

# Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung

---

Dissertation

(Monografie)

zur Erlangung des akademischen Grades

des Doctor rerum oeconomicarum

(Dr. rer. oec.)

an der Fakultät für Betriebswirtschaft

der Universität Hamburg

vorgelegt von

**Corinna Burckhardt**

geb. in Seeheim-Jugenheim

Hamburg, April 2021

Vorsitzender: Prof. Dr. Martin Spindler

Erstgutachter: Prof. Dr. Michael Merz

Zweitgutachter: Prof. Dr. Bernhard Arnold

Datum der Disputation: 13.07.2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VI</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Abkürzungen und Akronyme</b>	<b>IX</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen der Schadenreservierung</b>	<b>5</b>
2.1 Der Prozess der Schadenabwicklung . . . . .	5
2.2 Abwicklungsdreieck und Notation . . . . .	7
2.3 Verfahren in der Schadenreservierung . . . . .	10
2.3.1 Das Chain-Ladder-Verfahren . . . . .	10
2.3.2 Das BORNHUETTER-FERGUSON-Verfahren . . . . .	15
2.3.3 Das London-Chain-Ladder-Verfahren . . . . .	19
2.3.4 Der Glättungsansatz von SHERMAN . . . . .	20
2.3.5 Die geometrische Separationsmethode von TAYLOR . . . . .	22
2.3.6 Das ANOVA-Schadenreservierungsverfahren von KREMER . . . . .	25
2.3.7 Ein auf der Hoerl-Kurve basierendes Schadenreservierungsverfahren . . . . .	26
2.3.8 Das additive Verfahren . . . . .	28
2.3.9 Das Cape-Cod-Verfahren . . . . .	29
<b>3 Die Theorie unscharfer Mengen</b>	<b>32</b>
3.1 Unscharfe Mengen . . . . .	32
3.1.1 Grundlegende Begriffe und Operationen auf unscharfen Mengen . . . . .	32
3.1.2 Das Erweiterungsprinzip . . . . .	38
3.2 Unscharfe Zahlen und ihre Arithmetik . . . . .	40
3.2.1 Unscharfe Zahlen . . . . .	40
3.2.2 Unscharfe Arithmetik . . . . .	47
3.3 Maße der Unschärfe . . . . .	56
3.4 Methoden zur Defuzzifikation . . . . .	60
3.5 Abgrenzung von der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	65

3.6	Unscharfe Regression . . . . .	66
3.6.1	Das Verfahren von TANAKA ET AL. (1982) . . . . .	66
3.6.2	Das Verfahren von ISHIBUCHI & NII (2001) . . . . .	70
3.6.3	Das Verfahren von CHANG (2001) . . . . .	73
3.6.4	Das Verfahren von D'URSO & GASTALDI (2001) . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung</b>	<b>78</b>
4.1	Literaturüberblick . . . . .	78
4.1.1	Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ (2003) . . . . .	79
4.1.2	Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) . . . . .	82
4.1.3	Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) . . . . .	87
4.1.4	Der Ansatz von APAYDIN & BASER (2010) . . . . .	94
4.1.5	Der Ansatz von BASER & APAYDIN (2010) . . . . .	99
4.1.6	Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012) . . . . .	101
4.1.7	Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) . . . . .	104
4.1.8	Der Ansatz von KIM & KIM (2014) . . . . .	107
4.1.9	Der Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2014) . . . . .	110
4.1.10	Der Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2016) . . . . .	114
4.1.11	Der Ansatz von THOMAS (2017) . . . . .	117
4.1.12	Der Ansatz von APOLLINAIRE ET AL. (2019a) . . . . .	121
4.1.13	Der Ansatz von APOLLINAIRE ET AL. (2019b) . . . . .	125
4.1.14	Kritische Würdigung . . . . .	128
4.2	Ein unscharfes Chain-Ladder-Verfahren mit quasi-exponentiellen unschar- fen Zahlen . . . . .	134
4.2.1	Das unscharfe Chain-Ladder-Verfahren . . . . .	134
4.2.2	Anwendungsbeispiel . . . . .	142
4.2.3	Kritische Würdigung . . . . .	148
4.3	Eine unscharfe Version des additiven Schadenreservierungsverfahrens . .	150
4.3.1	Das unscharfe additive Verfahren . . . . .	150
4.3.2	Anwendungsbeispiel . . . . .	156
4.3.3	Kritische Würdigung . . . . .	160
4.4	Eine unscharfe Version des Cape-Cod-Verfahrens . . . . .	162

4.4.1	Das unscharfe Cape-Cod-Verfahren . . . . .	162
4.4.2	Anwendungsbeispiel . . . . .	171
4.4.3	Kritische Würdigung . . . . .	175
<b>5</b>	<b>Schlussbetrachtung</b>	<b>178</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>182</b>
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>X</b>
	<b>Eidesstattliche Versicherung</b>	<b>XIV</b>

# Abbildungsverzeichnis

1	Typischer Abwicklungsprozess . . . . .	5
2	Abwicklungsdreieck . . . . .	8
3	Das Datenset $\mathcal{B}_k$ . . . . .	13
4	Träger $T(\tilde{A})$ , $\alpha$ -Schnitt $\tilde{A}_\alpha$ , Höhe $hgt(\tilde{A})$ und Kern $K(\tilde{A})$ einer unscharfen Menge $\tilde{A}$ . . . . .	35
5	Zugehörigkeitsfunktionen einer konvexen unscharfen Menge $\tilde{A}$ und einer nicht konvexen unscharfen Menge $\tilde{B}$ . . . . .	36
6	Zugehörigkeitsfunktionen von zwei unscharfen Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ und ihrem Durchschnitt $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ . . . . .	37
7	Zugehörigkeitsfunktionen von zwei unscharfen Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ und ihrer Vereinigung $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ . . . . .	37
8	Zugehörigkeitsfunktionen einer unscharfen Menge $\tilde{A}$ und ihres Komplements $\tilde{A}^C$ . . . . .	38
9	Zugehörigkeitsfunktion einer scharfen Zahl $x_0$ . . . . .	41
10	Zugehörigkeitsfunktionen einer dreieckförmigen und einer quadratischen unscharfen Zahl . . . . .	43
11	Zugehörigkeitsfunktionen einer Gaußschen und einer exponentiellen unscharfen Zahl . . . . .	45
12	Summe $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2$ und Differenz $\tilde{a}_1 \ominus \tilde{a}_2$ zweier unscharfer Zahlen . . . . .	51
13	Exaktes Produkt $\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2$ und Tangenten- sowie Sekantenapproximation . . . . .	53
14	Exakter Kehrwert $\tilde{a}^{-1}$ und Näherung nach (51) sowie Näherung nach (52) . . . . .	55
15	Exakter Quotient $\tilde{a}_2 \oslash \tilde{a}_1$ und Näherung nach (53) sowie Näherung nach (54) . . . . .	56
16	Beziehung zwischen dem beobachteten und dem prognostizierten unscharfen Output . . . . .	69

## Tabellenverzeichnis

1	Beobachtete kumulierte Schadenzahlungen $C_{i,j}$ ( $i + j \leq 9$ ) . . . . .	143
2	Unschärfe CL-Schätzer $\hat{f}_j = \text{efn}^*(\hat{f}_j, \hat{l}_{\hat{f}_j}, \hat{r}_{\hat{f}_j})$ mit $j = 0, \dots, 8$ . . . . .	143
3	Prognostizierte kumulierte Schadenzahlungen $\hat{C}_{i,j} = \text{efn}^*(\hat{C}_{i,j}, \hat{l}_{\hat{C}_{i,j}}, \hat{r}_{\hat{C}_{i,j}})$ mit $i + j > 9$ . . . . .	144
4	Unschärfe CL-Reserven $\hat{R}_i = \text{efn}^*(\hat{R}_i, \hat{l}_{\hat{R}_i}, \hat{r}_{\hat{R}_i})$ mit $i = 1, \dots, 9$ . . . . .	145
5	Erwartungswerte $\mathbb{E}_\beta[\hat{R}_i]$ der CL-Reserven $\hat{R}_i$ mit $i = 1, \dots, 9$ für ver- schiedene Werte des Parameters $\beta \in [0, 1]$ und Reserven nach dem schar- fen CL-Verfahren . . . . .	146
6	Erwartungswerte $\mathbb{E}_\beta[\hat{R}]$ der CL-Reserven $\hat{R}$ für verschiedene Werte des Parameters $\beta \in [0, 1]$ bei dem unscharfen CL-Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014) . . . . .	146
7	Prognoseunsicherheit $U_{QEUZ}(\hat{C}_{i,j} \mathcal{D}_I)$ mit $i = 1, \dots, 9$ im unscharfen CL-Verfahren . . . . .	147
8	Beobachtete inkrementelle Schadenzahlungen $X_{i,j}$ ( $i + j \leq 5$ ) und un- scharfe Volumenmaße $\tilde{v}_i = (v_i, l_{v_i}, r_{v_i})$ mit $i = 0, \dots, 5$ . . . . .	156
9	Unschärfe additive Schadenquotenzuwächse $\hat{\xi}_j = (\hat{\xi}_j, \hat{l}_{\hat{\xi}_j}, \hat{r}_{\hat{\xi}_j})$ mit $j =$ $0, \dots, 5$ . . . . .	157
10	Prognostizierte inkrementelle Schadenzahlungen $\hat{X}_{i,j} = (\hat{X}_{i,j}, \hat{l}_{\hat{X}_{i,j}}, \hat{r}_{\hat{X}_{i,j}})$ mit $i + j > 5$ . . . . .	158
11	Unschärfe additive Reserven $\hat{R}_i = (\hat{R}_i, \hat{l}_{\hat{R}_i}, \hat{r}_{\hat{R}_i})$ mit $i = 1, \dots, 5$ . . . . .	158
12	Erwartungswerte $\mathbb{E}_\beta[\hat{R}_i]$ der additiven Reserven $\hat{R}_i$ mit $i = 1, \dots, 5$ für verschiedene Werte des Parameters $\beta \in [0, 1]$ . . . . .	159
13	Prognoseunsicherheit $U_{DUZ}(\hat{R}_i \mathcal{D}_I)$ mit $i = 1, \dots, 5$ im unscharfen ad- ditiven Verfahren . . . . .	159
14	Beobachtete kumulierte Schadenzahlungen $C_{i,j}$ ( $i + j \leq 5$ ) und unscharfe Volumenmaße $\tilde{v}_i = (v_i, l_{v_i}, r_{v_i})$ mit $i = 0, \dots, 5$ . . . . .	171
15	Unschärfe CL-Schätzer $\hat{f}_j = (\hat{f}_j, \hat{l}_{\hat{f}_j}, \hat{r}_{\hat{f}_j})$ mit $j = 0, \dots, 4$ . . . . .	172
16	Unschärfe Schätzer $\hat{\beta}_j^{(CL)} = (\hat{\beta}_j^{(CL)}, \hat{l}_{\hat{\beta}_j^{(CL)}}, \hat{r}_{\hat{\beta}_j^{(CL)}})$ mit $j = 0, \dots, 5$ . . . . .	172
17	Prognostizierte kumulierte Schadenzahlungen $\hat{C}_{i,j} = (\hat{C}_{i,j}, \hat{l}_{\hat{C}_{i,j}}, \hat{r}_{\hat{C}_{i,j}})$ mit $i + j > 5$ . . . . .	173

18	Unscharfe CC-Reserven $\widehat{R}_i = (\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$ mit $i = 1, \dots, 5$ . . . . .	174
19	Prognoseunsicherheit $U_{DUZ}(\widehat{R}_i   \mathcal{D}_I)$ mit $i = 1, \dots, 5$ im unscharfen CC-Verfahren . . . . .	174
20	Erwartungswerte $\mathbb{E}_\delta[\widehat{R}_i]$ der CC-Reserven $\widehat{R}_i$ mit $i = 1, \dots, 5$ für verschiedene Werte des Parameters $\delta \in [0, 1]$ . . . . .	175

## Abkürzungen und Akronyme

ANCOVA	Analysis of Covariance
ANOVA	Analysis of Variance
BF	BORNHUETTER-FERGUSON
CC	Cape-Cod
CL	Chain-Ladder
FSSE	Fuzzy Sum of Squares Explained
FSSR	Fuzzy Sum of Squares Residual
FSST	Fuzzy Sum of Squares Total
FST	Fuzzy Set Theory
IBNeR	Incurred But Not enough Reported
IBNS	Incurred But Not Settled
IBNyR	Incurred But Not yet Reported
KQ	Kleinste-Quadrate
LCL	London-Chain-Ladder
LP	Lineare Programmierung
MSEP	Mean Squared Error of Prediction

# 1 Einleitung

Am Ende jedes Geschäftsjahres steht ein Nichtlebensversicherer vor der Situation, dass die verdiente Prämie zwar bekannt, der Gesamtschadenaufwand für die eingetretenen Schäden jedoch unbekannt ist und Rückstellungen für die Schadenverpflichtungen aus den bereits eingetretenen, aber noch nicht vollständig abgewickelten Schäden zu bilden sind. Diese als Schadenreserven bezeichneten Rückstellungen stellen in der Regel den größten versicherungstechnischen Posten auf der Passivseite der Bilanz eines Nichtlebensversicherers dar, so dass selbst kleine prozentuale Veränderungen erhebliche Auswirkungen auf den Gewinn haben. Die Bestimmung adäquater Schadenreserven sowie die Quantifizierung ihrer Unsicherheit ist daher für jeden Nichtlebensversicherer von essentieller wirtschaftlicher Bedeutung.

Im Laufe der Zeit sind zahlreiche verschiedene Verfahren zur Prognose der zukünftigen Schadenzahlungen und damit zur Bestimmung von Schadenreserven entwickelt worden. Vor allem seit Anfang der 90er Jahre handelt es sich bei diesen Verfahren überwiegend um stochastische Verfahren, die im Gegensatz zu rein heuristischen Verfahren Unsicherheit aufgrund von Zufall berücksichtigen. Neben Unsicherheit aufgrund von Zufall spielt allerdings auch Unsicherheit aufgrund von Unschärfe eine zentrale Rolle in der Schadenreservierung, da subjektive Beurteilungen, Intuition und Erfahrung in diesem Bereich von erheblicher Bedeutung sind und oftmals bei der Festsetzung von Schadenreserven berücksichtigt werden. Unsicherheit, die aus Unschärfe resultiert, kann jedoch weder von den rein heuristischen noch von den stochastischen Schadenreservierungsverfahren einbezogen werden, sondern hierzu werden Methoden aus dem Bereich der Theorie unscharfer Mengen benötigt. Solche Methoden ermöglichen es, subjektive Einschätzungen formal zu integrieren und sind daher prädestiniert für Anwendungen in der Schadenreservierung.

Die Theorie unscharfer Mengen ist im Jahr 1965 von ZADEH eingeführt worden und hat seitdem eine beständige Weiterentwicklung erfahren und sich zu einem sehr aktiven Forschungsgebiet entwickelt. Inzwischen hat sie in den verschiedensten Bereichen Anwendung gefunden. Die erste Anwendung einer unscharfen Methode in der Versicherungswissenschaft ist in einem 1982 veröffentlichten Artikel von DE WIT zu finden, in dem eine unscharfe Methode im Underwriting eingesetzt wird. Bis die erste Anwendung in der Schadenreservierung publiziert wurde, sind danach jedoch noch über 20 Jahre vergangen und im Hinblick auf Publikationen, die keine unscharfen Methoden verwenden, sind die

Publikationen, in denen unscharfe Methoden Anwendung finden, in ihrer Gesamtanzahl bisher weniger breit vertreten, was vor allem vor dem Hintergrund verwundert, dass subjektive Beurteilungen in der Schadenreservierung eine große Relevanz besitzen.

