile veranschaulichen die Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Faktoren. Eine Lehrkraft wird einem Kind, das sie als interessiert erlebt, vermutlich andere Angebote machen, als einem Kind, das mühsam zur Mitarbeit angeregt werden muss. Wenn ein Kind besondere Leistungen zeigt, wirken diese wieder zurück auf die Umgebung. Das kann positiv sein, aber auch negativ, z. B. wenn Fragen von Kindern als störend erlebt werden. Wechselwirkungen dieser Art mit in Betracht zu ziehen, verweisen auf Verantwortungen, die Einflussfaktorenmodelle aufzeigen: Lern- und Entwicklungsprozesse eines Kindes, das trotz angemessener Angebote diese nicht wahrnimmt, verlaufen anders, als solche von Kindern, die Angebote aktiv nutzen. Sind hingegen die Kinder sehr aktiv und suchen sich alleine Anregungen, weil keine entsprechenden Vorschläge aus der Umgebung kommen und/oder die Aktivitäten des Kindes nicht geschätzt werden, wird die Entwicklung nicht so erfolgreich verlaufen. Wird nicht erkannt, dass ein Kind eine Barriere überwinden muss, um zu lernen, kann das Kind vermutlich sein Potenzial ebenfalls nicht voll entfalten (siehe Nolte 2017) Diese Beschreibung bezieht sich auf alle Kinder, auch auf besonders Begabte. Die Entwicklung von Kompetenzen wird umso besser gelingen, wenn sich Unterrichtsangebote an den Interessen und an dem Potenzial eines Kindes orientieren,

Das obige Begabungsmodell nennt zwar mathematische Kompetenzen, aber ist bewusst sehr allgemein gehalten, denn was besondere mathematische Kompetenzen sind und welche auf eine besondere mathematische Begabung schließen lassen, hängt von der jeweiligen Problemstellung ab. Wenn der Schwerpunkt auf geometrischen Inhalten liegt, werden andere Kompetenzen gebraucht als bei arithmetischen Aufgabenstellungen. Ein Vorschulkind verfügt über eine andere Differenziertheit in der Begriffsbildung als ein Fünftklässler. Eine einfache Aufgabenstellung erfordert ein anderes Niveau der angesprochenen Kompetenzen als ein Problem, das auch besonders begabte Kinder herausfordert. Eine allgemeine Beschreibung von Kompetenzen macht deshalb noch nicht deutlich, worin das besondere einer mathematischen Begabung liegt.

Wir halten es deshalb für wesentlich, zu fragen, wie ein Lernangebot für Kinder gestaltet werden muss, damit sie ihre mathematischen Kompetenzen entfalten können. Hier kommt dem Problemlösen eine besondere Bedeutung zu. Problemlösen gehört zu den zu erwerbenden mathematischen Kompetenzen im Sinne der Bildungspläne. Darüber hinaus führt die Arbeit an mathematischen Problemstellungen besonders gut zur Entwicklung eines hohen mathematischen Potenzials.

Problemlösekompetenzen

Der erste Aspekt bezieht sich auf die Verfügung über Heurismen. Kießwetter hat aus der Analyse von mathematischen Problemlöseprozessen folgende Handlungsmuster (1985) bzw. einen Katalog von Kategorien mathematischer Denkleistungen (2006) zusammengestellt, die sich in Problemlöseprozessen als erfolgreich erweisen.

Diese Handlungsmuster lassen sich auch bei besonders begabten Grundschulkindern im Umgang mit herausfordernden Aufgaben beobachten:

1. **Organisieren** von Material
   In Problemlöseprozessen werden immer neue Informationen generiert, die sich teilweise als hilfreich, teilweise als weniger hilfreich erweisen. Die Informationen zu sortieren, z. B. in einer Tabelle zu ordnen oder farblich zu markieren, sind grundschulspezifische Umsetzungen dieses Handlungsmusters.

2. Sehen von **Mustern** und **Gesetzen**
   Dies gehört mit zu den Zielen, die in Bildungsstandards angesprochen werden, z. B. als Gesetzmäßigkeiten und funktionale Beziehungen.
3. Erkennen von **Problemen**, Finden von Anschlussproblemen
   Selbst Fragen zu stellen und eigene Probleme zu entwickeln, findet sich z. B. im Kontext Sachaufgaben.
4. Wechsel der **Repräsentationsebenen** (vorhandene Muster bzw. Gesetze in »neuen« Bereichen erkennen und verwenden)
   In der Grundschule zeigt sich dies insbesondere in der Leichtigkeit, mit der Kinder zwischen den Repräsentationsebenen enaktiv, ikonisch und symbolisch wechseln können, z. B. wenn sie ein Rechengesetz mit Material oder anhand eines Beispiels erläutern können. Es kommt jedoch auch zum Tragen, wenn ein Muster in einer Tabelle auf ein Bild bezogen werden kann oder umgekehrt.
5. **Strukturen höheren Komplexitätsgrades** erfassen und darin arbeiten
   Das bezieht sich auf die Komplexität der vorgegebenen Informationen einer Aufgabenstellung.
6. **Prozesse umkehren**
   Das Rückwärtsarbeiten lässt sich auch bei vielen Aufgaben aus Schulbüchern als erfolgreiche Strategie einsetzen.

Unsere Studien zeigen, dass Kinder im Verlauf der Förderung, in der sie sich regelmäßig mit für sie komplexen Problemstellungen befassen und über verschiedene Herangehensweise sprechen, zunehmend vertrauter mit der Anwendung von Heurismen werden und diese sinnvoll nutzen.

Metakognitive Kompetenzen

Metakognitive Kompetenzen tragen wesentlich dazu bei, den Problembearbeitungsprozess erfolgreich zu absolvieren. Die Entwicklung metakognitiver Kompetenzen hängt eng mit der Komplexität der Lernumgebungen zusammen. Das, was besonders begabte Kinder in einfachen Kontexten bereits besser als andere können, müssen sie bei für sie herausfordernden Aufgaben neu lernen.

Dieser Prozess wird durch die Sprache unterstützt. Dazu gehört, dass Kinder erklären können, was sie im Verlauf der Problembearbeitung gedacht haben. Wenn Kindern durch Nachfragen bewusst wird, was sie gemacht haben und warum, werden metakognitive Kompetenzen entwickelt. Sie denken über das eigene Denken nach. Manche Kinder sind in Problemlöseprozessen sehr einfallsreich und entwickeln immer neue Ideen, aber ohne eine Überprüfung ihrer Vorgehensweise besteht die Gefahr, dass sie in der Produktion von Ideen stecken bleiben und nicht zu einem Resultat kommen.

Planen und Überwachen der eigenen Vorgehensweise zu schulen, gehört deshalb zu den entscheidenden Kompetenzen in Problemlöseprozessen.

Emotion

Es ist ganz entscheidend, die emotionale Befindlichkeit der Kinder mit zu berücksichtigen, weil Problemlöseprozesse immer von Unsicherheiten begleitet werden. Auch für gute Schülerinnen und Schüler ist es keine Selbstverständlichkeit, Probleme erfolgreich zu bearbeiten. Ausdauer und Frustrationstoleranz zu entwickeln gehört deshalb mit zu erfolgreichem Problemlösen. Ein wesentlicher Aspekt dabei ist das Interesse der Lehrkraft an den Ideen der Kinder und das Bemühen darum, die Kinder zu verstehen.

Kommunikation und Interaktion

Die Versprachlichung hat auch die Funktion, die eigene Vorgehensweise anderen zugänglich zu machen, sowie das Vorgehen anderer zu verstehen. Im Kontext von Problemlöseprozessen ist dies ein Schritt zur Erhöhung der Flexibilität des Denkens, der sich aus der Erfahrung speist, dass auch andere interessante und sinnvolle Ansätze zur Bearbeitung von Fragestellungen entwickeln können. Mit der Erklärung der eigenen Vorgehensweise beginnt auch der Prozess des argumentativen Vertretens der eigenen Gedanken. Letztlich leitet dies hin zum mathematischen Beweisen.

Progressive Forscheraufgaben (ProFa)

Aus diesen Überlegungen heraus haben wir für die Förderung mathematisch besonders begabter Kinder Aufgaben entwickelt, die wir progressive Forscheraufgaben (ProFa) nennen. Progressiv deshalb, weil Kinder erst allmählich Kompetenzen und Haltungen, die mit mathematischer Forschung verbunden sind, entwickeln. Ein wesentliches Charakteristikum progressiver Forscheraufgaben liegt in dem Schwerpunkt Problemlösen, der Höhe der Komplexität und der systematischen Heranführung an Handlungsmuster nach Kießwetter (1985, 2006). Im Weiteren werden ihre Merkmale vorgestellt: ProFa

- eröffnen altersangemessene komplexe mathematische Problemfelder,
- weisen eine mathematische Relevanz auf (Anregung mathematischer Denkprozesse, Problemlösekompetenz, heuristische Strategien),
- beinhalten eine eingegrenzte Anfangsaufgabe (Sicherheit),
- ermöglichen einen strukturierten Zugang zum Problemfeld à (Teil-) Erfolgserlebnisse, die die Entwicklung von Prozessmotivationen unterstützen,
- bieten in besonderem Maße verschiedene Wege und Eindringtiefen der Bearbeitung,

- bieten die Möglichkeit zur Veränderung von Dimensionen,
- eröffnen Anschlussprobleme.

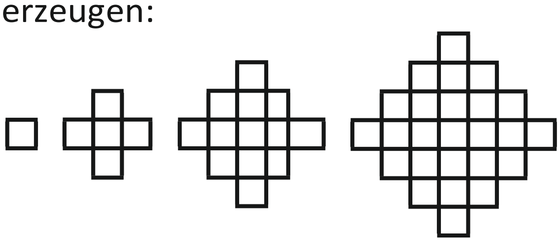
Die Charakteristika von Aufgaben mit natürlicher Differenzierung, wie sie in Krauthausen und Scherer (2014, 50f) beschrieben werden – alle Kinder erhalten das gleiche Lernangebot, dieses ist ganzheitlich und hinreichend komplex, es bietet dem Lernenden Freiheitsgrade und Möglichkeiten zum Lernen von- und miteinander, z. B. durch gemeinsame Diskussionen –, haben viele Gemeinsamkeiten mit progressiven Forscheraufgaben, so dass eine Unterscheidung von Kriterien nur eine analytische sein kann.

Zur Bearbeitung der ProFa wird in der Regel eine Doppelstunde benötigt. Damit die Kinder Durchhaltevermögen entwickeln, sind die ProFa so gestaltet, dass sie rasch erste Erfolge ermöglichen und mit unterschiedlicher Eindringtiefe in den mathematischen Kontext bearbeitet werden können. Gerade dieser Aspekt veranlasste uns zu erheben, ob sich die ProFa auch für den Unterricht in heterogenen Gruppen eignen. Dies konnte in den Studien (Pamperien 2008, Nolte 1996, Nolte / Pamperien 2017) auch gezeigt werden.

Q Beispielaufgabe

Dieses Beispiel ist in der Literatur in verschiedenen Vorgaben bekannt. Die Folgende orientiert sich an Gardiner (1987, 88).

Die Figur besteht aus kleinen Quadraten, die eine immer größere Form erzeugen:

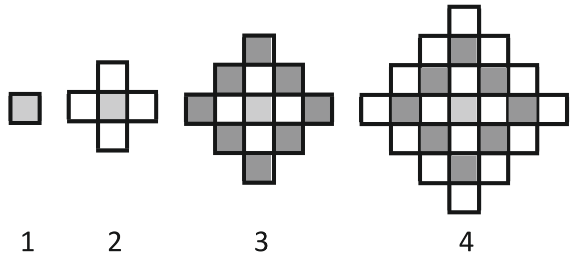


1 2 3 4

a) Wie viele kleine Quadrate enthält die vierte Figur?
b) Wie bist du darauf gekommen?
c) Gibt es noch andere Ideen, wie man die Anzahl ermitteln kann?
d) Aus wie vielen kleinen Qudraten bestehen die Figuren im 5. Schritt, im 10. Schritt?
e) Erkläre uns deine Vermutungen!

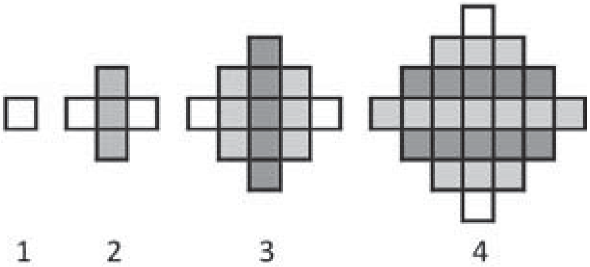
Lösungsvarianten

Diese Problemstellung lässt sich auf verschiedene Weisen bearbeiten. Die Einstiegsaufgabe ist leicht. Sie lässt sich zählend bearbeiten, so dass jedem Kind ein Zugang ermöglicht wird. Schwierigkeiten können für Kinder entstehen, die zeichnerisch nicht in der Lage sind, die Figur fortzusetzen. Großes Karopapier bietet hier eine entscheidende Hilfe. Die Kinder können jedoch auch auf Muster und Strukturen zurückgreifen. So erkennen einige Kinder, dass die jeweils vorhergehende Figur die vorausgegangenen Figuren enthält.



Lösungsvariante: Einbettung

Andere nutzen die vertikale bzw. horizontale Symmetrie:



Lösungsvariante: Symmetrie

Aufgabe c) veranlasst die Kinder, über verschiedene Vorgehensweisen nachzudenken. Einige machen das von sich aus, aber es ist kein Hinweis auf fehlende Kreativität und Flexibilität, wenn Kinder dieses nicht tun. Wenn die Lösung eines Problems überwiegend im Mittelpunkt steht und wenig Gelegenheit besteht, über verschiedene Wege zu sprechen, fehlt Kindern die Erfahrung, dass es verschiedene Lösungsansätze geben kann bzw. das Suchen nach weiteren Wegen erwünscht und erlaubt ist.

Weiterdenken, die eigenen Beobachtungen verallgemeinern, ist ein wesentlicher Aspekt mathematischen Problemlösens. Aufgrund der bisherigen Arbeit an dieser ProFa können die Kinder eigene Hypothesen entwickeln, die in den Bearbeitungsprozess von Aufgabe d) einfließen. Unterstützend dabei kann eine Tabelle sein, die wir mit dem Problem vorgeben:

Figur	1	2	3	4	5	...	10
Anzahl von Quadraten	1	5					

Tabelle

Die Vorgabe einer Tabelle veranlasst die Kinder, entsprechende Muster auch in den Anzahlen zu suchen. Hier beobachten wir oft, dass die Kinder ein arithmetisches Muster erkennen, denn die Anzahl der Quadrate erhöht sich um 4, 8, 12, … In dieser Zahlenfolge erkennen viele Kinder die Viererreihe. Wir fragen in diesen Fällen systematisch nach dem Zusammenhang zwischen der bildlichen Darstellung und den Anzahlen, damit beides nicht isoliert verarbeitet wird. Dies ist wichtig: Studien haben gezeigt, dass die scheinbar gleichzeitige Aktivierung von geometrischen und arithmetischen bzw. algebraischen Repräsentationen einen Hinweis auf eine besondere mathematische Begabung geben kann (siehe Krause et al. 2004). Wenn Kinder diesen Wechsel der Repräsentation nicht von sich alleine vornehmen, unterstützt eine entsprechende Impulsfrage die Kinder darin, das zu tun. Diese könnte z. B. lauten: »Wie passen denn die Zahlen in der Tabelle zu den Bildern?«

Die Anzahl der kleinen Quadrate in der fünften Figur können die Kinder noch zählend ermitteln. Trotz Vorgabe von Karopapier ist das jedoch mühsam. Für die 10. Figur ist das ausgesprochen umständlich. Hier unterstützt die Frage nach einer großen Zahl das Verallgemeinern aufgrund von Hypothesenbildung. Immer wieder beobachten wir, dass auch Kinder, die dazu in der Lage sind, zeichnen, weil sie ganz sicher sein wollen, dass ihr Ergebnis richtig ist. Dieses unterstreicht die Bedeutung der emotionalen Aspekte in Problemlöseprozessen. Auch hier helfen Fragen, z. B., ob die Lösung auch ohne Zeichnen gefunden werden kann. Es gibt weitere Lösungsansätze. Die Verallgemeinerung wurde in unseren Beobachtungen nur in den Gruppen von besonders begabten Kindern gefunden. Abgesehen davon erkannten in fast allen Leistungsausprägungen die Kinder verschiedene Muster und Strukturen.

Chancen und Grenzen des Einsatzes im inklusiven Unterricht

Besonders begabte Kinder verarbeiten Informationen rascher als andere, sie finden sich besser in einer Fülle von Informationen zurecht. Deshalb präsentieren wir die ProFas in der Förderung von besonders begabten Kindern sehr knapp. D. h. anhand einer kurzen Einführung wird die Problemstellung eingeführt. Gleichzeitig bietet die Komplexität des mathematischen Inhalts der Aufgaben verschiedene Fragestellungen an. Damit sich die Kinder nicht in der Vielfalt der Informationen verlieren, führen wir sie zunächst anhand von Beispielen sehr eng zum

Kern des mathematischen Problems. Damit ist sichergestellt, dass alle Kinder zunächst an der gleichen Fragestellung arbeiten. Darüber hinaus ist es wichtig, die Kinder an dieser Stelle eng zu führen. Die einführende Aufgabe darf nicht zu offen angeboten werden, damit sich die Kinder nicht zunächst erarbeiten müssen, was denn eigentlich gefragt wird. Das würde eine Herausforderung darstellen, die Energie kostet, die den Kindern im Verlauf des Problemlösens fehlen könnte. In der Schule braucht die Einführung in das Problemfeld mehr Zeit als in Fördergruppen für besonders begabte Kinder. Es müssen mehr Beispiele gegeben werden, die Fragestellung wird ausführlicher erörtert. Die Einstiegsaufgabe dient für die Kinder zur weiteren Klärung und zur Vertiefung des Verständnisses, für die Lehrkraft dient sie dazu, zu erkennen, ob die Fragestellung richtig verstanden wurde.

Wenn die Fragen der Kinder geklärt sind, können sie auf ihre eigene Weise arbeiten. Sie wählen verschiedene Wege und stellen verschiedene Fragen. Da die Aufgabenvorgabe immer wieder Zwischenerfolge ermöglicht, können die Kinder unterschiedlich tief in den mathematischen Sachverhalt eindringen. Zum Plenumsgespräch können und sollen in der Regel alle Kinder beitragen.

Warum profitieren Kinder von diesen Aufgaben?

Der Einsatz dieser Aufgabe in heterogenen Gruppen hat gezeigt, dass jedes Kind einen Ansatzpunkt finden kann, um an der Aufgabe zu arbeiten und etwas herauszufinden. Damit erfüllt die Aufgabe, ebenso wie andere ProFas, die Anforderungen an einen inklusiven Unterricht, der **gemeinsames mathematisches Lernen** fördert und in dem **Austausch und Kommunikation aller** möglich sind (vgl. u. a. Stöckli et al. 2014; Häsel-Weide 2015).

Vom Umgehen der Lehrkraft mit den verschiedenen Eindringtiefen der Kinder sowie dem Erkennen von Barrieren hängt es ab, wie sehr Kinder herausgefordert werden. Manchmal finden Klassen mehr, manchmal weniger Bearbeitungswege. Entsprechendes gilt auch für die Muster, die Kinder erkennen. Es ist von entscheidender Bedeutung für die Motivation, dass die Lehrkraft in der Lage ist, sich flexibel auf das, was die Kinder entwickeln, einzulassen. Das ist bei kreativen Ideen von Kindern nicht immer einfach. Eine Atmosphäre, in der sich Kinder trauen, ihre eigenen Gedanken in der Gruppe zu äußern, wird entscheidend durch die Anregungen von Heller (1996) und Fielker (1997) ermöglicht. Diese wurden zwar für besonders begabte Kinder formuliert, erweisen sich unseres Erachtens aber für alle Kinder als förderlich:

- positive Einstellung der Lehrkräfte zu den Kindern,
- echtes Interesse der Lehrkräfte an den Ideen der Kinder und keine zu frühen Urteile über deren Ideen,

- Möglichkeit, Ideen zu entwickeln, zu überprüfen und in der Gruppe auszudiskutieren,
- es wird keine Idee ignoriert oder vernachlässigt, weil sie nicht richtig zu sein scheint oder weil die Lehrkraft annimmt, dass sie für den Rest der Klasse zu schwer ist,
- eine hohe Flexibilität im Unterricht,
- ein Unterricht, der den Kindern eigene Entdeckungen ermöglicht.

Regelmäßiges Anbieten von ProFas ermöglicht auch das Erkennen einer besonderen mathematischen Begabung. Insbesondere Barrieren können besondere Begabungen verschleiern. Kinder mit einem hohen Potenzial, die zu wenig herausgefordert werden, langweilen sich leicht und können sich nicht mehr konzentrieren (Korte 2009). Häufig entwickeln sie dann Verhaltensweisen, die es für Lehrkräfte weiter erschweren, das Potenzial zu erkennen. Erhalten alle Kinder die Gelegenheit, an herausfordernden Aufgaben zu arbeiten, so können alle Kinder ihre Potenziale ihrem Niveau entsprechend entfalten, und die vermeintlich besonders begabten Kinder können durch den Gehalt der Aufgaben tiefer in diese eindringen.

Unsere Studien ebenso wie unsere Erfahrungen zeigen, dass ein regelmäßiger Einsatz von ProFas, z. B. alle zwei Wochen, dazu führt, dass alle Kinder vertrauter mit Heurismen werden und lernen, sich selbst Fragen zu stellen. Wir konnten beobachten, dass auf diese Weise Kinder unterschiedlichster Leistungsniveaus eine Haltung entwickeln, die für mathematische Problemlöseprozesse entscheidend ist.

Literatur

Fielker, D. (1997): Extending Mathematical Ability Through Whole Class Teaching. London: Hodder & Stoughton.

Fischer, C. / Fischer-Ontrup, C. (2016): Mehrfach außergewöhnlich: Besonders begabte Kinder mit Lern- und Leistungsschwierigkeiten. In: Lernen und Lernstörungen, 5. Jg., H. 4, 207–218.

Gagné, F. (2004): Transforming gifts into talents: the DMGT as a developmental theory. In: High Ability Studies, 15 No 2, 119–148.

Häsel-Weide, U. (2015): Gemeinsam Mathematik lernen. Überlegungen für den inklusiven Mathematikunterricht. In: Grundschule aktuell. H. 130, 3–7.

Heinze, A. (2004): Lösungsverhalten mathematisch begabter Grundschulkinder – aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen. Münster: LIT Verlag.

Heller, K. A. (1996): Begabtenförderung – (k)ein Thema in der Grundschule? In: Grundschule, H. 5, 12–14.

Käpnick, F. (2006): Intuitives Erfassen, Vortasten und Lösen – ein besonderer Problembearbeitungsstil mathematisch begabter Grundschulkinder. In: K. P. Müller (Ed.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 64–66.

Kießwetter, K. (1985): Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern – ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. In: Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht, 38. Jg., H. 5, 300–306.

Kießwetter, K. (2006): Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren – und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht? In: H. Bauersfeld/K. Kießwetter (Eds.), Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? – Ein Buch aus der Praxis für die Praxis. Offenburg: Mildenberger Verlag, 128–153.
Korte, M. (2009): Lernen lernen – Lehren lernen – Lernen fördern: Anmerkungen aus Sicht der Hirnforschung. XIX. Fachtagung FiL, Erkner 8./9. Mai 2009. In: Tagungsreader XIX. interdisziplinäre Fachtagung 2009 Lernen lernen – Lehren lernen – Lernen fördern.
Krause, W. u. a. (2004): Multimodalität am Beispiel mathematischer Anforderungen. Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät. Berlin. Band 64, 135–152.
Krauthausen, G./Scherer, P. (2014): Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht: Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule. Seelze: Klett/Kallmeyer.
Nolte, M. (2017): Twice exeptional children – Mathematically promising children with special needs (Zur Veröffentlichung vorgesehen).
Pamperien, K. (2008): Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2. Erfahrungen mit Aufgaben zur Förderung besonders begabter Kinder in einer Regelklasse. In: M. Fuchs/F. Käpnick (Eds.), Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft. Berlin: LIT Verlag, 162–172.
Stöckli, M. u. a. (2014): Gezielt fördern, differenzieren und trotzdem gemeinsam lernen – Überlegungen zum inklusiven Mathematikunterricht. In: Sonderpädagogische Förderung heute, 59. Jg., H. 1, 44–56.

6. Publikation IV und V

6.1 Publikation IV

Die vierte Publikation „Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2. Erfahrungen mit Aufgaben zur Förderung besonders begabter Kinder in einer Regelklasse“ ist in dem Band „Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft“, herausgegeben von Käpnick und Fuchs, erschienen. Dieser Artikel zeigt anhand einer ersten Fallstudie exemplarisch auf, dass es möglich ist, im regulären Unterricht Progressive Forscheraufgaben einzusetzen und allen Kindern einer dritten Grundschulklasse einen Zugang zu komplexeren Problemstellungen zu ermöglichen.

Er beschäftigt sich zunächst ebenfalls mit den Kriterien zur Aufgabenentwicklung zur Förderung mathematisch besonders begabter Kinder und deren Vorgabe zum Einsatz. Im Weiteren wird die Aufgabe *Wege und Ausgänge*, die von Pamperien bereits im Jahr 1995 für den Mathematikunterricht in der Grundschule in eingegrenzter Form entwickelt wurde, vorgestellt. Man kann erkennen, dass das eingegrenzte Anfangsproblem durch einfache Veränderungen viele Anschlussprobleme zulässt. Diese Aufgabe verknüpft das Handeln mit dem Denken insofern, als dass man konkret eine Überlegung einzeichnen kann, um eine Teileinsicht zu erhalten, an der man über konkrete Begründungen zur korrekten Argumentation gelangen kann. Dies kann zu einer Vernetzung der Ideen führen und zu einer Argumentationskette für die Eindeutigkeit der Lösungen.

Es werden mögliche Beobachtungen benannt, die sich zum Teil aus der Sachanalyse aber auch aus Protokollen mit spezifischen Beobachtungsaufträgen ergeben haben. Den beobachteten Handlungen werden Kategorien bezogen auf die kognitiven Prozesse zugeordnet. Daraus wird ein Beobachtungsraster erstellt, ein Kodierleitfaden, mit dem die Schüler*innenlösungen der Kinder aus Regelklassen und der Kinder aus den Fördergruppen des PriMa-Projekts ausgewertet werden. Auch wenn die als mathematisch besonders begabt identifizierten Schüler*innen in allen Kategorien den Schüler*innen aus der Regelklasse überlegen waren, kann man aus den ersten Ergebnissen ablesen, dass fast alle Kinder in der Schule einen Zugang zur Aufgabe gefunden haben und knapp die Hälfte der Stichprobe Muster erkannt hat. Die vorliegenden Untersuchungen stellen erst den Beginn einer Studie zum Einsatz von Progressiven Forscheraufgaben in der Grundschule dar. Die Ergebnisse müssen dem entsprechend vorsichtig interpretiert werden.

6.2 Darlegung des eigenen Anteils

Das Buchkapitel wurde in Alleinautorenschaft verfasst.

6.3 Abdruck der Publikation IV

Pamperien, K. (2008). Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2. Erfahrungen mit Aufgaben zur Förderung besonders begabter Kinder in einer Regelklasse. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (S. 162-172). Berlin: LIT Verlag.

Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2

Erfahrungen mit Aufgaben zur Förderung besonders begabter Kinder in einer Regelklasse

Kirsten Pamperien, Hamburg

Zusammenfassung: In diesem Teil werden ausgewählte Aspekte im Hinblick auf den Einsatz von Materialien des Hamburger Uni-Projekts (PriMa) in Regelklassen vorgestellt. Unter der besonderen Berücksichtigung der Entwicklung des Aufgabenfeldes, an das ein Kategoriensystem gekoppelt ist, befassen wir uns u.a. mit den Fragen, wie weit Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Kindern, die als mathematisch besonders begabt ausgewählt wurden und Kindern in Regelklassen, bezüglich der Problembearbeitung beobachtet werden können. Außerdem gehen wir der Frage nach, in wie weit der Einsatz dieser Materialien für alle Kinder erfolgversprechend nicht nur im Hinblick auf die Erweiterung der mathematischen Kompetenzen des Einzelnen sein könnte.

Summary: In this part selected aspects concerning the implementation of materials from the university project PriMa in standard classes are presented. With respect to the development of task areas connected to a special category system, we deal with the question how far it is possible to observe what selected mathematically gifted children and children of standard classes do or do not have in common, especially in connection with problem solving. In addition to that, we analyse whether it might be promising if the material is used not only in connection with the extension of mathematical competencies.

Kriterien zur Gestaltung von Fördermaterialien

In diesem Aufsatz werden die vorangegangenen theoretischen Überlegungen konkretisiert. Es handelt sich hierbei um erste Ergebnisse, die wir mit dem Einsatz von Fördermaterialien in Regelklassen gewonnen haben. Die Möglichkeit der Übertragung des „Hamburger (Grundschul-)Modells“ auf den Regelunterricht erfordert starke Einschränkungen. Als gemeinsamer Aspekt bleiben die Aufgabenstellungen und zunächst die Einführung des Problemkreises, daher ist es wichtig, eine Einführung zur Aufgabenentwicklung in unserem Projekt voranzustellen.

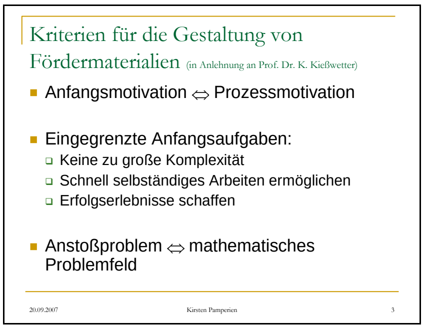


Abbildung 1

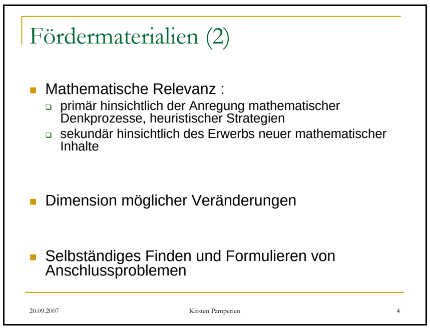


Abbildung 2

Alle Fördermaterialien, die im Projekt eingesetzt werden, werden in einer Arbeitsgruppe der William-Stern-Gesellschaft erprobt bzw. weiterentwickelt und in die für unsere Arbeitsweise typischen Formate gebracht. Durch den zunächst spielerischen Umgang mit den Problemkreisen zeigen sich die unterschiedlichen Handlungsmuster (vgl. Nolte Teil 1), die zur Bearbeitung dieses speziellen Aufgabenfeldes genutzt werden können. Für Grundschulkinder ist es insbesondere wichtig, dass das Problemfeld die Möglichkeit bietet, Handeln und Denken eng zu vernetzen (vgl. Nolte und Kießwetter 1996).

Eine erfolgreiche Arbeit mit den Problemstellungen ist im Sinne unseres Konzepts abhängig von der Aufgabenstellung (vgl.Nolte 2006). Ein wesentlicher Aspekt dabei ist die Motivation der Kinder, die sich mit Aufgaben konfrontiert sehen, deren Bearbeitung eine längere Zeit einnehmen kann, als viele der in der Schule üblichen Aufgaben.

Daher steht bei der Entwicklung der konkreten Aufgabenvorgabe die Prozessmotivation im Vordergrund, im Gegensatz zu den meisten schulischen Aufgaben, bei denen in der Regel das Hauptaugenmerk auf die Anfangsmotivation gelegt wird.

Wir entwickeln eingegrenzte Anfangsaufgaben, die keine zu hohe Komplexität haben dürfen, damit die Kinder zügig selbständig arbeiten können. Dadurch können schnell Teilerfolge erzielt werden, dieses wirkt sich nach unseren Erfahrungen positiv auf die Prozessmotivation aus.

Im Idealfall soll das Anstoßproblem dem Kind ein ganzes mathematisches Problemfeld eröffnen, in dem es aktiv-entdeckend auf unterschiedlichen Niveaus im Sinne Freudenthals „Mathematiktreiben“ kann.

Die mathematische Relevanz liegt nicht primär in dem Erwerb neuer mathematischer Inhalte, sondern vielmehr in der Anregung mathematischer Denkprozesse und dem Hinführen zu heuristischen Strategien. Wichtig bei der Aufgabenentwicklung ist auch die Berücksichtigung des Aspekts der Dimension möglicher Veränderungen, der mit der Möglichkeit selbständig Anschlussprobleme finden und formulieren zu können, dem Prinzip der „natürlichen Differenzierung“ entspricht

Aufgabe: Wege und Ausgänge

Die folgende Aufgabe (vgl.Abb.3) setzen wir normalerweise in der ersten Sitzung in den Fördergruppen ein, d.h. im Frühjahr des dritten Schuljahres[1].

Betrachten wir nun die Vorgabe des Problemfeldes, so ist in dieser Aufgabenstellung am Rechteck nur eine Dimension der Veränderung vorgegeben, nämlich in bezug auf die Länge. Die Breite bleibt konstant. Durch die Breite der Größe 2 endet jeder Weg automatisch in einem Außenkästchen, wodurch zu jedem Ausgang unter den aufgeführten Bedingungen genau ein Weg führt.

Anders gesagt, gibt es also unter den vorgegebenen Voraussetzungen genau zwei Möglichkeiten, sich durch den Grundriss bzw. das Rechteck zu bewegen: „abbiegend“ oder „geradeaus“ (vgl.Abb.4)

Beginnt man stets abbiegend (Muster 1/ Buckel) und wechselt dann in einem Zimmer bzw. Kästchen x die Laufrichtung (Muster 2), ist es zwingend erforderlich, um noch alle anderen Kästchen durchlaufen zu können, am Ende eine Schlaufe zu laufen. Man endet im Kästchen, das x gegenüberliegt. Die

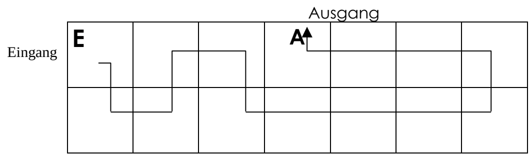
[1] Es liegen Daten aus diesen Fördergruppen, sowie von Kindern einer dritten Regelschulklasse und von mathematischen interessierten Kindern einer Arbeitsgruppe vor. Insgesamt wurden die Daten von 110 Kindern ausgewertet.