Das Ziel dieser Dissertation besteht zum einen darin, einen vollständigen Überblick über den aktuellen Forschungsstand in Bezug auf den Einsatz unscharfer Methoden in der Schadenreservierung zu geben. Hierzu werden die bisher erschienenen Publikationen in chronologischer Reihenfolge vorgestellt, detailliert erläutert und zudem einer kritischen Würdigung unterzogen. Zum anderen werden in dieser Dissertation drei neue unscharfe Schadenreservierungsverfahren entwickelt, die zusätzliche Möglichkeiten bieten, Unschärfe bei der Bestimmung von Schadenreserven erfassen und modellieren zu können.

Bei dem ersten der vorgeschlagenen Verfahren handelt es sich um eine unscharfe Version des Chain-Ladder-Verfahrens, das sowohl in der Theorie als auch in der Praxis zu den populärsten Schadenreservierungsverfahren zählt. In ausnahmslos allen der bisher veröffentlichten Arbeiten, in denen unscharfe Methoden in der Schadenreservierung angewendet werden, sind als unscharfe Zahlen dreieckförmige unscharfe Zahlen verwendet worden. Diese sind arithmetisch leicht handhabbar und intuitiv interpretierbar, allerdings sind in einigen Situationen durchaus unscharfe Zahlen mit einer anderen Form der Zugehörigkeitsfunktion geeigneter. Aus diesem Grund werden bei dem vorgeschlagenen unscharfen Chain-Ladder-Verfahren statt dreieckförmigen unscharfen Zahlen quasi-exponentielle unscharfe Zahlen genutzt, die insbesondere im Fall aussagekräftiger Daten geeignet sind. Das Verfahren stellt damit die erste Anwendung in der Schadenreservierung dar, bei der die Zugehörigkeitsfunktion der unscharfen Zahlen nicht dreieckförmig ist. Die quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen werden bei dem vorgeschlagenen Verfahren zur Modellierung der Chain-Ladder-Faktoren verwendet. So wird es ermöglicht, Unsicherheit bezüglich der Chain-Ladder-Faktoren einzubeziehen, deren Schätzer in der Praxis ansonsten des Öfteren von den Aktuarien aufgrund ihrer subjektiven Einschätzung und persönlichen Erfahrung im Nachhinein noch angepasst werden. Wie sich zeigen wird, besitzt die Verwendung von quasi-exponentiellen statt dreieckförmigen unscharfen Zahlen zur Modellierung der Chain-Ladder-Faktoren den Vorteil, dass dies zu einer erheblichen Reduktion der Prognoseunsicherheit führen kann und man somit wesentlich aufschlussreichere Ergebnisse erhalten kann.

Bei den beiden anderen neu entwickelten Verfahren handelt es sich um unscharfe Ver-

sionen von zwei weiteren populären Schadenreservierungsverfahren, von dem additiven Verfahren und dem Cape-Cod-Verfahren. Diese beiden Verfahren haben gemeinsam, dass bei ihnen zusätzlich Volumenmaße verwendet werden, die für alle Anfalljahre als bekannt vorausgesetzt werden. Die Volumenmaße sind vom Aktuar auszuwählen und oftmals mit Unschärfe behaftet, weshalb sowohl das additive Verfahren als auch das Cape-Cod-Verfahren prädestiniert dafür sind, mit der Theorie unscharfer Mengen kombiniert zu werden. In dieser Arbeit werden von dem additiven Verfahren und dem Cape-Cod-Verfahren unscharfe Versionen vorgeschlagen, bei denen die Volumenmaße statt als scharfe Zahlen als unscharfe Zahlen modelliert werden. Dadurch ist es möglich, Unsicherheit bezüglich der Volumenmaße abzubilden und bei der Bestimmung von Schadenreserven einzubeziehen. Bei dem vorgeschlagenen unscharfen Cape-Cod-Verfahren werden darüber hinaus auch die Parameter des Abwicklungsmusters als unscharfe Zahlen modelliert, so dass bei diesem Verfahren zudem Unsicherheit bezüglich des Abwicklungsmusters, in seiner in praktischen Anwendungen üblicherweise verwendeten Form, berücksichtigt werden kann.

Der Gang der Untersuchung gestaltet sich in dieser Arbeit wie folgt: Nach einer allgemeinen Einführung in das Thema werden in Kapitel 2 Grundlagen der Schadenreservierung behandelt. In Abschnitt 2.1 wird zunächst auf den Prozess der Schadenabwicklung und mögliche Ursachen einer lang andauernden Schadenabwicklung eingegangen, bevor in Abschnitt 2.2 Abwicklungsdaten und ihre typische Darstellung in Abwicklungsdreiecken besprochen werden und die verwendete Terminologie und Notation eingeführt wird. In Abschnitt 2.3 werden all diejenigen Schadenreservierungsverfahren vorgestellt, die in Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung herangezogen worden sind. Das darauffolgende dritte Kapitel dient einer Einführung in die Theorie unscharfer Mengen. Nach der Erläuterung grundlegender Begriffe und Operationen auf unscharfen Mengen sowie des Erweiterungsprinzips in Abschnitt 3.1 werden in Abschnitt 3.2 unscharfe Zahlen und ihre Arithmetik behandelt. In den Abschnitten 3.3 und 3.4 werden populäre Maße zur Beurteilung der Unschärfe einer Menge sowie Methoden zur Defuzzifikation, mit denen unscharfe Mengen in scharfe Zahlen transformiert werden können, besprochen. Im Anschluss erfolgt in Abschnitt 3.5 eine Abgrenzung der Theorie unscharfer Mengen von der Wahrscheinlichkeitstheorie, wobei insbesondere auf die Unterschiedlichkeit von Unschärfe und Zufall als Ursache von Unsicherheit eingegangen wird. In Abschnitt 3.6

werden unscharfe Regressionsverfahren, die in der Schadenreservierung Anwendung gefunden haben, beschrieben.

Das darauffolgende vierte Kapitel bildet den Schwerpunkt dieser Dissertation. In Abschnitt 4.1 werden zunächst die bisher veröffentlichten Arbeiten zu Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung in chronologischer Reihenfolge vorgestellt, detailliert erläutert und zudem diskutiert. In den Abschnitten 4.2, 4.3 und 4.4 werden anschließend die drei bereits erwähnten neuen unscharfen Schadenreservierungsverfahren besprochen. Abschnitt 4.2 hat das unscharfe Chain-Ladder-Verfahren zum Thema, Abschnitt 4.3 das unscharfe additive Verfahren und Abschnitt 4.4 das unscharfe Cape-Cod-Verfahren. Die Verfahren werden jeweils motiviert und im Detail erläutert. Bei allen drei Verfahren werden die ermittelten unscharfen Schadenreserven zudem zum Schluss defuzzifiziert, um scharfe Zahlen zu erhalten, die in der Bilanz ausgewiesen werden können. Des Weiteren wird bei allen drei Verfahren die Prognoseunsicherheit für einzelne und aggregierte Anfalljahre quantifiziert. Dies ist neben der Prognose der ausstehenden Schadenverpflichtungen von zentralem Interesse, um auch die Genauigkeit der Prognose beurteilen zu können, ist jedoch bei den meisten der bisherigen Publikationen, in denen unscharfe Methoden in der Schadenreservierung angewendet werden, versäumt worden. Nach der detaillierten Beschreibung der drei neuen unscharfen Schadenreservierungsverfahren werden sie jeweils anhand eines Anwendungsbeispiels veranschaulicht und zudem einer kritischen Würdigung unterzogen. Die Arbeit schließt mit einer Schlussbetrachtung im fünften Kapitel, in der die wichtigsten Ergebnisse und Zusammenhänge zusammengefasst werden und die zudem einen Ausblick auf mögliche zukünftige Forschungsfragen liefert.

## 2 Grundlagen der Schadenreservierung

### 2.1 Der Prozess der Schadenabwicklung

Die Differenzierung von Versicherungsprodukten kann nach unterschiedlichen Kriterien erfolgen, wobei die größte Kategorisierung durch die EU-Versicherungsmarktregulierung eine Aufteilung in die Sparten *Lebensversicherung* und *Nichtlebensversicherung* vorsieht. Diese Differenzierung beruht zum einen auf der Unterschiedlichkeit der Versicherungsprodukte der beiden Sparten. So weichen insbesondere die Vertragsbedingungen, die Schadenarten sowie die Risikotreiber deutlich voneinander ab. Zum anderen ist eine strikte Spartenrennung in vielen Ländern, so auch in Deutschland und der Schweiz, gesetzlich vorgeschrieben. Demnach ist es einem Nichtlebensversicherungsunternehmen untersagt, Lebensversicherungsprodukte anzubieten und vice versa, weshalb Versicherungskonzerne teilweise verschiedene Gesellschaften gründen, um so Produkte aus beiden Sparten vertreiben zu können. In dieser Arbeit werden im Folgenden ausschließlich Nichtlebensversicherungen betrachtet.

In Abbildung 1 ist die typische zeitliche Abfolge der mit der Regulierung eines Schadens in der Nichtlebensversicherung verbundenen Ereignisse dargestellt.

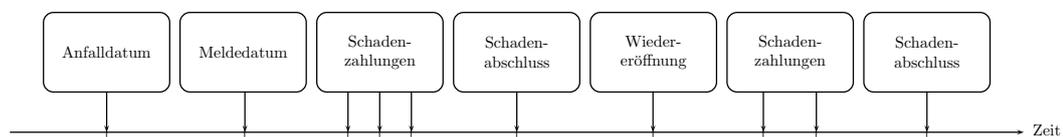


ABBILDUNG 1: Typischer Abwicklungsprozess

Zu Beginn steht das Anfalldatum, also der Zeitpunkt, an dem ein Schaden entstanden ist. Im Anschluss ist der Schaden dem Versicherungsunternehmen zu melden. Dies geschieht jedoch nur mit einer zeitlichen Verzögerung und mitunter kann der Zeitraum zwischen dem Anfall- und dem Meldedatum mehrere Jahre umfassen. Als Beispiel sind hier etwa Ansprüche aufgrund von Asbestschädigungen zu nennen, bei denen der Schaden häufig erst lange Zeit nach seiner Verursachung bemerkt und somit dem Versicherungsunternehmen gemeldet wird. Nachdem der Schaden dem Versicherungsunternehmen gemeldet wurde, leistet dieses erste Schadenzahlungen und bildet eine Einzelfallreserve für eventuell erforderliche weitere Zahlungen. Oftmals dauert der Prozess der Schadenabwicklung aufgrund von Kosten langwieriger Heilbehandlungen und da die Ermittlung der genau-

en Höhe eines Schadens und seiner Folgen sehr zeitintensiv sein kann mehrere Monate oder Jahre. So können beispielsweise in der Haftpflichtversicherung Gerichtsprozesse und zahlreiche Untersuchungen erforderlich sein, um den exakten Haftungsgrad, den Gesundheitszustand der Geschädigten sowie Folgewirkungen von Verletzungen ermitteln zu können. Erst bei deren vollständiger Kenntnis kann ein Schaden endgültig reguliert werden. Es kann aber auch vorkommen, dass ein bereits geschlossener Schaden aufgrund unerwarteter neuer Entwicklungen, die weitere Schadenzahlungen erforderlich machen, wiedereröffnet werden muss. In diesem Fall sind so lange Schadenzahlungen zu leisten, bis keine weiteren Forderungen mehr zu erwarten sind und der Schaden erneut geschlossen werden kann.

Aus den angeführten Gründen kann sich die Abwicklung eines Schadens über einen sehr langen Zeitraum erstrecken. Diese oft lange Dauer des Schadenabwicklungsprozesses ist ein besonderes Kennzeichen der Nichtlebensversicherung, weist hier jedoch branchenabhängig starke Unterschiede auf. Unter den sogenannten *short-tail*-Branchen versteht man Branchen, in denen die Schadenabwicklung mit einer Dauer von einigen Monaten relativ kurz ist. Typische *short-tail*-Branchen sind etwa die Sach-, die Hausrat- und die Transportversicherung. In *long-tail*-Branchen, zu denen unter anderem typischerweise die Kfz-Haftpflichtversicherung, die allgemeine Haftpflichtversicherung und die Unfallversicherung zählen, kann der Abwicklungsprozess dagegen durchaus mehrere Jahre oder sogar Jahrzehnte in Anspruch nehmen.

Da Schäden durch die Versicherungspolice und die Prämie gedeckt sind, die zur Zeit der Schadenentstehung in Kraft waren, hat ein Versicherungsunternehmen für Verpflichtungen aus bereits entstandenen, aber noch nicht vollständig regulierten Schäden Rückstellungen zu bilden. Zum einen sind für die sogenannten IBNyR-Schäden (*Incurred But Not yet Reported*) IBNyR-Reserven zu bilden. Darunter versteht man die zu bildenden Rückstellungen für eingetretene, aber dem Versicherungsunternehmen noch nicht gemeldete Schäden. Zum anderen sind für IBNeR-Schäden (*Incurred But Not enough Reported*) IBNeR-Reserven zu bilden. Dabei handelt es sich um Rückstellungen für schon gemeldete Schäden, die jedoch noch nicht abgeschlossen werden können, da weitere Zahlungen in der Zukunft erwartet werden, die mit der bereits verdienten Prämie finanziert werden müssen (vgl. Wüthrich & Merz (2008), S. 3). Die Summe aus IBNyR- und IBNeR-Schäden wird als IBNS-Schäden (*Incurred But Not Settled*) oder *Spätschäden* bezeichnet. Die Pro-

gnose der aus diesen Spätschäden resultierenden noch ausstehenden Schadenverpflichtungen sowie die Quantifizierung der Prognoseunsicherheit stellen die beiden klassischen Aufgaben der Schadenreservierung dar.

## 2.2 Abwicklungsdreieck und Notation

Die im Laufe der Abwicklung der Schäden eines Bestandes anfallenden *Abwicklungsdaten* werden üblicherweise in sogenannten *Abwicklungsdreiecken* dargestellt. In solch einem Abwicklungsdreieck wird auf der vertikalen Achse das *Anfalljahr*  $i$ , d.h. das Jahr des Schadeneintritts, abgetragen, während die horizontale Achse das *Abwicklungsjahr*  $j$  spezifiziert. Sowohl die Anfall- als auch die Abwicklungsjahre werden dabei in der Regel als *relative* Jahre in der Form  $i = 0, \dots, I$  bzw.  $j = 0, \dots, J$  angegeben, d.h. die Abwicklungsjahre werden als Verzögerungen in Bezug auf die einzelnen Anfalljahre abgetragen und die Anfalljahre als Verzögerungen in Bezug auf das erste Anfalljahr. Durch diese Darstellungsform wird die Notation vereinfacht, zudem entspricht so je eine Diagonale (von links unten nach rechts oben) einem Kalenderjahr. Im betrachteten Fall, dass die Abwicklungsdaten in Form eines Dreiecks vorliegen, gilt  $I = J$ .

Bei den in einem Abwicklungsdreieck dargestellten Abwicklungsdaten kann es sich beispielsweise um Schadenszahlen (die Zahl der gemeldeten Schäden), Schadenszahlungen (*Paid-Daten*) oder Schadenaufwendungen (*Incurred-Daten*) handeln, wobei der Schadenaufwand der Schadenszahlung zuzüglich der Einzelfallreserve entspricht (vgl. Radtke & Schmidt (2004), S. 7). Im Rahmen dieser Arbeit wird unterstellt, dass es sich bei den Daten eines Abwicklungsdreiecks stets um Schadenszahlungen handelt. Die im Abwicklungsjahr  $j$  für Schäden aus dem Anfalljahr  $i$  geleistete Schadenszahlung wird dabei mit  $X_{i,j}$  bezeichnet. Diese Zahlung wird auch Schadenzuwachs genannt und erfolgt im (relativen) Kalenderjahr  $i + j$ . Die insgesamt im Kalenderjahr  $i + j = k$  mit  $k \geq 0$  geleistete inkrementelle Schadenszahlung beträgt

$$X_k = \sum_{i+j=k} X_{i,j}$$

und wird auf der  $(k + 1)$ -ten Diagonalen des Abwicklungsdreiecks ausgewiesen. Im Folgenden wird angenommen, dass  $X_{i,j} = 0$  für  $j > J$  gilt, d.h. dass alle Schäden (spätestens) nach  $J$  Jahren vollständig abgewickelt sind und danach folglich keine weiteren Zahlungen erfolgen.

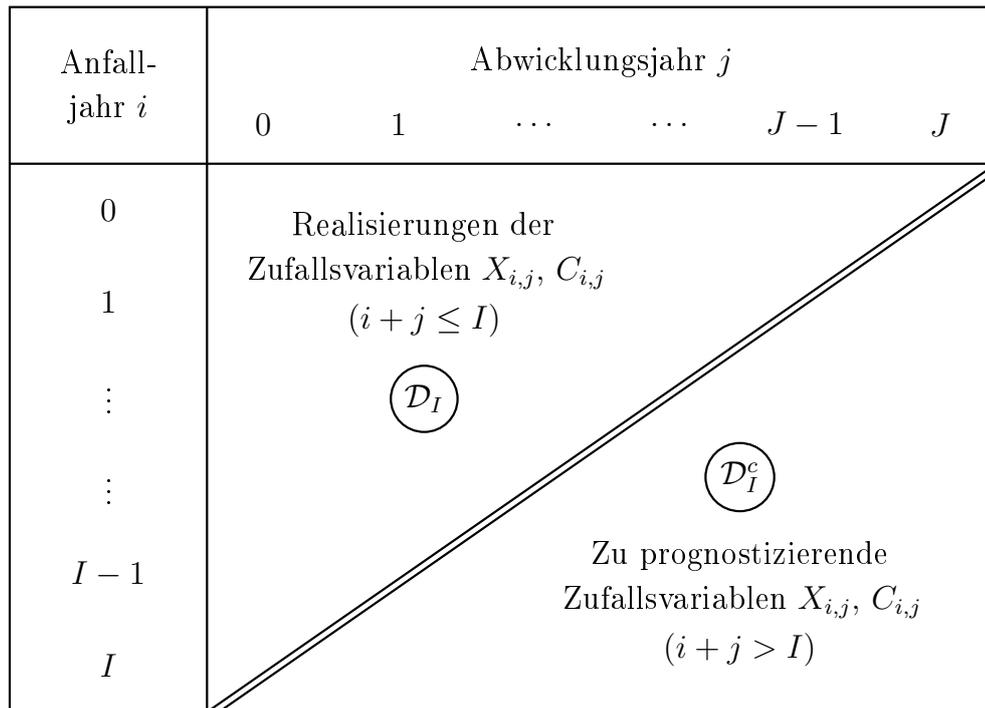


ABBILDUNG 2: Abwicklungsdreieck

Neben den inkrementellen Schadenzahlungen werden häufig auch kumulierte Schadenzahlungen betrachtet. Die Summe der für Schäden aus dem Anfalljahr  $i$  in den Abwicklungsjahren 0 bis  $j$  geleisteten Schadenzahlungen, der sogenannte Schadenstand im Abwicklungsjahr  $j$ , ist durch

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}$$

gegeben. Diese Zahlungen erfolgen in den Kalenderjahren  $i$  bis  $i+j$ . Mit den eingeführten Bezeichnungen ergibt sich das in Abbildung 2 dargestellte Abwicklungsdreieck.

Während für die Zufallsvariablen  $X_{i,j}$  bzw.  $C_{i,j}$  für  $i + j \leq I$  Realisierungen vorliegen, sind diese Größen für  $i + j > I$  nicht beobachtbar. In dem oberen Dreieck

$$\mathcal{D}_I = \{X_{i,j} : i + j \leq I\} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathcal{D}_I = \{C_{i,j} : i + j \leq I\}$$

sind demnach die zum Zeitpunkt  $t = I$  bereits vorhandenen Beobachtungen enthalten.

Die nicht beobachtbaren, zukünftigen Zuwächse bzw. Schadenstände in dem unteren Dreieck

$$\mathcal{D}_I^c = \{X_{i,j} : i + j > I\} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathcal{D}_I^c = \{C_{i,j} : i + j > I\}$$

gilt es zu prognostizieren. Von besonderem Interesse sind dabei die *Endschadenstände*  $C_{i,J}$  sowie die ausstehenden Schadenzahlungen

$$R_i = \sum_{j=I-i+1}^J X_{i,j} = C_{i,J} - C_{i,I-i}$$

der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$ . Diese ausstehenden Schadenzahlungen der einzelnen Anfalljahre sowie die gesamte noch ausstehende Schadenverpflichtung

$$R = \sum_{i=1}^I R_i$$

stellen die sogenannten *Schadenreserven* dar und sind zu prognostizieren. Zudem sollte auch die Unsicherheit der ermittelten Prognosen quantifiziert werden. Das populärste Risikomaß in der Praxis zur Quantifizierung dieser Prognoseunsicherheit ist der bedingte *mittlere quadratische Prognosefehler* (Mean Squared Error of Prediction (MSEP)), der wie folgt definiert ist:

**Definition 2.1 (Bedingter MSEP)** Der bedingte MSEP eines  $\mathcal{D}_I$ -messbaren<sup>1</sup> Prädiktors  $\hat{X}$  für eine Zufallsvariable  $X$  ist durch

$$\begin{aligned} \text{MSEP}_{X|\mathcal{D}_I}(\hat{X}) &= \mathbb{E} \left[ \left( \hat{X} - X \right)^2 \middle| \mathcal{D}_I \right] \\ &= \text{Var} \left( \hat{X} - X \middle| \mathcal{D}_I \right) + \mathbb{E} \left[ \hat{X} - X \middle| \mathcal{D}_I \right]^2 \\ &= \underbrace{\text{Var} (X | \mathcal{D}_I)}_{\text{Bedingte Prozessvarianz}} + \underbrace{\left( \hat{X} - \mathbb{E} [X | \mathcal{D}_I] \right)^2}_{\text{Bedingter Schätzfehler}} \end{aligned}$$

gegeben.

Der bedingte MSEP setzt sich demnach additiv aus der *bedingten Prozessvarianz* und dem *bedingten Schätzfehler* zusammen. Die bedingte Prozessvarianz beschreibt die Variation innerhalb des stochastischen Modells, d.h. den reinen Zufall, der nicht eliminiert werden

---

<sup>1</sup>Die  $\mathcal{D}_I$ -Messbarkeit bedeutet dabei, dass es eine (messbare) Funktion  $f$  gibt, so dass  $\hat{X} = f(\mathcal{D}_I)$  gilt.

kann. Sie resultiert aus der Prognose einer zum Zeitpunkt  $t = I$  unbekanntem zufälligen Größe. Der bedingte Schätzfehler reflektiert dagegen die Unsicherheit in der Schätzung der Parameter. Er kann mit steigendem Stichprobenumfang reduziert werden. Für den Fall, dass der Prädiktor  $\hat{X}$  mit der bedingten Erwartung  $\mathbb{E}[X | \mathcal{D}_I]$  übereinstimmt, also mit dem besten Prädiktor bezüglich des Kriteriums des bedingten mittleren quadratischen Prognosefehlers, ist der bedingte Schätzfehler 0.

## 2.3 Verfahren in der Schadenreservierung

### 2.3.1 Das Chain-Ladder-Verfahren

Das *Chain-Ladder-Verfahren* (CL-Verfahren) ist das am häufigsten angewandte Schadenreservierungsverfahren in der Praxis. Ursprünglich wurde es als rein heuristischer Algorithmus zur Prognose zukünftiger Schadenstände und damit zur Bestimmung von Schadenreserven eingeführt. Um jedoch auch die Genauigkeit der ermittelten Prädiktoren quantifizieren zu können, wird ein stochastisches Modell benötigt, das dem Verfahren zugrunde gelegt werden kann. Aus diesem Grund sind mit der Zeit verschiedene stochastische Modelle entwickelt worden. Das erste stochastische Modell, das zur Begründung der CL-Methode vorgeschlagen wurde, ist das *verteilungsfreie CL-Modell von Mack (1993)*. In diesem Modell wird nicht die komplette Verteilung spezifiziert, sondern es werden lediglich Annahmen an die ersten beiden bedingten Momente der Schadenstände getroffen.

#### Modellannahmen 2.1 (Das verteilungsfreie CL-Modell von MACK (1993))

- Die Schadenstände  $C_{i,j}$  unterschiedlicher Anfalljahre  $i$  sind stochastisch unabhängig.
- Es existieren Faktoren  $f_0, \dots, f_{J-1} > 0$  und Varianzparameter  $\sigma_0^2, \dots, \sigma_{J-1}^2 > 0$ , so dass

$$\mathbb{E}[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = f_{j-1} C_{i,j-1} \quad (1)$$

$$\text{Var}(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1} \quad (2)$$

für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 1, \dots, J$  gilt.

Die *CL-Faktoren*  $f_j$ , die auch als Abwicklungsfaktoren oder age-to-age-Faktoren bezeichnet werden, bilden den Kern des CL-Verfahrens. Sie hängen nur vom Abwicklungsjahr

$j$  ab, über die betrachteten Anfalljahre hinweg sind sie konstant. Es wird beim CL-Verfahren also ein homogenes Abwicklungsmuster über alle Anfalljahre hinweg unterstellt (*Homogenitätseigenschaft*). Die Schätzung der CL-Faktoren erfolgt für jedes Abwicklungsjahr  $j = 0, \dots, J-1$  mittels der zum Zeitpunkt  $t = I$  zur Verfügung stehenden Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$  durch:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \quad (3)$$

Diese sogenannten *CL-Schätzer* können auch als gewichtete Mittel der *individuellen Abwicklungsfaktoren*

$$F_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

dargestellt werden:

$$\hat{f}_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} F_{i,j} \quad (4)$$

Unter Verwendung der CL-Schätzer können die Endschadenstände der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  prognostiziert werden. Dabei wird herangezogen, dass unter den Modellannahmen 2.1 für den erwarteten Endschadenstand des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ , bedingt gegeben  $\mathcal{D}_I$ ,

$$\mathbb{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] = \mathbb{E}[C_{i,J} | C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j \quad (5)$$

gilt (vgl. Wüthrich & Merz (2008), S. 16f.). Werden in Gleichung (5) die unbekanntenen CL-Faktoren  $f_{I-i}, \dots, f_{J-1}$  durch die CL-Schätzer  $\hat{f}_{I-i}, \dots, \hat{f}_{J-1}$  ersetzt, erhält man den Prädiktor für den bedingten erwarteten Endschadenstand bzw. den *CL-Prädiktor für den Endschadenstand* des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

**Definition 2.2 (CL-Prädiktor des Endschadenstandes)** Der CL-Prädiktor für den Endschadenstand  $C_{i,J}$  des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  ist durch

$$\hat{C}_{i,J} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} \hat{f}_j \quad (6)$$

gegeben, wobei  $\hat{f}_{I-i}, \dots, \hat{f}_{J-1}$  die CL-Schätzer gemäß (3) sind.

Allgemein können die zukünftigen, nicht beobachtbaren Schadenstände  $C_{i,j}$  mit  $i+j > I$  entsprechend durch

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,I-i} \prod_{l=I-i}^{j-1} \widehat{f}_l$$

prognostiziert werden. Zudem können mit Hilfe von (6) auch Prognosen für die ausstehenden Schadenverpflichtungen ermittelt werden. Hierzu wird zunächst mit (6) der CL-Prädiktor des Endschadenstandes  $C_{i,J}$  bestimmt. Die Differenz zwischen diesem Wert und dem letzten beobachtbaren Schadenstand des entsprechenden Anfalljahres, d.h.  $C_{i,I-i}$ , ergibt den CL-Prädiktor  $\widehat{R}_i$  für die noch ausstehende Schadenverpflichtung  $R_i$  bzw. die *CL-Reserve* des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

**Definition 2.3 (CL-Reserve eines Anfalljahres)** Der CL-Prädiktor für die ausstehende Schadenverpflichtung  $R_i$  des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  ist durch

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j - C_{i,I-i} \quad (7)$$

gegeben, wobei  $\widehat{C}_{i,J}$  und  $\widehat{f}_{I-i}, \dots, \widehat{f}_{J-1}$  durch (6) bzw. (3) gegeben sind.

Werden die CL-Reserven über alle Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  hinweg aggregiert, erhält man den CL-Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung bzw. die *CL-Gesamtreserve*:

**Definition 2.4 (CL-Gesamtreserve)** Der CL-Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung  $R$  ist durch

$$\widehat{R} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i$$

gegeben, wobei  $\widehat{R}_i$  durch (7) gegeben ist.

Der Varianzparameter  $\sigma_j^2$  in (2) kann für  $j = 0, \dots, J-2$  durch

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left( F_{i,j} - \widehat{f}_j \right)^2 \quad (8)$$

geschätzt werden. Für diesen Schätzer sowie die in (3) und (6) angegebenen Schätzer bzw. Prädiktoren können unter den Modellannahmen 2.1 wichtige Eigenschaften nachgewiesen werden. Dabei wird durch

$$\mathcal{B}_k = \{C_{i,j} : i+j \leq I, 0 \leq j \leq k\} \subseteq \mathcal{D}_I$$

der Teil der Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$  gekennzeichnet, der bis einschließlich des Abwicklungsjahres  $k = 0, \dots, J$  vorliegt, wobei  $\mathcal{B}_k$  und  $\mathcal{D}_I$  im Fall von  $k = J$  übereinstimmen, d.h. es gilt  $\mathcal{B}_J = \mathcal{D}_I$ . In Abbildung 3 ist das Datenset  $\mathcal{B}_k$  grafisch veranschaulicht.

Anfall- jahr $i$	Abwicklungsjahr $j$						
	0	1	...	$k$	...	$J-1$	$J$
0	$\mathcal{B}_k$						
1							
⋮							
⋮							
$I-1$							
$I$							

ABBILDUNG 3: Das Datenset  $\mathcal{B}_k$

In dem folgenden Satz 2.1 sind die Eigenschaften der Schätzer  $\hat{f}_j$  und  $\hat{\sigma}_j^2$  sowie der Prädiktoren  $\hat{C}_{i,J}$  zusammengefasst:

**Satz 2.1 (Eigenschaften der Schätzer  $\hat{f}_j$  und  $\hat{\sigma}_j^2$  sowie Prädiktoren  $\hat{C}_{i,J}$ )** Unter den Modellannahmen 2.1 gilt:

- a)  $\hat{f}_j$  ist, bedingt gegeben  $\mathcal{B}_j$ , ein unverzerrter Schätzer für  $f_j$ .
- b)  $\hat{f}_j$  ist (unbedingt) ein unverzerrter Schätzer für  $f_j$ .
- c) Die Schätzer  $\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{J-1}$  sind unkorreliert.
- d)  $\hat{C}_{i,J}$  ist, bedingt gegeben  $C_{i,I-i}$ , ein unverzerrter Prädiktor für  $C_{i,J}$ .
- e)  $\hat{C}_{i,J}$  ist (unbedingt) ein unverzerrter Prädiktor für  $C_{i,J}$ .
- f)  $\hat{\sigma}_j^2$  ist, bedingt gegeben  $\mathcal{B}_j$ , ein unverzerrter Schätzer für  $\sigma_j^2$ .
- g)  $\hat{\sigma}_j^2$  ist (unbedingt) ein unverzerrter Schätzer für  $\sigma_j^2$ .