Anzahl der Abbiegungen bestimmt also den Ausgang. Jedem Ausgang ist genau ein Weg zugeordnet. Der Weg ist also stets aus den beiden in Abbildung 4 markierten Mustern (Buckel/Schlaufe = Superzeichen) zusammengesetzt, ausgenommen Ausgänge in den Eckräumen. Dadurch ergibt sich für die Kinder eine Möglichkeit der korrekten Argumentation für die Eindeutigkeit aller Ausgänge.

Wege und Ausgänge

Zur Information:

Dies ist der Grundriss eines Gebäudes. Der Eingang befindet sich oben links.



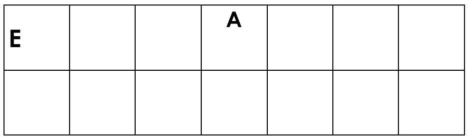
Es gibt verschiedene Ausgänge. Es gibt verschiedene Wege.

Aufgabe 1:

Finde alle möglichen Ausgänge!

Bedingung: Du musst durch jedes Zimmer genau einmal gehen.

Trage hier alle Ausgänge ein, die du gefunden hast!



Ist dir etwas aufgefallen? Begründe!

Abbildung 3

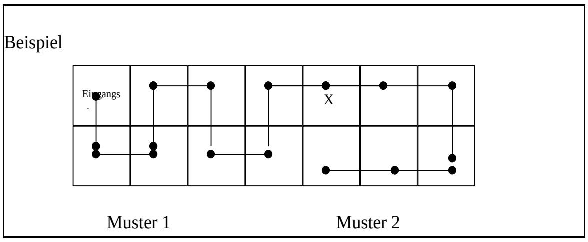


Abbildung 4

Wir haben zu diesem Anfangsproblem Anschlussprobleme formuliert, die zunächst nur eine Veränderung der Länge des Rechtecks beinhalteten, dann aber andere Grundrisse betreffen, z.B.Formen der folgenden Art:

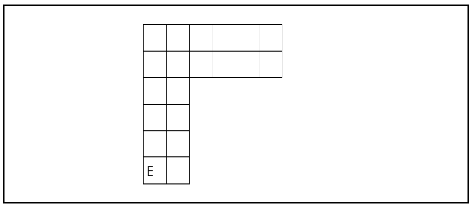


Abbildung 5

Es ist möglich, dieses Problemfeld beliebig zu erweitern, vgl. kubischer Apfel (Anderson 1988).

Im Laufe der Förderung führen wir die Kinder an das selbständige Formulieren von Anschlussproblemen heran, durch unsere Vorgaben erhöht sich schrittweise die Komplexität.

Aufgabenspezifische Förderziele

Bevor exemplarisch Argumentationen für die Lösung angeführt werden, ist es notwendig, sich die aufgabenspezifischen Förderziele zu vergegenwärtigen. Diese orientieren sich im Sinne des Förderkonzepts wieder an den

Handlungsmustern nach Kießwetter.

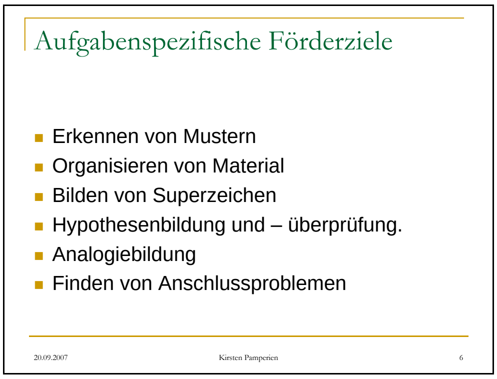


Abbildung 6

Es ist uns wichtig, dass die Kinder lernen, Muster zu erkennen (Muster der Wege, Muster der Ausgänge), sich Material zu organisieren, Superzeichen (Buckel/Schlaufen) zu bilden.

Außerdem sollen sie sich zutrauen, Hypothesen zu bilden und diese dann auch zu überprüfen (konkrete Argumentation am Material ist möglich).

Sie sollen Anschlussprobleme finden und bearbeiten – angeregt durch unsere Veränderungsvorschläge.

Beispiele für Schülerlösungen

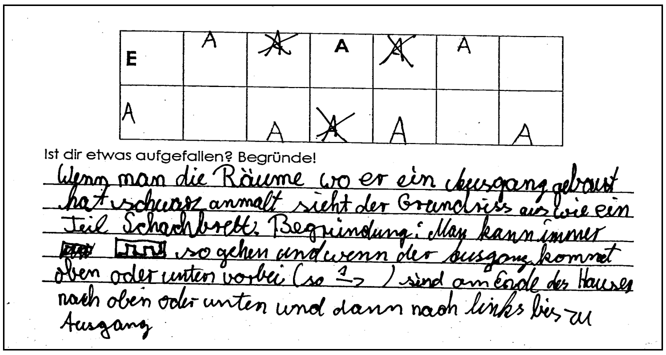


Abbildung 7

Zunächst einmal hat dieses Kind das Muster der Ausgänge erkannt. Es beschreibt in seiner Begründung die zwei möglichen Formen der Pfade. Seine Ausführungen sind vollständig. Sie umfassen auch die Randbereiche. Man kann meiner Meinung nach sehen, dass es Hypothesen für die Lage der Ausgänge gebildet hat und die falschen Ausgänge dann durchgestrichen hat.

Es hat die Aufgabe im Kopf gelöst, wie insgesamt ¼ der Kinder in den Fördergruppen. Besonders interessant bei ihm ist die Assoziation zum Schachbrett. Dieses Muster beherrscht sein Vorgehen derart, dass es die dritte Aufgabe falsch löst:

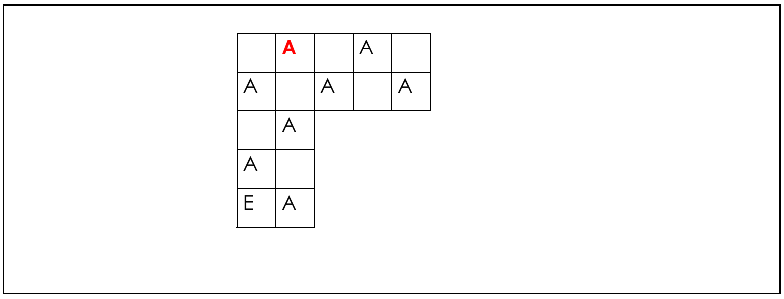


Abbildung 8

Es orientiert sich an seinem Muster, stellt eine Hypothese auf, ohne sie zu überprüfen. Dies ist nach unseren Erfahrungen für Grundschulkinder nicht ungewöhnlich. Insbesondere die besten Kinder einer Klasse sind es nicht gewohnt, ihre Lösungen in Frage zu stellen. Es ist aber auch ein Beispiel für die von Nolte beschriebene Diskrepanz zwischen den kognitiven Leistungen und der metakognitiven Betrachtung der eigenen Vorgehensweise.

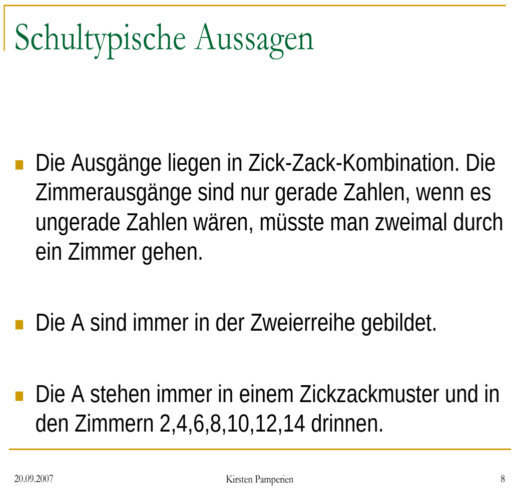


Abbildung 9

Diese Äußerungen lassen ebenfalls erkennen, dass ein Muster erkannt ist. Interessant ist, dass diese Kinder Verbindungen zu Zahlen herstellen, bzw. zur Zweierreihe. Vermutlich ist ihnen dieses Muster aus dem Unterricht vertrauter, als geometrische Formen zu beschreiben.

Aufgabenspezifische Auswertungskategorien

Im Folgenden nun werden die Kategorien benannt, nach denen die Ergebnisse der obigen Aufgabe in dieser Studie ausgewertet wurden.

Da wir uns bei der Konzeption der Problemfelder insbesondere an den Handlungsmustern nach Kießwetter orientieren, und die Aufgabensets danach ausrichten, tragen wir diese auch als Auswertungsaspekte an das Material heran. Dabei werden folgende Unterscheidungen vorgenommen:

Zum einen können wir Handlungen bei den Kindern im Umgang mit der Aufgabe beobachten, bzw. deren Ergebnisse dokumentieren.

Zum anderen versuchen wir dann, auf der Basis dieser Handlungsergebnisse die kognitiven Prozesse zu erschließen, vgl. Nolte Teil 1.

Hier einige Beispiele für mögliche Beobachtungen:

Das Kind hat
- alle möglichen Ausgänge gefunden
- probierend, scheinbar unsystematisch gearbeitet
- scheinbar systematisch gearbeitet
- die Aufgabe im Kopf gelöst
- sich bei der Suche weiterer Ausgänge an der Lage der bereits gefundenen Ausgänge orientiert (Hypothesenbildung in bezug auf Mustererkennung, evtl. mit anschließender Überprüfung)

Einige Vermutungen bezogen auf die kognitiven Prozesse:

Das Kind hat
- Muster erkannt (bezogen auf die Ausgänge)
- Muster erkannt (bezogen auf die Wege)
- Superzeichen gebildet (Muster genutzt für weitere Lösungen)
- Analogien gebildet (bei Aufgabe 2,3, und 4)

Leider ist es hier nicht möglich, weitere Beispiele für die Schülerlösungen zu zeigen.

Die ersten quantitativen Ergebnisse deuten daraufhin, dass die Kinder in der Schule mit dem Einsatz dieses Problemfeldes nicht überfordert wurden und ein großer Teil ohne Vorbereitung[2] beeindruckende Ergebnisse erzielt hat.

[2] Die Förderkinder wurden durch die Mathe-Treffs auf derartige Aufgabenbearbeitungen vorbereitet

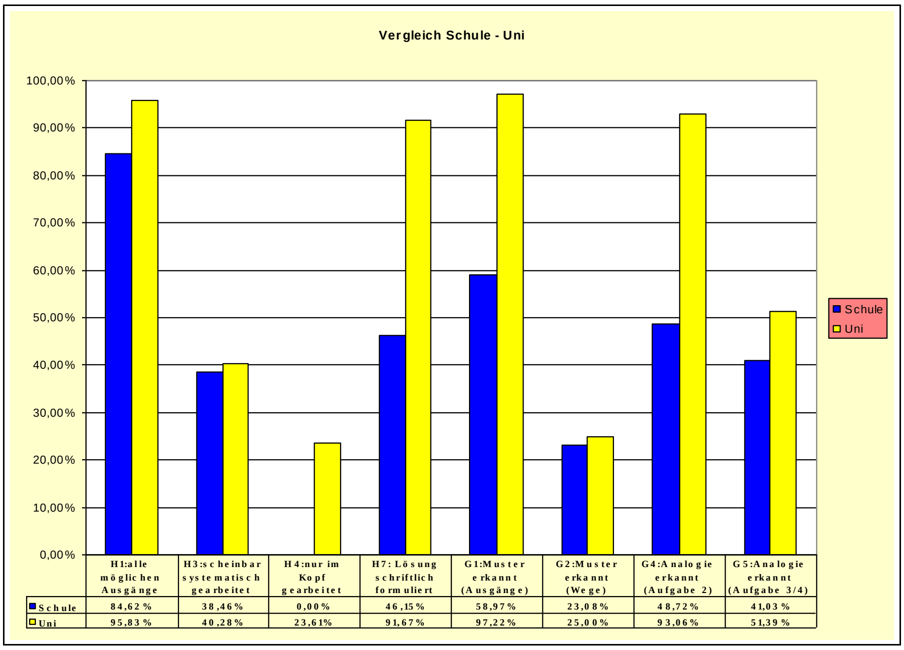


Abbildung 10

Die Ergebnisse zeigen aber auch, dass beide Gruppen noch am Anfang im Umgang mit solchen Aufgaben stehen. Interessant werden vermutlich die Werte der nächsten Aufgabenauswertung sein, u.a. unter der Perspektive, ob die Daten der Kinder der Fördergruppen einen deutlicheren Anstieg in den einzelnen Kategorien erkennen lassen.

Ausblick

Insgesamt jedoch zeigen meiner Meinung nach auch die Schüleräußerungen der Kinder aus der Regelklasse, die ich am Ende des Unterrichtsversuchs mit Hilfe eines Fragebogens erhoben habe, dass es aus unterschiedlichsten Gründen lohnenswert ist, komplexere mathematische Problemfelder in die Schule zu tragen. So fanden rund 2/3 der Kinder alle 4 Problemfelder sehr interessant und 1/3 der Kinder gab an, zu Hause noch über die Probleme nachgedacht zu haben und weitere Ideen verfolgt zu haben. Von daher kann ich nur alle Lehrer und Lehrerinnen ermutigen hin und wieder solche Art

Aufgaben in Grundschulklassen einzusetzen. Die Chancen, die auch für schwächere Schüler und Schülerinnen in diesem doch etwas anders ausgerichtetem Mathematikunterricht liegen, dürfen nicht unterschätzt werden. Nicht zuletzt, weil der Versuch von Kindern, Prozeduren zu erwerben ohne Einsicht in Verständnis zu entwickeln, ein großes Problem in der Schule darstellt. Nolte (1991) hat darauf hingewiesen, wie Kinder durch „sich nicht zutrauen", im Sinne der gelernten Hilflosigkeit (Seligman 1975) sich dem Denken entziehen zu scheinen. Hier setzt unser Motivationsaspekt an, durch den Hindernisse im Problemlöseprozess minimiert werden sollen, d.h. nicht, dass alle Kinder alles herausfinden sollen – dies ist in offenen Problemfeldern ohnehin nicht möglich, aber nach Möglichkeit sollen alle Kinder einen Zugang zu mathematischen Aufgabenfeldern finden.

Literatur

Anderson, J. R. (1988). Kognitive Psychologie. Heidelberg.

Nolte, M. (1991). Strukturmomente des Unterrichts und ihre Bedeutung für das Lernen untersucht an Beispielen des Algebraunterrichts in einer lernschwachen Lerngruppe. Bad Salzdetfurth, franzbecker.

Nolte, M. und Kießwetter, K. (1996). "Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? Ein Bericht über einschlägige Überlegungen und erste Erfahrungen." ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **5**: 143-157.

Nolte, M. (2006). unveröffentlichter Projektbericht.

Seligman, M. E. P. (1975). Helplessness: On Depression. Development and Death. San Francisco, W. H. Freeman.

Anschrift der Verfasserin

Kirsten Pamperien/PriMa-Projekt

Universität Hamburg
Fakultät für Erziehungswissenschaft, Psychologie und Bewegungswissenschaft
Didaktik der gesellschaftswissenschaftlichen und mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer
Von-Melle-Park 8

20146 Hamburg

pamperien@erzwiss.uni-hamburg.de

6.4 Publikation V

Die fünfte Publikation „Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme.” ist in der Zeitschrift ZDM - Mathematics Education im Jahr 2017 erschienen, genauer im Themenheft „Mathematical creativity and giftedness in mathematics education“, herausgegeben von Florence Mihaela Singer, Linda Jensen Sheffield und Roza Leikin. Im Zentrum des Artikels steht der Einsatz Progressiver Forscheraufgaben in Regelklassen, die für die Förderung mathematisch besonders begabter Grundschulkinder entwickelt wurden. Ziel der Studien ist es, zu untersuchen, inwieweit sich diese Aufgaben für diesen Einsatz eignen und ob es Unterschiede bei der Bearbeitung in den unterschiedlichen Gruppen gibt.

In der theoretischen Fundierung des Beitrags werden zunächst Aspekte mathematischer Begabung diskutiert. Insbesondere wird die Relevanz der Aufgabenvorgabe zur Identifikation einer besonderen mathematischen Begabung dargestellt. Dies führt über in den Bereich des Problemlösens, insbesondere da Aufgaben für besonders begabte Schüler*innen eine angemessene Komplexität aufweisen müssen, um Handlungsmuster im Bearbeitungsprozess sichtbar zu machen. Außerdem wird auf die Notwendigkeit besonderer Lernumgebungen mit speziellen Aufgaben und besonderen Lehrkräften für mathematisch begabte Schüler*innen hingewiesen (Leikin et al., 2016). Im Rahmen des PriMa-Projekts wurden Progressive Forscheraufgaben entwickelt, die Schritt für Schritt Schüler*innen an forschendes mathematisches Lernen heranführen und die wesentlichen Merkmale, wie zum Beispiel das Aufstellen und Begründen von Vermutungen oder das Finden von ersten Verallgemeinerungen, selbstverständlich erscheinen lassen.

Da die Aufgaben stets mit einer eingegrenzten Anfangsaufgabe beginnen, können alle Schüler*innen sich mit der Problemstellung vertraut machen und einen Zugang zum Problem finden. Zwei dieser Aufgaben wurden sowohl in Regelklassen als auch in Fördergruppen durchgeführt, um festzustellen, ob der Einsatz dieser Aufgaben auch in der Schule sinnvoll ist. In beiden Studien konnte gezeigt werden, dass alle Schüler*innen einen Zugang fanden und motiviert an den Aufgaben gearbeitet haben. In allen Gruppen wurden Muster und Strukturen erkannt, allerdings auf unterschiedlichen Ebenen. In der Schule konnten diese Muster nicht begründet werden. In der Fördergruppe gab es erste Erklärungsansätze und auch auf Beispielen basierende Verallgemeinerungen. In beiden Gruppen gab es Schüler*innen, die Superzeichen gebildet haben. Dieses Handlungsmuster ist ein starker Indikator für eine mathematische Begabung. Es bestätigten sich die Beobachtungen informeller Untersuchungen in Regelklassen, dass Progressive Forscheraufgaben für einen Einsatz in heterogenen Lerngruppen geeignet sind. Allerdings benötigen die Schüler*innen in der Schule mehr Zeit, die Aufgabenvorgabe zu verstehen. Hier bedurfte es ausführlicherer Erklärungen von Seiten der Lehrkraft und die Schüler*innen mussten behutsam an die Kommunikationsstrukturen, dem Fragen nach Begründungen, herangeführt werden. Weiterhin konnte festgestellt werden, dass Progressive Forscheraufgaben sich in Schulklassen auch zur ersten Diagnostik mathematischer Begabung eignen. Eine Verallgemeinerung dieser Beobachtungen ist jedoch nicht zulässig, da die Stichprobe sehr klein war, daher ist es notwendig, diese Forschung auszudehnen, um gesicherte Ergebnisse zu erhalten.

6.5 Darlegung des eigenen Anteils

Die fünfte Publikation ist ebenfalls in enger Kooperation mit der Betreuerin meiner Promotion Marianne Nolte entstanden, wobei die Entwicklung, Erprobung und Evaluation der

Aufgabenstellung „Wege und Ausgänge“ von mir durchgeführt wurde. Die Faltaufgabe habe ich ebenfalls erprobt und deren Einsatz evaluiert. Des Weiteren wurde das Untersuchungsdesign von mir entwickelt. Die Darstellung der erzielten Ergebnisse und deren Diskussion erfolgte zunächst von mir und wurde dann gemeinschaftlich überarbeitet. Im fortlaufenden Begutachtungsprozess wurde die vorliegende Publikation erneut zunächst von mir überarbeitet und danach wieder gemeinschaftlich.

6.6 Abdruck der Publikation V

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017a). Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme. *ZDM – Mathematics Education, 49*(1), 121-136. doi: 10.1007/s11858-016-0825-5

ZDM Mathematics Education (2017) 49:121–136
DOI 10.1007/s11858-016-0825-5

ORIGINAL ARTICLE

Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme

Marianne Nolte[1] **· Kirsten Pamperien**[1]

Accepted: 19 November 2016 / Published online: 2 December 2016

Abstract Problems for students with a high mathematical potential can be far more complex and challenging than problems normally used in regular classrooms. The problems we developed for mathematically gifted students offer the possibility of acquiring and using heuristics (so called patterns of actions) which are useful in problem solving processes. Because these kinds of capablities are valuable for all students, we ask whether it is possible to work on the problems in regular classrooms. In this paper two studies are presented, which examine to what extent students in regular classrooms are capable of working on problems designed for mathematically gifted students. The results show that the problems used in the support programme can also be successfully applied in regular classroom teaching and that students working on them experience high motivation. However, students of our support programme achieved better results regarding generalization and proving. In addition, they needed less time to solve the problems.

Keywords Mathematical giftedness · Development of mathematical promising students · Fostering giftedness · Regular classroom

1 Aspects of mathematical giftedness

The question of how to foster the capabilities of mathematically promising students is based on the idea that also these students need support to develop their high potential. Actual models of giftedness are based on influencing factors (e.g., Heller 1991; Gagné 2004). With this position, "the interaction of internal (personal) dispositional factors and external socialization factors" (Heller 1991, p. 174) plays an important role for the development of high competencies.

Various approaches try to conzeptualize intelligence (for a survey, see Neisser et al. 1996). Giftedness is in most cases defined as starting with an IQ of 130 and higher (percentile rank of the 2% best performing students in intelligence tests). Some authors (e. g., Gagné 2004) broaden this range up to 10%. The results of intelligence tests are known to be very good predictors of school achievement and occupational success (Rost 2009; Stern and Neubauer 2016); but results of intelligence tests are not stable even with teenage subjects (Ramsden et al. 2011). A high IQ seems to be a precondition for high achievement in a challenging subject like mathematics. Intelligence "involves the ability to reason, plan, solve problems, think abstractly, comprehend complex ideas, learn quickly and learn from experience" (Gottfredson 1997, p. 93). Nevertheless, this is (only) one precondition for high achievement and some of the other preconditions, for example, are as follows: activities in a special field, knowledge and interest. But can we take the results of an intelligence test to predict high mathematical achievement? A study about the correlation between an intelligence test given in combination with a word test and a test about number sequences to >1600 mathematically interested third graders shows only weak correlations between IQ and the results of a mathematics test which was developed to identify high mathematical potential (see Nolte 2012b). Taking these results into account, an identification process should include challenging mathematical tasks.

✉ Marianne Nolte
marianne.nolte@uni-hamburg.de

Kirsten Pamperien
kirsten.pamperien@uni-hamburg.de

[1] University of Hamburg, Hamburg, Germany

Intelligent individuals seem to work more efficiently (e.g., Neubauer et al. 2004). They acquire new information more rapidly (Wieczerkowski 1998). Analyzing micro processes, Seidel et al. (2001) describe an increased entropy reduction with mathematically gifted students. Interestingly, this can only be observed if they are working on challenging problems. Krause et al. (1999) observed nearly simultaneous activation of representations in the brain located in different areas. This is in line with results of Paz-Baruch et al. (2014), who detected "enhanced capacity of working memory coupled with inhibition of irrelevant information" (p. 160).

Because neither IQ-tests nor other forms of assessment can avoid misinterpretation, instead of *gifted student* the term *promising student* is often preferred (e. g., Sheffield 1999a) if students are not identified as gifted.

1.1 The context of problem solving

Problem solving is one of several different approaches to foster the capabilites of mathematical promising students (see Singer et al. 2016). This article focusses on the impact of special tasks in the fostering process. In this regard, especially the results of the research of Krutetskii (1976) are important. He described generalization, pattern recognition and structures, as well as abstract, reverse and flexible thinking as aspects of high mathematical capabilities. Furthermore, "Krutetskii himself sees the tendency to curtailment" (van Bruggen and Freudenthal 1977, p. 240 f) as one of the main aspects. His investigations included "aptitudes for learning mathematics, within the limits of the school course, that showed creative mastery of the school material and independent, creative solution of problems (including rather complex and original ones)" (Krutetskii 1976, p. 7). In Germany the research of Kießwetter has a great impact on the discussion about mathematical giftedness. From the perspective of a mathematician, Kießwetter describes capabilities similar to those posited by Krutetskii, "recognizing patterns and rules and finding related problems—corresponds with Krutetskii's ability to generalize; changing the representation of the problem and recognizing patterns and rules in this new area—corresponds with Krutetskii's flexibility of mental processes; reversing process—corresponds with Krutetskii's reversibility of mental processes" (Vilkomir and O'Donoghue 2009, p. 191). Differing from Krutetskii, Kießwetter describes these aspects not as characteristics of giftedness, but as being useful in problem solving processes. His so called "patterns of action" (Kießwetter 1985) can be assigned as a retrospective approach comparable to studies concerning experts and novices. So cognitive components of problem solving, for example switching between representations, recursion, organizing material in order to recognize patterns, developing and testing of hypotheses and reduction of complexity through meta-symbolization (building super signs/ super-ordinate piece of knowledge) (Kießwetter 1985, 1988, 2006) are regarded as useful patterns of action in the process of working successfully on problems.

Krutetskii's findings were often confirmed (e.g., Freiman et al. 2005). Käpnicks' (1998) investigation with primary grade students shows that cognitive capabilities such as remembering mathematical facts, structuring mathematical information, sensitivity and fantasy, intermodal transfer and reversal thinking, are traits of mathematical talent.[1] Nevertheless, criteria such as pattern recognition or transfer are applicable as a goal for all students. In addition Scherer (1995, 1996) demonstrates with her research, that even low achieving students are able to recognize patterns and structures while working on problems like the NIM-game. Average students often use reverse thinking. Switching between representations at primary grade level is a main didactical approach based on Bruner's (1974) enactive, iconic, and symbolic stages of representation. Thus Nolte (2012c) underlines that the level of the challenge which is given with the problem should be taken into account:

> We define children as mathematically gifted when they are able to work on complex problems. In this learning environment they recognize patterns and structures. They are able to exploit these patterns and structures while working on the problem. They can work on a high level of abstraction. They construct superordinate structures and gasp coherences. They are able to generalize their findings, and therefore if children show special patterns of action in challenging and complex fields of problems, we assume high mathematical talent (p. 3).

If the interplay between patterns of action and the kind of problems can be regarded as essential for showing and developing high mathematical capabilities, the above discussion leads to the question of what kind of learning environments supports these processes successfully.

2 How to foster mathematical competencies

2.1 The concept of the "Hamburger Model"

At the University of Hamburg research on mathematical giftedness started in 1983 in the frame of the William-Stern-Society project for fostering the capabilities of mathematically gifted students at secondary level (between 12

[1] The distinction between mathematical giftedness and talent goes back to Gagné (2004).

and 19 years of age),[2] the so called "Hamburger Model". One of the core elements of the support programme are problems developed for mathematically gifted students. While working on these problems the students can show heuristics, which are called "patterns of action" by Kießwetter.

The material as well as his concept follows the idea that students can "think and act like practicing mathematicians" (Gavin and Sheffield 2010, p. 54).

Due to the fact that working on complex problems is time consuming, Kießwetter also focusses on the impact of motivation. He differentiates between motivation at the beginning and during the process of problem solving. Questions which can easily be solved at the beginning lead to first successes. Subsequent questions lead to a broader context and open the mind to interconnected mathematical content. Thus, different questions lead to a field of problems (Kießwetter 1985, 2006, 2009). Comparing this approach with the fostering concept at Johns Hopkins University, Durden (1995) points out the differences between Kießwetter's approach and the approach, for example, of curriculum orientated courses:

Each problem is intended as an implicit invitation to a whole area of related problems. Students are challenged to explore these related areas once they have solved the actual problem. To a certain degree, mature mathematical research situations are simulated in these more elementary problem networks and the recognition of this is an important component in maintaining student motivation for mathematics. These earlier modeling experiences and students' success with them lead unequivocally to future success in and motivation for related, but more complex problems (p. 27).

Giving students independence and freedom during the processes of working on problems, giving them the possibility of struggling in a complex learning environment, according to Kießwetter, the whole process becomes more similar to the mathematical reasoning processes described, for example, by Pólya (1954).

Kießwetter's concept is different from approaches which systematically enhance students' capabilities by posing problems oriented to a spiral curriculum (see e.g., Johns Hopkins Center for Talented Youth http://cty.jhu.edu/search.html?search=Math+Problem+Solving+%28MPSE%29+&x=15&y=10 last access 2016-3-7); (Bruder 2014; Bruder and Collet 2011).

There are also differences between Kießwetter's formulation and concepts which explicitly combine problem solving with instruction about heuristics (e.g., Schoenfeld 1979, 1982):

Our working hypotheses are that in addition to an adequate knowledge base of facts and principles, the following are necessary (and on the cognitive side, perhaps sufficient) conditions for success in problem solving: (1) a mastery of the basic problem-solving techniques, and (2) a "managerial strategy." This helps to select appropriate approaches to problems and to terminate fruitless ones—in general, to help one budget problem-solving resources efficiently (Schoenfeld 1982, p. 32).

It should be taken into account that working in regular classrooms can be different from working in a group with mathematically gifted students. "The special characteristics and needs of outstanding and gifted students require a unique learning environment and distinctive study tracks, with respect to pedagogic methods, and appropriate teachers and curricula" (Leikin et al. 2016, p. 119). Nolte (2016) regards the challenge which comes with the learning environment as a precondition for making a high mathematical potential visible. Due to the definition of problems as questions that contain hindrances which cannot be overcome by well known procedures, what is meant by a problem is different for individual students. So a problem for average students can be no problem for promising students. With his approach Kießwetter does not rely on explicit instruction about heuristics, but more on the implicit acquiring or enhanced use of heuristics by working on problems. Communication between students, students and tutors and within the whole group offer access to different perspectives on problems and ways of acting. This conception is based on a special view of mathematics as

> … a comprehensive theory (and) [which] includes the position and formulation of new problems by a student, the economical use of results, the invention of methods for new solutions and the continuous posing of original conceptualizations and reflections about their appropriateness and interrelatedness and the introduction of appropriate iconic and other representations of important structures (Durden 1995, p. 26).

Kießwetter (1999) underlines the necessity of experiences for the development of giftedness that do not simplify the process of problem solving. On the contrary, he emphasizes that the experience of failure and detours is more similar to research processes in mathematics. This experience is a typical characteristic of problem solving (e.g., Reiss and Törner 2007). Experiences of detours as usual characteristics of problem solving support the development of beliefs about mathematical problem solving that are closer to the work of mathematicians. It can be assumed that students who are only used to solving simple problems expect all problems to be as simple. Such an experience educates students to develop the belief that every problem must be solved quickly, otherwise it cannot be solved

[2] http://www.williamsterngesellschaft.de/ headed by Karl Kießwetter.

(Schoenfeld 2012). In a study with primary grade students, who were not identified as gifted, the paper folding task (see below) was presented under different conditions. When preceded by a connected task which was solved previously and quickly, the students did not work on the folding task with endurance and volition (Nolte and Kießwetter 1996). Furthermore, working on fields of problems illustrates the interconnectedness of mathematical topics and open possibilities for students (at the upper secondary level) to develop their own small theories. The emphasis of resources of students (see Schoenfeld 1985) is taken into account by the mathematical content of the problem, the way the problem is presented and the competence of the teacher. Because the problems are constructed as fields of problems, it depends on the situation and/or the individual approach of a student how deeply the mathematical content will be investigated. Some of the problems are used with primary grade students as well as with students at upper secondary level (Kießwetter 2006). So "…comprehending very complex structures and working within these structures" (own translation, Kießwetter 1985, p. 301) is one essential characteristic of the fostering programme of the "Hamburger Model".

2.2 The support programme at primary grade level

Based on the fostering design by Kießwetter we developed material for primary grade students. Our design for mathematically gifted students (grade 3–6) focusses on problem solving and enrichment. Nevertheless, the knowledge of most of the students is accelerated compared to the knowledge of their classmates. The material for primary grade students cannot be as complex as problems for higher grades. Nevertheless, they are far more complex than the usual problems used in school. But the worksheets with the problems must be more structured. In part, the problems are developed by members of our team, but also we adapt and modify published problems. As an enrichment of the normal curriculum, most of the content is chosen because it offers the possibility of being extended to a field of problems by variations and by asking further leading questions.

Based on our repertoire of problems we established a curriculum for mathematically gifted primary grade students at the University of Hamburg. The aim is to support the students to get more and more familiar with patterns of action. We call the tasks *progressive investigating problems*, because working on these kinds of problems students develop step by step a habit of generalization, argumentation and proving as part of a problem solving process. During the fostering process they get more and more independent from the questions given with the problem and learn to ask questions related to certain contents. The way the problems are presented takes into account that mathematically gifted students acquire new knowledge more quickly than others and are more capable than others working on complex problems.

3 Working on complex problems in regular classrooms

All students need an inspiring learning environment. We ask how to establish such environments especially to support the development of problem solving capabilities. Under the title "Substantial Learning Environments" Wittmann (2002) discusses approaches with tasks that can be solved in several ways and on different levels and that allow the use of different strategies, so that a fitting level of work is not defined by a teacher but rather by the way students work on the question. The tasks introduced by Wittmann and Müller (1990) are similar to other investigations, for example such as problems that are based on an open approach (Hashimoto and Becker 1999). This approach can be described as a "curriculum that focuses on both mathematical content and processes, combines acceleration and enrichment practices, addresses the range and diversity of students' mathematical talents through differentiation,…" (Gavin et al. 2007, p. 568).

Introducing systematically tasks which support the acquisition of knowledge and at the same time prompt the development of higher order thinking skills led to a change of paradigm in the German curriculum for primary grade students. Working on these kinds of tasks provides an approach suitable for a broad variety of students. Nevertheless, although these tasks are developed for children with learning disabilities as well as for high achieving students, problems for mathematically promising students should be much more complex and challenging.

The problems we constructed and evaluated for our fostering programme with gifted students can be characterized by their richness. They offer the possibility of showing and getting used to patterns of action. We ask whether our problems are to some extent approachable by all students and what kinds of patterns of action are shown by these students. Not every child might have had the opportunity to show her or his mathematical competencies during regular lessons. Furthermore, especially students with a low level of self-efficacy or a negative pattern of attribution profit from problems that allow successful and independent work on different levels. Following Kießwetter, we constructed most of the problems in such a way that they start with an easy question. In this way the students have the opportunity to become more familiar with the content. This process allows most of the students to engage in working on the problem. So, in this paper we explore whether we can use the problems in a regular classroom setting and observe differences in the working behaviour and the quality of solutions between the students in the regular classroom and students identified as mathematically gifted.