**Beweis:** Siehe Wüthrich & Merz (2008), S. 19 und 40f. □

Der in (8) angeführte Schätzer erlaubt die Schätzung der Varianzparameter der Perioden  $j = 0, \dots, J - 2$ . Für das Abwicklungsjahr  $j = J - 1$  kann im Fall von  $I = J$  mit (8) jedoch kein Schätzer bestimmt werden. Ein möglicher Ansatz zur Ermittlung eines Schätzers für  $\sigma_{J-1}^2$  ist in diesem Fall eine Extrapolation auf Basis der üblicherweise exponentiell abnehmenden Folge

$$\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_{J-3}, \hat{\sigma}_{J-2}.$$

Solch eine Extrapolation kann etwa anhand von log-linearer Regression oder unter Verwendung des oft beobachtbaren Zusammenhangs

$$\frac{\hat{\sigma}_{J-3}}{\hat{\sigma}_{J-2}} \approx \frac{\hat{\sigma}_{J-2}}{\hat{\sigma}_{J-1}} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{J-1} \approx \frac{\hat{\sigma}_{J-2}^2}{\hat{\sigma}_{J-3}}$$

erfolgen. Mit der zweiten Alternative ergibt sich

$$\hat{\sigma}_{J-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{J-2}^4}{\hat{\sigma}_{J-3}^2}, \hat{\sigma}_{J-3}^2, \hat{\sigma}_{J-2}^2 \right\}$$

als Schätzer für  $\sigma_{J-1}^2$  (vgl. Mack (1993), S. 217).

Das CL-Verfahren weist zahlreiche Vorteile auf. Insbesondere aufgrund seiner einfachen Anwendbarkeit und Plausibilität zählt es zu den am weitesten verbreiteten und populärsten Schadenreservierungsverfahren. Weitere Vorteile bestehen darin, dass es verteilungsfrei ist, dass die Modellannahmen leicht über Methoden aus der Regressionsanalyse überprüft werden können, da das CL-Verfahren einer Folge gewichteter linearer Regressionen ohne Intercept entspricht, und dass zahlreiche Erweiterungen und Modifikationen des Verfahrens existieren (vgl. u.a. Quarg & Mack (2004), Wüthrich (2018) und Zhang (2010)).

Allerdings besitzt das CL-Verfahren auch einige Nachteile. So können etwa die in der Praxis häufig auftretenden Kalenderjahreffekte, wie bspw. Inflation, nicht abgebildet werden. Dies wird durch die Annahme der Unabhängigkeit verschiedener Anfalljahre impliziert (vgl. Wüthrich & Merz (2008), S. 16). Zudem hängen die CL-Reserven sowohl direkt als auch indirekt (über die CL-Schätzer) von den aktuellen Schadenständen ab. Aus diesem Grund weist das CL-Verfahren eine hohe Diagonalsensitivität auf und ist gegenüber Ausreißern auf der letzten beobachtbaren Diagonalen nicht robust. Im Falle von Ausreißern sind daher manuelle Anpassungen erforderlich, damit es nicht zu Über- oder Unterschätzungen der erwarteten ausstehenden Schadenverpflichtungen im entsprechenden

Anfalljahr kommt. Des Weiteren ist in praktischen Anwendungen stets zu überprüfen, ob die Homogenitätseigenschaft bezüglich der Anfalljahre erfüllt ist, ob also beispielsweise keine Trends in den Abwicklungsfaktoren bestehen. Ist die Homogenität nicht gegeben, sind die Daten zunächst auf eine geeignete Art und Weise zu transformieren oder das Abwicklungsdreieck ist in Unter-Dreiecke zu unterteilen, so dass jedes Unter-Dreieck die Homogenitätseigenschaft erfüllt, bevor das CL-Verfahren angewendet wird (vgl. Wüthrich & Merz (2008), S. 36).

### 2.3.2 Das BORNHUETTER-FERGUSON-Verfahren

Das 1972 veröffentlichte BORNHUETTER-FERGUSON-Verfahren (BF-Verfahren) gehört nach dem CL-Verfahren zu den sowohl in der Theorie als auch in der Praxis populärsten Verfahren in der Schadenreservierung. Es war ebenso wie das CL-Verfahren zunächst ausschließlich heuristisch motiviert (vgl. Bornhuetter & Ferguson (1972)), bevor verschiedene stochastische Modelle entwickelt wurden, die dem BF-Verfahren zugrunde gelegt werden können. So ist etwa das aus den folgenden Annahmen bestehende stochastische Modell mit dem BF-Verfahren konsistent:

#### Modellannahmen 2.2 (Das BORNHUETTER-FERGUSON-Modell)

- Die Schadenstände  $C_{i,j}$  unterschiedlicher Anfalljahre  $i$  sind stochastisch unabhängig.
- Es existieren Parameter  $\mu_0, \dots, \mu_I > 0$  und  $\beta_0, \dots, \beta_J > 0$  mit  $\beta_J = 1$ , so dass

$$\mathbb{E}[C_{i,0}] = \beta_0 \mu_i$$

$$\mathbb{E}[C_{i,j+k} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j} + (\beta_{j+k} - \beta_j) \mu_i$$

für alle  $i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J - 1$  und  $k = 1, \dots, J - j$  gilt.

Diese Modellannahmen implizieren

$$\mathbb{E}[C_{i,j}] = \beta_j \mu_i \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[C_{i,J}] = \mu_i \tag{9}$$

sowie

$$\mathbb{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] = C_{i,I-i} + (1 - \beta_{I-i}) \mu_i. \tag{10}$$

Bei  $\mu_i$  handelt es sich dabei um den erwarteten Endschadenstand  $\mathbb{E}[C_{i,J}] = \mu_i$  des Anfalljahres  $i$  und bei  $(1 - \beta_{I-i})$  um den sogenannten *still-to-come-Faktor*, welcher den Anteil am erwarteten Endschadenstand angibt, der dem aktuellen Schadenstand  $C_{i,I-i}$  zu  $\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I]$  fehlt. Die Folge  $(\beta_j)_{j=0,\dots,J}$  wird als *Schadenabwicklungsmuster* bezeichnet. Dieses gibt an, wie die erwartete Gesamtschadenzahlung des Anfalljahres  $i$  über die Abwicklungsjahre  $j$  hinweg ausgezahlt wird, wenn die  $C_{i,j}$  Schadenzahlungen darstellen, und ist annahmegemäß für alle Anfalljahre identisch.

Um die BF-Prädiktoren der Endschadenstände berechnen zu können, gilt es, Schätzer für die unbekannt Parameter  $\mu_0, \dots, \mu_I$  und  $\beta_0, \dots, \beta_{J-1}$  zu ermitteln. Gemäß der Intention des BF-Verfahrens sollte es sich dabei um a priori Schätzer handeln, die ohne Berücksichtigung der Daten  $\mathcal{D}_I$  des Abwicklungsdreiecks bestimmt werden. Oftmals werden Expertenmeinungen, Marktstatistiken oder ähnliche Portefeuilles herangezogen. Für die a priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände bieten sich zudem insbesondere Planwerte strategischer Geschäftspläne oder Werte aus dem Bereich der Prämienkalkulation an.

Werden in (10) die Größen  $\beta_{I-i}$  und  $\mu_i$  durch geeignete a priori Schätzer ersetzt, erhält man den *BF-Prädiktor für den Endschadenstand* des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

**Definition 2.5 (BF-Prädiktor des Endschadenstandes)** Der BF-Prädiktor für den Endschadenstand  $C_{i,J}$  des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  ist durch

$$\widehat{C}_{i,J} = C_{i,I-i} + \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}\right) \widehat{\mu}_i \quad (11)$$

gegeben, wobei  $\widehat{\beta}_{I-i}$  ein a priori Schätzer für  $\beta_{I-i}$  und  $\widehat{\mu}_i$  ein a priori Schätzer für  $\mathbb{E}[C_{i,J}]$  ist.

Analog dazu können auch die übrigen nicht beobachtbaren Schadenstände  $C_{i,j}$  mit  $i+j > I$  im BF-Verfahren durch

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,I-i} + \left(\widehat{\beta}_j - \widehat{\beta}_{I-i}\right) \widehat{\mu}_i \quad (12)$$

prognostiziert werden. Da die BF-Reserve für  $i = 1, \dots, I$  der Differenz  $\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}$  zwischen dem prognostizierten Endschadenstand und dem aktuellen Schadenstand und somit dem zweiten Summanden auf der rechten Seite von (11) entspricht, kann ebenfalls direkt der BF-Prädiktor für die noch ausstehende Schadenverpflichtung  $R_i$  bzw. die *BF-Reserve* des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  angegeben werden:

**Definition 2.6 (BF-Reserve eines Anfalljahres)** Der BF-Prädiktor für die ausstehende Schadenverpflichtung  $R_i$  des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  ist durch

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} = \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}\right) \widehat{\mu}_i \quad (13)$$

gegeben, wobei  $\widehat{C}_{i,J}$  durch (11) gegeben ist.

Die BF-Reserve hängt demnach nur von den a priori Schätzern  $\widehat{\beta}_{I-i}$  und  $\widehat{\mu}_i$  ab. Durch Aggregation der Prädiktoren (13) über die Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  hinweg ergibt sich der BF-Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung bzw. die *BF-Gesamtreserve*:

**Definition 2.7 (BF-Gesamtreserve)** Der BF-Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung  $R$  ist durch

$$\widehat{R} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i$$

gegeben, wobei  $\widehat{R}_i$  durch (13) gegeben ist.

Es wurde bereits angeführt, dass die Schätzung des Abwicklungsmusters ebenso wie die Schätzung der erwarteten Endschadenstände nach der ursprünglichen Intention des BF-Verfahrens a priori erfolgen sollte, d.h. ohne Einfluss der Abwicklungsdaten. In praktischen Anwendungen wird das Abwicklungsmuster jedoch oftmals unter Verwendung der geschätzten CL-Faktoren und somit aus den Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$  durch

$$\widehat{\beta}_j^{(CL)} = \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}$$

geschätzt, wobei  $\widehat{f}_k$  der CL-Schätzer gemäß Gleichung (3) ist. Dies ist dadurch motiviert, dass aus den Annahmen des CL-Modells (siehe Modellannahmen 2.1)

$$\mathbb{E}[C_{i,J}] = \mathbb{E}[C_{i,j}] \prod_{k=j}^{J-1} f_k$$

folgt. Hierdurch wird für alle  $j = 0, \dots, J$

$$\mathbb{E}[C_{i,j}] = \mathbb{E}[C_{i,J}] \prod_{k=j}^{J-1} f_k^{-1}$$

impliziert. Vergleicht man diese Gleichung mit der im BF-Verfahren gültigen Beziehung

$$\mathbb{E}[C_{i,j}] = \beta_j \mu_i \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[C_{i,J}] = \mu_i,$$

so ist der Zusammenhang zwischen  $\beta_j$  und  $\prod_{k=j}^{J-1} f_k^{-1}$  unmittelbar zu erkennen. Aus den CL-Faktoren kann somit das Abwicklungsmuster konstruiert werden und vice versa. Für den BF-Prädiktor des Endschadenstandes des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  resultiert

$$\widehat{C}_{i,J}^{BF(CL)} = C_{i,I-i} + \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\mu}_i, \quad (14)$$

wenn der Schätzer  $\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}$  anstelle des a priori Schätzers  $\widehat{\beta}_{I-i}$  verwendet wird. Der mit dem CL-Verfahren bestimmte Prädiktor des Endschadenstandes lässt sich dagegen in der Form

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{i,J}^{CL} &= C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j = C_{i,I-i} + C_{i,I-i} \left( \prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j - 1 \right) \\ &= C_{i,I-i} + \frac{\widehat{C}_{i,J}^{CL}}{\prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j} \left( \prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j - 1 \right) \\ &= C_{i,I-i} + \left( 1 - \frac{1}{\prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j} \right) \widehat{C}_{i,J}^{CL} \\ &= C_{i,I-i} + \left( 1 - \prod_{j=I-i}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_j} \right) \widehat{C}_{i,J}^{CL} \\ &= C_{i,I-i} + \left( 1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \widehat{C}_{i,J}^{CL} \end{aligned} \quad (15)$$

darstellen. Durch einen Vergleich der Gleichungen (14) und (15) wird ersichtlich, dass sich die beiden Schadenreservierungsverfahren nur in der Wahl des Schätzers für den erwarteten Endschadenstand unterscheiden, wenn im BF-Verfahren der Schätzer  $\widehat{\beta}_j^{(CL)}$  für  $\beta_j$  gewählt wird. Während beim BF-Verfahren der externe a priori Schätzer  $\widehat{\mu}_i$  herangezogen wird, wird beim CL-Verfahren der ausschließlich auf den Daten des Abwicklungsdreiecks basierende Schätzer  $\widehat{C}_{i,J}^{CL}$  verwendet. Ein Kritikpunkt an der Schätzung des Abwicklungsmusters aus den geschätzten CL-Faktoren ist, dass dies der dem BF-Verfahren zugrunde liegenden Idee der Unabhängigkeit zwischen den aktuellen Schadenständen und den prognostizierten ausstehenden Verpflichtungen widerspricht (vgl. Mack (2006), S. 115). Dennoch ist dieses Vorgehen gängige Praxis.

Das BF-Verfahren besitzt ebenso wie das CL-Verfahren die Vorteile, dass es einfach, verteilungsfrei und praktikabel ist und dass zudem eine Reihe von Erweiterungen und Modifikationen von ihm existieren (vgl. u.a. Elpidorou et al. (2019), Saluz et al. (2014) und Taylor (2018)). Allerdings können auch bei diesem Verfahren keine Kalenderjahreffekte abgebildet werden. Des Weiteren kann auch das BF-Verfahren nur sinnvoll angewendet werden, wenn ein homogenes Abwicklungsmuster über alle Anfalljahre hinweg vorliegt,

weshalb dies vor einer Anwendung des BF-Verfahrens in der Praxis stets geprüft werden sollte.

Der größte Unterschied zwischen dem BF- und dem CL-Verfahren besteht in dem Einfluss, den die Daten des Abwicklungsdreiecks auf die Schadenreserve haben. Die CL-Reserve hängt sowohl direkt als auch indirekt von den Beobachtungen auf der Hauptdiagonalen ab und reagiert somit besonders empfindlich gegenüber Ausreißern auf der letzten beobachteten Diagonalen. Im BF-Verfahren beeinflussen die aktuellen Schadenstände dagegen nur die Prognosen der Endschadenstände, aber nicht die Schadenreserve, wenn für das Abwicklungsmuster a priori Schätzer und keine auf den Abwicklungsdaten basierenden Schätzer verwendet werden. Aus diesem Grund ist das BF-Verfahren robuster gegenüber Ausreißern, allerdings werden so auch in den Beobachtungen enthaltene Informationen ignoriert, die bei der Prognose der noch ausstehenden Schadenverpflichtungen hilfreich sein können.

### 2.3.3 Das London-Chain-Ladder-Verfahren

Im Laufe der Zeit sind zahlreiche weitere, sowohl rein heuristische als auch stochastische, Verfahren vorgeschlagen worden, mit denen die zukünftigen Schadenzahlungen prognostiziert und somit Schadenreserven bestimmt werden können. Hier werden im Folgenden diejenigen Verfahren, die neben dem CL- und dem BF-Verfahren in Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung verwendet worden sind, vorgestellt. Zunächst wird das sogenannte *London-Chain-Ladder-Verfahren* (LCL-Verfahren) beschrieben, das 1986 von BENJAMIN & EAGLES im Rahmen eines Artikels, der sich mit der Untersuchung von Schadenreserven im internationalen Versicherungsmarkt Lloyd's of London beschäftigt, veröffentlicht wurde.

Das LCL-Verfahren basiert auf der Annahme, dass sich die Entwicklung des Schadenstandes des Anfalljahres  $i$  von Abwicklungsjahr  $j$  zu Abwicklungsjahr  $j + 1$  mit  $j = 0, \dots, J - 1$  durch die folgende lineare Gleichung beschreiben lässt:

$$C_{i,j+1} = b_j + c_j C_{i,j} + \epsilon_j \quad (16)$$

Dabei ist  $b_j \in \mathbb{R}$  der Intercept,  $c_j \in \mathbb{R}$  der Steigungskoeffizient und  $\epsilon_j$  ein Störterm mit Erwartungswert 0. Um die ausstehenden Schadenverpflichtungen prognostizieren zu können, gilt es zunächst, Schätzer für die unbekannt Parameter  $b_j$  und  $c_j$  für  $j =$

$0, \dots, J - 1$  zu bestimmen. Dies erfolgt bei dem Verfahren von BENJAMIN & EAGLES mit der Kleinste-Quadrate-Methode (KQ-Methode), d.h. durch Minimierung der Summe der quadrierten Abweichungen zwischen den beobachteten und den prognostizierten Schadenständen:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_j \\ \hat{c}_j \end{pmatrix} = \arg \min_{(b_j, c_j)^T \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=0}^{I-j-1} (C_{i,j+1} - b_j - c_j C_{i,j})^2$$

Mit den erhaltenen Schätzern  $\hat{b}_j$  und  $\hat{c}_j$  lassen sich die Endschatenstände der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  entsprechend (16) durch

$$\begin{aligned} \hat{C}_{i,J} &= \hat{b}_{J-1} + \hat{c}_{J-1} \hat{C}_{i,J-1} = \hat{b}_{J-1} + \hat{c}_{J-1} \\ &\times \left( \dots \hat{b}_{I-i+2} + \hat{c}_{I-i+2} \left( \hat{b}_{I-i+1} + \hat{c}_{I-i+1} \left( \hat{b}_{I-i} + \hat{c}_{I-i} C_{i,I-i} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

prognostizieren. Wird von dem prognostizierten Endschatenstand jeweils der letzte beobachtbare Schadenstand des entsprechenden Anfalljahres subtrahiert, ergibt sich der LCL-Prädiktor für die noch ausstehende Schadenverpflichtung bzw. die LCL-Reserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}$$

Durch Aggregation dieser Prädiktoren über die Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  hinweg erhält man schließlich den LCL-Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung bzw. die LCL-Gesamtreserve:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i$$

### 2.3.4 Der Glättungsansatz von SHERMAN

Ein weiteres Schadenreservierungsverfahren, das später mit einer Methode aus dem Bereich der Theorie unscharfer Mengen kombiniert wurde, ist der 1984 von SHERMAN vorgeschlagene *Glättungsansatz*. Bei diesem Verfahren gilt es als erstes, die individuellen Abwicklungsfaktoren  $F_{i,j}$  der Anfalljahre  $i = 0, \dots, I - j - 1$  und Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, J - 1$  zu berechnen, die jeweils das Verhältnis der kumulierten Schadenzahlungen des Anfalljahres  $i$  von Abwicklungsjahr  $j + 1$  zu Abwicklungsjahr  $j$  angeben:

$$F_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Anschließend wird für jedes Abwicklungsjahr  $j = 0, \dots, J - 1$  ein repräsentativer, nicht mehr vom Anfalljahr  $i$  abhängiger Abwicklungsfaktor  $f_j^*$  bestimmt. Eine in der aktuariellen Praxis verbreitete Vorgehensweise, die auch von SHERMAN empfohlen wird, ist es,  $f_j^*$  wie folgt zu wählen (vgl. Sherman (1984), S. 133):

$$f_j^* = \frac{1}{I - j} \sum_{i=0}^{I-j-1} F_{i,j}, \quad j = 0, \dots, J - 1$$

Im Gegensatz zum CL-Verfahren, bei dem ein gewichteter Durchschnitt der individuellen Abwicklungsfaktoren verwendet wird (siehe (4)), wird hier also der ungewichtete Mittelwert der individuellen Abwicklungsfaktoren des entsprechenden Abwicklungsjahres gebildet.

An die Abwicklungsfaktoren  $f_j^*$  wird dann im nächsten Schritt eine Kurve angepasst. DE ANDRÉS SÁNCHEZ weicht dabei in seiner 2006 veröffentlichten unscharfen Version des Verfahrens von SHERMAN (siehe Abschnitt 4.1.2) leicht von SHERMANS ursprünglichem Vorgehen ab und unterstellt den folgenden Zusammenhang zwischen dem Abwicklungsfaktor und dem Abwicklungsjahr (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3097):

$$f_j^* = 1 + e^a(j + 1)^b \quad (18)$$

Dabei sind  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$  unbekannte Parameter, für die es Schätzer zu bestimmen gilt. Hierfür wird Gleichung (18) zunächst durch Logarithmieren zu einer in den Parametern  $a$  und  $b$  linearen Gleichung umgeformt und die rechte Seite der Gleichung zudem um einen Störterm  $\epsilon_j$  mit Erwartungswert 0 ergänzt (vgl. Sherman (1984), S. 126). So ergibt sich das folgende lineare Regressionsmodell mit der abhängigen Variable  $\ln(f_j^* - 1)$  und der unabhängigen Variable  $\ln(j + 1)$ :

$$\ln(f_j^* - 1) = a + b \ln(j + 1) + \epsilon_j, \quad j = 0, \dots, J - 1 \quad (19)$$

Die Schätzer für die Parameter  $a$  und  $b$  dieses linearen Regressionsmodells, im Folgenden mit  $\hat{a}$  bzw.  $\hat{b}$  bezeichnet, werden bei dem Verfahren von SHERMAN mit der KQ-Methode bestimmt. Werden sie anschließend in Gleichung (18) eingesetzt, erhält man Schätzer für die Abwicklungsfaktoren der Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, J - 1$ :

$$\hat{f}_j^* = 1 + e^{\hat{a}}(j + 1)^{\hat{b}}$$

An dieser Stelle hat DE ANDRÉS SÁNCHEZ, verglichen mit SHERMAN, noch einen Zwischenschritt eingefügt und aus den geschätzten Abwicklungsfaktoren Schätzer für die

sogenannten *Prognoseraten* bestimmt (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3097):

$$\hat{q}_{j,s}^* = \prod_{h=j}^{s-1} \hat{f}_h^* = \prod_{h=j}^{s-1} \left(1 + e^{\hat{a}}(h+1)^{\hat{b}}\right) \quad (20)$$

Die geschätzte Prognoserate  $\hat{q}_{j,s}^*$  von Abwicklungsjahr  $j$  zu Abwicklungsjahr  $s$  mit  $j = 0, \dots, J-1$ ,  $s = 1, \dots, J$  und  $j < s$  ergibt sich folglich durch Multiplikation der geschätzten Abwicklungsfaktoren der Abwicklungsjahre  $h = j$  bis  $h = s-1$ . Wird dann der jeweilige letzte beobachtbare Schadenstand mit der entsprechenden geschätzten Prognoserate multipliziert, erhält man Prädiktoren für die zukünftigen, nicht beobachtbaren Schadenstände  $C_{i,j}$  mit  $i+j > I$  (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3099):

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,I-i} \hat{q}_{I-i,j}^* \quad (21)$$

Im Fall  $j = J$  liefert (21) den Prädiktor für den Endschadenstand des entsprechenden Anfalljahres. Wird von diesem Wert der jeweilige letzte beobachtbare Schadenstand abgezogen, resultiert die Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} = C_{i,I-i} \hat{q}_{I-i,J}^* - C_{i,I-i}$$

Um schließlich den Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung bzw. die Gesamtreserve zu erhalten, sind die einzelnen Schadenreserven über die Anfalljahre hinweg aufzuaddieren:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i$$

### 2.3.5 Die geometrische Separationsmethode von TAYLOR

Neben dem CL- und dem BF-Verfahren ist unter anderem auch die im Folgenden vorgestellte geometrische Separationsmethode von TAYLOR (1977, 1978) später zu einem unscharfen Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven erweitert worden.

Bei der geometrischen Separationsmethode werden zunächst für alle vorliegenden Beobachtungen, d.h. für alle Anfalljahre  $i$  und Abwicklungsjahre  $j$  mit  $i+j \leq I$ , die durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden berechnet. Hierfür ist jeweils der Quotient aus der inkrementellen Schadenzahlung  $X_{i,j}$ , die für Schäden des Anfalljahres  $i$  im Abwicklungsjahr  $j$  geleistet wird, und der Anzahl der Schäden des  $i$ -ten Anfalljahres  $N_i$  zu bilden:

$$S_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{N_i}$$

Für diese durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden wird angenommen, dass sie sich in zwei Faktoren zerlegen lassen: in einen Faktor  $P_j$  mit  $\sum_{j=0}^J P_j = 1$ , der den Anteil, den die Schadenzahlungen des  $j$ -ten Abwicklungsjahres an den gesamten Schadenzahlungen haben, angibt, und in einen Faktor  $\Pi_{i+j}$ , der die Effekte der exogenen Einflüsse, wie z.B. der Inflation, des Kalenderjahres  $i + j$  beinhaltet. Es wird also angenommen, dass

$$S_{i,j} = P_j \Pi_{i+j}$$

bzw. nach Logarithmierung

$$\ln S_{i,j} = \ln P_j + \ln \Pi_{i+j} \quad (22)$$

gilt (vgl. Taylor (1977), S. 221). Um ein stochastisches Modell zu erhalten, wird zudem die rechte Seite von Gleichung (22) um einen Störterm  $\epsilon_{i,j}$  mit Erwartungswert 0 ergänzt. So resultiert das lineare Regressionsmodell

$$\ln S_{i,j} = \ln P_j + \ln \Pi_{i+j} + \epsilon_{i,j}$$

mit  $i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J$  und  $i + j \leq I$  bzw. in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

Dabei ist  $\boldsymbol{\beta} = (\ln P_0, \dots, \ln P_J, \ln \Pi_0, \dots, \ln \Pi_I)^T$  ein Vektor mit den  $I + J + 2$  unbekanntem, zu schätzenden Parametern,  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{0,0}, \dots, \epsilon_{0,J}, \epsilon_{1,0}, \dots, \epsilon_{1,J-1}, \dots, \epsilon_{I,0})^T$  ein Vektor mit den Störtermen und  $\mathbf{y} = (\ln S_{0,0}, \dots, \ln S_{0,J}, \ln S_{1,0}, \dots, \ln S_{1,J-1}, \dots, \ln S_{I,0})^T$  ein Vektor, welcher die  $\frac{1}{2}(J+1)(J+2)$  logarithmierten durchschnittlichen Schadenzahlungen beinhaltet. Die  $\frac{1}{2}(J+1)(J+2) \times (I+J+2)$  Designmatrix  $\mathbf{X}$  ist durch

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{(J+1) \times (J+1)} & & & \mathbf{I}_{(J+1) \times (I+1)} \\ \mathbf{I}_{J \times J} & \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{I}_{J \times I} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_{(I-i+1) \times (J-i+1)} & \mathbf{0}_{(I-i+1) \times i} & \mathbf{0}_{(I-i+1) \times i} & \mathbf{I}_{(I-i+1) \times (I-i+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times J} & \mathbf{0}_{1 \times I} & \mathbf{I}_{1 \times 1} \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei  $\mathbf{I}_{a \times a}$  eine Einheitsmatrix mit Rang  $a$  bezeichnet und  $\mathbf{0}_{b \times c}$  eine Nullmatrix mit  $b$  Zeilen und  $c$  Spalten (vgl. Apaydin & Baser (2010), S. 117f.). Wird auf dieses lineare Regressionsmodell die KQ-Methode angewendet, tritt allerdings wegen  $\sum_{j=0}^J P_j = 1$  das Problem auf, dass für  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  eine singuläre Matrix resultiert. Aus diesem Grund haben GOOVAERTS ET AL. (1990) vorgeschlagen, vor der Anwendung der KQ-Methode den Wert eines Parameters zu fixieren und die entsprechende Spalte der Designmatrix  $\mathbf{X}$  wegzulassen. So können für die übrigen  $I + J + 1$  Parameter eindeutige Schätzer bestimmt werden (vgl. Goovaerts et al. (1990), S. 274). Die resultierenden KQ-Schätzer sowie der vorgegebene Wert werden im Folgenden mit  $\ln \hat{P}_j, j = 0, \dots, J$ , bzw.  $\ln \hat{\Pi}_{i+j}, i + j = 0, \dots, I$ , bezeichnet.

Um die zukünftigen, nicht beobachtbaren Schadenzahlungen prognostizieren und schließlich die Schadenreserve bestimmen zu können, müssen im nächsten Schritt noch Schätzer für die Parameter  $\ln \Pi_{i+j}$  für die zukünftigen Kalenderjahre, d.h. für  $i + j = I + 1, \dots, 2I$ , bestimmt werden. Eine Möglichkeit, die von VAN EEGHEN (1981) vorgeschlagen wurde, ist es, hierfür zunächst an die schon ermittelten Schätzer  $\ln \hat{\Pi}_{i+j}$  mit  $i + j \leq I$  eine lineare Funktion anzupassen:

$$\ln \hat{\Pi}_{i+j} = a + b(i + j)$$

Für die beiden Parameter  $a$  und  $b$  werden wieder mit Hilfe der KQ-Methode Schätzer bestimmt und mit dem resultierenden geschätzten Zusammenhang können dann Schätzer für die logarithmierten Faktoren der exogenen Einflüsse zukünftiger Kalenderjahre, d.h. für  $i + j > I$ , bestimmt werden. Damit liegen alle erforderlichen Schätzer  $\ln \hat{P}_j, j = 0, \dots, J$ , und  $\ln \hat{\Pi}_{i+j}, i + j = 0, \dots, 2I$ , vor, um Prädiktoren

$$\ln \hat{S}_{i,j} = \ln \hat{P}_j + \ln \hat{\Pi}_{i+j}$$

für die zukünftigen logarithmierten durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden und damit auch Prädiktoren für die zukünftigen durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden bestimmen zu können:

$$\hat{S}_{i,j} = \exp \left( \ln \hat{P}_j + \ln \hat{\Pi}_{i+j} \right)$$

Werden die ermittelten prognostizierten durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden anschließend mit der Schadenanzahl des entsprechenden Anfalljahres multipliziert, resul-

tieren Prädiktoren für die inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j}$  für  $i + j > I$ :

$$\widehat{X}_{i,j} = \widehat{S}_{i,j} N_i$$

Um die Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  zu erhalten, sind alle prognostizierten inkrementellen Schadenzahlungen des entsprechenden Anfalljahres aufzuaddieren

$$\widehat{R}_i = \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{X}_{i,j}$$

und durch Aggregation der Schadenreserven über die Anfalljahre hinweg erhält man schließlich den Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung:

$$\widehat{R} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i$$

### 2.3.6 Das ANOVA-Schadenreservierungsverfahren von KREMER

Im Jahr 1982 hat KREMER in dem Artikel „*IBNR-claims and the two-way model of ANOVA*“ ein Verfahren vorgeschlagen, das die zweifaktorielle Varianzanalyse (Analysis of Variance (ANOVA)) in Verbindung mit dem Problem der Bestimmung von Schadenreserven bringt. Auch dieses Verfahren hat später Anwendung im Bereich der unscharfen Schadenreservierung gefunden und wird daher hier im Folgenden vorgestellt.