4 The studies

We describe two different studies, one concerning a folding task, one about the task called "ways and exits". The first study includes two classes, the second only one class. All results are compared with the results of the students of our groups at the university.

4.1 Study one: The Folding Task

In case studies, Nolte and Kießwetter (1996) observed differences between successful and less successful students working on the folding task. The case studies prompted us to further develop the task as a problem for our groups at the university. The work in our groups is evaluated by the members of our team on a regular, ongoing basis. To make the observations comparable we developed observation scales (see e.g., Pamperien 2004; Nolte 2012a). These observation scales are based on patterns of action in combination with higher order thinking skills, specific to the particular problem. Whether the problem can be used in regular classrooms and what kind of patterns of action can be observed we investigated in two regular classrooms and in fostering groups at the university. The method of presenting the task in different steps is described below.

4.1.1 Participating groups

Class one was a randomly selected class of grade four (26 students: 13 boys, 13 girls, between 9 and 11 years of age). The teacher told us that the performance of most of the students was average. Neither did she regard a child as being gifted or learning disabled, nor did she observe developmental or behaviour barriers.

Class two was also a randomly selected class of grade three (27 students: 16 boys, 11 girls, between 8 and 10 years of age). Different from class one the range of achievement was broader: the results of the intelligence test we used showed for four students a percentile range of 16 and less[3] (two girls, two boys), for two a percentile range of 95 (one girl, one boy) and more and for three a percentile range of 100 (one girl, two boys). One boy was diagnosed with ADHD. This is a rather unusual distribution of IQ for a classroom in Germany. Nevertheless, within inclusive settings the diversity of students in one class increases.

The university group: The students at the university were third graders (52 students: 35 boys, 17 girls, 8 or 9 years of age) who were diagnosed as mathematically gifted (identified via an intelligence test and a mathematics test). They were at the beginning of the foster programme.

4.1.2 Method

Working on the folding task in class one, the duration of the lesson was only 45 min. Two mathematics teachers were involved. We developed observation scales based on didactical analysis of the task and used them to document the work of the whole group of students (in the sense of a macroanalysis). In parallel this was videotaped. The categories we built are meant to analyze especially the ways of solution, developing of hypotheses, explanations and superordinate structures.

To make the results of the classrooms better comparable with those of the university group, for class two we equalized the conditions of the work as strongly as possible with the work at the university: In both groups we worked on the problem for about 90 min. We also worked with a comparable relation between the teacher, supporting tutors and students in school and in the programme at the university. Besides the results of the video, we collected data on the IQs. Again the observation scales were used as the rating instrument.

In every group the results for the students were coded with a two item likert scale based on 18 items.

4.1.3 How to work with the folding task

The children are given a sheet of paper and scissors. A rectangular form of the paper is favourable. They are asked to fold the paper once and cut off the corners. Before they unfold the sheet, they are asked how many holes are in the sheet of paper (see Fig. 1 for the first steps). After they state and explain their answers, they open the paper and discuss the result and the conjectures. This procedure is done with all the students together. It is repeated several times with the same sheet. In parallel with the conjectures, arguments and the pictures of the several folding steps are collected on the blackboard. To make it easier for the children, the task should be restricted to regular changing of the direction when halving the paper. After five steps of folding the paper, it is too thick to cut. So at step four the children are encouraged to speculate about how many holes will be in the paper if it is folded again and again (see Table 1). They are allowed to fold and unfold the paper or to use drawings. But they are not allowed to continue the folding process.

[3] The results of intelligence tests can be expressed by a number or a percentile range. A percentile range of 98 means that the students' results are equal to or better than those of 98% of the population. Often a percentile range is preferred because intelligence tests have a different standard deviation.

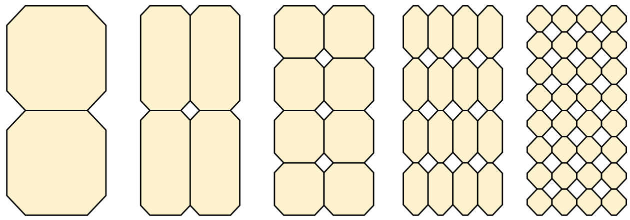


Fig. 1 Steps 1–5

Calculating the number of holes by means of a formula:

$A(a, b) = (2^a - 1)(2^b - 1)$ (a and b are indicating the number of foldings).

One important aim of this problem is training the development of internal representations, which will be the result of the process of folding and cutting by asking the students to formulate: "How many holes are now in the paper?". The students also train their ability to explain their hypotheses and to justify them: "Why do you think it is this number?" Change between representation, namely, thinking about connections between a numerical and a geometrical representation, thinking about another expression for numbers ($3 = 4 - 1$) are further aims. By going through this procedure several times the demands on their imaginations will grow, and also the complexity of the gathered information.

We expect the students to achieve the solution through the following ideas:

1. Every hole gets a right and a left neighbour: this idea helps to locate the holes in the paper after the next step. It is connected with the idea of the location of the folding lines and by this with the formula: the number of the folding lines in both directions is one less than the number of the different fields of the paper in both directions.
2. The cuts on the edges show the location of the lines.
3. The numbers which are multiplied are doubled minus 1. This is also connected with the formula.
4. Every second number is a square number.
5. Unfolding the paper after the last folding step shows a picture similar to the second step. Unfolding again shows the third step and so forth. By this you can see the doubling of the number of holes and how the cuts on the edges become holes.

4.1.4 Results

4.1.4.1 Class one All students seemed to work with high motivation on the problem. (After the end of the lesson, which was the last lesson of the day, many of them wanted to continue). They regarded the problem as a puzzle (see Sheffield 1999b). During the first steps they could prove their ideas immediately by unfolding the paper. Many children provided attempts of solutions that are incomplete or cannot be generalized. For example, doubling the number of holes is an uncomplete solution. Connected with the number of cuts on the edges, is an approach that leads to correct solutions and a general idea. Many of the students told ideas such as: "There will be six holes more", but could not explain their ideas. No correct justification was given and no general rule was found.

4.1.4.2 Class two With the exception of two students, all seemed to work with high motivation on the problem. As in class one many children discovered attempts of solutions that are incomplete or cannot be generalized. Different from class one, the students found more patterns and structures and also such as can be generalized. Moreover, the number of conjectures was higher. But no correct justification was given and no general rule was found.

4.1.4.3 University group The results of the groups at the university show that they went through similar steps compared to the results of the classes. Also the gifted students expressed ideas that were incorrect. But during the different steps of discussing the results more and more incorrect conjectures were excluded. Looking for the next number of holes, more students were asking for a general idea. During the whole group discussion they far more easily switched between the table with the number of holes and the paper. They also were capable of generalizing their ideas and made first attempts at proving.

4.1.4.4 The comparison of the results of the different groups Table 2 shows that in all groups the students recognized patterns and tried to formulate conjectures. As far as is observable, most of the students seem to work with high motivation. We suppose this is due to the fact that all the children were active, all of them seemed to build conjectures, and they all could prove them by unfolding the paper immediately.

With the observation scales the results between the groups seem to be nearly the same. But the second class

Table 1 Numbers of holes

Steps	1	2	3	4	5	6	7	8
Number of holes	0 $(2^1-1)\times(2^0-1)$	1 1×1	3 1×3	9 3×3	21 3×7	49 7×7	105 7×15	225 15×15

Table 2 Observation scale: class 1, class 2 and university group

	Class 1	Class 2	University
Finds the correct number of holes	21	21, 49	21, 49, 105, 225, 15×31, …
Orientation of the number of layers of the paper (more layers, more holes)	1	1	0
The number of layers is doubled, therefor the number of holes is doubled	1	1	1
The number of holes increases (e.g. +2, +6)	1	1	0
The number of holes increases (e.g. ×3)	1	1	1
The paper shows multipliers by 3, 7, …	1	1	1
Looks for connection between picture of the paper and number sequence of holes	1	1	1
Gives an explanation: orientation at numbers (incorrect or incomplete)	1	1	1
Gives an explanation: orientation at numbers (correct)	1	1	1
Gives an explanation: orientation at the paper (incomplete)	1	1	1
Gives an explanation: orientation at the paper (correct)	1	1	1
Justifies the explanation (incorrect)	1	1	1
Justifies the explanation (correct)	1	1	1
With the next step cuts on the edge become holes	1	1	1
Sees the connection between folding lines and holes	0	1	1
Every hole gets a right and a left neighbour	1	1	1
Works recursively	1	1	1
Finds a general rule	0	0	1

1 occurrence of incidence, *0* no occurrence

discovered an essential idea that was not seen in class one: the connection between folding lines and holes is an important idea for finding a general rule. A general rule was found at the university. That the students of the university group proceeded more deeply into the mathematical context than did those of class two, and class two more deeply than class one, can be deduced from the table with patterns of action. Although, taken together, the strategies and ideas of the students in the classrooms are similar to those of the university group, it took more time to delve into detail. Especially in class one many students gave explanations more generally like "there will be more holes because there are more layers of paper." Nevertheless, in both classes there were students who could formulate conjectures and explain them using the patterns they saw in the sequence of numbers or on the paper, or in comparing the paper and patterns of numbers. We also recorded incorrect or incomplete approximations to a result, such as incorrect conjectures or explanations, because learning to explain and to argue is an important step towards the solving of a problem.

4.1.4.5 Patterns of action To analyse the different approaches of the students we assigned the answers obtained by analyzing the video and worksheets to patterns of action. With this it becomes clearer that the quality of the mathematical results increased from class one to class two to the university groups (see Table 3).

We were surprised to observe students in class one counting the different shapes of the shreds they got by cutting the paper. This is an easy way of finding the number of holes. But we wanted the students to look for patterns. So we did not allow this in the other groups. Nevertheless, we used the pattern of action "organizing material in order to recognize patterns and structures" by organizing the cut papers at the blackboard, together with a table that contained conjectures about the number of holes, the results and arguments for the results.

All students recognized patterns and structures. Generalizing the results of a limited number of steps was found mostly within the classrooms. Furthermore, taking into account only some parts of the paper was also mostly found within the classrooms. Patterns and structures which could lead to a solution were found in class two and in the university group.

Due to the fact that students were asked for connections between the paper and the sequence of the number of holes all groups showed changes between representations. Only the university group changed also the representation of numbers (e.g. $3=2^2-1$) which is one of the essential ideas for finding a general rule.

One manifestation of recursion is that students unfold the paper step by step; and by this process they obtain the

Table 3 Patterns of action: class 1, class 2 and university group

Patterns of action		Class 1	Class 2	University
Organizing material in order to recognize patterns	The number of shreds that are formed like a rhombus equals the number of holes that must be added to the preceding number	1	0	0
Recognizing pattern and structures (incorrect)	You can always add 2	1	1	0
	(Partial) sequence 1, 3, 9 leads to multipliers of three, so the next number is 27	1	1	1
Recognizing pattern and structures (correct)	There are more holes in the paper after the next step	1	1	0
	Recognizes multipliers (times task) in the paper	1	1	1
	Connection between holes and cuts on the sides	0	1	1
	Recognizes square numbers	0	1	0
	Every second number is a square numbers	0	0	1
	Every number can be presented as a multiplication term	0	0	1
	The numbers are part of the powers of 2, minus 1	0	0	1
Changing between representations	Looking for connections between the paper and the number sequence	1	1	1
	Changing the representation of numbers of the holes e.g. $21=3\times7$	0	0	1
Reduction of complexity through meta-symbolization (super signs)	Doubling the paper: one step is regarded as a half of the number of holes of the next step	0	1	1
	Doubling the paper: one step is regarded as a half of the number of holes of the next step plus the cuts on the side	0	1	1
Recursion	Folding and unfolding the paper systematically	0	1	1

Table 3 (continued)

Patterns of action		Class 1	Class 2	University
Developing of hypotheses	The holes are in a special part of the paper (e.g., in the middle, at the corners of the paper)	1	1	0
	The holes always get a right and a left neighbour	0	1	1
	The holes are always at a cross of folding lines	0	1	1
	The number of the holes equals the number of the rectangles of one side minus one multiplied by the number of the rectangles of the other side minus one	0	0	1
	The numbers which must been multiplied are part of the powers of two minus one	0	0	1
	You should always multiply by three, add two	1	1	0
	You should always double the number of the present step	0	1	1
	You should always double the number of the present step and add the number of the cuts on the side	0	1	1
Testing of hypotheses	This was done inductively and paradigmatically by putting two papers together and showing that the number of holes was doubled and the cuts became new holes	0	0	1
	This was done recursively and paradigmatically: unfolding the paper shows the first, second and so forth step	0	0	1
	The students explained paradigmatically that the number of fields in the paper is doubling with every step. Taking together the observation, that the folding lines lay in each case between two fields and also the aspect of changing the direction of folding the students, proved the idea that the sequences of results follows the formula	0	0	1
Results		Two out of 25 found 21	18 of 27 found 21 as the next number of holes, one found 49	All found 21 as the next number of holes, most of them found numbers up to 225, some found a general rule and, e.g., 961

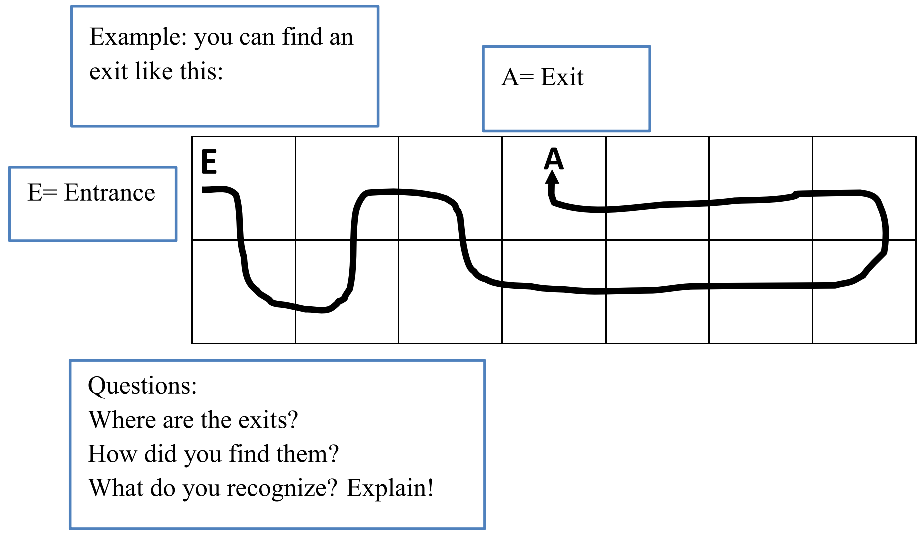


Fig. 2 Worksheet of the problem (part 1) (Pamperien 2008)

Fig. 3 Examples for super signs

sequence of numbers of holes backwards. Folding and unfolding the paper was observed in all groups, but in class one the students did not seem to do this systematically.

Students in all groups developed hypotheses. Nevertheless in class one they had difficulties in explaining their ideas. The conjectures were based on the patterns that students saw. That means that their solutions were partly incorrect. But due to the step by step work on the problem they also recognized that some of the hypotheses were not correct. Again the group at the university found more correct hypotheses. The argumentation using the picture of the paper seems to be more easily accessible than that about the number patterns.

Testing the hypotheses was done in class two and in the university group. In class two they tested one solution. In the university group they found a general rule which was explained by paradigmatic examples.

4.2 Study two: ways and exits

In this study we systematically investigated to what extent students with different potential are able to work on our problems. Including the folding task, over the course of four weeks class two was given one problem per week, selected from the problems for the university group. We developed observation scales for each of these problems. Differing from study 1, we used these scales to document the way each child solved the problems.

4.2.1 Participating groups

Class two was the same group as described above. At the university we selected the results of 83 students in grade three at the beginning of the foster programme.

4.2.2 Method

We used the same methods as in study 1, and analyzed the results of the worksheets of the students. The answers of the students were coded using a two-item Likert scale.

4.2.3 How to work with ways and exits

This is a problem based on graph theory.

Task 1

This is a museum. You want to see every single room. Find all possible exits! Conditions: You must visit every room. You can visit it only once (Fig. 2).

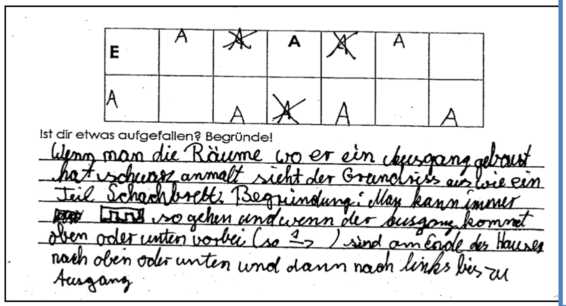
The phrasing of the problem is the result of our evaluation. This kind of linguistic formulation has been chosen in order to prevent the case that too much information about the possible ways of solving the problem is given. At the same time the introduction to this example is meant to examine the students' understanding of the task. With this presentation some of the students focus on the question *where are possible exits* while other students focus on the question *which ways are leading to the exits*.

We expect the students to get the solution using the following ideas:

1. Looking for possible exits (problem 1)

   - by trial and error
   - by systematic trials

Fig. 4 Result of a student (Pamperien 2008)



Description of the student:
If you paint rooms with exits black it looks like chess board.
Justification:
There are only two possible ways of walking; and when the exit comes to pass above or under, like this. At the end of the house above or under, and then turn left to the exit.

2. Looking for different ways (problem 1)

   - by trial and error
   - by systematic trials

3. Transferring the pattern or the profile of the ways to a larger shape (problem 2)
4. Break the new shape into fractional parts (problem 3 and 4)

By presenting the example students get to know that "doors" can be on every wall, but not in a corner. It is possible to solve the problem by focusing on the location of the exits or by looking for different ways and whether they lead to an exit or not.

This is the opening problem. The first question offers possibilities for solving in several ways. Some of the students rely on trial and error, others recognize structures like the following two super signs, from Fig. 3:

In the sense of working interims these super signs were called e.g. "hills and valleys" and "loops".

Successful strategies are based on using these two super signs for constructing every possible way and all possible exits. Figure 4 gives an example.

After a discussion about a possible solution for the problem, students get further questions based on the opening problem. Thus, the next questions provoke students to think about similarities and differences when the length of the building (problem 2) or the shape of the building (problem 3 and 4) is changed (Fig. 5). A longer building can easily be solved by transferring insights and understanding of the first question. With this also students who need the whole group discussion for a deeper understanding, are able to continue working on the next problems. This is no longer possible with the third situation. With the change of the shape, flexibility and more adaptations of the used strategies are essential. Again the shape is enlarged in the next step to support transfer of insights.

4.2.4 Results

In general the students at the university worked more successfully than the students in school. Nevertheless, all seemed to be highly motivated. Figure 6 gives an overview over the results.

Nearly all students at the university found all exits compared with >80% in school. Because the kind of problem was quite new also for the group at the university, only about 40% in both groups seemed to work systematically. No child in school worked on the problem only mentally. Most of the university students were able to write down an explanation, compared with approximately 46% in school. Nearly all students at the university recognized the pattern of exits, compared with at least close to 60% of the students in school. Obviously it was more difficult to see patterns looking at the ways because only about a quarter of both groups did this. Using analogies for solving problem 2, was the strategy used by nearly all students at the university compared to nearly half of the students in class two. Nevertheless, about 50% of the university group and about 40% of class two saw analogies between problems 3 and 4.

4.2.4.1 Observation scale The observation scale for the students of one group could be as in the following example (Table 4). We adapt the scales as long as we need to

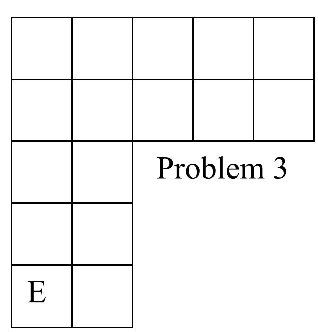
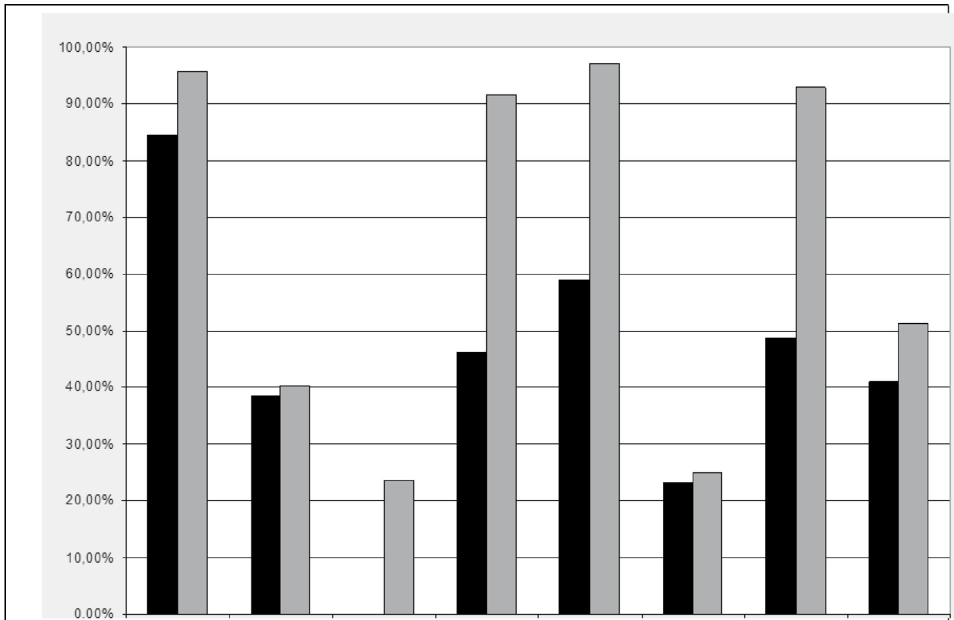


Fig. 5 Worksheet of the problem (part 3) (Pamperien 2008)



	Class	Uni-versity
All exits	84,62%	95,83%
Seems to work systematically	38,46%	40,28
Worked mentally	0%	23.61%
Written explanation of solution	46,15%	91,67%
Recognized pattern (exits)	58,97%	97,22%
Recognized pattern (ways)	23,08%	25%
Recognized analogy (problem 2)	48,72%	93,06%
Recognized analogy (problem 3 and 4)	41,03%	51,39%

Fig. 6 Comparison between class (*black*) and university (*grey*) (see Pamperien 2008)

Table 4 Example of an observation scale

	Tim	Mona
Finds all exists	1	1
Supposed working systematically	0	1
Works only “on mind”	0	1
Written explanation of the solution	1	1
Recognizes patterns (exits)	1	1
Recognizes patterns (ways)	0	0
Sees analogies (question 2)	1	1
Sees analogies (question 3 and 4)	0	1

collect essential aspects to observe. So depending on the goals of the observation we also include behaviours like participation in whole group discussions, preference to work alone or with others.

4.2.4.2 Patterns of action Within this problem we observed the following patterns of action (Table 5):

“Organizing material in order to recognize patterns” was seen by some students at the university who ordered the different ways systematically. This shows Fig. 7.

Obviously these students recognized the super signs as special patterns. The connection between exits and ways of finding them can be regarded as switching between focus on exits and focus on ways, so this is a kind of

Table 5 Patterns of action: class 2 and university group

Patterns of action		Class 2	University
Organizing material in order to recognize patterns	You can order the different ways according the length of the loops	0	1
Recognizing pattern and structures	Description of the pattern of exits	1	1
	Description of the pattern of ways	1	1
Changing between representations	Looking for pattern of exits as well as on the way	1	1
Reduction of complexity through meta-symbolization (super signs)	Seeing "loops" and "hills and valleys" as super signs	1	1
Generalization	Using paradigmatic examples students broke the field into fractions to explain how you always can find exits	0	1
Generalization via case distinction	Using paradigmatic examples students broke the field into fractions to explain how you always can find exits. Some of the students made differences between cases	0	1
Developing of hypotheses	Explaining where the exits must be located	0	1
	Explaining where the exits cannot be located	0	1
Proving of hypotheses	Description of the different ways, partly using super signs, that they obtained all exits and that there can not be another exit	0	1

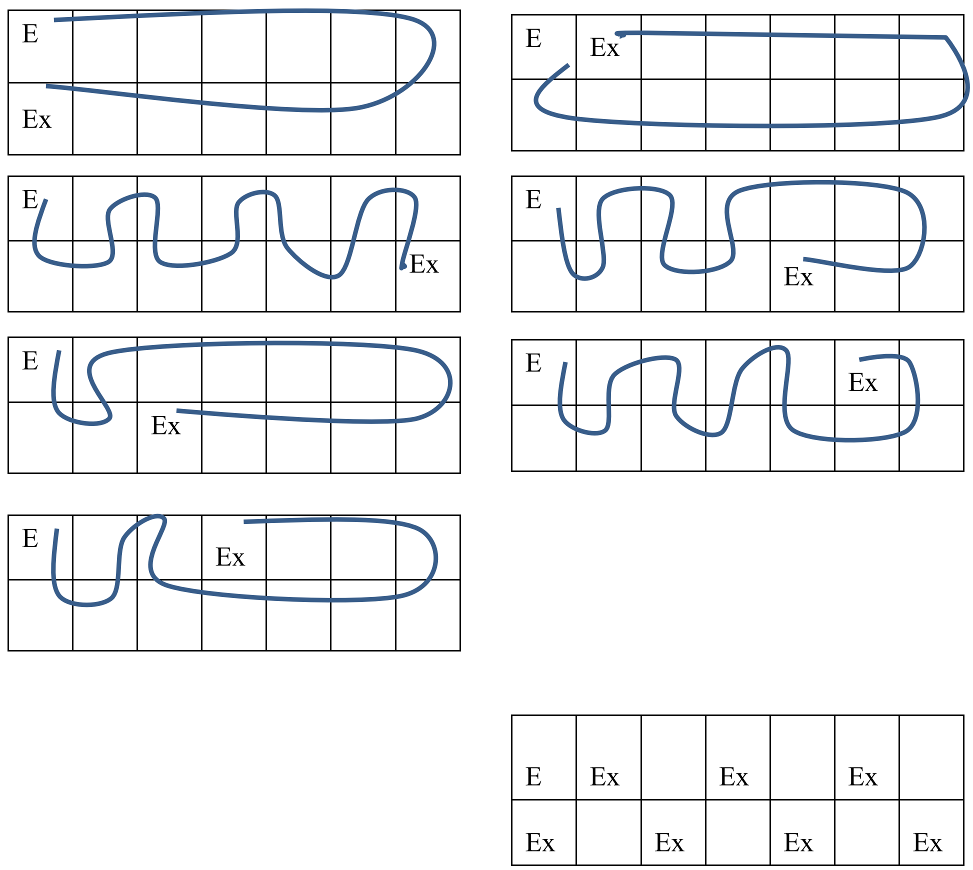


Fig. 7 Super signs: organizing different ways

changing between representations. Recursion did not occur.

Students' complete description of the location of the exits, combined with an explanation of why they cannot be in another field, can be regarded as a step towards proving.

5 Discussion

The studies confirm our findings from informal observations that even problems on which students can work for more than one lesson can be used in regular classrooms at primary grade level. In regular classrooms students needed more time. More time was necessary at the beginning, because the problems we constructed for the gifted students are balanced between phrasing appropriate for these students and exact enough to be mathematically correct. We avoided redundancy as far as possible. Thus in regular classrooms we needed more time to explain the task and the example. This can be expected, taking into account the discussion about traits of giftedness. Plenary talks about the ways of solutions took more time too. Furthermore, differences lay in the depth of the considerations concerning the completeness of information they took into account (see the efficacy hypotheses, Neubauer et al. 2004). Focusing only on parts of the given information is a hindrance for finding fitting patterns and structures as well as for the possibility of generalization. “Did you consider all the information you got” can be an important hint for students, as well as preparing tables for sorting the information. In all groups, questions about the connection between findings using different representations support students to switch between different ways of representing the material.

It can be assumed that the better results of class two in study 1 are due to the fact that the students had more time than those of class one. Furthermore, the support of tutors during the working term gave more students the possibility to explain their ideas. The way our tutors are trained to communicate with students supports the enhancement of the students’ independent thinking processes. Our tutors are trained not to confirm students’ considerations (as first steps) but to ask them why they think their considerations are correct. So students get more and more used to proving and to rechecking their own approaches, defending them if necessary, as well as to comparing them with approaches of other students. This is a process, similar to the “Scaffolding-and-Fading” process of Mason and Johnston-Wilder (2006, p. 83), in which they describe the process of supporting by asking questions, which were later asked independently by the students themselves. Although they had mathematics teachers with high professional knowledge, both classes were not used to such interventions when working on such complex problems. The university groups had these first experiences of the process during the talent search stage. Nevertheless, also they were at the beginning of their foster programme.

All groups used more or less patterns of action working on problems designed for gifted students. The university group applied many more ways of solution that might be called “elegant”. Especially recognizing a general idea or developing ideas that can be generalized, as well as their capability of grasping the ideas of others, were found more at the university. Perhaps because they needed less time for their first steps they could go more deeply into the mathematical content.

The students of class two explained that they liked it very much to work on problems such as ours “because they are different”. One boy said he was not motivated, nevertheless, he worked on the problem. The answers of others were not clear in this regard. These two students were tested as being of average intelligence. We gained the impression that also students tested as being learning disabled showed first steps towards problem solving. The results of class two raise the question of the extent to which the capabilities of students can be enhanced under the condition of working more often with such problems.

Offering complex problems can be used as an aspect of diagnostics. In class two the teachers’ impressions about the capabilities of some of the students were different from our observations. A student who verbalized many ideas of his neighbour was sent to participate in our talent search process. He did not succeed, perhaps because he was capable of grasping ideas quickly, but not as adept at finding own approaches. But his neighbour was the one who showed impressive high capabilities. There were other students (as well) who achieved far better working on our problems than in normal lessons. Furthermore, teachers who observe how students work on these problems get hints about heuristics that students are not familiar with, and which may be instructed with less complex problems. The challenge of the problems must be balanced between possibilities of success for many students and challenge for students with a high, and perhaps not identified potential (Nolte 2002).

Results like these do not contradict the need for special learning environments for gifted students, as Leikin et al. (2016) claim. Challenging problems and excellent teachers cannot compensate the interaction with peers with comparable interests and mathematical potential. In special programmes, both the students’ strategies as well as the plenary discussions about the different strategies will be at a higher level. Fielker (1997) states: “The class as a whole, in their arguments and counter-arguments, will sort out the good from the bad, the right from the wrong” (p. 25). A discussion in a regular classroom usually cannot go as deeply into the mathematical content as within a group of gifted students. Strategies of gifted students will be at a higher level, as also will be the plenary discussions about different strategies.

The results of the studies cannot be generalized due to the small samples. Further research may investigate how students’ development of mathematical problem solving capabilities progresses within the different groups, if we can extend the programme over a longer period of time.

References

Bruder, R. (2014). Fachdidaktisch und lerntheoretisch begründete Modelle zum Lehren und Erlernen von Heurismen im Mathematikunterricht. In F. Heinrich & S. Juskowiak (Eds.), *Mathematische Probleme lösen lernen* (pp. 31–46). Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.

Durden, W. G. (1995). Collaboration with a legacy: The Johns Hopkins University CTY–University of Hamburg Models for the Advancement of Mathematically Talented Youth. In B. Zimmermann (Ed.), *Kaleidoskop elementarmathematischen Entdeckens* (pp. 21–28). Hildesheim: Franzbecker.

Fielker, D. (1997). *Extending mathematical ability through whole class teaching*. London: Hodder & Stoughton.

Freiman, V., Vézina, N., & Gandaho, I. (2005). New Brunswick pre-service teachers communicate with schoolchildren about mathematical problems: CAMI project. *ZDM, 37*(3), 178–189.

Gagné, F. (2004). Transforming gifts into talents: The DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies, 15*(No 2), 119–148.

Gavin, M. K., Casa, T. M., Adelson, J. L., Carroll, S. R., Sheffield, L. J., & Spinelli, A. M. (2007). Project M3: Mentoring mathematical minds—A research-based curriculum for talented elementary students. *Journal of Advanced Academics, 18*(4), 566–585.

Gavin, M. K., & Sheffield, L. J. (2010). Using curriculum to develop mathematical promise in the middle grades. In M. Saul, S. Assouline, & L. J. Sheffield (Eds.), *The Peak in the Middle*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gottfredson, L. S. (1997). Why g matters: The complexity of everyday life. *Intelligence, 24*(1), 79–132.

Hashimoto, Y., & Becker, J. (1999). The open approach to teaching mathematics - mathematics in the classroom: Japan. In L. J. Sheffield (Ed.), *Developing Mathematically Promising Students* (pp. 101–119). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Heller, K. A. (1991). The nature and development of giftedness: A longitudinal study. *European Journal of High Ability, 2*(2), 174–188. doi:10.1080/0937445910020207.

Johns Hopkins University: Center for Talented Youth. Retrieved from http://cty.jhu.edu/search.html?search=Math+Problem+Solving+%28MPSE%29+&x=15&y=10. Accessed 7 Mar 2016.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder*. Frankfurt: Peter Lang.

Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern - ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. *Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht, 38*(5), 300–306.

Kießwetter, K. (1988). Das Hamburger Modell. Zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern. *Berichte aus der Forschung. Universität Hamburg, Fachbereich Erziehungswissenschaften, Heft 2*.

Kießwetter, K. (1999). Theoriebildung und Kreativität in der Mathematik. In B. Zimmermann, T. Fritzlar, F. Heinrich & M. Schmitz (Eds.), *Kreatives Denken und Innovationen in Mathematischen Wissenschaften* (pp. 109–127). Jena: Friedrich-Schiller-Universität.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren - und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Eds.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder?: Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (pp. 128–153). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Kießwetter, K. (2009). Was sollte und was kann Hochbegabtenförderung im Bereich Mathematik leisten? In S. Schiemann (Ed.), *Talentförderung Mathematik* (pp. 43–69). Berlin: LIT-Verlag.