Bei dem Verfahren von KREMER wird angenommen, dass für die inkrementellen Schadenzahlungen

$$X_{i,j} = \mu_i p_j \eta_{i,j} \tag{23}$$

gilt, wobei  $\eta_{i,j}$  eine positive Zufallsvariable mit Erwartungswert 1 ist,  $\mu_i = \mathbb{E}[C_{i,J}] > 0$  der erwartete Endschadenstand des Anfalljahres  $i$  und  $p_j > 0$  mit  $\sum_{j=0}^J p_j = 1$  der Anteil der erwarteten Schadenzahlungen, der auf das  $j$ -te Abwicklungsjahr entfällt. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass für die inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j} > 0$  für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, I - i$  gilt. Da jedoch, sofern diese Annahme nicht erfüllt ist, eine Konstante  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x < \min_{i,j|i+j \leq I} X_{i,j}$  gewählt und die verschobenen Schadenzahlungen  $X'_{i,j} = X_{i,j} - x$  betrachtet werden können, stellt diese Annahme keine Einschränkung dar (vgl. Kremer (1982), S. 48).

Um eine lineare Struktur zu erhalten, wird Gleichung (23) durch Logarithmierung zu

$$\ln X_{i,j} = a + b_i + c_j + \epsilon_{i,j} \tag{24}$$

mit  $i + j \leq I$  und

$$a = \frac{1}{I+1} \sum_{k=0}^I \ln \mu_k + \frac{1}{J+1} \sum_{k=0}^J \ln p_k, \quad b_i = \ln \mu_i - \frac{1}{I+1} \sum_{k=0}^I \ln \mu_k, \quad (25)$$

$$c_j = \ln p_j - \frac{1}{J+1} \sum_{k=0}^J \ln p_k, \quad \epsilon_{i,j} = \ln \eta_{i,j} \quad (26)$$

umgeformt (vgl. Kremer (1982), S. 49). Wie bei der zweifaktoriellen ANOVA<sup>2</sup> wird unterstellt, dass es sich bei  $\epsilon_{i,j}$  mit  $i + j \leq I$  um unkorrelierte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und konstanter Varianz  $\sigma^2 \in (0, \infty)$  handelt. Allerdings sind hier die  $X_{i,j}$  für  $i + j > I$  unbekannt (vgl. Kremer (1982), S. 49).

Damit die zukünftigen Schadenzahlungen prognostiziert und schließlich die Schadenreserven bestimmt werden können, sind zunächst für die Parameter  $a$ ,  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ , und  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , Schätzer zu bestimmen. Für diese Parameter hat KREMER unter den angegebenen Annahmen mit Hilfe des Gauß-Markov-Theorems Schätzer ermittelt, die im Folgenden mit  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}_i$  und  $\hat{c}_j$  bezeichnet werden (vgl. Kremer (1982), S. 49f.). Mit diesen Schätzern können dann anschließend mit (25) und (26) Schätzer  $\hat{\mu}_i$  und  $\hat{p}_j$  für  $\mu_i$  bzw.  $p_j$  bestimmt werden (vgl. Kremer (1982), S. 49ff.), mit denen dann wiederum die zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen prognostiziert werden können:

$$\hat{X}_{i,j} = \hat{\mu}_i \hat{p}_j$$

Addiert man die prognostizierten inkrementellen Schadenzahlungen eines Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  auf, erhält man die Schadenreserve dieses Anfalljahres:

$$\hat{R}_i = \sum_{j=I-i+1}^J \hat{X}_{i,j}$$

Für die Gesamtreserve ergibt sich:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i$$

### 2.3.7 Ein auf der Hoerl-Kurve basierendes Schadenreservierungsverfahren

Im Jahr 2014 wurde ein Artikel von KIM & KIM veröffentlicht, in dem sowohl ein scharfes Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven als auch eine unscharfe Version dieses Verfahrens vorgeschlagen werden. Hier wird im Folgenden zunächst das scharfe Verfahren kurz vorgestellt, das unscharfe Verfahren wird in Abschnitt 4.1.8 behandelt.

<sup>2</sup>Eine detaillierte Erläuterung der Varianzanalyse ist etwa in LINDER & BERCHTOLD (1982) zu finden.

Für die inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j}$  wird bei dem scharfen Verfahren von KIM & KIM das folgende parametrische Modell, die sogenannte Hoerl-Kurve, unterstellt (vgl. Kim & Kim (2014), S. 349):

$$X_{i,j} = \exp(c + \alpha_i) \exp(\beta \ln(j + 1) + \gamma(j + 1)), \quad i + j \leq I \quad (27)$$

Nach Logarithmierung beider Seiten von (27) und Ergänzung der rechten Seite um einen Störterm  $\epsilon_{i,j}$  erhält man das lineare Modell:

$$\ln X_{i,j} = c + \alpha_i + \beta \ln(j + 1) + \gamma(j + 1) + \epsilon_{i,j}, \quad i + j \leq I$$

KIM & KIM haben gezeigt, dass dieses Modell geeignet ist für eine Kovarianzanalyse<sup>3</sup> (Analysis of Covariance (ANCOVA)), welche die ANOVA und die lineare Regressionsanalyse miteinander verbindet (vgl. Kim & Kim (2014), S. 350). Die Schätzer, die so für die unbekannt Parameter  $c, \alpha_0, \dots, \alpha_I, \beta$  und  $\gamma$  resultieren, werden mit  $\hat{c}, \hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_I, \hat{\beta}$  und  $\hat{\gamma}$  bezeichnet.

Mit Hilfe der geschätzten Parameter werden dann als nächstes die individuellen Abwicklungsfaktoren  $F_{i,j}$  geschätzt. Mit der Hoerl-Kurve (siehe (27)) erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i,j} &= \frac{\hat{C}_{i,j+1}}{\hat{C}_{i,j}} = \frac{\sum_{k=0}^{j+1} \hat{X}_{i,k}}{\sum_{k=0}^j \hat{X}_{i,k}} = \frac{\sum_{k=0}^{j+1} \exp(\hat{c} + \hat{\alpha}_i) \exp(\hat{\beta} \ln(k + 1) + \hat{\gamma}(k + 1))}{\sum_{k=0}^j \exp(\hat{c} + \hat{\alpha}_i) \exp(\hat{\beta} \ln(k + 1) + \hat{\gamma}(k + 1))} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{j+1} \exp(\hat{\beta} \ln(k + 1) + \hat{\gamma}(k + 1))}{\sum_{k=0}^j \exp(\hat{\beta} \ln(k + 1) + \hat{\gamma}(k + 1))} \end{aligned}$$

Die Schätzer für die individuellen Abwicklungsfaktoren sind also unabhängig von  $i$  und werden daher im Folgenden mit  $\hat{F}_j$  bezeichnet. Multipliziert man die geschätzten individuellen Abwicklungsfaktoren der Abwicklungsjahre  $h = j$  bis  $h = s - 1$ , ergibt sich die geschätzte Prognoserate von Abwicklungsjahr  $j$  zu Abwicklungsjahr  $s$  mit  $j = 0, \dots, J - 1, s = 1, \dots, J$  und  $j < s$ , die ebenfalls nicht von  $i$  abhängig ist (vgl. Kim & Kim (2014), S. 351):

$$\hat{q}_{j,s} = \prod_{h=j}^{s-1} \hat{F}_h = \frac{\hat{C}_{i,s}}{\hat{C}_{i,j}} = \frac{\sum_{k=0}^s \exp(\hat{\beta} \ln(k + 1) + \hat{\gamma}(k + 1))}{\sum_{k=0}^j \exp(\hat{\beta} \ln(k + 1) + \hat{\gamma}(k + 1))} \quad (28)$$

Die geschätzten Prognoseraten werden dann genutzt, um die zukünftigen Schadenzahlungen zu prognostizieren. Den Prädiktor für die zukünftige kumulierte Schadenzahlung  $C_{i,j}$

<sup>3</sup>Für eine ausführliche Erläuterung der Kovarianzanalyse sei etwa auf LINDER & BERCHTOLD (1982) verwiesen.

mit  $i + j > I$  erhält man, indem man den jeweiligen letzten beobachtbaren Schadenstand mit der entsprechenden geschätzten Prognoserate multipliziert:

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,I-i} \widehat{q}_{I-i,j} \quad (29)$$

Für  $j = J$  resultiert der Prädiktor für den Endschatenstand. Wird von diesem der jeweilige letzte beobachtbare Schadenstand abgezogen, ergibt sich die Reserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} = C_{i,I-i} \widehat{q}_{I-i,J} - C_{i,I-i}$$

Die Gesamtreserve erhält man als Summe über die Reserven der einzelnen Anfalljahre:

$$\widehat{R} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i = \sum_{i=1}^I (C_{i,I-i} \widehat{q}_{I-i,J} - C_{i,I-i})$$

### 2.3.8 Das additive Verfahren

Das additive Verfahren, das auch als Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse bezeichnet wird, ist ein weiteres populäres Verfahren zur Prognose der ausstehenden Schadenverpflichtungen. In Abschnitt 4.3.1 dieser Arbeit wird eine unscharfe Version des additiven Verfahrens vorgeschlagen. Hier wird im Folgenden zunächst das klassische additive Verfahren vorgestellt.

Grundlage des additiven Verfahrens ist das Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse, das wie folgt lautet: Es gibt Parameter  $\xi_0, \dots, \xi_J$ , die sogenannten erwarteten Schadenquotenzuwächse, so dass

$$\mathbb{E} \left[ \frac{X_{i,j}}{v_i} \right] = \frac{\mathbb{E}[X_{i,j}]}{v_i} = \xi_j$$

für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, J$  gilt. Bei  $v_0, \dots, v_I$  handelt es sich dabei um Volumenmaße der Anfalljahre, die als bekannt vorausgesetzt werden. Mögliche Volumenmaße  $v_i$  sind etwa die Anzahl der Verträge, die erwartete Anzahl der Schäden, die Versicherungssumme sowie die gebuchte, verrechnete oder verdiente Prämie des Bestandes im Anfalljahr  $i = 0, \dots, I$  (vgl. Radtke & Schmidt (2012), S. 295).

Bei dem additiven Verfahren wird dann zunächst für jedes Abwicklungsjahr  $j = 0, \dots, J$  der erwartete Schadenquotenzuwachs  $\xi_j$  durch den additiven Schadenquotenzuwachs

$$\widehat{\xi}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i}$$

geschätzt. Dieser Schätzer lässt sich auch in der Form

$$\hat{\xi}_j = \sum_{i=0}^{I-j} \frac{v_i}{\sum_{h=0}^{I-j} v_h} \frac{X_{i,j}}{v_i}$$

darstellen. Der additive Schadenquotenzuwachs ist also das mit den Volumenmaßen gewichtete Mittel der beobachtbaren individuellen Schadenquotenzuwächse  $\frac{X_{i,j}}{v_i}$  des Abwicklungsjahres  $j$ . Mit Hilfe der ermittelten additiven Schadenquotenzuwächse werden die zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j}$  mit  $i + j > I$  durch

$$\hat{X}_{i,j} = v_i \hat{\xi}_j$$

prognostiziert. Dieser Prädiktor basiert auf der Gleichung

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = v_i \mathbb{E}\left[\frac{X_{i,j}}{v_i}\right] = v_i \xi_j, \quad (30)$$

die sich aus dem Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse ergibt. Addiert man die prognostizierten inkrementellen Schadenzahlungen eines Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  anschließend auf, erhält man die Reserve dieses Anfalljahres:

$$\hat{R}_i = \sum_{j=I-i+1}^J \hat{X}_{i,j}$$

Die Gesamtreserve ist gegeben durch:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \hat{X}_{i,j}$$

### 2.3.9 Das Cape-Cod-Verfahren

Wie bereits in Abschnitt 2.3.1 beschrieben, ist eine Schwäche des CL-Verfahrens, dass es gegenüber Ausreißern auf der letzten beobachteten Diagonalen des Abwicklungsdreiecks, d.h. im aktuellen Kalenderjahr, nicht robust ist, da die CL-Reserven sowohl direkt als auch indirekt (über die geschätzten CL-Faktoren) von den aktuellen Schadenständen abhängen. Eine Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen und Ausreißer auf der letzten beobachteten Diagonalen zu glätten, ist, die Beobachtungen auf der Hauptdiagonalen zu robustifizieren. Ein Verfahren, bei dem dies erfolgt, ist das auf BÜHLMANN & STRAUB (1983) zurückgehende *Cape-Cod-Verfahren* (CC-Verfahren). In Abschnitt 4.4.1 dieser Arbeit wird eine unscharfe Version des CC-Verfahrens vorgeschlagen, weshalb hier im Folgenden das scharfe CC-Verfahren vorgestellt wird. Dieses beruht auf dem CC-Modell, dessen Annahmen wie folgt lauten:

### Modellannahmen 2.3 (Das Cape-Cod-Modell)

- Die Schadenstände  $C_{i,j}$  unterschiedlicher Anfalljahre  $i$  sind stochastisch unabhängig.
- Es existieren Parameter  $\kappa > 0$  und  $\beta_0, \dots, \beta_J > 0$  mit  $\beta_J = 1$  sowie bekannte Volumenmaße  $v_0, \dots, v_I > 0$ , so dass

$$\mathbb{E}[C_{i,j}] = \kappa v_i \beta_j \quad (31)$$

für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, J$  gilt.

Vergleicht man (31) mit (9) im BF-Verfahren, so ist zu erkennen, dass im CC-Modell angenommen wird, dass für den erwarteten Endschadenstand  $\mu_i = \kappa v_i$  gilt. Der Parameter  $\kappa$  kann als (unbekannte) vom Anfalljahr unabhängige, globale Endschadenquote interpretiert werden und bei  $v_0, \dots, v_I$  handelt es sich um Volumenmaße, die ebenso wie beim additiven Verfahren als bekannt vorausgesetzt werden. Sie werden oftmals als Prämien der einzelnen Anfalljahre interpretiert. Beim additiven Verfahren bezieht sich die Modellannahme nicht wie hier auf die Schadenstände, sondern auf die inkrementellen Schadenzahlungen, und die Volumenmaße werden daher dort mit dem erwarteten Schadenquotenzuwachs des jeweiligen Abwicklungsjahres multipliziert (siehe (30)). Die Parameter  $\beta_0, \dots, \beta_J > 0$  in (31) bilden ein Abwicklungsmuster. Wie beim BF-Verfahren ist es in praktischen Anwendungen üblich, für das Abwicklungsmuster keine a priori Schätzer zu nutzen, sondern es unter Verwendung der geschätzten CL-Faktoren und somit aus den Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$  durch

$$\widehat{\beta}_j^{(CL)} = \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}$$

zu schätzen.  $\widehat{f}_k$  ist dabei der CL-Schätzer gemäß Gleichung (3). Mit Hilfe der Schätzer  $\widehat{\beta}_j^{(CL)}$  kann dann die sogenannte *CC-Endschadenquote*, d.h. der Schätzer für den Parameter  $\kappa$ , bestimmt werden:

$$\widehat{\kappa} = \frac{\sum_{i=0}^I C_{i,I-i}}{\sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \quad (32)$$

Die zentrale dem CC-Verfahren zugrundeliegende Idee ist es, die geschätzten Parameter zu nutzen, um den aktuellen Schadenstand  $C_{i,I-i}$  des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  in einen *robustifizierten* aktuellen Schadenstand, den *CC-Schadenstand*

$$\widehat{C}_{i,I-i}^{CC} = \widehat{\kappa} v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}, \quad (33)$$

und einen *Ausreißereffekt*

$$\widehat{Z}_i = C_{i,I-i} - \widehat{C}_{i,I-i}^{CC}$$

zu zerlegen. Während die CC-Schadenstände  $\widehat{C}_{i,I-i}^{CC}$  nach dem CL-Verfahren in die Zukunft fortgeschrieben werden, wird der Ausreißereffekt, der angibt, wie stark der beobachtete aktuelle Schadenstand  $C_{i,I-i}$  von dem CC-Schadenstand  $\widehat{C}_{i,I-i}^{CC}$  abweicht und somit als Ausreißer anzusehen ist, unverändert additiv mitgeführt. Der Prädiktor für den Endschadenstand des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  ist im CC-Verfahren demnach durch

$$\widehat{C}_{i,J} = C_{i,I-i} - \widehat{C}_{i,I-i}^{CC} + \widehat{C}_{i,I-i}^{CC} \prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j \quad (34)$$

gegeben. Mit (33) und

$$\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} = \prod_{j=I-i}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_j} = \frac{1}{\prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j}$$

lässt sich (34) zu

$$\widehat{C}_{i,J} = C_{i,I-i} + \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\kappa}v_i \quad (35)$$

umformen. Es handelt sich bei dem mit dem CC-Verfahren ermittelten Prädiktor für den Endschadenstand also um einen Prädiktor vom Typ BF mit modifiziertem a priori Schätzer  $\widehat{\kappa}v_i$ , wobei  $\widehat{\kappa}$  die CC-Endschadenquote gemäß (32) und  $v_i$  ein als bekannt vorausgesetztes Volumenmaß ist. Allgemein sind die Prädiktoren für die nicht beobachtbaren, zukünftigen Schadenstände  $C_{i,j}$  mit  $i + j > I$  im CC-Verfahren analog zu (35) durch

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,I-i} + \left(\widehat{\beta}_j^{(CL)} - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\kappa}v_i \quad (36)$$

gegeben (vgl. auch (12)). Zieht man von dem prognostizierten Endschadenstand des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  den jeweiligen letzten beobachtbaren Schadenstand ab, erhält man die Reserve dieses Anfalljahres

$$\widehat{R}_i = \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\kappa}v_i$$

und durch Addition der Reserven der einzelnen Anfalljahre die Gesamtreserve:

$$\widehat{R} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i$$

## 3 Die Theorie unscharfer Mengen

### 3.1 Unscharfe Mengen

#### 3.1.1 Grundlegende Begriffe und Operationen auf unscharfen Mengen

Gemäß CANTOR, dem Begründer der Mengenlehre, ist eine Menge wie folgt definiert (vgl. Cantor (1895), S. 481):

**Definition 3.1 (Menge)** Eine Menge  $M$  ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die zu einer Menge zusammengefassten Objekte heißen Elemente der Menge.

Die mathematische Beschreibung solch einer Menge, die auch genauer als klassische oder scharfe Menge bezeichnet wird, kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen. Eine Möglichkeit ist die Aufzählung aller Elemente, die zu der Menge gehören. Eine andere Möglichkeit ist die Angabe einer Menge in beschreibender Form mit Hilfe einer Eigenschaft, welche die Elemente der Menge charakterisiert (vgl. Merz & Wüthrich (2013), S. 32). Des Weiteren kann eine Menge ebenfalls durch ihre *charakteristische Funktion* beschrieben werden. Dabei handelt es sich um eine 0-1-wertige Funktion, die mit dem Funktionswert 1 die Zugehörigkeit und mit dem Funktionswert 0 die Nichtzugehörigkeit eines Objekts zu der Menge anzeigt (vgl. Bothe (1993), S. 15). Insbesondere an der 0-1-Wertigkeit der charakteristischen Funktion ist deutlich zu erkennen, dass es in der klassischen Mengenlehre nach CANTOR keine Abstufungen zwischen der vollen Zugehörigkeit und der Nichtzugehörigkeit gibt. Ein Objekt kann entweder zu einer Menge gehören oder nicht zu dieser Menge gehören.

In der Realität gibt es jedoch oftmals Mengen, die keine scharfen Begrenzungen aufweisen, welche die Objekte, die zu der Menge gehören, von den Objekten, die nicht zu der Menge gehören, trennen. Ein Beispiel hierfür ist die Menge derjenigen reellen Zahlen, die viel größer als 10 sind. Es gibt Zahlen, die eindeutig viel größer als 10 sind, und es gibt Zahlen, die eindeutig nicht viel größer als 10 sind. Allerdings existieren auch Zahlen, die weder viel größer als 10 noch nicht viel größer als 10 sind und für die somit nicht eindeutig entschieden werden kann, ob sie zu dieser Menge gehören oder nicht (vgl. Zadeh (1965), S. 338). Weitere Beispiele sind etwa Mengen wie „große Männer“ und „blaue Gegenstände“. Vor dem Hintergrund, dass solche unscharf begrenzten Mengen im mensch-

lichen Denken und in praktischen Anwendungen eine zentrale Rolle spielen, hat ZADEH 1965 die *Theorie unscharfer Mengen* (Fuzzy Set Theory (FST)) eingeführt. Im Gegensatz zur klassischen Mengenlehre kann hier ein Objekt nicht nur entweder zu einer Menge gehören oder nicht zu dieser Menge gehören, es kann auch zu einem bestimmten *Grad* zu der Menge gehören. Somit erlaubt die Theorie unscharfer Mengen die Beschreibung von Abstufungen zwischen der vollständigen Zugehörigkeit und der Nichtzugehörigkeit eines Objekts zu einer Menge.

Um unscharfe Mengen, die zur Abgrenzung gegenüber klassischen Mengen in dieser Arbeit mit einer Tilde gekennzeichnet werden, definieren zu können, ist zunächst noch der Begriff der *Zugehörigkeitsfunktion* zu klären. Die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  gibt den Grad der Zugehörigkeit eines Elements  $x$  zur unscharfen Menge  $\tilde{A}$  an. Üblicherweise, und ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit, wird unterstellt, dass die Zugehörigkeitsfunktion nur Werte aus dem Intervall  $[0, 1]$  annehmen kann. Dabei bedeutet ein Zugehörigkeitswert von 0, dass das Objekt nicht zur Menge  $\tilde{A}$  gehört, ein Wert von 1 bedeutet dagegen, dass das Objekt vollständig zu  $\tilde{A}$  gehört. Je näher der Wert von  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  an 1 liegt, desto größer ist der Zugehörigkeitsgrad von  $x$  zu  $\tilde{A}$ . Eine unscharfe Menge kann damit wie folgt definiert werden:

**Definition 3.2 (Unscharfe Menge)** Es sei  $X$  eine scharfe Menge von Elementen  $x$ . Dann ist die Menge

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X \}$$

eine unscharfe Menge auf  $X$  mit der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ . Die Menge  $X$  wird als Grundbereich oder Grundmenge von  $\tilde{A}$  bezeichnet.

Kann die Zugehörigkeitsfunktion nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen, stimmt sie mit der charakteristischen Funktion einer scharfen Menge überein. Bei der Zugehörigkeitsfunktion handelt es sich also um eine Verallgemeinerung der charakteristischen Funktion und bei unscharfen Mengen um eine Verallgemeinerung klassischer Mengen (vgl. Zimmermann (1996), S. 12f.).

Im Folgenden werden einige grundlegende Begriffe und Operationen für unscharfe Mengen definiert. Ein zentraler Begriff ist der des *Trägers* einer unscharfen Menge. Da eine unscharfe Menge auch Elemente beinhalten kann, die einen Grad der Zugehörigkeit von Null aufweisen, ist es oftmals von Interesse, nur diejenigen Elemente anzugeben, deren

Zugehörigkeitswert zur unscharfen Menge  $\tilde{A}$  größer als Null ist. Diese werden durch den Träger erfasst:

**Definition 3.3 (Träger einer unscharfen Menge)** Der Träger einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  ist durch die scharfe Menge

$$T(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (37)$$

gegeben.

Ein allgemeineres Konzept ist das des  $\alpha$ -Schnitts, mit dem diejenigen Elemente  $x \in X$  hervorgehoben werden können, die mindestens zum Grad  $\alpha \in [0, 1]$  zur unscharfen Menge  $\tilde{A}$  gehören:

**Definition 3.4 ( $\alpha$ -Schnitt einer unscharfen Menge)** Der  $\alpha$ -Schnitt,  $\alpha \in [0, 1]$ , einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  ist durch die scharfe Menge

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

gegeben.

Soll der Zugehörigkeitsgrad größer als  $\alpha$  sein, ist der *strenge*  $\alpha$ -Schnitt  $\tilde{A}_{>\alpha}$  zu betrachten, der durch die scharfe Menge  $\tilde{A}_{>\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$  definiert ist. Für  $\alpha = 0$  resultiert der Träger von  $\tilde{A}$  als spezieller strenger  $\alpha$ -Schnitt, d.h.  $\tilde{A}_{>0} = T(\tilde{A})$ .

Eine weitere relevante Kenngröße einer unscharfen Menge ist ihre *Höhe*, die wie folgt definiert ist:

**Definition 3.5 (Höhe einer unscharfen Menge)** Die Höhe einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  ist durch

$$hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

gegeben.

Eine unscharfe Menge  $\tilde{A}$ , für die  $hgt(\tilde{A}) = 1$  gilt, wird als *normal* bezeichnet und die scharfe Menge derjenigen Elemente  $x \in X$ , die einen Zugehörigkeitsgrad von Eins aufweisen, heißt *Kern*  $K(\tilde{A})$  von  $\tilde{A}$ , d.h.  $K(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$ . Eine unscharfe Menge  $\tilde{A}$  mit nichtleerem Kern ist demnach normal. Ist eine unscharfe Menge nicht normal,

wird sie *subnormal* genannt. Allerdings kann jede subnormale unscharfe Menge  $\tilde{A}$  normalisiert werden, sofern nicht  $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv 0$  gilt, indem die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  für alle  $x \in X$  durch  $\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$  dividiert wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden stets normale unscharfe Menge betrachtet, sofern nichts anderes angegeben wird. Die bisher eingeführten Begriffe des Trägers, des  $\alpha$ -Schnitts, der Höhe sowie des Kerns einer unscharfen Menge sind in Abbildung 4 visualisiert.

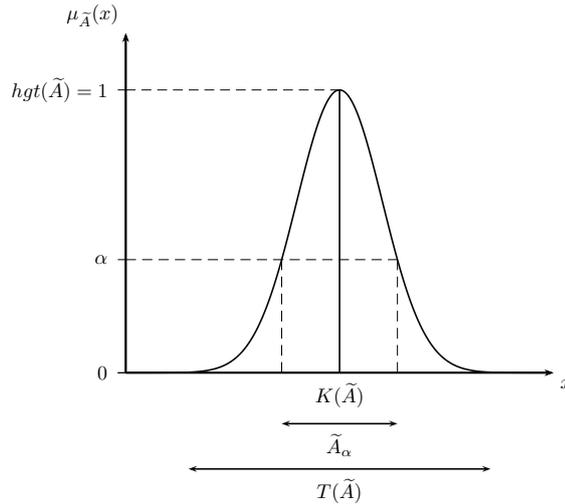


ABBILDUNG 4: Träger  $T(\tilde{A})$ ,  $\alpha$ -Schnitt  $\tilde{A}_\alpha$ , Höhe  $hgt(\tilde{A})$  und Kern  $K(\tilde{A})$  einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$

In der folgenden Definition wird mit der *Konvexität* einer unscharfen Menge ein weiteres wichtiges Konzept eingeführt:

**Definition 3.6 (Konvexität einer unscharfen Menge)** Eine unscharfe Menge  $\tilde{A}$  wird als konvex bezeichnet, wenn

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}, \quad x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1]$$

gilt.

Eine äquivalente Definition der Konvexität besagt, dass eine unscharfe Menge genau dann konvex ist, wenn alle ihre  $\alpha$ -Schnitte konvexe Mengen sind (vgl. Zimmermann (1996), S. 14). Da es sich bei den  $\alpha$ -Schnitten um scharfe Mengen handelt, kommt dabei die Definition der Konvexität aus der klassischen Mengenlehre zur Anwendung. In Abbildung 5 sind beispielhaft die Zugehörigkeitsfunktionen einer konvexen unscharfen Menge  $\tilde{A}$  sowie einer nicht konvexen unscharfen Menge  $\tilde{B}$  illustriert.

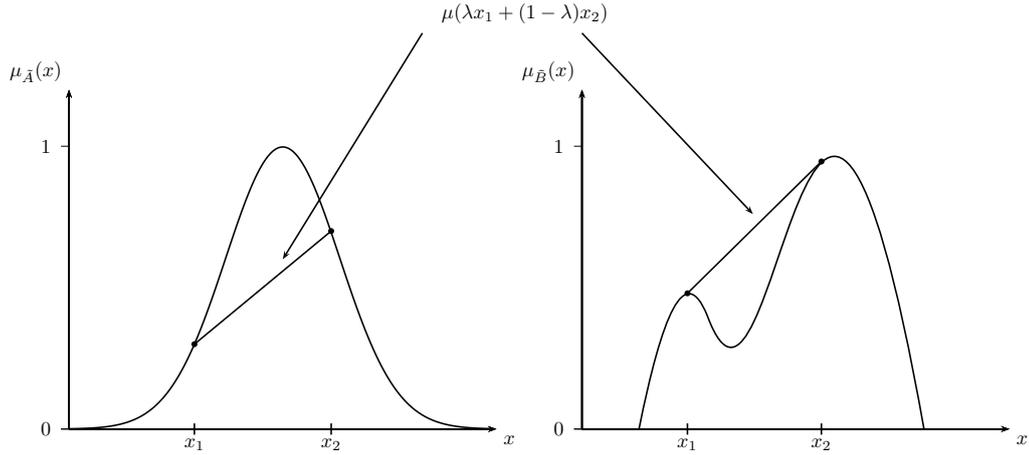


ABBILDUNG 5: Zugehörigkeitsfunktionen einer konvexen unscharfen Menge  $\tilde{A}$  (links) und einer nicht konvexen unscharfen Menge  $\tilde{B}$  (rechts)

ZADEH hat bereits 1965 ebenfalls die grundlegenden mengenalgebraischen Operationen Durchschnitt, Vereinigung und Komplement für unscharfe Mengen definiert (vgl. Zadeh (1965), S. 340f.). Die Definitionen sind im Folgenden angegeben und werden in den Abbildungen 6, 7 und 8 grafisch veranschaulicht.