Krause, W., Seidel, G., Heinrich, F., Sommerfeld, E., Gundlach, W., Ptucha, J., Schack, B., & Goertz, R. (1999). Multimodale Repräsentation als Basiskomponente kreativen Denkens. In B. Zimmermann, G. David, T. Fritzlar, F. Heinrich & M. Schmitz (Eds.), *Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften. Tagungsband zum interdisziplinären Symposium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, Abteilung Didaktik (9. 7. -11. 7. 1999)* (pp. 129–142). Jena: Friedrich-Schiller-Universität.

Krutetskii, V. A. (1976). An investigation of mathematical abilities in schoolchildren. In J. Kilpatrick & I. Wirzup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (Vol. II). Chicago: Stanford University, University of Chicago

Leikin, R., Berman, A., Alabed, R., & Jouaneh, S. (2016). Middle Eastern Special Schools. In B. R. Vogeli (Ed.), *Special Secondary Schools for the Mathematically and Scientifically Talented: An International Panorama*. New Jersey: World Scientific.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans: The Open University.

Neisser, U., Boodoo, G., Bouchard, T. J. J., Boykin, A. W., Brody, N., Ceci, S., Halpern, D. F., Loehlin, J. C., Perloff, R., Sternberg, R. J., & Urbina, S. (1996). Intelligence: Knowns and unknowns. *American Psychologist, 51*(2), 77–101.

Neubauer, A. C., Grabner, R. H., Freudenthaler, H. H., Beckmann, J. F., & Guthke, J. (2004). Intelligence and individual differences in becoming neurally efficient. *Acta Psychologica, 116*, 55–57.

Nolte, M. (2002). Förderansätze für mathematisch besonders begabte Grundschulkinder. In Hess. Landesinstitut f. Pädagogik (Ed.), *Besondere Begabungen - eine Herausforderung für Lehrerinnen und Lehrer. Grundlagen - Förderkonzepte und Praxisbeispiele - Unterstützungsangebote*. (Vol. 10). Wiesbaden

Nolte, M. (2012a). Das Beobachtungsraster. Ein vielfältig nutzbares Instrument im Spannungsfeld von curricularem, planungsbezogenem und interaktionsbezogenem Wissen. In W. Blum, R. Borromeo Ferri & K. Maaß (Eds.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (pp. 325–333). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Nolte, M. (2012b). "High IQ and high mathemarical taltent!" Results from nine years talent search in the PriMa-Project Hamburg. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, 8 July–15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea.

Nolte, M. (2012c). Mathematically gifted young children - questions about the development of mathematical giftedness. In H. Stöger, A. Aljughaiman & B. Harder (Eds.), *Talent Development and Excellence* (pp. 155–176). Berlin: Lit Verlag.

Nolte, M. (2016). "Twice exceptional": Mathematisch besonders begabte Kinder mit besonderem Förderbedarf. In C. Fischer, C. Fischer-Ontrup, F. Käpnick, F. Mönks, N. Neuber & C. Solzbacher (Eds.), *Begabungsförderung: Individuelle Förderung und Inklusive Bildung*. Münster: Waxmann-Verlag.

Nolte, M., & Kießwetter, K. (1996). Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? Ein Bericht über einschlägige Überlegungen und erste Erfahrungen. *ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*, 143–157.

Pamperien, K. (2004). Strukturerkennung am Dreiecksschema. In M. Nolte (Ed.), *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter*. Hildesheim: Franzbecker.

Pamperien, K. (2008). Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2. Erfahrungen mit Aufgaben zur Förderung besonders begabter Kinder in einer Regelklasse. In M. Fuchs & F. Käpnick (Eds.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (pp. 162–172). Berlin: LIT Verlag.

Paz-Baruch, N., Leikin, M., Aharon-Peretz, J., & Leikin, R. (2014). Speed of information processing in generally gifted and excelling-in-mathematics adolescents. *High Ability Studies, 25*(2), 143–167. doi:10.1080/13598139.2014.971102.

Pólya, G. (1954). *Mathematik und plausibles Schließen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik; Band 2 Typen und Strukturen plausibler Folgerung*. Basel: Birkhäuser.

Ramsden, S., Richardson, F. M., Josse, G., Thomas, M. S. C., Ellis, C., Shakeshaft, C., Seghier, M. L., & Price, C. J. (2011). Verbal and non-verbal intelligence changes in the teenage brain. *Nature, 479*, 113–116. doi:10.1038/nature10514.

Reiss, K., & Törner, G. (2007). Problem solving in the mathematics classroom: The German perspective. *ZDM, 39*, 431–441. doi:10.1007/s11858-007-0040-5.

Rost, D. H. (2009). *Intelligenz. Fakten und Mythen*. Weinheim: Beltz Verlag.

Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen in Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung* (Schindele ed.). Heidelberg: Universitätsverlag C. Winter.

Scherer, P. (1996). Das NIM-Spiel: Mathematisches Denken auch für Lernbehinderte? In W. Baudisch & D. Schmetz (Eds.), *Mathematik und Sachunterricht im Primar- und Sekundarbereich - Beispiele sonderpädagogischer Förderung* (Vol. Bd. IV, pp. 88–98). Frankfurt: Diesterweg.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 173–187.

Schoenfeld, A. H. (1982). Measures of problem-solving performance and of problem-solving instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 31–49. doi:10.2307/748435.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press, Inc.

Schoenfeld, A. H. (2012). Problematizing the didactic triangle. ZDM, 587–599 doi:10.1007/s11858-012-0395.

Seidel, G., Krause, W., Schack, B., Heinrich, F., Krause, U., Wüstenberg, T., Jordan, K., Lehrmann, W., Lutz, K., Heinze, H.-J., & Jähnke, L. (2001). Entropy reduction and mathematical giftedness: A microstate study of EEG oscillations. *NeuroImage, 13*(6), 474.

Sheffield, L. J. (1999a). Serving the needs of the mathematically promising. In L. J. Sheffield (Ed.), *Developing Mathematically Promising Students* (pp. 43–55). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Sheffield, L. J. (1999b). When the problem is solved the creativity has just begun. In H. Meissner, M. Grassmann & S. Müller-Philipp (Eds.), *Proceedings of the International Conference: Creativity and Mathematics Education* (pp. 51–56). Münster: Westfaelische Wilhelms-Universität Muenster.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V., & Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students*. New York: Springer Nature.

Stern, E., & Neubauer, A. (2016). Intelligenz: kein Mythos, sondern Realität. *Psychologische Rundschau, 67*(1), 1–13. doi:10.1026/0033-3042/a000290.

van Bruggen, J. C., & Freudenthal, H. (1977). A review of the psychology of mathematical abilities in schoolchildren. In V. A. Krutetskii (Ed.), *Proceedings of the National Academy of Education* (Vol. 4, pp. 235–277). Stanford: Stanford University.

Vilkomir, T., & O'Donoghue, J. (2009). Using components of mathematical ability for initial development and identification of mathematically promising students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(2), 183–199. doi:10.1080/00207390802276200.

Wieczerkowski, W. (1998). Vier hochbegabte Grundschüler in beratungspsychologischer Perspektive. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 45*, 143–159.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (2002). *Developing mathematics education in a systemic process*. Plenary lecture at ICME 9. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 1–20.

7. Publikation VI

Die sechste Publikation „Konstruktion und empirische Überprüfung der Güte eines Beobachtungsrasters zum Erkennen besonderer mathematischer Begabung im Grundschulalter im Rahmen eines Talentsucheprozesses“ ist zur Veröffentlichung in der Zeitschrift mathematica didactica angenommen und für 2021 zum Druck vorgesehen. Dieser Artikel fokussiert auf die Identifikation von mathematisch besonders begabten Grundschulkindern mithilfe von aufgabenspezifischen Beobachtungsrastern als Evaluationsinstrument. In dieser Studie wird anhand zweier progressiver Forscheraufgaben aufgezeigt, wie Beobachtungsraster entwickelt werden können. Im Mittelpunkt steht dabei die Sachanalyse, die zu den aufgabenspezifischen Handlungsmustern führt. Diese werden dann in einem Beobachtungsraster zusammengefasst, welches nach jedem Einsatz von einer Expertengruppe evaluiert und ggf. modifiziert wird, bis die Ergebnisse eindeutig sind. Dieses Vorgehen entspricht nach Schnell et al. (1999) der Verschränkung des rationalen und des empirischen Ansatzes. Die Forschungsfragen, denen in diesem Artikel nachgegangen wird, befassen sich mit der Validität und der Interraterreliabilität dieses Instruments. Die Studie wurde im Rahmen des Probeunterrichts der Talentsuche des PriMa-Projekts durchgeführt. Hier wurden die Beobachtungsraster eingesetzt, um die Unterrichtsmitarbeit der Schüler*innen in der Arbeitsphase während des Mathe-Treffs hinsichtlich der genutzten Handlungsmuster zu dokumentieren. Durch eine Gewichtung der gewonnenen Daten lässt sich eine Aussage über ein mögliches mathematisches Potenzial tätigen. Dieses wird mit den Daten eines Intelligenztestes (CFT 20 R) und eines speziell für dieses Projekt entwickelten Mathematiktests abgeglichen. Zur inhaltlichen Validität lässt sich feststellen, dass sich das Beobachtungsraster als Screeningverfahren einsetzen lässt. Ein besonderes Augenmerk muss allerdings, wie in der Literatur beschrieben, auf Risikogruppen gerichtet werden. Hierfür ist eine verstärkte Sensibilisierung der Lehrkräfte notwendig. Für die Interraterreliabilität ergaben sich zufriedenstellende Werte. Es ist festzustellen, dass die Höhe der Übereinstimmung mit der Eindeutigkeit des Kriteriums im Hinblick auf das Erkennen einer besonderen mathematischen Begabung zunimmt. Diese Erkenntnis ist nicht trivial, da zum Beispiel das Erkennen eines Superzeichens, welches ein starkes Kriterium ist, eine hohe fachliche Kompetenz der Lehrkräfte voraussetzt. Daraus ergibt sich die Konsequenz, dass man für einen fachgerechten Einsatz des Rasters in der Schule die Lehrkräfte sowohl fachlich schulen als auch für mögliche Fehleinschätzungen sensibilisieren sollte.

7.2 Darlegung des eigenen Anteils

Der Artikel wurde in Alleinautorenschaft geschrieben.

7.3 Abdruck der Publikation VI

Pamperien, K. (2021). Konstruktion und empirische Überprüfung der Güte eines Beobachtungsrasters zum Erkennen besonderer mathematischer Begabung im Grundschulalter im Rahmen eines Talentsucheprozesses. *mathematica didactica, 44*(1), o. S., online first

Abdruck genehmigt durch den Verlag Franzbecker.

Konstruktion und empirische Überprüfung der Güte eines Beobachtungsrasters zum Erkennen besonderer mathematischer Begabung im Grundschulalter im Rahmen eines Talentsucheprozesses

KIRSTEN PAMPERIEN, HAMBURG

***Zusammenfassung**: Als ein mögliches Hilfsmittel zur Identifikation besonderer Begabung in Talentsuchen werden Checklisten kritisch diskutiert. Dieser Beitrag handelt von aufgabenspezifischen Checklisten bzw. Beobachtungsrastern, die den Beobachterinnen und Beobachtern Hinweise auf das Vorliegen einer besonderen mathematischen Begabung bei Grundschulkindern geben sollen. Nach einer theoretischen Einführung in den Bereich der mathematischen Begabung und Möglichkeiten der Identifikation im Grundschulalter wird ausgehend von Progressiven Forscheraufgaben die Entwicklung von aufgabenspezifischen Beobachtungsrastern beschrieben. Im Rahmen einer Talentsuche für Drittklässler wird ihre Tauglichkeit überprüft. Es zeigt sich, dass ca. 90 % der teilnehmenden Kinder durch diese Raster so eingeschätzt werden konnten, dass es den weiteren Ergebnissen der Talentsuche entsprach.*

***Abstract**: One possible tool for identifying promising students are checklists. Critical discussions ask whether they are suitable for this task. For this research task specific checklists are used with the aim to give observers hints about heuristics used by mathematical promising students. Firstly, a theoretical introduction into the field of mathematical giftedness and questions about identification of mathematical giftedness at the age of primary grade students is given. Afterwards follows a description of the development of checklists based on progressive research problems. Within the framework of a talent search process for mathematical promising third grade students their suitability is proved. That about 90 % of the students are assessed appropriate supports the assumption that the instrument is suitable as part of an identification process.*

1. Einleitung

In der Hochbegabtenforschung wird für die Talentsuche ein mehrstufiges Verfahren vorgeschlagen, um Fehler bei der Diagnostik so gering wie möglich zu halten (Heller, 2004). Im Rahmen der Maßnahme PriMa[1] an der Universität Hamburg, einem Forschungs- und Förderprojekt für mathematisch begabte Grundschulkinder, werden deshalb besonders begabte Kinder mithilfe einer dreistufigen Talentsuche identifiziert (Nolte, 2004). Der erste Schritt ist ein Probeunterricht mit speziell entwickelten Problemstellungen (Progressive Forscheraufgaben, siehe Kapitel 3.1), die es möglich machen Heuristiken des Problemlösens (Groner & Groner, 1990; Mason, Burton & Stacey, 1992; Polya, 1949) sowie weitere mathematische Techniken wie Hypothesenbildung und deren Überprüfung zu nutzen. Im Anschluss an den Probeunterricht werden ein Intelligenztest sowie ein spezifisch entwickelter Mathematiktest (siehe Kapitel 5.3.3) eingesetzt.

Die im Probeunterricht erzielten Arbeitsergebnisse der Kinder werden mit Hilfe aufgabenspezifischer Kategoriensysteme ausgewertet (siehe Kapitel 3.2). Zusätzlich werden während des Probeunterrichtes Verlaufsprotokolle geschrieben. Diese Informationen werden in Expertengruppen analysiert, so dass zu jedem Kind bereits nach dem Probeunterricht detaillierte Eindrücke dokumentiert vorliegen. Um die Vielfältigkeit der Beobachtungen sowohl für die Protokollierenden als auch die Unterrichtenden auf Hinweise für eine mögliche besondere mathematische Begabung zu fokussieren, werden aufgabenspezifische Beobachtungsraster als Beobachtungshilfen während des Probeunterrichts eingesetzt (Nolte, 2004, 2012c; Nolte & Pamperien, 2017). Diese erwiesen sich als äußerst hilfreich für das Beobachten von mathematischen Tätigkeiten, die ein hohes mathematisches Potenzial bei Grundschulkindern vermuten lassen. Aus diesem Grund wurden diese Raster weiterentwickelt mit der Absicht, sie als ein weiteres Instrument in der Prozessdiagnostik der Talentsuche einzusetzen. Insbesondere könnte sich ein solches Instrument aber auch für einen Einsatz in der Schule eignen, wenn der Umgang mit Heuristiken von Lernenden in Problemlöseprozessen begleitet werden soll. Ein aufgabenspezifisches Beobachtungsraster könnte somit Lehrkräfte darin unterstützen, Potenziale von Kindern besser zu erkennen. Mithilfe eines Aufgabensets, das über einen längeren Zeitraum eingesetzt wird, könnte das Instrument zur systematischen Erfassung der Problemlösefähigkeit von Kindern dienen.

Ziel der vorliegenden Studie ist die Überprüfung der Eignung dieses Instruments. Es soll festgestellt werden, inwieweit dieses Instrument Hinweise auf eine besondere mathematische Begabung geben kann. In diesem Artikel wird ein Schwerpunkt auf kognitive Aspekte gelegt. Des Weiteren soll die Objektivität des Instruments durch den Vergleich von Übereinstimmungen der Bewertungen von verschiedenen Personen im Sinne der Interrater-Reliabilität überprüft werden.

Nach einem kurzen Überblick über die theoretischen Grundlagen bezogen auf Hochbegabung und insbesondere auf mathematische Begabung im Grundschulalter wird der Frage der Identifikation mathematischer Begabung im Grundschulalter nachgegangen und ein spezifisches Beobachtungsraster entwickelt. Basierend auf der Implementation des Instruments wird seine Güte analysiert und anhand von zwei ausgewählten Aufgaben wird die Eignung des Instruments in einer Gruppe von mathematisch interessierten Kindern im Rahmen des Mathe-Treffs der Maßnahme PriMa (des eingangs erwähnten Probeunterrichts) überprüft und diskutiert.

2. Zum theoretischen Rahmen

2.1 Besondere mathematische Begabung

In der theoretischen Diskussion werden die Bezeichnungen „besonders begabt“ und „hochbegabt“ entweder synonym verwendet oder als unterschiedlich hohe Ausprägungsgrade betrachtet, wobei „besonders begabt“, „hochbegabt“ und sogar „höchstbegabt“ als Steigerungen anzutreffen sind (Feger & Prado, 1998). Diskussionen um Begabung befassen sich mit der Frage nach der Bedeutung von angeborenen Fähigkeiten, der Veränderbarkeit von Begabungen und den Faktoren, die zu einer Entfaltung von Begabungen beitragen. Wesentlich wird die aktuelle Diskussion davon beeinflusst, dass Begabungen und das trifft auch auf mathematische Begabungen zu, als Potenziale betrachtet werden, die entfaltet werden müssen. Dazu bedarf es bestimmter Bedingungen von Seiten der Umwelt sowie entsprechender Aktivitäten aufseiten der Schülerinnen und Schüler. Der Ansatz, dass das, was als besondere Begabung bezeichnet wird nicht statisch ist, sondern einem dynamischen Prozess unterliegt, ist die heute gängige Position in der Begabungsforschung (Neubauer & Stern, 2009), die sich auch in der Entwicklung von Modellierungen von Begabung findet. Ausgehend vom Ansatz von (Renzulli, 1978), der Begabung als Resultat der Wechselwirkung zwischen überdurchschnittlichen Fähigkeiten, Task Commitment und Kreativität beschrieb und damit sich zunächst nur auf das Individuum bezog, wurde in späteren Modellen die Wechselwirkung zwischen Umweltfaktoren und Aktivitäten des Individuums aufgenommen (z. B. Gagné, 2004; Heller, 2000; Mönks & Mason, 1993; Renzulli, 2012). Generell können deshalb die Modelle als Einflussfaktorenmodelle bezeichnet werden, die unterschiedlich differenziert die Wechselwirkung verschiedener Faktoren beschreiben. Dazu zählen ebenfalls intrapersonale Faktoren wie Leistungsmotivation und Ausdauer (siehe z. B. Stoeger, Steinbach, Obergrießer & Matthes, 2014). Mit diesem multidimensionalen Ansatz wird Intelligenz als ein Faktor unter anderen betrachtet. Für einen positiven Verlauf des Entwicklungsprozesses sind deshalb passende Anregungen ebenso wichtig, wie das aktive Aufgreifen dieser Anregungen.

In der mathematikdidaktischen Diskussion wurde die allgemeine Diskussion zur Entwicklung von Begabung aufgegriffen und die Spezifik für die Entwicklung mathematischer Begabung herausgearbeitet. Allerdings ist die Forschung zur besonderen mathematischen Begabung in den alten Bundesländern noch relativ jung. In den 1970er Jahren entwickelte man in den USA unter Julian Stanley an der Johns Hopkins University eine erste Talentsuche für Mittel- und OberstufenschülerInnen. In den 1980ern wurde die Forschung auf jüngere Schülerinnen und Schüler ausgeweitet mit dem Ziel, besonders begabte Kinder in einem Akzelerationsprogramm zu fördern (Brody, 2009). Mit der Weltkonferenz zur besonderen Begabung in Hamburg (1983) konnte die in Westdeutschland bis dahin weit verbreitete Ablehnung der Förderung von Hochbegabten als Eliteförderung abgebaut werden (siehe z. B. Rost & Schilling, 2006). Die Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufen begann in Hamburg 1983 unter der Leitung von Karl Kießwetter (1985). Seine Arbeitsgruppe stand in Diskussion mit der Johns Hopkins University. Heute ist die Förderung von besonders begabten Schülerinnen und Schülern nicht nur akzeptiert, sondern auch gefordert (siehe z. B. United Nations Convention on the Rights of the Child in Article 29, https://www.unicef.org/crc/files/Rights_overview.pdf).

Fragen zur besonderen mathematischen Begabung im Grundschulalter wurden zunächst nicht untersucht, weil die Diagnostik mathematischer Hochbegabung im Grundschulalter bedingt durch den geringeren Kenntnisstand mathematischer Inhalte sowie die im Vergleich zu älteren Schülerinnen und Schülern geringeren sprachlichen Kompetenzen als ausgesprochen anspruchsvoll galt (siehe dazu z. B. Käpnick, 1998). Eine Ausnahme stellen die Studien von Krutetskii (1962, 1976) dar, die nach wie vor international als grundlegend für die Erforschung mathematischer Begabung angesehen werden (siehe auch Fritzlar, 2013b). Wichtig ist der Gedanke eines „mathematical cast of mind“, (Krutetskii, 1976), d. h. einem Hineinwachsen in eine fachspezifische Kultur. Bereits sehr früh kann sich das Interesse an mathematischen Inhalten zu einer Fokussierung auf eben solche Inhalte in der Umgebung richten. Krutetskii definiert mathematische Begabung wie folgt:

> Mathematical giftedness is characterized by generalized curtailed and flexible thinking in the realm of mathematical relationships and number and letter symbols and by a mathematical cast of mind. This peculiarity of mathematical thinking results in an increased speed in processing mathematical information (which is related to a replacement of a large volume of information by a small volume, owing to generalization and curtailment) […]. (Krutetskii, 1976, S. 352)

An Einzelfallstudien zeigte er, dass bereits Grundschulkinder rasch zwischen Operationen wechseln können, Inhalte verallgemeinern und eine Verkürzung von Denkprozessen zeigen (ebd. S. 222 f.).

Im deutschsprachigen Raum hat der Ansatz Kießwetters die Forschung zur mathematischen Begabung nachhaltig beeinflusst. Kießwetter geht mit seinem Ansatz nicht von Charakteristika mathematischer Begabung aus, sondern von der Frage, auf welche Weise die Entwicklung mathematischer Begabung angeregt werden kann. Dazu entwickelte er einen Förderansatz, der Schülerinnen und Schülern reichhaltige Angebote zu mathematischen Tätigkeiten bietet und ebenfalls motivationale Aspekte berücksichtigt. Im Unterschied zu Krutetskii, der mathematische Begabung anhand kürzerer Aufgaben überprüfte, betont Kießwetter die Bedeutung der Komplexität der Problemstellungen. In den achtziger Jahren entwickelte er das Förderkonzept „Hamburger Modell“, in dem Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I und II Gelegenheiten zu mathematischen Tätigkeiten in komplexen Problemfeldern gegeben werden. Der mathematische Hintergrund der angebotenen Fragestellungen ist so ausgewählt, dass die Schülerinnen und Schüler möglichst selbstständig und am Kenntnisstand der jeweiligen Klassenstufe orientiert die Aufgaben bearbeiten können.

> Im Zentrum unserer Bemühungen steht, Vorgaben, Anreize und Anregungen für mathematisches Tun zu liefern. Deshalb versuchen wir im elementarmathematischen Bereich, Situationen zu simulieren, wie sie in der mathematischen Forschung auftreten. So wird insbesondere auch die kreative Komponente mathematischer Begabung gefordert und gefördert. Forschungssituationen sind offen. (Kießwetter, 1988, S. 33)

Auf diese Weise entwickeln die Schülerinnen und Schüler in einigen Problemfeldern sogar eigene kleine mathematische Theorien.

Kießwetter beobachtete, dass in solchen Prozessen bestimmte Handlungsmuster (HM) günstig sind, die er später (auch für mathematisch besonders interessierte Grundschulkinder) beschrieb, diese können als Indikatoren für eine mathematische Begabung dienen. Kießwetter (1988, 2006) bezeichnet diese als einen Katalog mathematischer Denkleistungen:

> Organisieren von Material
>
> Sehen von Mustern und Gesetzen
>
> Erkennen von Problemen, Finden von Anschlußproblemen
>
> Wechseln der Repräsentationsebene (vorhandene Muster/Gesetze in „neuen“ Bereichen erkennen und verwenden)
>
> Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten
>
> Prozesse umkehren (Kießwetter, 1988, S. 29)

Für diese Handlungsmuster finden sich teilweise Parallelen bei Krutetskii:

> […] recognizing patterns and rules and finding related problems–corresponds with Krutetskii’s ability to generalize; changing the representation of the problem and recognizing patterns and rules in this new area–corresponds with Krutetskii’s flexibility of mental processes; reversing process–corresponds with Krutetskii’s reversibility of mental processes (Vilkomir and O’Donoghue 2009, p. 192). (Nolte & Pamperien, 2017, S. 122)

Der Bezug zu mathematischen Tätigkeiten wird allgemein in der Forschung zur besonderen mathematischen Begabung betont „success in insight-based problem solving can serve as an indication of mathematical giftedness among schoolchildren“ (Leikin, Leikin, Paz-Bruch, Waisman & Lev, 2017, S. 110).

Wie in der Forschung zur allgemeinen Hochbegabung wird auch im Grundschulbereich mathematische Begabung vornehmlich unter einer dynamischen Perspektive, der Perspektive des Potenzials, betrachtet, so dass das amerikanische National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) von „promising children“ spricht (siehe auch Sheffield, 1999a, 1999b; Singer, Sheffield, Freiman & Brandl, 2016). Wesentlichen Einfluss auf die mathematikdidaktische Diskussion in Deutschland hat eine Studie von Käpnick (1998), in der er spezifische Merkmale von Dritt- und Viertklässlern mit einer potenziellen mathematischen Begabung beschreibt, die neben begabungsstützenden Persönlichkeitseigenschaften u. a. ebenfalls Fähigkeiten zum Umkehren von Gedankengängen, den Umgang mit Mustern und Strukturen und den Wechsel der Repräsentationsebenen umfasst. In verschiedenen Studien wird ebenfalls bestätigt, dass die von Kießwetter beschriebenen Handlungsmuster auch bereits von jüngeren Kindern gezeigt werden können (z. B. Nolte & Pamperien, 2006; Aßmus, 2017).

Die Entwicklung dieser Fähigkeiten wird inzwischen in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2005) für alle Schülerinnen und Schüler als Ziel formuliert, allerdings zeigen die Beispiele, dass die Aufgaben eine deutlich geringere Komplexität als diejenigen, die in der Förderung für mathematisch besonders begabte Schülerinnen und Schüler genutzt werden. Deshalb verweist u. a. Nolte (2012c) darauf, dass die Merkmale im Kontext anspruchsvoller Aufgaben beobachtet werden sollen. Inzwischen hat sich die Forschungslage zur mathematischen Begabung im Grundschulalter deutlich erweitert, so auch bezüglich eines multidimensionalen und dynamischen Ansatzes, der sich in verschiedenen Modellen zur mathematischen Begabung widerspiegelt (vgl. Fritzlar, 2013a, S. 53; Fuchs, 2006, S. 67; Heinze, 2005, S. 39; Käpnick, 2006, 2014; Nolte, 2012c, S. 2 f.). Es kann festgestellt werden, dass mathematische Begabung in der mathematikdidaktischen Forschung gemeinhin als Potenzial beschrieben wird, welches zu seiner Entfaltung sowohl auf günstige Umweltfaktoren als auch auf Aktivitäten von Seiten des Kindes angewiesen ist. Die Entfaltung dieser Begabung lässt sich als ein Prozess bezeichnen, für den ein Kind Interesse an mathematischen Inhalten zeigen muss, der aber auch eine Umgebung braucht, in der dem Kind herausfordernde Angebote gemacht werden. In diesem Sinne folgen wir in unserem Projekt der Definition Noltes (2012d):

> We define children as mathematically gifted when they are able to work on complex problems. In this learning environment they recognize patterns and structures. They are able to exploit these patterns and structures while working the problem. They can work on a high level of abstraction. They construct superordinate structures and grasp coherences. They are able to generalize their findings. So when children show special patterns of action in challenging and complex fields of problems we suppose high mathematical talent. (Nolte, 2012d, S. 157)

2.2 Fragen zur Identifikation mathematischer Begabung

Im Sinne der bisherigen Ausführungen soll also eine Identifikation besonderer mathematischer Begabung anhand von Merkmalen, wie sie in der Literatur beschrieben werden (siehe z. B. Aßmus, 2018; Käpnick, 1998; Krutetskii, 1976), erfolgen. Um die Fehlerrate so gering wie möglich zu halten, schlägt Heller (2000, S. 252, in Bardy, 2007, S. 99) ein mehrstufiges Identifikationsverfahren vor, an dessen Anfang ein Screeningverfahren mit Checklisten steht, gefolgt von Begabungstests. Sukzessive wird die Anzahl der ausgewählten Schülerinnen und Schüler reduziert, bis am Ende des Verfahrens die Identifikation der besonders begabten Kinder steht.

Ein mehrstufiges Verfahren wird deshalb auch in der Talentsuche des PriMa-Projekts vorgenommen. Im ersten Teil, dem Probeunterricht der Talentsuche (zu dem unter dem Namen Mathe-Treff für Mathe-Fans eingeladen wird), werden immer wieder Kinder mit einem hohen Potenzial entdeckt, die später aufgrund der beschränkten Anzahl der für die Förderung zur Verfügung stehenden Plätze nicht in die universitäre Förderung aufgenommen werden können. In Hamburg haben diese Kinder zwar die Möglichkeit an einem der vielen schulischen Mathe-Zirkel teilzunehmen, allerdings verweisen Beobachtungen aus der Talentsuche darauf, dass neben der Förderung in speziell zusammengestellten Gruppen die Förderung im Rahmen des Schulunterrichts eine besondere Bedeutung gewinnt. Wie bereits in der Einleitung angesprochen, könnte hier den Beobachtungsrastern zur gezielten Beobachtung der mathematischen Tätigkeiten der Kinder eine besondere Rolle zukommen. Insbesondere unter der Perspektive eines breiten Inklusionsbegriffs ist es für Lehrkräfte wichtig, besondere Begabungen erkennen und darauf reagieren zu können. Wie weit Lehrkräfte dazu in der Lage sind, wird immer wieder diskutiert (Hany, 1998). In den letzten Jahren werden allgemeine Dimensionen des professionellen Lehrerhandelns verstärkt diskutiert (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2008). Auch wenn es inzwischen mehr Studien zum Lehrerprofessionswissen im Kontext besonderer mathematischer Begabung gibt, sind für das Erkennen und Fördern besonderer mathematischer Begabung viele Fragen noch offen (siehe z. B. Singer, Sheffield, Freiman & Brandl, 2016). Eine entscheidende Rolle spielt das Wahrnehmen (Noticing) und das Deuten von Ereignissen im Unterricht (Es & Sherin, 2002), das im Kontext besonderer mathematischer Begabung u. a. eine hohe mathematische Kompetenz und eine Balance zwischen dem verlangt, was in einer leistungsheterogenen Gruppe als angemessene Herausforderung bezeichnet werden kann.

Hier soll zunächst die Rolle von geeigneten Maßnahmen für das Erkennen einer Begabung diskutiert werden. Einen ersten Ansatz stellen günstige substanzielle Aufgabenformate dar, die in der Grundschule auch unter der dem Stichwort „natürliche Differenzierung“ (siehe z. B. Krauthausen & Scherer, 2007) zu finden sind und die sich u. a. dadurch auszeichnen, dass Kinder unterschiedlich tief in einen mathematischen Kontext eindringen können. Damit bieten diese Aufgaben erste Möglichkeiten, Hinweise für ein besonderes Potenzial zu finden.

Wenn sich aber trotz differenzierender Angebote besondere Begabungen nicht in den Leistungen der Schülerinnen und Schüler zeigen, fällt es Lehrkräften schwer, eine besondere mathematische Begabung im Unterricht zu erkennen. Preckel (2010) schlägt vor, weitere Daten zu erheben, z. B. Schulleistungsdaten.

Es zeigt sich jedoch immer wieder, dass es problematisch ist, Schulleistungen als Ausgangspunkt für die Erfassung eines Potenzials zu nehmen. Dies machen z. B. die Diskussionen um Underachiever deutlich (siehe z. B. Hanses & Rost, 1998).

Obwohl allgemein anerkannt ist, dass Intelligenztests sich dazu eignen, den Schulerfolg zu prognostizieren (Preckel, 2010; Rost, 2000), ist zu fragen, ob damit eine besondere mathematische Begabung erfasst werden kann.

Nolte (2011, 2012b) zum Beispiel konnte anhand von mehr als 1600 Schülerinnen und Schülern zeigen, dass die Ergebnisse eines Intelligenztests während der Talentsuche nur schwach mit den Ergebnissen eines Mathematiktests, der für die Talentsuche im Rahmen von PriMa entwickelt wurde, korrelieren. Dies stimmt mit Aussagen von Preckel (2010) überein.

> Intelligenztests alleine können damit lediglich nur ein, wenn auch zentraler Baustein in der Hochbegabungsdiagnostik sein. (Preckel, 2010, S. 40)

Anhand von Checklisten wurde versucht, Lehrkräften und Eltern eine Hilfestellung zum Erkennen eines besonderen Potenzials zu geben. Um deren Einsatz zur Nominierung von besonders begabten Kindern besteht bereits seit vielen Jahren eine breite Diskussion (Cao, Jung & Lee, 2017; Feger & Prado, 1998). Diskutiert wird der Nutzen von Checklisten als Ergänzung zu anderen Verfahren und zwar vor allem deshalb, weil sich für Checklisten

> […] die prinzipielle Frage nach deren Gültigkeit (Validität) und somit auch der Zuverlässigkeit dieser Ratings im Vergleich zu objektiven Testurteilen stellt. (Heller, Reimann & Senfter, 2005, S. 19)

Preckel und Vock (2013) sehen den alleinigen Einsatz von Checklisten zum Erkennen von besonderer Begabung kritisch.

> Checklisten verbessern die Güte von Lehrer- oder Elternnominationen offensichtlich nicht, können jedoch für Merkmale sensibilisieren und in Kombination mit einem systematischen Training zu einer Verbesserung des Erkennens Hochbegabter beitragen. (Preckel & Vock, 2013, S. 135)

Allerdings stimmen sie mit Heller et al. (2005) überein, dass Checklisten eine „wertvolle Ergänzung“ innerhalb eines Verfahrens sein können (Preckel & Vock, 2013, S. 135).

Preckel und Vock (2013) kritisieren, ebenso wie Urban (1990), dass die in Checklisten aufgeführten Merkmale in der Regel sehr allgemein gehalten sind und die vagen Formulierungen keine eindeutigen Aussagen über besondere Begabungen zulassen, denn überwiegend gehen sie nicht differenziert genug auf kognitive Komponenten des Problemlösens ein. In der Mathematikdidaktik finden sich interessante Ansätze zur Kategorisierung anhand verschiedener Aufgaben (siehe z. B. Günther, 2018, S. 68 f.; Nolte & Pamperien, 2017). Wenn sie unter der Perspektive des Erkennens eines besonderen Potenzials eingesetzt werden sollen, ist jedoch zu unterstreichen, dass sie zwar Hinweise geben können, aber keine Diagnose durch eine Expertin oder einen Experten ersetzen (Perleth, 2010). Für den Unterricht betonen Heller et al. (2005) und Hany (1994) die besondere Funktion von Checklisten im Unterschied zu einer ausführlichen Diagnostik unter Verwendung verschiedener Tests:

> Die Identifizierung besonders befähigter Schülerinnen und Schüler sollte vorrangig dazu dienen, die individuellen Lernbedürfnisse zu erfassen, um darauf aufbauend geeignete Fördermaßnahmen innerhalb und / oder außerhalb des Regelunterrichts ergreifen zu können. (Heller et al., 2005, S. 102)

Unter der oben beschriebenen Perspektive bieten bereits Checklisten „Hinweise für die genaue Abstimmung zwischen Entwicklungsverlauf und Umweltangeboten“ (Hany, 1994, S. 4).

Checklisten, die im Sinne eines Screeningverfahrens zum Erkennen mathematischer Begabung eingesetzt werden, sollten sich an dem orientieren, was besondere mathematische Begabung kennzeichnet. Im Umgang mit herausfordernden Problemstellungen zeigen die Kinder, wie sie mit abstrakten und komplexen Inhalten umgehen können. Darüber hinaus ist es notwendig, spezifischere Kompetenzen, die in anspruchsvollen mathematischen Lernprozessen wirksam werden, zu betrachten. Allgemeine Checklisten zur Unterrichtsbeobachtung und auch zu spezifischem mathematischem Wissen wurden z. B. im Projekt PIKAS vom DZLM (2010) vorgeschlagen und finden sich auch in verschiedenen Schulbüchern oder Handreichungen wie „Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule“ (2003). Diese Checklisten sind häufig sehr allgemein gehalten oder beziehen sich in der Regel nur auf Einzelbeobachtungen. Eine genaue Auseinandersetzung mit der Vielfältigkeit von Checklisten würde den Rahmen dieses Artikels sprengen.

Diese Überlegungen verweisen auf die Problematik, die mit der Identifikation einer besonderen Begabung verbunden ist. Sie zeigen, dass eine Verknüpfung verschiedener Maßnahmen notwendig ist. Da Anforderungen im Regelunterricht oft einen Deckeneffekt aufweisen, wenn es um das Zeigen eines hohen mathematischen Potenzials geht, ist es sinnvoll, Schülerinnen und Schülern Lernumgebungen anzubieten, die ein Arbeiten an komplexen Problemstellungen ermöglichen (siehe z. B. Kießwetter, 1988, 2006). Auf diesem Ansatz basiert die Entwicklung des im Folgenden dargestellten Beobachtungsrasters.

3. Beschreibung des Beobachtungsrasters

3.1 Progressive Forscheraufgaben

In Fallstudien wurde der Einsatz von komplexen Aufgabenstellungen, die sich für die Förderung mathematisch besonders begabter Grundschulkinder eignen und die sich an den Kießwetter`schen Handlungsmustern orientieren, auch im Schulunterricht bzw. in Einzelarbeit überprüft (Nolte & Kießwetter, 1996; Nolte & Pamperien, 2006; Nolte & Pamperien, 2017; Pamperien, 2008). Für die Förderung mathematisch besonders begabter Kinder wurden im PriMa-Projekt an der Universität Hamburg sogenannte Progressive Forscheraufgaben (ProFa) entwickelt. Diese Art von Aufgaben, an denen die Kinder etwa zwei Schulstunden ein Problem bearbeiten, bieten die Möglichkeit, Muster und Strukturen zu erkennen, zu argumentieren, zu verallgemeinern, Analogien zu erkennen und Transfer vorzunehmen. Dies alles sind Aspekte, die in mathematischen Problemlöseprozessen entscheidend zum Erfolg beitragen. Gleichzeitig erfordern die ProFa keine Vorkenntnisse, die über die Klassenstufe hinausgehen und können auf sehr einfache Weise, z. B. durch Zählen, aber auch durch anspruchsvollere mathematische Denkweisen, wie das Nutzen von Mustern und Strukturen, bearbeitet werden. Wesentlich für den Erfolg der ProFa ist die Art des Umgangs damit, getragen vom Spannungsfeld zwischen Selbständigkeit und Unterstützung, aber auch in Verbindung mit dem gemeinsamen Austausch über Herangehensweisen und Entdeckungen während der Plenumsphasen (Nolte & Pamperien, 2010).

Mit dem Einsatz dieser ProFa in seinen Fördergruppen folgt PriMa dem Ansatz des maßgeblich von Kießwetter entwickelten „Hamburger Modells“ zur Begabtenförderung (Kießwetter, 1988). Dieser unterscheidet sich von Ansätzen der systematischen Heranführung an Problemlösekompetenzen (siehe z. B. Bruder, 2014), da er im Kießwetter`schen Sinne implizit durch die Bearbeitung der Problemfelder die Anwendung von Heurismen ermöglicht und Handlungsmuster gezeigt, ggf. erweitert aber auch erworben werden können. Fallstudien zeigen, dass Schülerinnen und Schüler mit zunehmender Erfahrung in solchen Problemfeldern die Verfügbarkeit über Heurismen und Handlungsmuster weiterentwickeln (Nolte & Pamperien, 2014). Für die Grundschule muss es einige Eingrenzungen geben, aber die Grundidee des propädeutischen forschenden Lernens wird auch hier verfolgt (Nolte & Pamperien, 2010).

Im regulären Unterricht bieten ProFa eine Chance, erfolgreich und selbständig an einem innermathematischen Problem zu arbeiten. Damit unterstützen sie die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen, wie sie z. B. im Hamburger Bildungsplan Mathematik (2011) oder den Bildungsstandards (2005) aufgeführt werden, zu denen auch das Problemlösen gehört. Die Forderung, derartige Aufgaben im Unterricht zu behandeln, ist nicht neu (Bauersfeld, 2000; Winter, 1984; Wittmann & Müller, 1990, 1992). Allerdings unterscheiden sich die ProFa hinsichtlich ihrer Komplexität und der Möglichkeit, mit weiterführenden Fragen tiefer in den mathematischen Kontext einzudringen. Das übergeordnete Lernziel der Progressiven Forscheraufgaben ist nicht nur das Lösen eines bestimmten Problems, sondern vielmehr liegt es in der langfristig zu erzeugenden Haltung des eigenen mathematischen Denkens, welche als ein Aspekt des „mathematical cast of mind“ nach Krutetskii (1976) aufgefasst werden kann.

Die Bearbeitung von ProFa in Regelklassen ist ähnlich dem Einsatz von Lernumgebungen basierend auf natürlicher Differenzierung (Krauthausen & Scherer, 2014; Hengartner, Hirt & Wälti, 2006) auf unterschiedlichen Niveaus möglich. Damit können diese Art von Aufgaben auch von Kindern mit Lernstörungen bearbeitet werden (Scherer 1995, 1996) und fordern gleichzeitig besonders interessierte und leistungsfähige Schülerinnen und Schüler heraus. Es hat sich gezeigt, dass auf diese Weise nicht nur die Entwicklung von Problemlösekompetenzen gefördert wird, sondern dass Kinder auch Handlungsmuster zeigen können, die auf ein besonderes mathematisches Potenzial hinweisen (Nolte & Pamperien, 2017; Pamperien, 2008).

Bedingt durch die Eigenschaft der ProFa unterschiedliche Zugänge zu den Fragen zu ermöglichen und Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben unterschiedlich tief in den mathematischen Kontext einzudringen, kommt der gemeinsamen Besprechung von Vorgehensweisen und Ergebnissen eine besondere Bedeutung zu. Sowohl im Regelunterricht als auch in den Fördergruppen ist es deshalb wichtig zu wissen, was die Kinder bereits herausgefunden haben, wie weit sie gekommen sind und welche Wege sie genommen haben. Es bietet sich an, den Problembearbeitungsprozess durch ein Beobachtungsraster zu begleiten (Nolte, 2012a). Dieses enthält Beschreibungen spezifizierte Handlungsmuster nach Kießwetter sowie prozessbezogene Kompetenzen, wie z. B. das Begründen. Im Sinne von möglichen kindlichen Lösungsräumen (siehe dazu Leikin, 2007) benötigt man für die Entwicklung des Rasters ein Wissen um verschiedene Vorgehensweisen, Lösungen und deren Bewertung hinsichtlich einer effizienten Arbeit im Sinne Krutetskiis und Kießwetters.

3.2 Entwicklung des Beobachtungsrasters

3.2.1 Zu den Beobachtungen im Probeunterricht in der Talentsuche des PriMa-Projekts

Im Probeunterricht werden die Kinder mit den oben beschriebenen ProFa konfrontiert. Ziel ist es, durch eine prozessbegleitende und auf kognitive Komponenten des Problemlösens fokussierte Beobachtung der Kinder im Bearbeitungsprozess erste Hinweise auf ein besonderes mathematisches Potenzial zu erhalten.

Die Leistungen der Kinder zu beurteilen, kann nicht allein ergebnisorientiert erfolgen, da für die Qualität der Leistung die Problemlösestrategien der Kinder entscheidend sind. Vor allem die Berücksichtigung der Vielfalt an möglichen Lösungswegen ist eine besondere Herausforderung für Lehrkräfte ebenso wie die damit verbundene prozessbezogene Bewertung dieser Leistungen der Kinder. Anspruchsvoll wird diese Bewertung durch die Komplexität der Problemstellungen und eben der daraus resultierenden Vielfalt an Herangehensweisen. Es ist nicht immer einfach, die Verbalisierungen der Kinder zu verstehen und Fragen und Vorgehensweisen einordnen zu können. Die Begleitung der Kinder in diesem Prozess erfordert besondere Expertise, da diese auf dem Durchdringen des kindlichen Lösungsraums basiert, der nicht immer eindeutig zu interpretieren ist. Es ist zudem erforderlich, mit dem mathematischen Kontext, in dem die Aufgabe eingebettet ist, vertraut zu sein. Da viele der ProFa sich für einen Einsatz über die Grundschule hinweg eignen (siehe z. B. Kießwetter, 2006), geht auch der mathematische Hintergrund über den in der Grundschule üblichen hinaus. Im Kontext der TEDS-FU Studie zeigte sich, dass die mathematische Kompetenz von Lehrkräften einen starken Einfluss auf die Qualität des Unterrichts hat – insbesondere auf die Begleitung der Lösungsprozesse.

> Based on the description of the competence levels in Sect. 3, it can be assumed that teachers with MCK at the lowest and average competence levels will not be able to recognize or understand creative students' solutions and will not be able to support these students' mathematical learning processes. In addition, teachers who reach only the lower competence level in MPCK will not be able to offer learning opportunities for high-achieving and creative students, to develop different representations for a mathematical problem or choose different teaching strategies for their heterogeneous student body. (Hoth, Kaiser, Busse, Döhrmann & Blömeke, 2017, S. 115)

Daher ist es wichtig, dass sich auch die Lehrenden des Mathe-Treffs intensiv mit den Aufgaben auseinandersetzen und Hilfestellungen erhalten, um die Qualität des Screeningverfahrens zu sichern. So wurden für die Auswertung der Arbeit der Kinder zum einen Auswertungsraster für die schriftlichen Dokumente und zum anderen Beobachtungsleitfäden als Hilfsmittel für die Protokollantinnen und Protokollanten sowie die Unterrichtenden entwickelt, die operationalisiert die wesentlichen aufgabenspezifischen Komponenten in den Problemlöseprozessen erfassen.

Aus diesen Instrumenten wurden aufgabenspezifische Beobachtungsraster entwickelt, die als Checklisten während des Unterrichtsgeschehens eingesetzt werden.

Die Entwicklung der Raster erfolgte in einem mehrschrittigen Verfahren und war theoriegeleitet. In einem ersten Schritt wurde durch eine Expertengruppe eine Kategorisierung theoretisch erwarteter Denkleistungen, die in Form einer Sachanalyse durchgeführt wurde, vorgenommen. Mit dem so entstandenen Kategoriensystem wurde zunächst im Sinne der qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2016) anhand der schriftlichen Bearbeitungen der Kinder überprüft, inwieweit das deduktiv hergeleitete Kategoriensystem induktiv erweitert werden musste. Zeitgleich wurden die einzelnen Kategorien unter Rückgriff auf die Kriterien nach Kießwetter daraufhin untersucht, wieweit sie Hinweise auf eine besondere Begabung geben können. Die Ergebnisse dieser beiden Analyseschritte führten zu weiteren Anpassungen des Kategorienschemas, so dass die ausgewählten Kategorien sich daran orientieren, ob ihr Auftreten bei der Bearbeitung der ProFa Hinweise auf eine mathematische Begabung geben kann. Im Hinblick auf die Anforderungsbereiche aus den Bildungsstandards der KMK (2005) sind die Kategorien unterschiedlich gewichtet. So werden einfache Anwendungen des Wissens anders gewichtet als Begründungen. Wesentlich ist, dass diese Kategorien zum einen Hinweise auf ein besonderes mathematisches Potenzial geben, zum anderen den Problemlöseprozess eines jeden Kindes beschreibbar machen können. Weiterhin ist das Instrument nicht statisch, sondern kann an bestimmte Fragestellungen der Lehrkraft angepasst werden, z. B. ob Kinder zum Transfer einer Idee in der Lage sind oder auch um Verhaltensweisen wie Partizipation im Unterricht ergänzt werden. Am Beispiel der Dreiecksaufgabe (Pamperien, 2004), die im Mathe-Treff der Talentsuche eingesetzt wurde und vielfältige Muster bei der Bearbeitung zulässt, wurden erste Vergleiche zwischen ausgesuchten Kriterien und den Ergebnissen der weiteren Testungen (siehe Kapitel 5.3) durchgeführt und daraus geschlossen, dass sich diese dazu eignen, eine erste Prognose über ein mathematisches Potenzial abzugeben. Diese Vermutungen wurden für weitere aufgabenspezifische Beobachtungen erhärtet. Allerdings ist die Beobachtung der Bearbeitung einer Aufgabe allein nicht aussagekräftig genug. Erst über ein Set von Aufgaben lässt sich eine Prognose treffen. Im Mathe-Treff bearbeiten die Kinder insgesamt drei Aufgaben. Die Ergebnisse dieser ersten Beobachtungen lassen erwarten, dass anhand bestimmter Kriterien entwickelte Beobachtungsraster den Talentsucheprozess ergänzen können und bei entsprechender Validität auch in anderen Settings wie z. B. im Mathematikunterricht der Grundschule zur Identifikation mathematisch begabter Schüler und Schülerinnen erprobt werden könnten. Wieweit sich das Instrument dazu eignet, valide Aussagen zu machen, soll in dieser Studie zunächst anhand von zwei Aufgaben als erster Hinweis auf Validität überprüft werden.

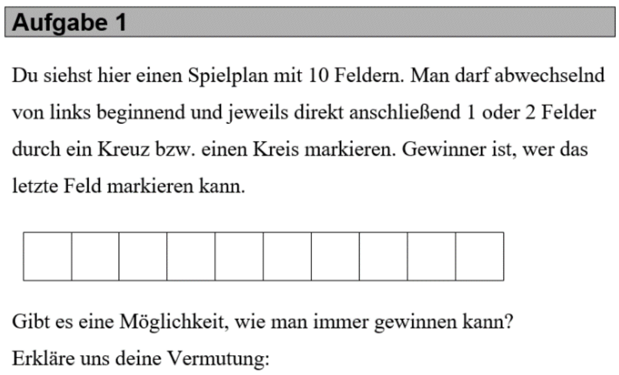
3.2.2 Das Beobachtungsraster zum NIM-Spiel

Wie oben beschrieben, ist es für die Entwicklung eines Beobachtungsrasters für ProFa wesentlich, zunächst eine Sachanalyse durchzuführen. Hieraus ergibt sich ein zu erwartender kindlicher Lösungsraum, der durch Beobachtungen im Bearbeitungsprozess ergänzt wird. Es werden daraus aufgabenspezifische Handlungsmuster abgeleitet, die im Beobachtungsraster festgehalten werden.

Die Sachanalyse des NIM-Spiels (s. Abb. 1) in der vorliegenden Form ergibt Folgendes:

Da es sich hierbei um eine vereinfachte Variante des bereits 1902 auf mögliche Gewinnstrategien von Bouton untersuchten Problemfeldes handelt, ist bekannt, dass dies ein strategisches Spiel ist, d. h. es erfüllt u. a. folgende Eigenschaften (vgl. Berlekamp, Conway & Guy, 1985, S. 16 und S. 48):

Das NIM-Spiel:


Aufgabe 1

Du siehst hier einen Spielplan mit 10 Feldern. Man darf abwechselnd von links beginnend und jeweils direkt anschließend 1 oder 2 Felder durch ein Kreuz bzw. einen Kreis markieren. Gewinner ist, wer das letzte Feld markieren kann.

Gibt es eine Möglichkeit, wie man immer gewinnen kann?
Erkläre uns deine Vermutung:

Abb. 1: Aufgabenblatt zum NIM-Spiel in der Version von 2004

- Das Spiel wird von zwei Personen gespielt (Schwarz/Weiß).
- Beide Personen verfolgen völlig konträre Interessen (Nullsummenspiel), d. h. der Gewinn der einen ist gleich dem Verlust der anderen Person.
- Endloses Spielen ist ausgeschlossen.
- Es wird stets abwechselnd nach festen Spielregeln gezogen und es gibt keinen Zufallseinfluss.
- Es liegen stets die vollständigen Informationen über den aktuellen Spielstand vor, d. h. es gibt keine verborgenen Informationen.
- Durch die Aufgabenvorgabe ergibt sich, dass die Positionen alle bestimmt sind, d. h.:
- Schwarz kann unabhängig von den Zügen von Weiß gewinnen (Gewinnposition für Schwarz).
- Weiß kann unabhängig von den Zügen von Schwarz gewinnen (Gewinnposition für Weiß).

Somit müssen die Spieler einer bestimmten Strategie folgen, um sicher gewinnen zu können (vgl. Gnirk, Homann & Lubeseder, 1970, S. 50 ff.; Müller & Wittmann, 1977, S. 230 ff.; Scherer, 1999, S. 154).

Diese Strategie bezieht sich hier auf das vorgegebene Intervall von 1-2, d. h. es dürfen ein oder zwei Felder markiert werden und die Zielzahl $z = 10$, d. h. das zehnte Feld soll erreicht werden (vgl. Abb. 1). Der Rest bei der Division von 10 durch 3 beträgt 1. Es sind 10 und 1 kongruent modulo 3. Daraus ergibt sich für Aufgabe eins die Notwendigkeit, mit einem Feld zu beginnen und im weiteren Verlauf des Spiels stets den Zug des Gegenspielers zu drei zu ergänzen. Somit ist das erste Spielfeld in diesem Fall auch das erste Siegerfeld. Der Abstand zwischen den Siegerfeldern beträgt jeweils drei. Dies ergibt sich aus dem vorgegebenen Intervall (1-2). Die weiteren Siegerfelder sind die Felder 4,7 und 10. Es wird also die Länge des Spielfeldes betrachtet und diese Zahl wird durch die Summe der ersten und der letzten Zahl des Intervalls dividiert, daraus ergibt sich das erste Siegerfeld. Ist der Rest der Division 0, darf man nicht beginnen. In allen Aufgaben wird im weiteren Verlauf zunächst nur eine Dimension verändert, um die Kinder zum Erkennen weiterer Strategien oder zu Verallgemeinerungen zu führen.

Als feste Vorgabe bleibt bei dieser Aufgabe zunächst die Anzahl der möglichen Markierungen. Die Dimension der Veränderung ist die Länge des Spielfeldes. Je nach Anzahl der Felder insgesamt und nach der Anzahl der bei einem Zug zu besetzenden Felder, die eine weitere Veränderung darstellen könnte, kann die erste Strategie vollständig weiterverwendet oder an die neue Situation angepasst werden. Die erste Frage bezieht sich auf mögliche Siegerfelder. Der Grad der Herausforderung dieser Aufgabenstellung ergibt sich vor allem daraus, ob und inwieweit die Kinder in diesem Prozess angeleitet werden. Darüber hinaus ermöglichen Dimensionen der Veränderung eine Hinführung zur Verallgemeinerung. Diese ist nur möglich, wenn die Kinder bestimmte Strukturen, in diesem Fall die Gruppierung von drei aufeinanderfolgenden Feldern, erkannt haben. Zudem spielt das Erkennen der Bedeutung des Anfangs eine Rolle. Da 1 das erste Siegerfeld ist, ist es notwendig zu beginnen. Wäre hingegen die Länge des Feldes durch 3 ohne Rest teilbar, sollte man nicht beginnen. Weitere mögliche Dimensionen der Veränderung wären z. B. eine Veränderung des vorgegebenen Intervalls sowie der Form des Spielfeldes. Daraus wird ersichtlich, dass sich innerhalb einer Problemstellung verschiedene Fragestellungen ergeben, die aus einer Ausgangssituation die Entwicklung eines Problemfeldes ermöglichen. Dies ist ein besonderes Charakteristikum der ProFa. Verbunden mit der Möglichkeit immer wieder Zwischenerfolge zu erfahren, stabilisiert sich so die Prozessmotivation. Dies ist wichtig, da die Aufgabenbearbeitung ein für die Schule ungewöhnliches Durchhaltevermögen erfordert (vgl. Pamperien, 2008).

Hier eine Auswahl der Beobachtungen, die an der Universität bei den Kindern in der Fördergruppe gemacht werden konnten:

- Rekursives Vorgehen
- Organisation von Material, z. B. durch Spielfeldverkürzung
- Erkennen der Bedeutung des Anfangs
- Nutzen von Mustern und Strukturen, z. B. Dreiergruppierungen
- Bewusstes Ergänzen zu drei (Superzeichenbildung)
- Erkennen von Siegerfeldern
- Belegen der Siegerfelder mit Zahlen
- Begründung von Teilstrategien
- Vollständige Begründung des Lösungsweges
- Analogiebildungen
- Betrachtung von Fallunterscheidungen
- Eigenständige Erweiterung des Suchraumes, z. B. längere Spielfelder
- Zurückgreifen auf bisherige Informationen
- Nutzen von Tabellen

Beispiele für Beobachtungen, die sich auf die Mitarbeit im Unterricht und auf intrapersonale Variablen beziehen, die zusätzlich notiert werden können:

- Aktive Mitarbeit im Plenum
- Bezugnahme auf die Äußerungen anderer Kinder
- Anregung durch Musterlösungen
- Motivation
- Annahme von Hilfe
- Durchhaltevermögen
- Arbeitsverhalten

Hieraus ergab sich ein anfänglich sehr komplexes Kategoriensystem, welches mittels Expertenberatung auf die wesentlichen Punkte reduziert wurde. Diese werden in Abgrenzung von Verhaltensbeobachtungen alle als Handlungsmuster (HM) bezeichnet. Sie wurden in Anlehnung an die Bildungsstandards (KMK, 2005) und entsprechend eines Expertenratings unterschiedlich gewichtet. Handlungsmuster, die dem Anforderungsbereich II entsprechen, werden mit vier Punkten bewertet, hierzu gehört das Erkennen von lokalen Mustern und Strukturen, so z. B. das Erkennen von Siegerfeldern und Gruppierungen. Anforderungen aus dem Bereich III werden mit acht Punkten bewertet. Weniger Punkte werden für Beobachtungen gegeben, die zu den höheren Anforderungsbereichen hinführen.

Es ergab sich das in Abb. 2 dargestellte Beobachtungsraster:

	Name 1	Name 2
HM1: Arbeitet rekursiv (von hinten abzählend) **1 P**		
HM2: Verwendet 3er Gruppierungen **1P**		
HM3: Superzeichen (3er Muster) **8P**		
HM4: Erkennt die Bedeutung des Anfangs **4P**		
HM5: Erkennt Siegerfelder, jeweils **1P**		
HM6: Begründet Teilstrategie **4P**		
HM7: Kann seine richtige Lösungsstrategie vollständig erklären **8P**		

Abb. 2: Beobachtungsraster zum NIM-Spiel

Im Folgenden werden die kognitiven Komponenten in Bezug zu den Merkmalen, die man für die Identifikation von mathematisch potenziell begabten Kindern im Grundschulalter heranzieht, näher erläutert. Diese Erläuterungen sollen das Erkennen der spezifischen Handlungsmuster (HM) unterstützen.

HM 1: Arbeitet rekursiv (von hinten abzählend) (1P)

Prozesse umkehren

Mögliche Vorgehensweisen: Zunächst spielen die Kinder, d. h. sie versuchen, die Aufgabe von vorn zu lösen. Diese Vorgehensweise kann sich im Bearbeitungsprozess verändern. Zu beobachten, dass sich die Strategie verändert, kann für eine detaillierte Prozessanalyse relevant sein, aber zunächst geht es nur um die Beobachtung, ob das Kind zu irgendeinem Zeitpunkt eine rekursive Herangehensweise zeigt.

HM 2: Verwendet Dreier-Gruppierungen (1P)

Muster und Strukturen

Mögliche Vorgehensweisen: Um sich das Feld zu strukturieren, kann man sich Teilbereiche des Spielfeldes ansehen. Diese Einteilungen können den Beobachtern zunächst nicht zielgerichtet oder zufällig erscheinen, z. B. die Teilung des Spielfeldes in zwei Hälften. Auch hier verändert sich häufig die Vorgehensweise. Mit dem Erkennen des dritten Siegerfeldes betrachten die Kinder häufig die letzten vier Felder, markieren diese als Einheit und versuchen, diese Struktur auf das 10er-Feld zu übertragen. Nach weiteren Spielzügen kann man häufig beobachten, dass das Feld in Dreiergruppierungen unterteilt wird, z. B. weil man ein oder zwei Felder besetzen darf. Diese Beobachtung kann zur Superzeichenbildung führen, ist aber nicht gleichbedeutend mit dem Erkennen eines Superzeichens. Die Dreier-Gruppe fällt also in den Bereich Muster und Strukturen. Die Dreiergruppierung kann aber auch zufällig geschehen.

HM 3: Superzeichen (3er Muster) (8P)

Superzeichen (übergeordnetes Muster)

Mögliche Vorgehensweisen: Die Ergänzung zu drei wird explizit genannt, ist so markiert, dass diese Interpretation wahrscheinlich ist oder es ist möglich zu erkennen, dass dieser Strategie folgend gespielt wurde. Es wurde also bewusst zu drei ergänzt. Das Erkennen eines Superzeichens ist ein deutlicher Hinweis auf ein mathematisches Potenzial. Superzeichen werden aus einzelnen Einheiten gebildet und bewusst genutzt, um zur Lösung zu gelangen. In diesem Fall ist es die Ergänzung zu drei, die als Zug gemacht werden muss, um das Spiel sicher zu gewinnen.

HM 4: Erkennt die Bedeutung des Anfangs (4P)

Muster und Strukturen

Mögliche Vorgehensweisen: Durch wiederholtes Spielen kann den Kindern auffallen, dass der Spieler, der beginnt, stets gewinnt. Wenn Kinder erkennen, dass man anfangen muss, um zu gewinnen, heißt dies noch nicht, dass sie auch die Bedeutung, d. h. den Bezug zur Spielfeldlänge erkannt haben. Zur vollständigen Durchdringung der Gewinnstrategie ist es notwendig, die Bedeutung des Anfangs zu verstehen und dessen Abhängigkeit zur Spielfeldlänge herzustellen. Eine besondere Leistung stellt es dar, wenn die Kinder über den Bezug zum 10er-Feld die Bedeutung des Anfangs erkannt haben.

HM 5: Erkennt Siegerfelder (max. 4P)

Muster und Strukturen

Mögliche Vorgehensweisen: Nach einigen Spielen erkennen die meisten Kinder, dass man das siebte Feld besetzen muss, um zu gewinnen. Diese partielle Einsicht führt noch nicht automatisch zum Erkennen der weiteren Siegerfelder. Durch Strukturierungen oder auch das Belegen der Felder mit Zahlen kann es gelingen, das vierte Feld als Siegerfeld zu erkennen und evtl. auch die gesamte Struktur zu erfassen.

HM 6: Richtige Begründung für eine Teilstrategie (4P)

Muster und Strukturen, Kommunizieren und Argumentieren

Erklärungen auf der beschreibenden Ebene können Begründungen für Teilstrategien sein. Es fällt Kindern dieser Altersgruppe häufig noch schwer, ihre Gedanken gut nachvollziehbar zu formulieren. Der Versuch des Kommunizierens und des Argumentierens in für sie komplexen Problemstellungen sollte auf jeden Fall positiv bewertet werden. Es genügt nicht, wenn das Kind die Beobachtung nennt, dass man die drei letzten Felder genau betrachten muss. In diesem Beispiel wäre zur Begründung eine Fallunterscheidung notwendig. Die Erklärung der Vorgehensweise an sich ist für ein Grundschulkind schon eine besondere Leistung. Die richtige, vollständige Erklärung der Gewinnstrategie ist ein wichtiger Hinweis auf eine mathematische Begabung. Aber auch der Ansatz, etwa im Sinne eines Strategiekeimes (Stein, 1996), kann einen Hinweis auf ein besonderes mathematisches Potenzial geben, da Grundschulkinder, insbesondere auch aus Risikogruppen, nicht immer in der Lage sind, ihre Gedanken verständlich zu versprachlichen.

HM 7: Formuliert richtige Begründung für die Lösungsstrategie (8P)

Vgl. HM 6

Die anderen Beobachtungskriterien wurden vernachlässigt, weil das Raster zunächst nur auf die für mathematische Begabung wesentlichen kognitiven Komponenten des Problemlösens abzielen sollte, da in einem Screeningverfahren nur begrenzte Anzahlen von Informationen zu verarbeiten sind. Zusätzliche Informationen zur Mitarbeit oder zu intrapersonalen Variablen (Käpnick, 1998) werden frei notiert.

3.2.3 Das Beobachtungsraster zur Zahlenzauberei

Das folgende Problemfeld orientiert sich an einer Aufgabenstellung von Fielker (1997), welches er „Puzzles and Problems“ nennt (Fielker, 1997, S. 86 ff.). Es geht darum, die Zahlen von 1 bis 9 in einen Haken einzutragen, so dass die Summe der einzelnen Reihen gleich ist[2] (vgl. Abb. 3):

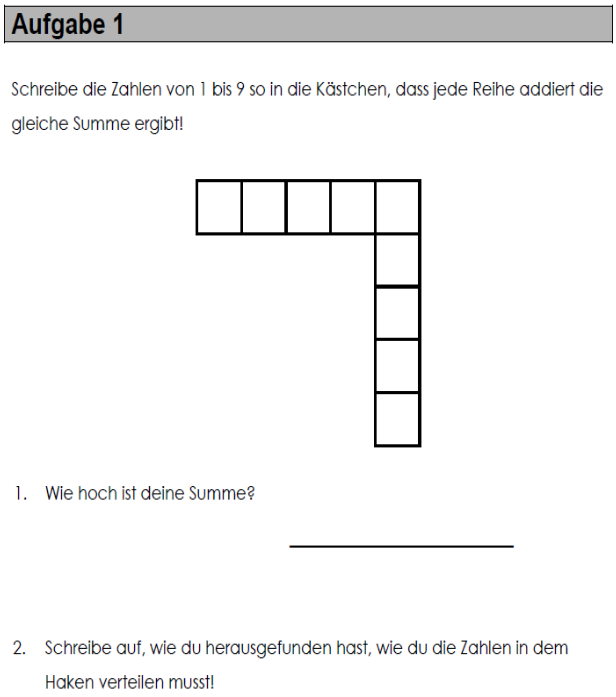


Abb. 3: Aufgabenblatt zur Zahlenzauberei (Haken) in der Version von 1999, nach Fielker, 1997, S. 86

Bildet man die Gesamtsumme der Zahlen 1 bis 9, so erhält man 45. Da die Zahl in der Ecke in die beiden Summen beider Reihen eingeht, müssen die Summen beider Reihen ohne die Eckzahl gleich sein. Der Wert ist jeweils die Hälfte von (45 minus Eckzahl)[3]. Hieraus folgt, dass die Eckzahl ungerade sein muss. 1, 3, 5, 7 und 9 sind also die möglichen Eckzahlen, woraus sich die möglichen Summen: 23, 24, 25, 26, 27 ergeben.

Die erste Frage auf dem Aufgabenblatt bezieht sich auf eine beliebige Lösung. Im weiteren Verlauf sollen die Kinder so viele verschiedene Summen wie möglich finden und der Fokus der Fragestellung liegt bewusst nicht auf der Eckzahl. Dies wäre schon eine Hinführung zur allgemeinen Lösung. Es geht also um das Finden einer günstigen Strategie zur Lösung der Aufgabe. Häufig werden Strategien wie das Bilden von Paaren oder auch das ausgleichende Arbeiten beobachtet. Das Bilden von Paaren ist für das Finden unterschiedlicher Lösungen zielführend, insbesondere dann, wenn sich das Kind vom 10er-Paar bei der Eckzahl fünf lösen kann. Ausgleichend zu arbeiten, bedeutet ebenfalls, Paare zu bilden, nur mit einem anderen Fokus. Diese Vorgehensweisen können zum einen zu mehreren Lösungen und zum anderen im Prozess zu der Einsicht führen, dass die Eckzahl immer ungerade sein muss. Diese Erkenntnis kann zur Gesamtsummenbildung führen. Einige Kinder beginnen jedoch sofort ohne eine Probierphase, aus der Gesamtsumme die Notwendigkeit der ungeraden Eckzahl abzuleiten und dann die Schenkel probierend oder basierend auf ausgleichendem Arbeiten oder Paarbildungen auszufüllen. Das Bilden der Gesamtsumme zur Lösungsfindung ist ein sehr strukturiertes übergeordnetes Vorgehen, das zumindest die implizite Durchdringung der Struktur des Hakens voraussetzt.

Diese ProFa lässt sich durch die Veränderung der Figur oder des Zahlenraumes ebenfalls zum Problemfeld erweitern.

Wieder konnten bei der Bearbeitung dieser Aufgabe mehr kognitive Komponenten beobachtet werden, als im eingesetzten Raster dokumentiert werden konnten, s. Abb. 4.

	Name 1	Name 2
HM1: Richtiger Haken **5P**		
HM2: Sinnvoller Austausch von Zahlen (nach fertigem falschen Haken) **1P**		
HM3: Ausgleichend gearbeitet **10P**		
HM4: Gesamtsummenbildung zur Lösungsfindung genutzt **8P**		
HM5: Richtige Begründung für Vorgehensweise **4P**		
HM6: Beginnt immer mit ungerader Eckzahl **8P**		

Abb.4: Beobachtungsraster zur Zahlenzauberei

HM 1: Richtiger Haken (max. 5P)

Richtige Lösungen

Auch wenn diese Beobachtung noch keine qualitative Aussage zulässt, hat sich aber in den Gruppen gezeigt, dass das Finden einer richtigen Lösung vielen Kindern bereits Probleme bereitet. Daher ist es bei dieser Aufgabe wichtig, auch die Anzahl der richtigen Haken mit einzubeziehen, da der richtigen Lösung implizit eine richtige Idee zugrunde liegen kann.

HM 2: Sinnvoller Austausch von Zahlen (nach fertigem falschen Haken) (1P)

Organisation von Material

Nach einer Probierphase sind die Kinder meistens in der Lage, sich in ihrem Haken so zu orientieren, dass sie zu einer richtigen Lösung gelangen – dies kann als Organisation von Material verstanden werden und ist damit ein wichtiger Schritt zur Strategiefindung.

HM 3: Ausgleichend gearbeitet (max. 10P)

Muster und Strukturen

Unter „ausgleichend gearbeitet“ fassen wir sowohl die Paarbildung, z. B. Zehnerpaare, als auch das gegensinnige Verändern zusammen. Diese Vorgehensweise ist, besonders schwer zu beobachten, weil eine Bewertung nur im Prozess möglich ist. Einzelne Paare können auch als Superzeichen benutzt werden, z. B. an gegenüberliegenden Schenkeln. Um der Vielfältigkeit dieser Kategorie gerecht zu werden, erhält das Kind pro richtigem Haken zwei Punkte, wenn eine dieser Strategien beobachtet wird.

HM 4: Gesamtsummenbildung zur Lösungsfindung genutzt (8P)

Muster und Strukturen/Wechsel der Repräsentationsebene

Diese Lösungsstrategie ist, auf einer anderen Ebene, als die zuvor beschriebenen HM zu betrachten. Das Kind löst sich von der probierenden Haltung und verknüpft die Vorgabe der Figur mit der arithmetischen Vorgehensweise. Dies ist eine besondere Denkleistung. Durch die Gesamtsummenbildung ist es möglich, die Bedeutung der Eckzahl zu erkennen, aber allein der Ansatz, die Gesamtsumme zu bilden, ist schon eine weiterführende Herangehensweise. Das Kind bewegt sich nicht wirklich auf einer anderen Repräsentationsebene, arbeitet aber in einem anderen Komplexitätsgrad. Dieses Vorgehen kann zu einer allgemeinen Lösung des Problems führen.

HM 5: Richtige Begründung für Vorgehensweise (4P)

Wie auch beim NIM-Spiel ist die Versprachlichung von Begründungen für Kinder schwierig, aber die Durchdringung des Problems kann zu einer Versprachlichung führen, die sich nicht in ausgefeilten Formulierungen zeigen muss (vgl. NIM-Spiel – HM 7).

HM 6: Beginnt immer mit ungerader Eckzahl (8 P)

Muster und Strukturen

Diese Vorgehensweise kann zunächst zufällig sein. Wenn das Kind jedoch im weiteren Verlauf der Bearbeitung immer eine ungerade Zahl in die Ecke setzt, kann davon ausgegangen werden, dass es eine richtige Strategie zur Lösungsfindung nutzt.

4. Forschungsfragen

Erste Erfahrungen mit dem Beobachtungsraster lassen vermuten, dass dieses Instrument eine Unterstützung für die Identifikation eines besonderen mathematischen Potenzials sein kann. Daher befasst sich diese Studie mit den Fragen:

Ist das Beobachtungsraster im Sinne einer operationalisierten Checkliste ein geeignetes Instrument, um Kinder mit einer besonderen mathematischen Begabung zu identifizieren? Inwieweit ist die inhaltliche Validität gegeben?

Kommen unterschiedliche Beobachter und Beobachterinnen zu übereinstimmenden Ergebnissen? Inwieweit liegt eine hohe Interrater-Reliabilität vor?

5. Methodisches Vorgehen im Rahmen der empirischen Studie

5.1 Ablauf der Studie

Die Daten für diese Studie wurden im Rahmen des Probeunterrichts (Mathe-Treff) der Talentsuche im Programm PriMa erhoben und ausgewertet. Der Probeunterricht fand im November 2017 statt. Insgesamt wurden an vier Wochenenden Daten erhoben, wobei jedes Kind nur an einem Wochenende teilnimmt. Es wurden jeweils zwei Progressive Forscheraufgaben eingesetzt, bei deren Bearbeitung die Schülerinnen und Schüler von den Unterrichtenden beobachtet wurden. In den 16 Gruppen der vier Mathe-Treffs wurden die aufgabenspezifischen Beobachtungsraster von geschulten Beobachterinnen und Beobachtern eingesetzt. Die Anzahl der beobachteten Kinder unterlag verschiedenen Einschränkungen. In der Regel waren die Beobachterinnen und Beobachter auch die Unterrichtenden und konnten nur in Abhängigkeit von der Gruppensituation agieren, wie es auch im Regelunterricht der Fall ist. Insgesamt konnten zwar alle Kinder bei zumindest einer Aufgabe beobachtet werden, aber um einen Hinweis auf ein mathematisches Potenzial zu erhalten, bedarf es der Beobachtung bei mehreren Aufgaben wie in Kapitel 3 beschrieben.

Zur Vorbereitung der Beobachtung wurden die Unterrichtenden in zwei Phasen geschult: zum einen auf den mathematischen Inhalt der ProFa, zum anderen fand eine Einführung in das Instrument statt.

5.1.1 Beobachterschulung

Um die Forschungsfragen beantworten zu können, mussten als erster Schritt die Beobachterinnen und Beobachter geschult werden, um möglichen Beobachterfehlern entgegenzuwirken (vgl. Cranach & Frenz, 1969):

Zunächst wurden die Beobachterinnen und Beobachter über das Ziel der Studie informiert.

Vor der Beobachtung stand die eigene Auseinandersetzung mit den Problemstellungen.

Im nächsten Schritt wurden die Kinder bei der Bearbeitung der Aufgaben in den Fördergruppen beobachtet, allerdings noch ohne festes Raster.

Anschließend wurden die kognitiven Komponenten der Problemstellung, die sich aus der Sachanalyse ergeben, diskutiert. Das Raster stellt eine Fokussierung der Ergebnisse der Sachanalyse hinsichtlich der Frage dar, welche Leistungen von den Kindern voraussichtlich erbracht werden und welche davon beobachtet werden können.

Daraufhin wurden Videovignetten, die zeigten, wie jeweils zwei Kinder die Aufgaben bearbeiteten, eingesetzt. Die Beobachterinnen und Beobachter mussten anhand dieser Videovignetten das Beobachtungsraster ausfüllen und diese Tätigkeit reflektieren.

Sich ergebende Fragen wurden aufgenommen und die Instruktionen wurden noch weiter ausgeschärft.

Die Beobachtung entspricht für beide Fragestellungen einer strukturierten Beobachtung in einer natürlichen Beobachtungssituation (Schnell, Hill & Esser, 1999).

5.2 Stichproben

Es haben von anfänglich 460 angemeldeten Kindern 265 Kinder die gesamte Talentsuche bis zum Ende durchlaufen. Für die Überprüfung der Interrater-Reliabilität wurden insgesamt 116 Kinder während der Mathe-Treffs des PriMa-Projektes in mehreren Gruppen von jeweils einem Beobachterpaar beobachtet. Für das NIM-Spiel wurden Daten von insgesamt 57 Kindern über vier Treffs von vier Beobachterpaaren erhoben. Für die Zahlenzauberei wurden 79 Beobachtungen wiederum über vier Treffs von vier Beobachterpaaren ausgewertet.

Für das Überprüfen der inhaltlichen Validität war es notwendig die Ergebnisse der Kinder zu überprüfen, die während der Bearbeitung beider Aufgaben beobachtet werden konnten und die Talentsuche bis zum Ende durchlaufen haben. Da die Untersuchung keine Laborsituation war, ergaben sich für diese Stichprobe die Unterlagen von 133 Kindern. Von dieser Anzahl an Kindern liegt ein vollständiger Datensatz vor.

5.3 Instrumente und deren Auswertung

5.3.1 Das Beobachtungsraster

Die Grundlage der Beobachtungsraster bildet die Analyse des mathematischen Hintergrunds der Aufgabe bezogen auf die Klassenstufe. Somit handelt es sich um eine strukturierte Beobachtung. Wie oben beschrieben wurden beide Aufgaben bereits mehrfach in der Förderung eingesetzt und dort mit einem Beobachtungsraster ausgewertet. Nach jedem Einsatz wurden diese dann im PriMa-Projekt von einer Expertengruppe evaluiert und ggf. verändert. D. h. für die Entwicklung des Instruments wurden der rationale Ansatz und der empirische Ansatz kombiniert, wie es Schnell et al. (1999, S. 364) als gängige Technik für die Praxis beschreiben.

Die Beobachtungsraster werden in der vorliegenden Studie dazu benutzt, die Unterrichtsmitarbeit in der Arbeitsphase während der Mathe-Treffs zu dokumentieren, um die von den Kindern genutzten Handlungsmuster zu erfassen. In dem Beobachtungsraster werden die beobachteten kognitiven Komponenten für die einzelnen Kinder notiert und mit einer dichotomen Likertskala kodiert. Somit kann für jedes Kind eine genaue Analyse der Kriterien vorgenommen werden, die Hinweise auf die genutzten Problemlösestrategien gibt. Außerdem sind die Kategorien in Anlehnung an die Anforderungsbereiche der Bildungsstandards gewichtet, so dass es möglich ist, Punktzahlen zuzuordnen und damit eine Rangfolge innerhalb der Gruppe zu erstellen. Dieser Wert lässt eine Aussage über ein mögliches mathematisches Potenzial zu.

5.3.2 Der Intelligenztest

Es wurde ein Intelligenztest (CFT 20 R) durchgeführt, um die allgemeine Intelligenz der Teilnehmer und Teilnehmerinnen der Studie zu erfassen. Der CFT 20 R ist ein Gruppenintelligenztest, der eine hohe Korrelation mit mathematischen Schulleistungen aufweist (0,49 laut Preckel & Brüll, 2008, S. 74). Als Gruppenintelligenztest eignet er sich für einen Einsatz in der Talentsuche und wird hier regelhaft benutzt. Er wurde von Mitarbeiterinnen der Beratungsstelle besondere Begabungen[4] durchgeführt und ausgewertet.

5.3.3 Der Mathematik-Test

Im Rahmen der Talentsuche wird ein eigens dafür in einer universitätsübergreifenden Arbeitsgruppe der William-Stern-Gesellschaft entwickelter Mathematiktest durchgeführt, der aus vier Aufgabenbereichen besteht. Für die Bearbeitung dieses Tests dienen die Aufgaben des Mathe-Treffs als Vorbereitung. Die Auswertung erfolgt über ein Benotungssystem. Ähnlich wie in der Schule gibt es sechs Werte, wobei 6 die höchste Punktzahl ist.

5.3.4 Zu der Auswertung im Rahmen der Talentsuche

Die Auswahl der Kinder für das universitäre Förderprogramm erfolgt durch eine Expertengruppe. Es werden die Ergebnisse des Mathematiktests, der zwei Untertests des CFT 20 sowie der Gesamt-IQ und der Zahlenfolgen-IQ skaliert und dann addiert. Die Punkte des Mathematiktests werden in sechs Bereiche geteilt und jedem Bereich wird eine Punktzahl von 1 bis 6 zugeordnet. 6 ist der beste Wert. Diese Werte werden dann mit 4 multipliziert, um die Gewichtung im Verhältnis zu den vier IQ-Werten herzustellen, die ausgehend von dem IQ-Wert 130 in Standardabweichungen nach oben und unten ebenfalls skaliert und dann summiert werden. Aus diesen Klassifizierungen wird die Gesamtsumme gebildet, deren maximaler Wert 48 beträgt.

Für die Gruppenzusammenstellung werden die schriftlichen Ergebnisse des Mathe-Treffs sowie die Protokollaufzeichnungen aus den einzelnen Gruppen des Mathe-Treffs mit in die Bewertung einbezogen. Als weitere Informationsquelle liegt noch das Zeugnis des Kindes vor.

5.3.5 Zusammenführung der Daten

Die Beobachtungen der einzelnen Kategorien im Beobachtungsraster wurden gewichtet (siehe Kapitel 3), so dass für jede Aufgabe eine Ergebniszahl berechnet werden konnte. Da die Aufgaben als Set eingesetzt wurden, wurde eine Gesamtpunktzahl für die beiden Raster festgelegt. Ein Punktwert größer gleich 15 wurde als Indikator für ein mathematisches Potenzial festgesetzt. Dieser ergibt sich aus den Expertenratings, wonach bestimmte Komponenten des Problemlösens beim Einsatz von ProFa auf ein mathematisches Potenzial hinweisen.

Des Weiteren wurden die Ergebnisse des Mathematik-Tests und des Intelligenz-Tests mit den Ergebnissen der Beobachtung verglichen und daraufhin analysiert, ob bei allen 32 in die Fördergruppe aufgenommenen Kindern kognitive Komponenten mit Hilfe des Beobachtungsrasters erkannt wurden, die auf ein hohes mathematisches Potenzial schließen lassen. Auch die Ergebnisse der nicht aufgenommenen Kinder wurden unter besonderer Berücksichtigung der Ergebnisse der Beobachtungsraster untersucht. Es wurde überprüft, ob es zu Alpha- bzw. Beta-Fehlern gekommen ist und welche Ursache diese haben könnten.

5.3.6 Erhebung der Interrater-Reliabilität

Wenn das Instrument in der Prozessdiagnostik zum Erkennen eines besonderen mathematischen Potenzials eingesetzt werden soll, so muss die Interrater-Reliabilität hoch sein, d. h. es gilt zu untersuchen, ob die Einschätzung eines jeden einzelnen Raters zuverlässig ist (vgl. Wirtz & Caspar, 2002). Um zu überprüfen, ob beim Einsatz des Instrumentes verschiedene Beobachterinnen und Beobachter zu einer hohen Übereinstimmung kommen, wurden Paare gebildet.

Die erhobenen Daten wurden dann mithilfe des Cohen Kappa auf Interrater-Reliabilität überprüft. Wichtig dabei ist, dass die einfache prozentuale Übereinstimmung nicht das zufallskorrigierte Übereinstimmungsmaß miteinschließt. Dieses Quantifizierungsmaß ist ein für Kategoriensysteme zulässiges Übereinstimmungsmaß, das für zwei Rater berechnet werden kann (vgl. ebd.).

6. Ergebnisse der empirischen Studie

6.1 Kann man mit Hilfe des Beobachtungsrasters Hinweise auf mathematische Begabung erhalten? – Inhaltliche Validität

6.1.1 Ergebnisse

Von den 133 Kindern, die bei der Bearbeitung beider Aufgaben beobachtet werden konnten, sind 91 Jungen und 42 Mädchen. Diese Zahlen entsprechen der prozentualen Verteilung der Geschlechter aller an der Talentsuche teilnehmenden Kinder. 32 dieser Kinder wurden in die Fördergruppe der Universität aufgenommen, darunter elf Mädchen und 21 Jungen.

Für die gesamte Stichprobe ergibt sich zunächst, dass mit Hilfe des Beobachtungsrasters 31 Kinder als besonders begabt erkannt wurden und 102 Kinder nicht.

Von diesen 31 als mathematisch potenziell begabt erkannten Kindern stimmten bei 22 Kindern die Beobachtungen mit der Gesamtauswertung der Talentsuche überein. Von den 102 Kindern stimmten bei 92 Kindern die Beobachtungen überein, d. h. von den 133 beobachteten Kindern wurden 114 Kinder eindeutig „richtig" erkannt. Das sind 85,75 %.

Da die Fragestellung sich mit der Identifikation des mathematischen Potenzials befasst, betrachten wir zunächst die 32 Kinder, die in die Fördergruppen aufgenommen wurden, davon wurden 22 Kinder im Mathe-Treff mit Hilfe des Beobachtungsrasters als besonders begabt identifiziert, das sind 69 % der aufgenommenen Kinder. 31 % der in der Gesamtauswertung als mathematisch besonders begabt identifizierten Kinder wurden durch das Beobachtungsraster nicht erkannt (vgl. Abb. 5).

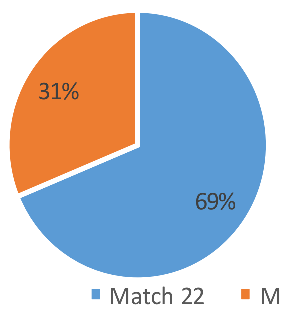


Abb. 5: Übereinstimmungswerte der in die Fördergruppe aufgenommenen Kinder und der durch die Beobachtungsraster als mathematisch besonders begabt identifizierten Kinder

Umgekehrt wurden anhand des Beobachtungsrasters neun Kinder, d. h. 7 % der gesamten Gruppe (133 Kinder) als mathematisch besonders begabt erkannt, die jedoch nicht in die Fördergruppe aufgenommen wurden. Insgesamt wurden also knapp 86 % der Kinder der gesamten Gruppe eindeutig identifiziert und 14 % nicht (vgl. Abb. 6).

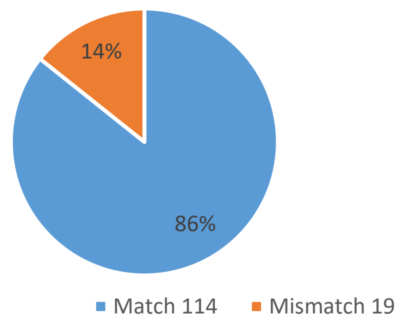


Abb. 6: Übereinstimmungswerte aller in der Talentsuche beobachteten Kinder und der Einschätzungen zur mathematischen Begabung aller Kinder durch das Nutzen der Beobachtungsraster

6.1.2 Interpretation

Dass bei 69 % der Kinder anhand des Instruments ein mathematisches Potenzial identifiziert werden konnte, das auch durch die anderen Instrumente bei der Talentsuche bestätigt wurde, weist auf die Eignung des Instruments im Rahmen der Talentsuche hin. Allerdings trifft dies für 31 % der in die Fördergruppe aufgenommenen Kinder nicht zu. Des Weiteren wurde bei neun Kindern ein hohes mathematisches Potenzial mittels der Beobachtungsraster identifiziert, die nicht in die universitäre Fördergruppe aufgenommen wurden. Diese beiden Gruppen sollen nun im Detail analysiert werden.

Diese zunächst hoch erscheinende Anzahl an Fehleinschätzungen wird nachvollziehbar, wenn man bedenkt, dass der Probeunterricht zum Ziel hat, Kinder an die besondere Art der Aufgabenstellungen im PriMa-Projekt heranzuführen und nicht alle Kinder Erfahrungen mit Problemstellungen dieser Art im Regelunterricht haben.

Ein weiterer wichtiger Aspekt, dessen man sich bewusst sein muss, sind die Risikogruppen. Zu Risikogruppen, die in Talentsuchen leichter übersehen werden, gehören Menschen mit Behinderungen, sogenannte twice exceptional students, Kinder mit Migrationshintergrund, Kinder aus bildungsfernen Elternhäusern, aber auch Mädchen (Fels, 1999; Nolte, 2018; Stamm, 2009; Silverman, 2009; Reichenberg & Landau, 2009)

Eine Analyse der Ergebnisse zeigt, dass unter den zehn Kindern, die durch das Beobachtungsraster nicht identifiziert werden konnten, drei Mädchen sind und zwei Kinder einen Migrationshintergrund aufweisen (vgl. Abb. 7). Die Analyse der Aufgabenblätter der Mädchen lässt erkennen, dass sie kaum etwas verschriftlicht haben und somit eine ausführliche Kommunikation nötig gewesen wäre, um über ihre Bearbeitungsprozesse mehr zu erfahren. Dem Protokoll kann man entnehmen, dass alle drei Mädchen sehr still waren und sich auch am Unterrichtsgespräch nicht beteiligt haben. Alle drei Mädchen haben allerdings im Mathe-Test keine Probleme gehabt, ihre Lösungswege zu notieren und kommen so zu guten Ergebnissen. Es liegt die Vermutung nahe, dass sie sich erst an die Aufgaben gewöhnen mussten und vielleicht auch in der ungewohnten Gruppe beim Mathe-Treff eher unsicher waren, wohingegen das alleinige Arbeiten beim Test nicht zu einem direkten Vergleich führt und sie sich auf ihre Stärken verlassen können. Die beiden Jungen mit Migrationshintergrund haben ebenfalls im Mathe-Treff kaum schriftliche Ergebnisse erzielt. Es hat sich in Fallstudien gezeigt, dass bei den Kindern mit Migrationshintergrund eine große Unsicherheit im Umgang mit für sie neuen Aufgaben zu beobachten ist, wobei das Aufgabenverständnis in der Regel kein Problem darstellt (Nolte & Pamperien, 2014). Deshalb ist es wichtig, dass die Personen, die das Raster einsetzen, nicht nur mit dem mathematischen Hintergrund vertraut sind, sondern auch mit Barrieren bei der Identifikation von besonderer Begabung, die sich aus unterschiedlichen Gründen zeigen können (vgl. z.B. Stamm, 2009).

Als wesentlich für das Erkennen von Begabung in Screeningverfahren werden ebenfalls intrapersonale Variablen genannt (Heller et al., 2005). Unter den verbleibenden fünf Kindern schienen zwei Kinder laut Protokollmitschrift nicht motiviert, sie haben die Gruppe gestört und sich den Aufgaben verweigert. Erst nach wiederholten Gesprächen ist es gelungen, diese Kinder zur Mitarbeit zu motivieren, wobei nach einer Experteneinschätzung dem störenden Verhalten eine große Unsicherheit zugrunde lag.

Drei weitere Kinder wurden als unsicher beschrieben und waren nicht bereit, mit den Beobachterinnen und Beobachtern zu kommunizieren. Es ist zu vermuten, dass sie von der ungewohnten Situation überfordert waren und daher im Unterricht nur wenig mitgearbeitet haben, wobei hier noch eine größere Bereitschaft festzustellen war, die Bearbeitungsprozesse zu verschriftlichen. Insgesamt lässt sich daher feststellen, dass diese Fehleinschätzungen durch mehr Zeit, eine ausführlichere Kommunikation und ein besseres Kennen der Kinder wahrscheinlich hätten vermieden werden können. Die Rahmenbedingungen einer Talentsuche erschweren diesen Zugang zu den Kindern. In der Schule sollte diese Art Fehler vermieden werden können.

Kind	Gesamtsumme Talentsuche (TS) (max. 48P)	Summe Beobachtungsraster (BR)	Mögliche Erklärung für das Nicht-Erkennen
1	40	9	Migration
2	39	7	Mädchen
3	37	10	unsicher
4	37	8	Motivation
5	36	12	unsicher
6	35	6	Motivation
7	34	5	Migration
8	32	4	Mädchen
9	32	12	unsicher
10	31	7	Mädchen

Abb. 7: Im Mathe-Treff durch das BR nicht identifizierte mathematisch begabte Kinder

- Gesamtsumme Talentsuche größer gleich 30 Punkte: Aufnahme in die universitäre Fördergruppe, d. h. als mathematisch begabt identifiziert

- Summe Beobachtungsraster größer gleich 15 lässt mathematisches Potenzial vermuten

Neun Kinder wurden als potenziell begabt beobachtet und nicht in die Fördergruppe aufgenommen. Hierbei handelt es sich um acht Jungen und ein Mädchen (vgl. Abb. 8). Bei zwei Kindern, darunter ist auch das Mädchen, kann man feststellen, dass diese in den Tests sehr gut waren und dass sich das im Beobachtungsraster festgestellte hohe Potenzial bestätigt, aber andere der aufgenommenen Kinder noch bessere Ergebnisse erzielten, daher wurden diese Kinder nicht in die Fördergruppe aufgenommen. Die Anzahl der Förderplätze ist auf 50 begrenzt.[5]

So verbleiben noch sieben Kinder, deren Beobachtungssumme größer als 15 ist, deren Gesamtsumme in der Talentsuche aber unter 30 liegt.

Zwei dieser Kinder (6/8) erhielten ihre Punkte in den Beobachtungsrastern ausschließlich im NIM-Spiel. Es sind verschiedene Interpretationen möglich, so kann es sein, dass diese Kinder das NIM-Spiel bereits kannten. Da das NIM-Spiel in Partnerarbeit gespielt wird, liegt die Vermutung nahe, dass diese Kinder stark von der Partnerarbeit profitiert haben, dass sie entweder die Ergebnisse ihres Partners aufgeschrieben haben oder angeregt durch die Interaktion zu eigenen Lösungen gekommen sind. Die Bearbeitung des Hakens, d. h. der Zahlenzauberei, fand als Hinführung auf den Test in Einzelarbeit statt und dort haben diese Kinder wesentlich schlechtere Leistungen erreicht. Dies ist ein Beispiel dafür, dass ausschließlich eine Aufgabe allein nicht für das Erkennen einer mathematischen Begabung genutzt werden sollte.

Kind	Gesamtsumme Talentsuche (TS) (max. 48 P)	Summe Beobachtungsraster (BR)	Interpretation
3	25	15	Potenzial, andere Kinder waren besser
4	22	32	Potenzial, hoher IQ, Schwierigkeiten beim Mathe-Test
5	21	17	Potenzial, hoher IQ, Schwierigkeiten beim Mathe-Test
6	19	19	BR Summe nur aus NIM
7	17	17	Beobachtungsfehler
8	13	16	BR Summe nur aus NIM
9	10	16	Beobachtungsfehler

Abb. 8: Im Mathe-Treff durch das BR fälschlicherweise identifizierte Kinder

- Gesamtsumme Talentsuche (TS) größer gleich 30 Punkte: Aufnahme in die universitäre Fördergruppe, d. h. als mathematisch begabt identifiziert

- Summe Beobachtungsraster (BR) größer gleich 15 lässt mathematisches Potenzial vermuten

Ein Kind (3) liegt sowohl beim Mathe-Test als auch beim IQ-Test im mittleren Bereich, d. h. es ist richtig, dass es Hinweise auf ein mathematisches Potenzial gibt, das jedoch nicht eindeutig als identifiziert bezeichnet werden kann. Zwei Kinder (4/5) haben jeweils niedrige Punktzahlen im Mathe-Test erreicht: Sie liegen auf den Rängen (120 und 144). Der IQ-Wert liegt knapp über 130, wobei gemeinhin ein Kind mit einem IQ-Wert ab 130 als hochbegabt bezeichnet wird. Hier ist es möglich, dass die Kinder im Mathe-Treff eine höhere Motivation hatten als beim Test, insbesondere das Kind mit 32 Punkten aus den Beobachtungen ist beim Treff sehr positiv aufgefallen. Warum das Kind beim Test schlecht abgeschnitten hat, kann vielfältige Ursachen haben, z. B. die ungewohnte Testsituation, Probleme mit dem Aufgabenverständnis, Schwierigkeiten beim Aufschreiben der Lösungswege, aber auch die Verfassung am Testtag kann eine Rolle spielen.

Die genaue Analyse der Unterlagen der Kinder 7 und 9 hat bestätigt, dass es sich hier um einen Fehler seitens der Beobachterinnen oder Beobachter handelt, im Sinne der Alpha- bzw. Beta-Fehler. Diese beiden Jungen haben wenig schriftliche Bearbeitungsprozesse notiert und haben laut Protokollmitschrift auch von ihren Nachbarn profitiert. Um diese Prozesse in der Gruppe zu erfassen, bedarf es eines Gesamtüberblicks, der auch für geübte Lehrende nicht immer möglich ist. Dies unterstreicht die Bedeutung einer Schulung der Beobachterinnen und Beobachter insbesondere bezogen auf Fehler bei der Identifikation, die häufig bei Risikogruppen zu beobachten sind (Silverman, 2009).

Insgesamt zeigt sich so, dass von den 133 beobachteten Kindern 22 (16,54 %) zu Recht als besonders begabt erkannt und zehn (7,51 % von allen) nicht erkannt wurden, bei 92 Kindern (69,18 %) zu Recht ein geringeres Potenzial beobachtet wurde, bei sieben von 101 (ca. 7 %) ein Potenzial, das jedoch unter dem der aufgenommenen Kinder lag und bei zwei Kindern Beobachtungsfehler vorlagen. Richtig beobachtet, bezogen auf ihr mathematisches Potenzial wurden 22+7+92 = 121 Kinder (ca. 91 %) (vgl. Abb. 9).

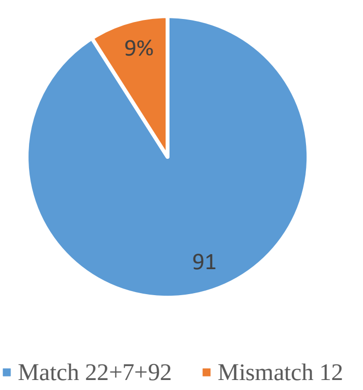


Abb. 9.: Übereinstimmungswerte aller in der Talentsuche beobachteten Kinder und der Einschätzungen zur mathematischen Begabung aller Kinder durch das Nutzen der Beobachtungsraster nach abschließender Analyse

Diese Ergebnisse bestätigen, dass sich das Beobachtungsraster als Screeningverfahren einsetzen lässt. Es ist jedoch nötig, wie in der Literatur beschrieben (Fels, 1999; Heller, 2001; Heller et. al., 2005; Perleth, 2010; Stamm, 2009), noch genauer darauf zu achten, die Beobachterinnen und Beobachter für Risikogruppen zu sensibilisieren. Insbesondere in der Talentsuche ist dies ein wesentlicher Aspekt, da die Lehrenden keine zusätzlichen Informationen über die zu beobachtenden Kinder haben.

6.2 Interrater-Reliabilität

6.2.1 Ergebnisse

Im Rahmen der Mathe-Treffs beobachteten Paare die Kinder beim Bearbeiten der Problemstellungen. Aus der Tatsache, dass für diese Beobachtungen keine künstlichen Situationen geschaffen wurden, ergaben sich Einschränkungen:

Im laufenden Unterricht entschieden sich die Beobachterinnen und Beobachter, welche und wie viele Kinder sie beobachten konnten bzw. wollten. Dies ist der Realsituation geschuldet, da die Entscheidung abhängig von der konkreten Situation im Probeunterricht erfolgen musste. Da zu diesem Zeitpunkt auch nicht sicher war, welches Kind später an der weiteren Talentsuche teilnehmen würde, wurden pro Tag der Talentsuche etwa 30 Kinder durch Beobachterpaare beobachtet. Die erhobenen Daten wurden dann mithilfe des Cohen Kappa auf Interrater-Reliabilität überprüft.

Für das NIM-Spiel wurde die Interrater-Reliabilität für 3 Paare überprüft, s. Abb. 10.

Paar 1	Paar 2	Paar 3
15 Kinder	22 Kinder	20 Kinder

Abb. 10: Gruppengrößen zur Bestimmung der Interrater-Reliabilität

Aufgrund der Rahmenbedingungen des Mathe-Treffs konnten nicht mehr Kinder in die Auswertung mit einbezogen werden.

Für die sieben Kategorien finden sich die in Abb. 11 aufgelisteten Interrater-Reliabilitäten.

Nach Landis & Koch (1977) liegt eine ausreichende Übereinstimmung bei Kappa-Werten zwischen 0,41-0,60 vor, eine mittelmäßige Übereinstimmung bei 0,61 bis 0,80 und eine beachtliche Übereinstimmung bei Werten über 0,80. Wirtz & Caspar (2002) diskutieren, dass es in der Literatur unterschiedliche Grenzbereiche gibt, gemeinhin wird ein Kappa von 0,75 als ein sehr guter Wert bezeichnet, allerdings ist der Wert auch von den zu ratenden Merkmalen abhängig. Für ein schwer zu erfassendes Merkmal kann ein Kappa von 0,5 schon ein zufriedenstellender Wert sein.

	Paar 1	Paar 2	Paar 3
HM1: Rekursives Arbeiten	0,71	0,82	0,70
HM2: 3er-Gruppierungen	1	0,73	0,70
HM3: Superzeichen	1	1	0,90
HM4: Bedeutung Anfang	0,87	0,87	0,70
HM5: Siegerfelder	0,87	1	0,80
HM6: Teilstrategie Begründung	0,73	0,55	1
HM7: Vollständige Erklärung	1	1	0,80

Abb. 11: Interrater-Reliabilität NIM-Spiel

Für das erste Beobachterpaar ergaben sich fünf Items mit sehr hoher Übereinstimmung und zwei Items mit mittlerer Übereinstimmung. Das zweite Paar hatte fünf Items mit hoher Übereinstimmung, ein Item mit mittlerer Übereinstimmung und ein Item mit ausreichender Übereinstimmung. Das dritte Beobachterpaar hatte vier Items mit hoher Übereinstimmung und drei Items mit mittlerer Übereinstimmung.

Für die Zahlenzauberei wurde die Interrater-Reliabilität für vier Paare überprüft. Die Gruppengrößen waren sehr unterschiedlich, s. Abb. 12.

Paar 1	Paar 2	Paar 3	Paar 4
19 Kinder	28 Kinder	23 Kinder	9 Kinder

Abb.12: Gruppengrößen zur Bestimmung der Interrater-Reliabilität

In den in Abb. 13 dargestellten Interrater-Reliabilitäten lassen sich die folgenden Übereinstimmungen erkennen.

Für das erste Beobachterpaar ergaben sich drei Items mit sehr hoher Übereinstimmung und drei Items mit mittlerer Übereinstimmung. Das zweite Paar hatte zwei Items mit hoher Übereinstimmung, drei Items mit mittlerer Übereinstimmung und ein Item mit ausreichender Übereinstimmung. Das dritte Beobachterpaar hatte fünf Items mit hoher Übereinstimmung und ein Item mit mittlerer Übereinstimmung. Das vierte Paar hatte wie das erste Paar drei Items mit sehr hoher Übereinstimmung und drei Items mit mittlerer Übereinstimmung.

	Paar 1	Paar 2	Paar 3	Paar 4
HM1: Richtige Haken	0,80	0,91	0,62	0,84
HM2: Sinnvoller Austausch von Zahlen (nach fertigem falschen Haken)	0,68	0,64	0,83	0,75
HM3: Ausgleichend gearbeitet	0,68	0,57	0,83	0,75
HM4: Gesamtsummenbildung zur Lösungsfindung genutzt	0,89	1	0,91	1
HM5: Richtige Begründung für Vorgehensweise	0,89	0,64	1	0,75
HM6: Beginnt immer mit ungerader Eckzahl	0,79	0,71	1	1

Abb.13: Interrater-Reliabilität Zahlenzauberei

6.2.2 Interpretation

Bei der Betrachtung der Werte für das NIM-Spiel ist erkennbar, dass die Beobachtung des Superzeichens, welches ein sehr starkes Kriterium für eine besondere Begabung ist, ein sehr gutes Kappa hat. Die Kategorie bezieht sich auf eindeutig zu beobachtende Merkmale (vgl. Kapitel 3.2.2) Ein nur ausreichendes Kappa zeigt sich bei dem Erkennen von Begründungen von Teilstrategien. Es ist zu fragen, warum der Kappa-Wert für die Kategorie „Teilstrategie-Begründung" bei einem Paar nur im ausreichenden Bereich liegt. Dafür gibt es unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten. Hier spielt anscheinend die Bewertung der Versprachlichungen von Begründungen eine erschwerende Rolle. Denn dieses Item erfordert eine Übereinstimmung der Deutung der Begründungen und hat damit also ein höheres interpretatives Potenzial. Gleichzeitig ist auch eine größere Subjektivität in der Bewertung möglich. Genauso ist es möglich, dass die beiden Beobachterinnen oder Beobachter zu unterschiedlichen Zeitpunkten nach Teilbegründungen gefragt haben, so dass sie zu unterschiedlichen Bewertungen gelangten.

Da jedoch dieses der einzige Wert ist, der unter 0,60 liegt, kann dieses Ergebnis bei einer solch kleinen Gruppengröße als zufriedenstellend gewertet werden.

Bei der Zahlenzauberei gibt es ebenfalls einen Wert unter 0,60, der zwar als ausreichend gilt, aber auf den besonderen Anspruch an die Beobachtung für diese Kategorie verweist. Ausgleichendes Arbeiten ergibt sich teilweise erst im Prozess des Probierens. So wurden im Beobachtungsraster auch die Paarbildung und das gegensinnige Verändern unter dieser Kategorie zusammengefasst. Es ergibt sich hieraus die generelle Überlegung, ob man die Kategorie „ausgleichend gearbeitet" doch differenzierter abfragen sollte.

Deutlich wird hier, dass die Aussagen des Beobachtungsrasters durch Kommunikationsprozesse erhärtet werden sollten. Auf diese Weise können Unsicherheiten in der Deutung der Arbeitsweise und der Bewertung und Deutung von Denkprozessen begegnet werden.

7. Zusammenfassung der Ergebnisse – Grenzen der Studie und Ausblick

In dieser Studie wurde die Entwicklung eines Beobachtungsrasters vorgestellt, sowie überprüft, ob verschiedene Beobachterinnen und Beobachter zu vergleichbaren Ergebnissen kommen. Diese Untersuchung wurde mit der Überprüfung der Interrater-Reliabilität vorgenommen. Darüber hinaus wurde überprüft, ob sich das Instrument für ein Screeningverfahren zur Identifikation einer besonderen mathematischen Begabung im Grundschulbereich eignet.

Die Ergebnisse lassen vermuten, dass dies der Fall ist. Es kam zwar zu den bekannten Alpha- und Beta-Fehlern, allerdings sind die Ergebnisse über die gesamte Gruppe überwiegend aussagekräftig, da ca. 91 % der Kinder richtig eingeschätzt wurden.

Die Interrater-Reliabilität wurde für diese Aufgaben in diesem Setting ebenfalls bestätigt. Man sollte nach Wirtz & Caspar (2002) den Einsatz mehrfach wiederholen, um eine gesicherte Aussage treffen zu können. Es ist geplant, diese Beobachtungsraster in der nächsten Talentsuche erneut einzusetzen, um die Studie zu erweitern.

Diese Studie bezieht sich auf zwei Aufgaben. Da sich das Instrument bereits bei diesen zwei Aufgaben als tragfähig erweist, bestätigt sich seine Hinweisfunktion auf eine besondere mathematische Begabung. Wie oben schon angesprochen sollte diese Hinweisfunktion auf eine besondere mathematische Begabung durch einen wiederholten Einsatz erhärtet werden. Des Weiteren ist es anzustreben, weitere ProFa zu analysieren und Beobachtungen zu deren Handlungsmustern in operationalisierten Checklisten vorzunehmen.

Im Hinblick auf den Einsatz dieses Instruments im Schulunterricht scheint es möglich zu sein, eine Lernumgebung zu schaffen, die den Einsatz dieses Rasters als ein Instrument zur Erfassung der Entwicklung des heuristischen Wissens der Kinder ermöglicht. Damit würden im Sinne einer Prozessdiagnostik Hinweise auf die Entwicklung des mathematischen Potenzials der Kinder gewonnen. Unter Berücksichtigung der Fehlerquote scheint es sinnvoll zu sein, Beobachtungsraster regelmäßig und über einen längeren Zeitraum im Unterricht einzusetzen. Für den fachgerechten Einsatz ist es notwendig, die Lehrkräfte zu schulen und für mögliche Fehleinschätzungen, insbesondere bezüglich der Risikogruppen, zu sensibilisieren.

Anmerkungen

[1] PriMa ist eine Maßnahme der Behörde für Schule und Berufsbildung (BSB), die einerseits zur Steigerung der Effizienz des Mathematikunterrichts in der Grundschule beitragen und andererseits mathematisch interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler (ab der 3. Klasse) fördern soll. PriMa besteht aus verschiedenen Teilmaßnahmen. Kooperationspartner sind die Fakultät für Erziehungswissenschaft der Universität Hamburg, die William-Stern-Gesellschaft und die Beratungsstelle besondere Begabungen der Behörde für Schule und Berufsbildung/Landesinstitut Hamburg.

[2] Die Formulierung der Aufgabenstellung steht im Spannungsfeld zwischen dem Verständnis der Kinder sowie der mathematischen Korrektheit. Über die Jahre hat sich so z. B. die Bezeichnung „Reihe“ für einen Schenkel als sinnvoll erwiesen.

[3] Oder 45 plus Eckzahl.

[4] Die Beratungsstelle besondere Begabungen (BbB) wurde 1996 in Hamburg von der Behörde für Schule und Berufsbildung zur Unterstützung bei Fragen zu besonderen Begabungen für Schulen, Eltern, Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern eingerichtet.

[5] Durch die vorgegebenen Rahmenbedingungen ist die Anzahl der Förderplätze im PriMa-Projekt auf 50 begrenzt.

Danksagung

Ich danke dem gesamten PriMa-Team unter der Leitung von Prof. Dr. M. Nolte, die diese Studie überhaupt erst ermöglicht hat, für die Unterstützung und die vielen anregenden Diskussionen. Außerdem danke ich den gutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Literatur

Aßmus, D. (2017). *Mathematische Begabung im frühen Grundschulalter unter besonderer Berücksichtigung kognitiver Merkmale.* Münster: WTM.

Aßmus, D. (2018). Characteristics of Mathematical Giftedness in Early Primary School Age. In F. M. Singer (Hrsg.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness* (S. 145-167). New York: Springer.

Bardy, P. (2007). *Mathematisch begabte Grundschulkinder Diagnostik und Förderung*. Heiderlberg: Spektrum.

Bauersfeld, H. (2000). Fachübergreifende Reformideen - diskutiert am Beispiel des Mathematikunterrichts. In W. Köhnlein & H. Schreier (Hrsg.), *Innovation Sachunterricht* (S. 65-84). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K. (1985). *Gewinnen Strategien für mathematische Spiele*. Wiesbaden: Springer Vieweg.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und -referendare. Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann.

Brody, L. E. (2009). The Johns Hopkins Talent Search Model for Identifying and Developing Exceptional Mathematical and Verbal Activities. In L. V. Shavinina (Hrsg.), *International Handbook on Giftedness* (S. 999-1015). Berlin: Springer.

Bruder, R. (2014). Fachdidaktisch und lerntheoretisch begründete Modelle zum Lehren und Erlernen von Heurismen im Mathematikunterricht. In F. Heinrich & S. Juskowiak (Hrsg.), *Mathematische Probleme lösen lernen* (S. 31-46). Münster: WTM.

Cao, T. H., Jung, J.Y. & Lee, J. (2017). Assessment in Gifted Education: A Review of the Literature From 2005 to 2016. *Journal of Advanced Academics, 28*, 163-203.

Cranach, M. & Frenz, H.-G. (1969). Systematische Beobachtung. In C. F. Graumann (Hrsg.), *Handbuch der Psychologie: Sozialpsychologie* (S. 269-330). Göttingen: Hogrefe.

Es, E. A. V. & Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Feger, B. & Prado, T. M. (1998). *Hochbegabung. Die normalste Sache der Welt*. Darmstadt: Primus Verlag.

Fels, C. (1999). *Identifizierung und Förderung Hochbegabter in den Schulen der Bundesrepublik Deutschland*. Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

Fielker, D. (1997). *Extending Mathematical Ability. Through whole Interactive Class Teaching*. London: Hodder & Stoughten.

Freie und Hansestadt Hamburg (Hrsg.) (2011). *Bildungsplan Grundschule Mathematik*. Hamburg.

Behörde für Bildung und Sport, Amt für Bildung, Hamburg (Hrsg.) (2003). *Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule.* Hamburg.

Fritzlar, T. (2013a). Robert – Zur Entwicklung mathematischer Expertise bei Kindern und Jugendlichen. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven* (S. 41–59). Münster: WTM.

Fritzlar, T. (2013b). *Mathematische Begabungen (im jungen Schulalter).* Vortrag gehalten auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik, Münster. Online verfügbar unter: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Hauptvortraege/BzMU13-Fritzlar.pdf

Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen - Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile*. Münster: LIT.

Gagné, F. (2004). Transforming gifts into talents: the DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies*, *15* (2) 119-148.

Gnirk, H., Homann, G. & Lubeseder, U. (1970). *Strategiespiele für die Grundschule*. Hannover: Schroedel Verlag.

Groner, R. & Groner, M. T. (1990). Heuristische versus algorithmische Orientierung als Dimension des individuellen kognitiven Stils. In K. Grawe, R. Hänni, N. Semmer & F. Tschan (Hrsg.), *Über die richtige Art, Psychologie zu betreiben* (S. 315-330). Göttingen: Hogrefe.

Günther, C. (2018). *Strategien mathematisch begabter Grundschulkinder beim Problemlösen.* Münster: WTM.

Hanses, P. & Rost, D. H. (1998). Das „Drama" der hochbegabten Underachiever – „Gewöhnliche" oder „außergewöhnliche" Underachiever? *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 12,* 53-71.

Hany, E. A. (1994). *Zur Interdependenz von Diagnostik und Beratung in der Hochbegabtenförderung.* Vortrag gehalten auf dem Kongress der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Hamburg.

Hany, E. A. (1998). *Gifted children in the classroom: Which diagnostic skills do teachers need?* European Council for High Ability, Oxford UK.

Heller, K. A. (2000). Begabungsdefinition, Begabungserkennung und Begabtenförderung im Schulalter. Begabung und Leistung in der Schule. In H. Wagner (Hrsg.), *Modelle der Begabtenförderung in Theorie und Praxis* (S. 39-70). Bad Honnef: Verlag Karl Heinrich Bock.

Heller, K. A. (2001). Projektziele, Untersuchungsergebnisse und praktische Konsquenzen. In K. A. Heller (Hrsg.), *Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter* (2., überarb. und erw. Aufl.) (S. 22-40). Göttingen: Hogrefe.

Heller, K. A. (2004). Identification of Gifted and Talented Students. *Psychology Science, 46,* 302-323.

Heller, K. A., Reimann, R. & Senfter, A. (2005). *Hochbegabung im Grundschulalter. Erkennen und Fördern*. Münster: LIT.

Heller, K. A. (2014). Aktivierung der Begabungsreserven (hidden talents) – Regionalstudie B.-W. (1965-1968). In F. J. Mönks & K. A. Heller (Hrsg.), Begabungsforschung und Begabtenförderung: der lange Weg zur Anerkennung (S. 67-102). Münster: LIT.

Hengartner, E., Hirt, U. & Wälti, B. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwäche bis Hochbegabte*. Zug: Klett und Balmer.

Heinze, A. (2005). *Lösungsverhalten mathematisch begabter Grundschulkinder - aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen*. Münster: LIT.

Hoth, J., Kaiser, G., Busse, A., Döhrmann, M. & Blömeke, S. (2017). Professional competences of teachers for fostering creativity and supporting high-achieving students. *ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 49,* 107-120.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder*. Frankfurt a.M.: Peter Lang.

Käpnick, F. (2006). Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschulkinder. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 59–60). Hildesheim: Franzbecker.

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern - ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. *Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht*, *38* (5), 300-306.

Kießwetter, K. (Hrsg.) (1988). *Berichte aus der Forschung Heft 2, Das Hamburger Modell zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern.* Hamburg: Universität Hamburg.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren - und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht?. In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? - Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (S 128-153). Offenburg: Mildenberger Verlag**.**

KMK (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* München: Luchterhand.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik.* München: Elsevier GmbH.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule.* Seelze: Friedrich Verlag.

Krutetskii, V. A. (1962). An Experimental Analysis of Pupils Mathematical Abilities. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Hrsg.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics.* Chicago: Standford Un, Un. of Chicago.

Krutetskii, V. A. (1976). An Investigation of Mathematical Abilities in Schoolchildren. In J. Kilpatrick & I. Wirzup *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics.* Chicago: Stanford University, University of Chicago.

Kuckartz, U. (2016). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Weinheim, Basel: Beltz Juventa.

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München: Luchterhand.

Landis, J. R. & Koch, G. G. (1977) The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics, 33,* 159-174.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. *CERME*, *5*, 2330-2339.

Leikin, R., Leikin, M., Paz-Baruch, N., Waisman, I. & Lev, M. (2017). On the four types of characteristics of super mathematically gifted students. *High Ability Studies, 28*(1), 107-125.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1992). *Hexeneinmaleins: kreativ mathematisch denken*. München, Wien: R. Oldenbourg Verlag.

Mönks, F. J. & Mason, E. J. (1993). Developmental Theories and Giftedness. In K. A. Heller, F. A. Mönks & A. H. Passow (Hrsg.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (S. 89-102). Oxford: Pergamon Press.

Müller, G. & Wittmann, E. (1977). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Braunschweig: Vieweg.

Neubauer, A. & Stern E. (2009). *Lernen macht intelligent. Warum Begabung gefördert werden muss*. München: Wilhelm Goldmann Verlag.

Nolte, M. (2004). Die Talentsuche im Grundschulprojekt. In M. Nolte (Hrsg.), *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans* (S. 69-84). Hildesheim: Franzbecker.

Nolte, M. (2009). Hochbegabte Kinder im Mathematikunterricht. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 103-114). Münster: Waxmann Verlag.

Nolte, M. (2011). „Ein hoher IQ garantiert eine hohe mathematische Begabung! Stimmt das?" – Ergebnisse aus neun Jahren Talentsuche im PriMa-Projekt. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*, (S. 611-614). Münster: WTM Verlag.

Nolte, M. (2012a). Das Beobachtungsraster. Ein vielfältig nutzbares Instrument im Spannungsfeld von curricularem, planungsbezogenem und interaktionsbezogenem Wissen. In W. Blum, R. B. Ferri, & K. Maaß (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (S. 325-333). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Nolte, M. (2012b). *"High IQ and High Mathemarical Taltent!" Results from Nine Years Talent Search in the PriMa-Project Hamburg*. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, 8 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea.

Nolte, M. (2012c). *Challenging math problems for mathematically gifted children.* The 7th Mathematically Creativity and Giftedness International Conference, Busan, Südkorea.

Nolte, M. (2012d). Mathematically gifted young children - questions about the development of mathematical giftedness. In H. Stöger, A. Aljughaiman and B. Harder (Hrsg.), *Talent development and excellence* (S. 155-176). Berlin: Lit Verlag.

Nolte, M. (2018). Twice-Exceptional Students: Students with Special Needs and a High Mathematical Potential. In F. M. Singer (Hrsg.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness. Enhancing Creative Capacities in Mathematically Promising Students* (S. 199-225). Cham: Springer International Publishing.

Nolte, M. (Hrsg.) (2004). *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter.* Hildesheim: Franzbecker.

Nolte, M. & Kießwetter, K. (1996). Können und sollen mathematisch befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? Ein Bericht über einschlägige Überlegungen und erste Erfahrungen. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*, 143-157.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2006). Besondere mathematische Begabung im Grundschulalter - ein Forschungs- und Förderprojekt. In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (S. 60-72). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2010). Bausteine zur Konzeption eines Förderkonzepts - Aufgabengestaltung und Anregungen zum propädeutischen forschenden Lernen. In M. Nolte (Hrsg.), *Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematische besonders begabter Schüler* (S. 67-78). Münster: WTM.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2014). Conditions of success of mathematical gifted young children with migration background in a talent search process. Paper presented at the The 8th Conference of MCG. Interantional Group of Creativity and Giftedness. 28, 29, 30 of July, 2014. University of Denver. MCG Conference, Denver.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017). Challenging problems in aregular classroom setting and in aspecial foster programme. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 49,* 121-136.

Pamperien, K. (2004). Strukturerkennung am Dreiecksschema. In M. Nolte (Hrsg.), *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter* (S. 117-147). Hildesheim: Franzbecker.

Pamperien, K. (2008). Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2. Erfahrungen mit Aufgaben zur Förderung besonders begabter Kinder in einer Regelklasse. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (S. 162-172). Berlin: LIT.

Perleth, C. (2010). Checklisten in der Hochbegabungsdiagnostik. In F. Preckel, W. Schneider & H. Holling (Hrsg.), *Diagnostik von Hochbegabung. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik. Tests und Trends.* (*Bd. 8)* (S. 65-87). Göttingen: Hogrefe.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Tübingen: Franke Verlag.

Preckel, F. (2010). Intelligenztests in der Hochbegabtendiagnostik. In F. Preckel, W. Schneider & H. Holling (Hrsg.), *Diagnostik von Hochbegabung. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik. Tests und Trends (Bd. 8)* (S. 19-43). Göttingen: Hogrefe.

Preckel, F. & Brüll, M. (2008). *Intelligenztests.* München: Ernst Reinhardt.

Preckel, F. & Vock, M. (2013). *Hochbegabung -Ein Lehrbuch zu Grundlagen, Diagnostik und Fördermöglichkeiten.* Göttingen: Hogrefe.

Reichenberg, A. & Landau, E. (2009). Families of Gifted Children. In L. V. Shavinina (Hrsg.), *International Handbook on Giftedness* (S. 873-883). Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V.

Renzulli, J. S. (1978). What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan, 60*, 180-184.

Renzulli, J. S. (2012). Reexamining the Role of Gifted Education and Talent Development for the 21st Century: A Four-Part Theoretical Approach. *Gifted Child Quarterly, 56*(3), 150-159.

Rost, D. H. (2000). *Hochbegabte und hochleistende Jugendliche*. Münster: Waxmann.

Rost, D. H. & Schilling, S. R. (2006) Hochbegabung. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (S. 233-245.). Weinheim: Beltz Verlag.

Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. Heidelberg: Universitätsverlag C. Winter.

Scherer, P. (1996). Das NIM-Spiel: Mathematisches Denken auch für Lernbehinderte? In W. Baudisch & D. Schmetz (Hrsg.), *Mathematik und Sachunterricht im Primar- und Sekundarbereich - Beispiele sonderpädagogischer Förderung* (*Bd. IV)* (S. 88-98). Frankfurt. a. M.: Diesterweg.

Scherer, P. (1999). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Fördern durch Fordern*. Leipzig: Klett-Grundschulverlag.

Schnell, R., Hill, P. & Esser, E. (1999). *Methoden der empirischen Sozialforschung*. München: R. Oldenbourg Verlag.

Seel, N. M. (2003). *Psychologie des Lernens*. München: Ernst Reinhardt Verlag.

Sheffield, L. J. (1999a). Serving the Needs of the Mathematically Promising. In L. J. Sheffield (Hrsg.), *Developing Mathematically Promising Students* (S. 43-55.). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Sheffield, L. J. (1999b). When the problem is solved the creativity has just begun. In H. Meissner, M. Grassmann & S. Müller-Philipp (Hrsg.), *Proceedings of the International Conference: Creativity and Mathematics Education* (S. 51-56). Münster: Westfaelische Wilhelms-Universität Muenster.

Silverman, L. K. (2009). The Measurement of Giftedness. In L. V. Shavinina (Hrsg.), *International Handbook on Giftedness* (S. 947-970). Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V.

Singer, F. M., Sheffield L. J., Freiman, V. & Brandl, M. (2016). *Research On and Activities For Mathematically Gifted Students*. Berlin: Springer Nature.

Stamm, M. (2009). *Begabte Minoritäten*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Stein, M. (1996). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. *Journal für Mathematikdidaktik, 17*(2), 123-146.

Stoeger, H., Steinbach, J., Obergriesser, S. & Matthes, B. (2014). What is more important for fourth-grade primary school students for transforming their potential into achievement: the individual or the environmental box in multidimensional conceptions of giftedness? *High Ability Studies, 25*(1), 5-21.

Urban, K. (1990). *Besonders begabte Kinder im Vorschulalter. Grundlagen und Ergebnisse pädagogisch-psychologischer Arbeit*. Heidelberg: HVA Edition Schindele

Vilkomir, T. & O'Donoghue, J. (2009). Using components of mathematical ability for initial development and identification of mathematically promising students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(2), 183-199.

Waldmann, M. & Weinert, F. E. (1990). *Intelligenz und Denken. Perspektiven der Hochbegabungsforschung.* Göttingen: Hogrefe.

Winter, H. (1984). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. *Grundschule*, *16*, 24-29.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins.* Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. & Müller, G. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart: Klett.

Wirtz, M. & Caspar, F. (2002). *Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität.* Göttingen: Hogrefe.

Ziegler, A. & Phillipson, S. N. (2012). Towards a systemic theory of gifted education. *High Ability Studies, 23*(1), 3-30.

Anschrift der Verfasserin

Kirsten Pamperien
Universität Hamburg
Fakultät für Erziehungswissenschaft
Fachbereich 5: Didaktik der gesellschaftswissenschaftlichen und mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer
Von Melle-Park 8
21049 Hamburg
kirsten.pamperien@uni-hamburg.de

8. Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der vorliegenden Dissertation auf der Basis der formulierten Fragestellungen aus Kapitel 3 noch einmal zusammenfassend dargestellt. Die Diskussion beschränkt sich auf die wesentlichen Ergebnisse.

Die ersten beiden Forschungsfragen fokussieren die Aufgabenentwicklung. Zum einen geht es um die Art der Aufgaben, die in Talentsuchen zur Identifikation von mathematisch besonders begabten Grundschüler*innen eingesetzt werden kann, zum anderen darum, wie die Aufgaben gestaltet sein müssen, damit sie sich für deren Förderung eignen und wie sie eingesetzt werden müssen, um den noch jungen Kindern einen Zugang zu mathematischen Problemstellungen zu ermöglichen. Da der Probeunterricht der Talentsuche zum Ziel hat, die teilnehmenden Kinder mit dem Aufgabenformat der in der Förderung eingesetzten Aufgaben vertraut zu machen und gleichzeitig auf den Mathematik-Test vorzubereiten, müssen die eingesetzten Aufgaben dem Aufgabenformat für die Förderung entwickelten Progressiven Forscheraufgaben entsprechen. Die einzige Einschränkung besteht darin, dass es während der Talentsuche eine zeitliche Beschränkung gibt, sodass hier ein besonderes Augenmerk auf genaue Formulierung der Aufgabeninstruktion gelegt werden muss, so wie es in dem ersten Artikel beschrieben wird, der exemplarisch eine Aufgabe der Talentsuche auf ihre Tragfähigkeit untersucht.

Progressive Forscheraufgaben zeigen Charakteristika von Aufgaben mit natürlicher Differenzierung im Sinne Krauthausens und Scherers (2007). Sie unterscheiden sich jedoch hinsichtlich ihrer Komplexität und einiger Ziele, die mit dem Einsatz dieser Aufgaben verbunden sind. Es ist zentral, dass sie nur altersangemessenes mathematisches Vorwissen voraussetzen, da es sich bei der Fördermaßnahme um ein sog. Enrichment-Angebot handelt und nicht um die Vermittlung neuer mathematischer Inhalte, aber gleichzeitig müssen sie hinreichend komplex sein, um die Schüler*innen herauszufordern, da, wie im Einleitungskapitel diskutiert, besondere mathematische Begabung den Kontext anspruchsvoller Aufgaben benötigt (Nolte, 2012). Die Aufgabe muss ein ganzes Problemfeld umfassen und damit die Möglichkeit bieten, von der eingegrenzten Anfangsaufgabe ausgehend zum eigenständigen Finden von Anschlussfragestellungen zu kommen, womit der Heterogenität der Schüler*innen entsprochen werden kann. Ebenso unterstützt das Aufgabenformat das Hineinwachsen in mathematische Forschungsprozesse. Das Heranführen zum Finden dieser Anschlussfragestellungen im Kontext innermathematischer Probleme ist ein fester Bestandteil des Konzepts der Progressiven Forscheraufgaben.

Damit sich die Begabung individuell entfalten kann, ist es hilfreich, wenn die Aufgaben verschiedene Bearbeitungswege auf unterschiedlichen Niveaus zulassen, da damit mathematische Denkprozesse angeregt werden. Muster und Strukturen können erkannt und unterschiedliche heuristische Strategien können genutzt werden. Durch das Aufstellen von Hypothesen und deren Überprüfung werden erste Argumentations- und Beweiskompetenzen angebahnt. Die in der Dissertation untersuchten Ansätze zur Talentförderung und der damit verbundenen Aufgabenentwicklung weisen eine starke Nähe zu aktuell intensiv diskutierten Themen in der Mathematikdidaktik auf, wie z.B. dem Problem solving, aber auch dem Problem posing (siehe z.B. Singer, Ellerton & Cai, 2015), auf die hier aber nicht ausführlicher eingegangen werden soll. Deutlich wird dies durch den Aspekt der Hinführung zu einem präformalen Beweis nach Blum und Kirsch (1991), wobei dies jedoch kein unabdingbares Ziel darstellt, das mit den Aufgaben verfolgt wird. Allerdings kann es in der Interaktion mit der Lehrkraft situationsabhängig angelegt werden. Weiterhin müssen die Aufgaben erste altersangemessene Verallgemeinerungen ermöglichen und initiieren.

Die Herausforderung in der Entwicklung Progressiver Forscheraufgaben liegt also darin, ein altersangemessenes komplexes Problemfeld zu finden, das beim Bearbeiten dieser die Beobachtung und Entwicklung der im Theorierahmen beschriebenen Handlungsmuster nach Kießwetter zulässt.

Progressive Forscheraufgaben bieten die Möglichkeit, das Potenzial der Kinder zu fördern. Dazu bedarf es eines spezifischen Einsatzes im Unterricht: Zu Beginn werden die Schüler*innen detailliert und nicht-redundant in das Thema eingeführt. Anhand ausgewählter Beispiele werden sie zum Kern des mathematischen Problems geführt, bevor sie mit einer eingegrenzten Anfangsaufgabe konfrontiert werden, die es ihnen in der Regel ermöglicht, schnell einen ersten Zugang zu finden und rasch erste Erfolge zu erzielen. Durch diese Vorgehensweise werden die Kinder in die Lage versetzt, weiterführende Hypothesen zu entwickeln und diese zu überprüfen. Aus der Anfangsmotivation heraus entwickelt sich häufig eine Motivation zur Weiterführung dieser Prozesse, im Sinne einer Prozessmotivation (Pamperien, 2008). Wie ausgeführt ist die Offenheit dieser Prozesse bedeutsam, wobei diese zum einen im Bearbeitungsprozess liegt, aber zum anderen auch in der Arbeitsform der Kinder. Ein weiterer wesentlicher Faktor ist, dass die Schüler*innen durch die Lehrkräfte in der Arbeitsphase nach dem Prinzip der minimalen Hilfe begleitet, aber gleichzeitig stets zum schriftlichen Begründen der Überlegungen aufgefordert werden. Die Lehrkräfte werden deshalb darin geschult, die Kinder in ihren Wegen zu begleiten. Sie zeigen allerdings keine Heuristiken auf, wie es häufig mit dem Prinzip der minimalen Hilfe nach Aebli (2006) in Verbindung gebracht wird, sondern stellen Fragen, die die Kinder dazu anregen, ihre Vorgehensweisen zu erläutern oder ihre Überlegungen argumentativ zu vertreten. Auf diese Weise erkennen die Kinder häufig selbst, wenn ihre Überlegungen nicht tragfähig sind. Die Relevanz der Fragestellungen beschreibt Schoenfeld (2016, S.24), der die Lehrkraft als „roving consultant“ bezeichnet, wie folgt: “[…] he is going to continue asking questions, the students begin to defend themselves against them by discussing the answers to them in advance. By the end of the term, this behavior became habitual.”

Der Kommunikation zwischen den Lehrkräften und den Schüler*innen kommt eine genauso große Bedeutung zu, wie der Kommunikation der Schüler*innen untereinander. Deshalb ist die gemeinsame Besprechung der Vorgehensweisen und eingesetzten Strategien im Plenum zu den Progressiven Forscheraufgaben ein wesentlicher Bestandteil im Konzept des Einsatzes dieser. Hier werden alle Ideen der Kinder zusammengeführt, so dass eine Vernetzung der gewonnenen Erkenntnisse zu einer kleinen (altersangemessenen) Theorie stattfinden kann. Auch hier sind die mathematischen und pädagogischen Fachkenntnisse der Lehrkräfte von entscheidender Bedeutung. Zum einen müssen die zum Teil als Strategiekeime formulierten Ideen der Schüler*innen zurückhaltend richtig gedeutet werden, zum anderen muss eine Atmosphäre des Vertrauens geschaffen werden, in der alle Schüler*innen mit ihren Ideen wertgeschätzt werden und erfahren, dass ein wirkliches Interesse an diesen besteht. Hierfür ist ein hohes Maß an professioneller Unterrichtswahrnehmung erforderlich.

Die dritte Frage bezog sich auf die Möglichkeit, Progressive Forscheraufgaben im Regelunterricht einzusetzen, um dort erste Beobachtungen zu mathematischen Begabungen machen zu können. Es wurden einige Progressive Forscheraufgaben in zufällig ausgewählten Klassen in Hamburger Grundschulen in den Klassenstufen drei und vier unterrichtet. Allgemein konnte festgestellt werden, dass alle Schüler*innen zu den Aufgaben einen Zugang gefunden haben. In den beiden Artikeln, die sich mit dieser Thematik genauer befassen, geht es um die Aufgaben *Wege und Ausgänge* und die *Faltaufgabe*. Üblicherweise erzeugen diese sehr anschaulichen Aufgaben in den Fördergruppen eine hohe Motivation, dies konnte auch für die Lernenden der beiden Schulklassen festgestellt werden.

Bei der *Faltaufgabe* unterschieden sich die gezeigten Handlungsmuster im Erkennen von Mustern und Strukturen. So blieben die Kinder in den normalen Schulklassen in der Regel auf der eher anschaulichen Ebene, wobei die Kinder in den Fördergruppen auch lösungsrelevante Muster erkannten. Gleiches ließ sich für den Wechsel der Repräsentationsebenen beobachten. Superzeichenbildung, ein besonders starkes Kriterium für eine besondere mathematische Begabung, wurde auch von einigen wenigen Schüler*innen in den Schulklassen gezeigt, ebenso wie das Rückwärtsarbeiten. Das Aufstellen von Hypothesen wurde in beiden Gruppen durchgeführt, wobei die Kinder in den Schulkassen Probleme hatten, diese zu überprüfen. Verallgemeinerungen konnte man bei ihnen ebenfalls nicht beobachten. Etwa die Hälfte aller Kinder aus den Schulklassen konnte die 4. Lösungsstufe der Faltaufgabe erreichen, ein Kind konnte die 5. Stufe erreichen, wobei in der Fördergruppe alle Kinder Stufe 4 erreichten, die meisten kamen bis zur Stufe 7, die sich bereits nicht mehr handelnd lösen lässt. Einige Kinder konnten die Regel mit Hilfe von paradigmatischen Beispielen verallgemeinern, denn ab der 6. Faltung war es nicht mehr möglich zu falten, ab dann ist es notwendig zu beschreiben oder zu zeichnen, nach welchem Muster sich die Anzahl der Löcher der nächsten Faltung ergeben, d. h. es lässt sich ein Muster finden, das auf alle Faltungen angewandt werden kann.

Bei der Aufgabe *Wege und Ausgänge* lösten fast alle Kinder die eingegrenzte Eingangsaufgabe richtig, wobei nur knapp die Hälfte der Kinder aus den Schulkassen eine Begründung für ihre Lösung aufschreiben konnte. Ein richtiges Muster konnte allerdings von 60% der Schüler*innen aus den Schulklassen angegeben werden. Es bestätigte sich bei dieser Aufgabe die Beobachtung, die schon bei der Faltaufgabe gemacht werden konnte, dass es in beiden Gruppen Schüler*innen gab, die ein Superzeichen erkannten, aber die Verallgemeinerung wurde wieder nur in den Fördergruppen an der Universität beobachtet. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass diese Ergebnisse darauf hindeuten, dass Progressive Forscheraufgaben auch in Regelklassen eingesetzt werden können, wobei diese Kinder für die Bearbeitung mehr Zeit als Kinder aus der Fördergruppe benötigen. Des Weiteren weisen die Ergebnisse darauf hin, dass alle Schüler*innen einen Zugang zu den Aufgaben fanden und in der Lage waren, Handlungsmuster in unterschiedlichen Ausprägungen zu zeigen. Erste Hinweise auf eine mathematische Begabung ließen sich bei einigen Schüler*innen in den normalen Schulklassen durch den Einsatz dieser Problemstellungen finden, insbesondere durch die Analyse des Lösungsverhaltens der Kinder auf unterschiedlichen Niveaus. Mit einem in der Schule zusätzlich durchgeführter Intelligenztest (CFT 20 R) wurden einige Kinder als hochbegabt bestätigt, die ansonsten nicht identifiziert worden wären.

Ausgehend von diesen Überlegungen beschäftigte sich die vierte Frage damit, wie ein Beobachtungsraster gestaltet sein muss, um mathematische Begabung bei Grundschulkindern im Gruppenunterricht zu erfassen. Da, wie oben beschrieben, Progressive Forscheraufgaben für die Förderung und die Identifikation besonders begabter Kinder erprobt sind, lag es nahe, diese auch für die Beobachtungsraster zu nutzen. Wesentlich für deren Konzeption ist die Sachanalyse der Progressiven Forscheraufgabe, die es verunmöglicht, ein allgemeines Beobachtungsraster über verschiedene Progressive Forscheraufgaben zu entwickeln. Nur durch das genaue Durchdringen der Aufgabe ist es möglich, sich dem Schulkindern möglichen Lösungsraum zu nähern und zu erwartende Herangehensweisen zu formulieren. Die wesentliche Arbeit zur Entwicklung des Beobachtungsrasters besteht also zunächst in der Analyse des mathematischen Hintergrunds des Problems sowie der zugehörigen möglichen Handlungsmuster. Zunächst sollen die Beobachtungen Hinweise auf die Nutzung von Heuristiken bei Grundschulkindern geben, die auf ein mathematisches Potenzial schließen lassen, daher müssen die Aufgaben so gewählt sein, dass zur Bearbeitung dieser, bestimmte Handlungsmuster günstig sind. Die Verwendung dieser Handlungsmuster im Zusammenhang mit herausfordernden Aufgaben kann man als einen Hinweis auf ein mathematisches Potenzial deuten. Um dies beobachten zu können, müssen die Beobachter*innen sowohl fachlich als auch pädagogisch geschult sein. Des Weiteren hat sich gezeigt, dass der Umgang mit den Beobachtungsrastern in der Gruppe für die Beobachter*innen effizient sein sollte. Es sollten nicht zu viele Handlungsmuster überprüft werden, da eine teilnehmende Beobachtung nicht zu komplex sein darf, um zum Beispiel der Gruppengröße gerecht werden zu können.

9. Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der vorliegenden Studien zeigen, dass es möglich ist, eine mehrstufige Talentsuche zur Identifikation von mathematisch besonders begabten Grundschüler*innen zu entwickeln, in deren Zentrum die Entwicklung geeigneter Aufgaben steht. Durch die intensive Auseinandersetzung mit den von den Kindern gezeigten Handlungsmustern ist es gelungen, ein Aufgabenformat zu entwickeln, das mathematisch begabte Kinder herausfordert, aber gleichzeitig im regulären Unterricht eingesetzt werden kann, u. a. auch um Hinweise auf eine besondere Begabung zu erhalten. Im Mittelpunkt der dargestellten Studien stehen Progressive Forscheraufgaben, deren entscheidende Herausforderung die Bestimmung der geeigneten Komplexität des Ausgangsproblems darstellt. Diese Aufgaben haben das Potenzial, sowohl zur Diagnostik als auch zur Förderung in einem „Enrichment"-Angebot eingesetzt werden zu können. Progressive Forscheraufgaben sollen den Schüler*innen die Möglichkeit geben, in einfache mathematische Forschungsprozesse hineinzuwachsen. Sie sollen zunehmend vertraut werden mit typischen mathematischen Denkprozessen und Tätigkeiten wie der Entwicklung von Hypothesen bzw. Vermutungen, deren Überprüfung und der Entwicklung einer Haltung, die zu Verallgemeinerungen von Überlegungen führen kann.

Auch für die zukünftige Arbeit erscheint es nötig, die Progressiven Forscheraufgaben weiterzuentwickeln, insbesondere in Bezug auf die Handlungsmuster nach Kießwetter. Eine Weiterentwicklung ist sowohl für einen möglichen Schuleinsatz, aber auch für die Talentsuche nötig, um über ein größeres Repertoire an Aufgaben zu verfügen.

Der Hamburger Bildungsplan von 2018 für die Grundschule schreibt in Absatz 1.2. vor, dass alle Schüler*innen gleichermaßen differenziert gefördert werden sollen. Weiter steht dort, dass alle Schüler*innen von den Lehrenden entsprechend ihrer Persönlichkeit sowie ihren Lernvoraussetzungen und Potenzialen in der Kompetenzentwicklung bestmöglich unterstützt werden sollen. Das Augenmerk gilt der Schaffung von Lern- und Erfahrungsräumen, in denen unterschiedliche Potenziale entfaltet werden können, dabei wird die individuelle Förderung in den Mittelpunkt gestellt, wobei auch kooperative Formen zu beachten sind. Progressive Forscheraufgaben könnten den Schüler*innen Gelegenheit geben, ihr mathematisches Potenzial zu entfalten und helfen, die allgemeinen prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen, wie mathematisch zu argumentieren und zu kommunizieren oder eben auch Probleme zu lösen, zu realisieren. Durch eine differenzierende Aufgabe, die die mathematisch begabten Schüler*innen herausfordert, aber der gesamten heterogenen Gruppe einen Zugang zu interessanten mathematischen Fragestellungen ermöglicht, kann den Bildungsplänen in Hamburg bzw. den bundesweiten Standards entsprochen werden. Auch affektive neben kognitiven Aspekten können durch diese Art der Aufgaben gefördert werden. So ließ sich in den Einsätzen in der Regelklasse beobachten, dass auch Kinder, die nicht motiviert am Mathematikunterricht teilnahmen, an den Progressiven Forscheraufgaben erfolgreich und mit Freude arbeiteten.

Für eine prozessbezogene Diagnostik wäre es sinnvoll, einen Aufgabensatz zu entwickeln, der auf bestimmte Handlungsmuster fokussiert. Hierzu wäre es notwendig, auch die Lehrkräfte im Umgang mit den Aufgaben zu schulen bzw. für die möglichen besonderen Ideen der Kinder zu sensibilisieren. Gleiches gilt für den Einsatz von Beobachtungsrastern in Regelklassen. Dieses Instrument kann vielfältig eingesetzt werden. Es bietet die Möglichkeit, die Bewertung einer Lehrkraft zur Leistungsfähigkeit einzelner Kinder zu überprüfen und ggf. zu korrigieren. Wenn es im Unterrichtsalltag möglich ist, könnte eine regelmäßige Nutzung des Rasters vermutlich zu einer deutlich verbesserten Einschätzung der Potenziale der Schüler*innen führen. Eine zu überprüfende Hypothese wäre, ob der regelmäßige Einsatz einer Progressiven Forscheraufgabe und damit auch des Beobachtungsrasters den Lehrkräften Freiräume gibt, die Schüler*innen beim Bearbeiten dieser zu beobachten. Hierzu müsste ein Aufgabenset entwickelt und erprobt werden, das zum Beispiel Schwerpunkte auf unterschiedliche Handlungsmuster legt, so dass deutlich wird, über welche Handlungsmuster die Kinder verfügen und welche heuristischen Strategien man den Kindern näherbringen sollte. So könnten im Sinne einer Prozessdiagnostik nicht nur Hinweise auf ein besonderes mathematisches Potenzial erkannt werden, sondern für alle Kinder eine Entwicklung dieser innerhalb einer mathematisch forschenden Tätigkeit angestrebt werden. Im Regelunterricht wären neben dem Aspekt der Effizienz des Beobachtungsrasters auch weitere Fragen bedeutsam, wie dem des Umgangs mit der Unsicherheit, die durch komplexe Problemstellungen sowohl bei den Schüler*innen als auch bei den Lehrkräften ausgelöst werden kann. Ebenfalls von Bedeutung ist die Sensibilisierung für Gruppen, denen es schwerfallen kann, ihr Potenzial zu zeigen. Hierzu wäre es günstig ein Konzept für eine Fortbildung zu entwickeln, dass sich unter anderem auf das „Teaching Actions for Problemsolving“ von Schoenfeld (2016, S. 25) stützen könnte.

10. Literaturverzeichnis

Aebli, H. (2006). *Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Medien und Inhalte didktischer Kommunikation, der Lernzyklus* (13. Auflage). Stuttgart: Klett-Cotta.

Aßmus, D. (2017). *Mathematische Begabung im frühen Grundschulalter unter besonderer Berücksichtigung kognitiver Merkmale*. Münster: WTM Verlag.

Aßmus, D. & Förster, F. (2012). Fähigkeiten zur Analogieerkennung und zum Transfer mathematischer Strukturen bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 89-92). Münster: WTM Verlag.

Bardy, P. & Hrzan, J. (2005). *Aufgaben für kleine Mathematiker mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen*. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Bauersfeld, H. (1978). Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht. Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht* (S. 158-170). Hannover: Schroedel.

Bauersfeld, H. (1993). Mathematische Lehr-Lern-Prozesse bei Hochbegabten - Bemerkungen zu Theorie, Erfahrungen und möglicher Förderung. *Journal für Mathematikdidaktik, 14*(3), 243-266.

Bauersfeld, H. (2000). Fachübergreifende Reformideen - diskutiert am Beispiel des Mathematikunterrichts. In W. Köhnlein & H. Schreier (Hrsg.), *Innovation Sachunterricht* (S. 65-84). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München: Luchterhand.

Behörde für Bildung und Sport, Amt für Bildung, Hamburg (Hrsg.) (2003). *Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule*. O. V.

S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.) (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und - referendare. Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung.* Münster: Waxmann

Blömeke, S., Busse, A., Kaiser, G., König, J. & Suhl, U. (2016). The relation between content-specific and general teacher knowledge and skills. *Teaching and Teacher Education, 56*, 35-46. doi:https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.02.003

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie, 223*(1), 3-13. doi:10.1027/2151-2604/a000194

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 183–203.

Cao, T. H., Jung, J.Y. & Lee, J (2017). Assessment in Gifted Eduction: A Review of the Literature From 2005 to 2016. *Journal of Advanced Academics, 28*, 163-203.

Dassow, P. (1983). *Untersuchungen zur Entwicklung eines differentialdiagnostischen Verfahrens zur Früherfassung mathematisch begabter Schüler im Alter von 9 bis 10 Jahren. Dissertation*. Potsdam: Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der Deutschen Demokratischen Republik.

Feger, B. & T. M. Prado (1998). *Hochbegabung. Die normalste Sache der Welt*. Darmstadt: Primus Verlag.

Fielker, D. (1997). *Extending Mathematical Ability Through Whole Class Teaching*. London: Hodder & Stoughton.

Freie und Hansestadt Hamburg (Hrsg.) (2011). *Bildungsplan Grundschule Mathematik*. O. V.

Fritzlar, T. (2013a). Mathematische Begabungen im Grundschulalter. Ein Überblick zu aktuellen mathematikdidaktischen Forschungsarbeiten. *mathematica didactica, 36,* 5-27.

Fritzlar, T. (2013b). Robert – Zur Entwicklung mathematischer Expertise bei Kindern und Jugendlichen. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven* (S. 41–59). Münster: WTM.

Fritzlar, T. (2019). Gedankensplitter zum „Umkehren mentaler Prozesse“ – gedacht zur Anregung weiterer Diskussionen. In M. Nolte (Hrsg.), *„Was macht Mathematik aus?“ - Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler. Festschrift anlässlich des 80. Geburtstages von Professor Dr. Karl Kießwetter.* (2. veränderte Auflage, S. 26-38). Münster: WTM Verlag.

Fritzlar, T. & Nolte, M. (2019). Research in mathematical giftedness in Germany - Looking back and ahead. In M. Nolte (Hrsg.), *The 11th International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness (MCG11). Including the highly gifted and creative students: Current ideas and future directions* (S. 8-20). Münster: WTM Verlag.

Fuchs, M. (2006). V*orgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen - Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile*. Münster: LIT.

Gagné, F. (2004). Transforming gifts into talents: the DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies, 15*(2), 119-148.

Gagné, F. (2010). Begabungen in Talente umsetzen. Kurze Übersicht über das differenzierte Modell von Begabung und Talent (DMGT2.0). *SwissGifted, 3*(1), 14-19.

Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Student in Mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14-17.

Hanses, P. & Rost, D. H. (1998). Das "Drama" der hochbegabten Underachiever - "Gewöhnliche" oder "außergewöhnliche" Underachiever?. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *12*(1), 53-71.

Hany, E. A. (1998). Gifted Children in the Classroom: Which Diagnostic Skills do Teachers need? Oxford/UK: European Council for High Ability.

Heinze, A. (2005). *Lösungsverhalten mathematisch begabter Grundschulkinder - aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen.* Münster: LIT-Verlag.

Heller, K. (1986). Psychologische Probleme der Hochbegabungsforschung. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 18*, 335-361.

Heller, K. A. (1991). The Nature and Development of Giftedness: A Longitudinal Study. *European Journal of High Ability, 2*(2), 174-188. doi:10.1080/0937445910020207

Heller, K.A. (1996). Begabtenförderung - (k)ein Thema in der Grundschule? *Grundschule*, *28*(5), 12-14.

Heller, K. A. (2004). Identification of Gifted and Talented Students. *Psychology Science, 46*(3), 302 - 323.

Heller, K. A. (2005). *Aktuelle Hochbegabungsmodelle und ihre Bedeutung für das Erkennen und Fördern hoch begabter Kinder und Jugendlicher*. DGhK-Vortrag am 14. September 2005 in Frankfurt/Main.

Heller, K. A. & Perleth, C. (2008). The Munich High Ability Test Battery (MHBT): A multidimensional, multimethod approach. *Psychology Science Quarterly, 50*(2), 173-188.

Heller, K. A., Reimann, R. & Senfter, A. (2005). *Hochbegabung im Grundschulalter. Erkennen und Fördern.* Münster LIT Verlag.

Hengartner, E., Hirt, U. & Wälti, B. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder*. Frankfurt a.M.: Peter Lang.

Käpnick, F. (2001). *Mathe für kleine Asse (3/4)*. Berlin: Volk und Wissen.

Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern - ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. *Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht, 38*(5), 300-306.

Kießwetter, K. (1988). *Das Hamburger Modell. Zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern*. Universität Hamburg.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren - und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? - Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (S. 128-153). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Kießwetter, K. & Nolte, M. (1996). Analysen: Förderung von mathematisch begabten Grundschulkindern. Einführung. *ZDM, 28*(5), 129-130.

Krause, W., Seidel, G., & Heinrich, F. (2004). Multimodalität am Beispiel mathematischer Anforderungen. *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät*, *64*, 135-152.

Krause, W., Seidel, G., Heinrich, F., Sommerfeld, E., Gundlach, W., Ptucha, J., Schack, B. & Goertz, R. (1999). Multimodale Repräsentation als Basiskomponente kreativen Denkens. In B. Zimmermann, G. David, T. Fritzlar, F. Heinrich, & M. Schmitz (Hrsg.), *Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften. Tagungsband zum interdisziplinären Symposium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, Abteilung Didaktik (*9. 7. -11. 7. 1999, S. 129-142). Jena: Friedrich-Schiller-Universität Jena.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik.München:Spektrum

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.

Lack, C. (2010). *Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr.* Wiesbaden: Springer Vieweg

Leikin, R. (2011). Teaching the Mathematically Gifted: Featuring a Teacher. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11*(1), 78-89. doi:10.1080/14926156.2011.548902

Leikin, R., Berman, A., Alabed, R. & Jouaneh, S. (2016). Middle Eastern Special Schools. In B. R. Vogeli (Hrsg.), *Special Secondary Schools for the Mathematically and Scientifically Talented: An International Panorama* (S. 117-158). New Jersey: World Scientific.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of Teachers' Conceptions Through Learning and Teaching: The Meaning and Potential of Multiple-Solution Tasks. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 203-223. doi:10.1080/14926150903314305

Leiß, D. (2007). *„Hilf mir es selbst zu tun." Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren.* Berlin: Franzbecker.

Leuders, T. & Prediger, S. (2017). Flexibel differenzieren erfordert fachdidaktische Kategorien. In J. Leuders, T. Leuders, S. Prediger & S. Ruwisch (Hrsg.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen: Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung* (S. 3-16). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Nolte, M. (1999). Are elementary school pupils already able to perform creatively substantial bricks of knowledge? - A report on first striking findings from working with smaller groups of highly gifted and motivated elementary school pupils aged 8-10. In H. Meissner, M. Grassmann & S. Mueller-Philipp (Hrsg.), *Creativity and Mathematics Education* (S. 142-145). Münster: Westfälische Wilhelms-Universität.

M. Nolte (Hrsg.), (2004). *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter*. Hildesheim: Franzbecker.

Nolte, M. (2006). Waben, Sechsecke und Palindrome. Zur Erprobung eines Problemfelds in unterschiedlichen Aufgabenformaten. In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), *Wie fördert man mathematisch besonders begabte Kinder? - Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (S. 93-112). Offenburg: Mildenberger Verlags GmbH.

Nolte, M. (2012). Mathematically gifted young children - questions about the development of mathematical giftedness. In H. Stöger, A. Aljughaiman & B. Harder (Hrsg.), *Talent development and excellence* (S. 155 -176). Berlin, London: Lit Verlag.

Nolte, M. & Kießwetter, K. (1996). Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? Ein Bericht über einschlägige Überlegungen und erste Erfahrungen. *ZDM, 5*, 143-157.

Nolte, M. & Koch S. (2021). *Professionelle Kompetenzen zum Problemlösen entwickeln - Beobachtungen aus einer interdisziplinären Veranstaltung.* Vorgesehen zum Druck.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2010). Bausteine zur Konzeption eines Förderkonzepts - Aufgabengestaltung und Anregungen zum propädeutischen forschenden Lernen. In M. Nolte (Hrsg.), *Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schüler* (S. 67-78). Münster: WTM.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2014). *Conditions of success of mathematical gifted young children with migration background in a talent search process.* Paper presented at the 8th conference of the International Group for Mathematical Creativity and Giftedness, Denver, CO.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017a). Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme. *ZDM, 49*(1), 121-136. doi:10.1007/s11858-016-0825-5

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017b). Mathematisch besonders begabte Kinder. Förderung im inklusiven Unterricht mit progressiven Forscheraufgaben. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen - mit allen Kindern rechnen* (S. 98-109). Frankfurt am Main: Grundschulverband e.V.

Pamperien, K. (2004). Strukturerkennung am Dreiecksschema. In M. Nolte (Hrsg.), *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter* (S. 117-147). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Pamperien, K. (2008). Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2. Erfahrungen mit Aufgaben zur Förderung besonders begabter Kinder in einer Regelklasse. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (S. 162-172). Berlin: LIT Verlag.

Paz-Baruch, N., Leikin, M., Aharon-Peretz, J. & Leikin, R. (2014). Speed of information processing generally gifted and excelling-in-mathematics adolescents. *High Ability Studies, 25*(2), -167.

Perleth, C. (2010). Checklisten in der Hochbegabungsdiagnostik. In F. Preckel, W. Schneider & H. Holling (Hrsg), *Diagnostik von Hochbegabung. Jahrbuch der pädagogisch-psychlogischen Diagnodtik. Tests und Trends. Neue Folge Band 8* (S. 65-87). Göttingen: Hogrefe.

PIK AS (2011). *Haus 9: Lernstände wahrnehmen. Beobachtungsbögen.* Dortmund: O. V.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens.*Tübingen: A. Franke Verlag

Preckel, F. & Baudson, T. G. (2013). *Hochbegabung - Erkennen, Verstehen, Fördern*. München: Verlag C.H.Beck.

Preckel, F. & Vock, M. (2013). Hochbegabung.Göttingen: Hogrefe

Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1996). *Aufgaben zur Differenzierung*. Hannover: Schroedel.

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln.* Berlin: Springer.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan*, *60*, 180-184, 261.

Renzulli, J. S. (1986). The three-ring conception of giftedness: A developmental model for creative prductivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Hrsg.), *Conceptions of giftedness* (S. 53-92). New York: Cambridge University Press.

Renzulli, J. S. (2012). Reexamining the Role of Gifted Education and Talent Development for the 21st Century: A Four-Part Theoretical Approach. *Gifted Child Quarterly, 56*(3), 150-159. doi:DOI: 10.1177/0016986212444901

Rost, D. H. (2008). Multiple Intelligenzen, multiple Irritationen. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 22*(2), 97-112.

Rost, D. H. (2009). *Intelligenz. Fakten und Mythen*. Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Ruwisch, S. (2003). Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule - Einführung. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 5-14). Offenburg: Mildenberger.

Schindler, M. & Rott, B. (2019). Mathematische Begabungen inklusiv(e): Schulische Inklusion mit Blick auf mathematische Begabungen. In K. Pamperien & A. Pöhls (Hrsg.), *Alle Talente wertschätzen - Grenz- und Beziehungsgebiete der Mathematikdidaktik ausschöpfen* (S. 200-212). Münster: WTM.

Schnell, R., Hill, P. & Esser, E. (1999). *Methoden der empirischen Sozialforschung.* München: R. Oldenbourg Verlag.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1-38.

Seel, N. M. (2003). *Psychologie des Lernens*. München: Reinhardt Verlag.

Singer, M. & Voica, C. (2017). When Mathematics Meets Real Objects: How Does Creativity Interact with Expertise in Problem Solving and Posing? R. Leikin & B. Sriaman (Hrsg.), *Creativity and Giftedness* (S.75-103). Basel: Springer.

F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Hrsg.) (2015). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice.* New York: Springer.

Sheffield, L. J. (1999). When the problem is solved the creativity has just begun. In H. Meissner, M. Grassmann & S. Müller-Philipp (Hrsg.), *Creativity and Mathematics Education* (S. 51-56). Münster: Westfaelische Wilhelms-Universität.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the Challenge in Mathematics Developing Mathematical Promise in K-Students*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Shell Centre for Mathematical Education (Hrsg.) (1984). *Problems with Patterns and Numbers: Masters for Photocopying.* Nottingham: University of Nottingham.

Sriraman, B., Haavold, P. & Lee, K. (2013). Mathematical creativity and giftedness: a commentary on and review of theory, new operational views, and ways forward. *ZDM*, *45*(2), 215-225. doi:10.1007/s11858-013-0494-6

Stender, P. (2016). *Wirkungsvolle Lehrerinterventionsformen bei komplexen Modellierungsaufgaben*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Stern, W. (1916). Psychologische Begabungsforschung und Begabungsdiagnose. In P. Petersen (Hrsg.), *Der Aufstieg der Begabten: Vorfragen* (S. 105–120). Leipzig, Berlin: Teubner.

Sternberg, R. J. (1981). A componential theory of intellectuell giftedness. *Gifted Child Quaterly, 25*, 86-93.

Ulm, V. (2009). Eine natürliche Beziehung. Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 89-105). Hamburg: Körber-Stiftung.

Urban, K. (1990). *Besonders begabte Kinder im Vorschulalter. Grundlagen und Ergebnisse pädagogisch-psychologischer Arbeit*. Heidelberg: HVA Edition Schindele.

Vorhölter, K. (2020). *Metakognitive Gruppenstrategien beim mathematischen Modellieren - Konzeptualisierung, Messung und Förderung*. Unveröffentlichte Habilitationsschrift.

Wagner, H. (1986). Förderung mathematischer Talente in den USA: Das Beispiel des Johns Hopkins Center for Talented Youth. *ZDM, 18*(4), 126-130.

Wagner, H. & Zimmermann, B. (1986). Identification and Fostering of Mathematically gifted Students. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 243-259.

Waldmann, M. & Weinert, F. E. (1990). *Intelligenz und Denken. Perspektiven der Hochbegabungsforschung*. Göttingen: Verlag für Psychologie Dr. C. J. Hogrefe.

Wieczerkowski, W. & Prado, T. M. (1993). Programs and strategies fornuturing talents/gifts in mathematics. In K. A. Heller, F. J. Mönks & A. H. Passow (Hrsg.), *International handbook of research and development of giftedness and talent* (S. 443-451). Oxford: Pergamon Press.

Wieczerkowski, W. & Wagner, H. (1985). Diagnostik von Hochbegabung. In R. S. Jäger, R. Horn & K. Ingenkamp (Hrsg.), *Tests und Trends 4. Jahrbuch der Pädagogischen Diagnostik* (S. 109-134). Weinheim: Beltz Verlag.

Wieczerkowski, W., Wagner, H. & Birx, E. (1987). Die Erfassung mathematischer Begabung über Talentsuchen. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 8*(3), 217-226.

Winter, H. (1984). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. *Grundschule, 16*, 24-29.

Winter, H. (1987). *Mathematik entdecken*. Bielefeld: Cornelsen Scriptor.

Wittmann, E. C. (2000). *Developing Mathematics Education in a Systemic Process.* Paper presented at the ICME 9. The 9th International Congress on Mathematical Education, Tokyo.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart: Klett.

11. Abbildungsverzeichnis

Anhang

A. Zusammenfassung

Die kumulative, publikationsbasierte Dissertation befasst sich mit der Aufgabenentwicklung für die Diagnostik und die Förderung von mathematisch begabten Grundschulkindern, sowie der Entwicklung eines Beobachtungsrasters als Evaluationsinstrument zur Unterstützung der Identifikation von mathematisch besonders begabten Grundschüler*innen.

Hierfür werden zunächst die der Arbeit zugrundeliegenden Theorien der mathematischen Begabung und deren Identifikation erläutert, wobei ein besonderer Fokus auf die Progressiven Forscheraufgaben und den Einsatz von Checklisten gelegt wird.

Im Rahmen von sechs Publikationen werden die genannten Inhalte untersucht. Die ersten Studien beschäftigen sich mit der Entwicklung von Progressiven Forscheraufgaben im Rahmen einer Talentsuche für mathematisch begabte Grundschüler*innen und der Entwicklung eines Konzepts zum Einsatz dieser im Förderunterricht für mathematisch begabte Grundschulkinder der Klassen drei und vier. Im Weiteren wird aufgezeigt, dass Progressive Forscheraufgaben auch erfolgreich in der Regelklasse eingesetzt werden können. In der letzten Studie wird das Beobachtungsraster als ein neuartiges Evaluationsinstrument zur Unterstützung bei der Identifikation von mathematischer Begabung bei Grundschüler*innen untersucht.

An den in dieser Arbeit dargestellten Ergebnissen lässt sich erkennen, dass sich in der Bearbeitung Progressiver Forscheraufgaben Handlungsmuster beobachten lassen, die einen Hinweis auf ein mathematisches Potenzial geben können. Um diese Handlungsmuster strukturiert zu erfassen, eignet sich ein aufgabenspezifisches Beobachtungsraster, das zur Prozessdiagnostik in einer Gruppe eingesetzt werden kann.

B English Summary

This cumulative, publication-based dissertation deals with the development of tasks for the diagnosis and fostering of mathematically gifted elementary school children as well as the development of an Observation Grid as an evaluation tool to support the identification of mathematically gifted elementary school students.

In this regard, at the beginning, the underlying theories of mathematical giftedness and its identification are explained, with a special focus on the Progressive Investigating Problems and the use of checklists.

Within the framework of six publications, the mentioned contents is examined. The first studies deal with the development of Progressive Investigating Problems in the context of a talent search for mathematically gifted elementary school students and the development of a concept for using those tasks in specific lessons for mathematically gifted elementary school children of grade three and four. Hereinafter, it is demonstrated that Progressive Investigating Problems can also be applied successfully in the regular classroom teaching. The last study examines the Observation Grid as a new evaluation tool to assist in the identification of mathematical giftedness of elementary school students.

From the results presented in this paper, it can be concluded that patterns of action can be observed with students' working on Progressive Investigating Problems and provide indications for mathematical potential. In order to record these patterns of action in a structured way, a task-specific Observation Grid is suitable, which can be applied with process diagnostics in a group.

C Auflistung der Einzelarbeiten in dieser Dissertation

Pamperien, K. (2004). Strukturerkennung am Dreiecksschema. In M. Nolte (Hrsg.), *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter* (S. 117-147). Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Pamperien, K. (2008). Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2. Erfahrungen mit Aufgaben zur Förderung besonders begabter Kinder in einer Regelklasse. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (S. 162-172). Berlin: LIT Verlag.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2010). Bausteine zur Konzeption eines Förderkonzepts - Aufgabengestaltung und Anregungen zum propädeutischen forschenden Lernen. In M. Nolte (Hrsg.), *Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematische besonders begabter Schüler* (S. 67-78). Münster: WTM

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017a). Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme. [journal article]. ZDM, 49(1), 121-136. doi: 10.1007/s11858-016-0825-5

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017b). Mathematisch besonders begabte Kinder. Förderung im inklusiven Unterricht mit progressiven Forscheraufgaben. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen.* Frankfurt: Grundschulverband e.V.

Pamperien, K. (2021). Konstruktion und empirische Überprüfung der Güte eines Beobachtungsrasters zum Erkennen besonderer mathematischer Begabung im Grundschulalter im Rahmen eines Talentsucheprozesses; angenommen für: mathematica didactica 44(1), online first

D Liste der Publikationen von Kirsten Pamperien

Nolte, M. & Pamperien, K. (2021). Ein guter Unterricht braucht gute Lehrkräfte – Beobachten lernen als Teil des Lehrerprofessionswissen. In A. Pilgrim, M. Nolte and T. Huhmann , *Mathematiktreiben mit Grundschulkindern – Konzepte statt Rezepte* (S. 115-126). Münster: WTM im Druck

Pamperien, K. & Nolte, M. (2021). Mathematik ist PriMa – Begabtenförderung in der Grundschule und darüber hinaus. In S.Schiemann (Hrsg.), *Interesse für Mathematik wecken – Talente fördern*, Springer Spektrum in Vorbereitung

Pamperien, K. (2021). Konstruktion und empirische Überprüfung der Güte eines Beobachtungsrasters zum Erkennen besonderer mathematischer Begabung im Grundschulalter im Rahmen eines Talentsucheprozesses; angenommen für: mathematica didactica 44(1), online first)

Pamperien K. & Pöhls A. (2019). Förderung mathematisch besonders begabter Grundschulkinder- am Beispiel des Uni-Projektes der Maßnahme PriMa. In K. Pamperien & A. Pöhls (Hrsg.), *Alle Talente wertschätzen - Grenz- und Beziehungsgebiete der Mathematikdidaktik ausschöpfen* (S. 200-212). Münster: WTM.

Nolte, M., Pamperien, K. & Vorhölter, K. (2019). Research and development tasks within the framework of the PriMa-project in Hamburg. In M. Nolte (Hrsg.*), Including the Highly Gifted and Creative Students – Current Ideas and Future Directions. Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness* (S. 381–384). Münster: WTM.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017a). Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme. ZDM, 49(1), 121-136. doi:10.1007/s11858-016-0825-5

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017b). Mathematisch besonders begabte Kinder. Förderung im inklusiven Unterricht mit progressiven Forscheraufgaben. In: Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. Hrsg., *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen.* Frankfurt: Grundschulverband e.V.

Heddewig, U., Nolte, M. & Pamperien, K. (2015). Fragen im Zusammenhang mathematisch besonders begabter Kinder - Beispiele aus dem PriMa-Projekt. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 1142-1144). Münster: WTM-Verlag.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2014). Conditions of success of mathematical gifted young children with migration background in a talent search process. In Proceedings of the 8th Conference of MCG the International Group for Mathematical Creativity and Giftedness, 2014 (S. 91-95). Denver, Co.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2010). Bausteine zur Konzeption eines Förderkonzepts – Aufgabengestaltung und Anregungen zum propädeutischen forschenden Lernen. In M. Nolte (Hrsg.): *Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematische besonders begabter Schüler* (S.67-78).Münster: WTM.

Pamperien, K. (2008). Herausfordernde und fördernde Aufgaben für alle? Teil 2 Überlegungen zu unserem Förderkonzept. In M. Fuchs und F. Käpnick (Hrsg.): *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (S.162-172). Berlin:LIT Verlag.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2006). Besondere mathematische Begabung im Grundschulalter – ein Forschungs- und Förderprojekt. In H. Bauersfeld und K. Kießwetter (Hrsg.): *Wie fördert man mathematisch besonders begabte Kinder?* (S.60-72). Offenburg: Mildenberger Verlags GmbH

Pamperien, K. (2005). Fragen zur Problematik von Talentsuche bei mathematisch besonders begabten Grundschulkindern, 2.Teil. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2004*, Vorträge auf der 38. Tagung für Didaktik der Mathematik in Augsburg (S.433-437). Hildesheim: Franzbecker

Pamperien, K. (2004). Strukturerkennung am Dreiecksschema. In M. Nolte (Hrsg.): *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter* (S.117 -147). Hildesheim Berlin: Franzbecker

Nolte, M. & Pamperien, K. (2004). Bewertung der Mathe-Treffs. In M. Nolte (Hrsg.): *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter* (S.203-206) und (S.218 -223). Hildesheim Berlin: Franzbecker

Wichtmann-Mbodjé, S. & Pamperien, K. (1995). Auch Mädchen mögen Mathe! In: B. Zimmermann (Hrsg.): *Kaleidoskop elementarmathematischen Entdeckens* (S.191-194). Bad Honnef: Franzbecker.

Kießwetter, K., Stüven, N. & Pamperien, K. (1988). Bettina und Heike auf Erfolgskurs, Mathematik Lehren 28 Juni . (S.44-47)

E Erklärung über die Eigenständigkeit der Dissertation

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass die Dissertation von mir selbst verfasst wurde, und dass keine als die angegebenen Hilfsmittel von mir genutzt wurden.

Hamburg, 19.03.2021

Ort, Datum Unterschrift

Erklärung

Ich erkläre, dass ich keine kommerzielle Promotionsberatung in Anspruch genommen habe, und dass ich mich bisher keiner weiteren Doktorprüfung unterzogen habe. Insbesondere habe ich die Dissertation in der gegenwärtigen oder einer anderen Fassung an keiner anderen Fakultät eingereicht.

Hamburg, 19.03.2021

Ort, Datum Unterschrift