**Definition 3.7 (Elementare Operationen auf unscharfen Mengen)**

- Die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}$  des Durchschnitts  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$  zweier unscharfer Mengen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  ist für alle  $x \in X$  gegeben durch:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (38)$$

- Die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}$  der Vereinigung  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$  zweier unscharfer Mengen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  ist für alle  $x \in X$  gegeben durch:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (39)$$

- Die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{A}^C}$  des Komplements  $\tilde{A}^C$  einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  mit  $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$  ist für alle  $x \in X$  gegeben durch:

$$\mu_{\tilde{A}^C}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

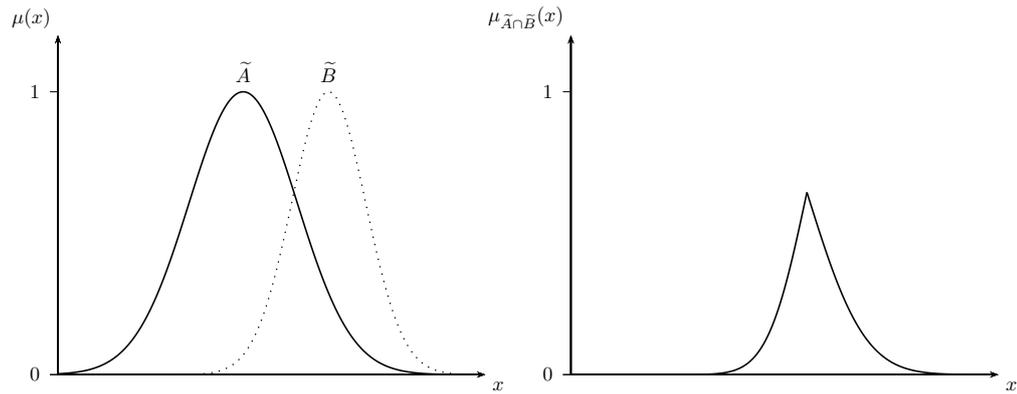


ABBILDUNG 6: Zugehörigkeitsfunktionen von zwei unscharfen Mengen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  (links) und ihrem Durchschnitt  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$  (rechts)

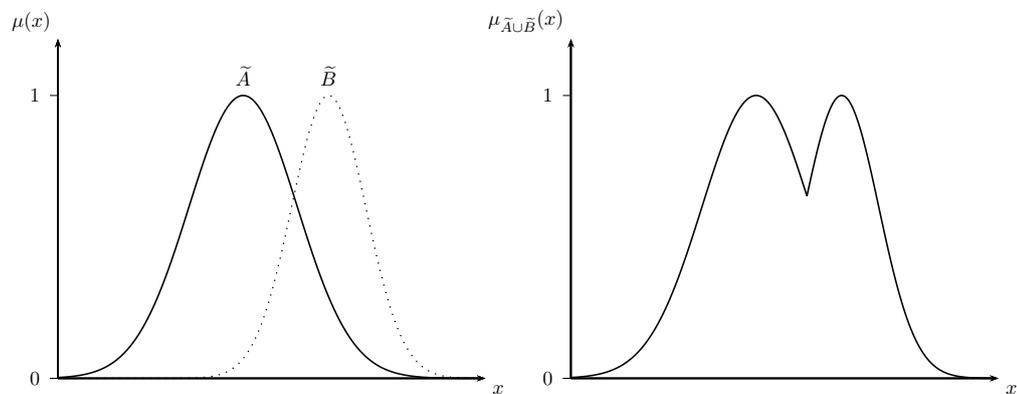


ABBILDUNG 7: Zugehörigkeitsfunktionen von zwei unscharfen Mengen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  (links) und ihrer Vereinigung  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$  (rechts)

Bei all diesen Verknüpfungen unscharfer Mengen handelt es sich um Verallgemeinerungen der entsprechenden Operatoren für klassische Mengen. Sie beinhalten diese also für den Spezialfall, dass die Zugehörigkeitsfunktionen jeweils nur Werte aus der Menge  $\{0, 1\}$  annehmen können (vgl. Hanss (2005), S.35). Für eine Begründung der Verwendung des Min- und des Max-Operators bei der Definition der Zugehörigkeitsfunktion des Durchschnitts und der Vereinigung sei auf BELLMAN & GIERTZ verwiesen (vgl. Bellman & Giertz (1973), S. 151ff.).

Neben den bereits dargestellten Operationen gibt es noch viele weitere Möglichkeiten, unscharfe Mengen miteinander zu verknüpfen und in Verbindung zueinander zu setzen. Von besonderer Bedeutung sind unter anderem das *algebraische Produkt* sowie die *algebraische Summe*, deren Zugehörigkeitsfunktionen statt den von ZADEH vorgeschlagene-

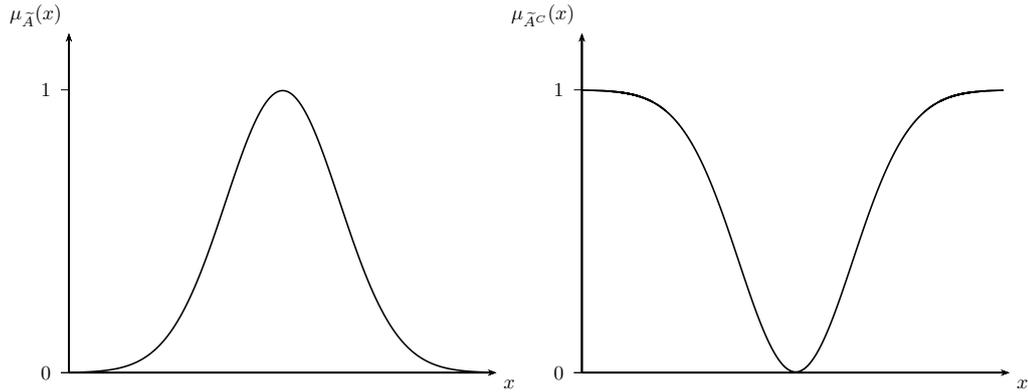


ABBILDUNG 8: Zugehörigkeitsfunktionen einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  (links) und ihres Komplements  $\tilde{A}^C$  (rechts)

nen Zugehörigkeitsfunktionen des Durchschnitts und der Vereinigung zweier unscharfer Mengen (siehe (38) bzw. (39)) oftmals zur Verallgemeinerung der Durchschnitts- bzw. Vereinigungsbildung verwendet werden:

**Definition 3.8 (Algebraisches Produkt)** Die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}$  des algebraischen Produkts  $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$  zweier unscharfer Mengen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  ist für alle  $x \in X$  durch

$$\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (40)$$

gegeben.

**Definition 3.9 (Algebraische Summe)** Die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}$  der algebraischen Summe  $\tilde{A} + \tilde{B}$  zweier unscharfer Mengen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  ist für alle  $x \in X$  durch

$$\mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (41)$$

gegeben.

### 3.1.2 Das Erweiterungsprinzip

Eines der fundamentalsten Konzepte der Theorie unscharfer Mengen ist das sogenannte *Erweiterungsprinzip*, das bereits 1965 von ZADEH in einer ersten vereinfachten Form eingeführt wurde (vgl. Zadeh (1965), S. 346). Die inzwischen üblicherweise verwendete Version wurde 1975 von ZADEH veröffentlicht und lautet wie folgt (vgl. Zadeh (1975a, 1975b, 1975c)):

**Definition 3.10 (Erweiterungsprinzip)** Es seien  $X_1, \dots, X_n, X$  Grundmengen und  $\tilde{A}_i$  unscharfe Mengen auf  $X_i$  mit den Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)$  mit  $x_i \in X_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Ferner sei

$$f : X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow X$$

eine Funktion, die jedem Element  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  genau ein Element  $x = f(x_1, \dots, x_n) \in X$  zuordnet. Dann ist die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{B}}(x)$  der unscharfen Menge

$$\tilde{B} = \{ (x, \mu_{\tilde{B}}(x)) \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \text{ mit } x = f(x_1, \dots, x_n) \}$$

auf  $X$  durch

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \sup_{x=f(x_1, \dots, x_n)} \min \{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \} & \text{falls } \exists (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \\ & \text{mit } x = f(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

In Abschnitt 3.2.2 dieser Arbeit wird gezeigt, wie mit Hilfe des Erweiterungsprinzips mathematische Konzepte für scharfe Mengen auf unscharfe Mengen übertragen werden können, und damit die große Relevanz dieses Konzepts verdeutlicht.

Neben dem in Definition 3.10 angegebenen Erweiterungsprinzip wurden noch verschiedene Modifikationen in der Literatur betrachtet. So hat etwa JAIN vorgeschlagen, die Supremumbildung durch die algebraische Summe (siehe (41)) zu ersetzen (vgl. Jain (1976), S. 1395). Ein weiterer Vorschlag war, statt  $\min$  das algebraische Produkt (siehe (40)) zu nutzen (vgl. Dubois & Prade (1980), S. 38). Die oben angeführte Definition des Erweiterungsprinzips stellt jedoch die am häufigsten angewandte dar und wird deshalb ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit verwendet.

## 3.2 Unscharfe Zahlen und ihre Arithmetik

### 3.2.1 Unscharfe Zahlen

Die in Abschnitt 3.1.1 eingeführten unscharfen Mengen können auf den unterschiedlichsten Grundbereichen definiert werden. Von besonderer Bedeutung sind unscharfe Mengen, die auf dem Zahlenbereich der reellen Zahlen definiert sind. Dies ist dadurch begründet, dass solche unscharfen Mengen als *unscharfe Zahlen* betrachtet werden können, wenn sie bestimmte zusätzliche Eigenschaften aufweisen. Auf unscharfe Zahlen in Form von ungenau gegebenen oder ungenau bestimmten Zahlen trifft man in zahlreichen Situationen in der Wissenschaft und Praxis. So sind beispielsweise Aussagen wie „Die Kosten werden sich auf etwa 1000 Euro belaufen“ oder „Es wird eine Steigerung von ungefähr 6% erwartet“ üblich. Die Eigenschaften, die eine unscharfe Menge besitzen muss, damit sie mit den Vorstellungen über einen ungenau angegebenen Wert einer Zahl übereinstimmt, sind in der folgenden Definition spezifiziert:

**Definition 3.11 (Unscharfe Zahl)** Eine unscharfe Menge  $\tilde{a}$  auf den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  wird als unscharfe Zahl bezeichnet, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- 1) Es existiert genau eine reelle Zahl  $x_0$ , für die  $\mu_{\tilde{a}}(x_0) = 1$  gilt, d.h.  $K(\tilde{a}) = \{x_0\}$ .
- 2)  $\tilde{a}$  ist konvex.
- 3) Die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{a}}(x)$  ist wenigstens stückweise stetig.

Der Wert  $x_0 \in \mathbb{R}$ , bei dem die Zugehörigkeitsfunktion ihr Maximum 1 annimmt, wird *Modalwert*, *Modus* oder auch *Mittelwert* oder *Zentrum* der unscharfen Zahl  $\tilde{a}$  genannt, wobei die Bezeichnungen Mittelwert und Zentrum insbesondere bei *symmetrischen* unscharfen Zahlen üblich sind. Die Symmetrie einer unscharfen Zahl  $\tilde{a}$  bedeutet dabei, dass

$$\mu_{\tilde{a}}(x_0 + x) = \mu_{\tilde{a}}(x_0 - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

gilt. Wenn eine unscharfe Menge  $\tilde{A}$  nur die erste der oben angeführten Eigenschaften nicht erfüllt, sondern ihr Kern stattdessen durch ein geschlossenes Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  gegeben ist, d.h.  $K(\tilde{A}) = [a, b]$ , wird  $\tilde{A}$  üblicherweise *unscharfes Intervall* genannt. Zwei weitere wichtige Begriffe sind die der positiven und die der negativen unscharfen Zahl. Ist

$$T(\tilde{a}) \subseteq (0, \infty)$$

erfüllt, wird die unscharfe Zahl  $\tilde{a}$  als *positiv* bezeichnet. Man schreibt dann  $\tilde{a} > 0$ . Gilt dagegen

$$T(\tilde{a}) \subseteq (-\infty, 0),$$

heißt  $\tilde{a}$  *negativ* und man schreibt  $\tilde{a} < 0$ .

Ebenso wie unscharfe Mengen eine Verallgemeinerung klassischer Mengen sind und diese als Spezialfall enthalten, können auch scharfe Zahlen als spezielle unscharfe Zahlen aufgefasst werden, da sie alle in der Definition 3.11 angegebenen Eigenschaften besitzen.

Eine reelle Zahl  $x_0$  kann demnach als unscharfe Zahl  $\tilde{a}$  mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ 1 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

aufgefasst werden (siehe Abbildung 9).

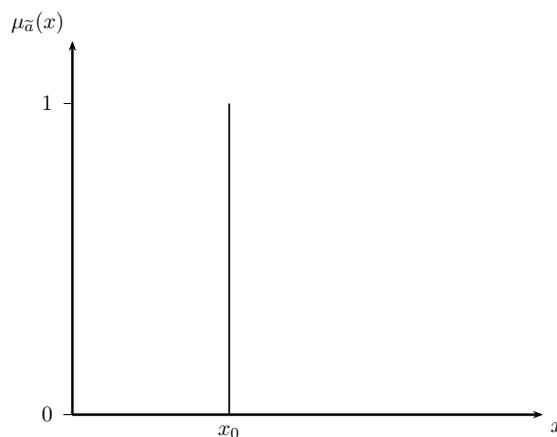


ABBILDUNG 9: Zugehörigkeitsfunktion einer scharfen Zahl  $x_0$

Im Folgenden werden verschiedene gebräuchliche Typen von unscharfen Zahlen eingeführt. Die Darstellung orientiert sich dabei an HANSS (vgl. Hanss (2005), S. 46ff.). Zu den am häufigsten verwendeten unscharfen Zahlen zählt die *dreieckförmige unscharfe Zahl* (siehe Abbildung 10), die sich insbesondere durch ihre einfache Form, ihre intuitive Interpretierbarkeit sowie ihre einfache arithmetische Handhabbarkeit auszeichnet. Die Definition einer dreieckförmigen unscharfen Zahl lautet wie folgt:

**Definition 3.12 (Dreieckförmige unscharfe Zahl)** Eine unscharfe Zahl  $\tilde{a}$  wird als dreieckförmige unscharfe Zahl bezeichnet, wenn für ihre Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_0 - \alpha_l \\ 1 + \frac{x-x_0}{\alpha_l} & \text{für } x_0 - \alpha_l < x < x_0 \\ 1 - \frac{x-x_0}{\alpha_r} & \text{für } x_0 \leq x < x_0 + \alpha_r \\ 0 & \text{für } x \geq x_0 + \alpha_r \end{cases}$$

mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\alpha_l, \alpha_r > 0$  gilt.

Verkürzt kann eine dreieckförmige unscharfe Zahl in der Form  $\tilde{a} = (x_0, \alpha_l, \alpha_r)$  dargestellt werden. Die Parameter  $\alpha_l$  und  $\alpha_r$  heißen linke bzw. rechte *Spannweite* der unscharfen Zahl  $\tilde{a}$ . Sie geben die größte Abweichung nach links bzw. rechts vom Modalwert  $x_0$  an. Je größer die linke und die rechte Spannweite sind, desto breiter ist die Zugehörigkeitsfunktion und desto unschärfer ist die Zahl. Falls die linke und die rechte Spannweite übereinstimmen, handelt es sich um eine *symmetrische* dreieckförmige unscharfe Zahl. Der Fall  $\alpha_l = \alpha_r = 0$  ist zwar in der obigen Definition nicht erfasst, da  $\tilde{a}$  dann aber gerade nicht unscharf ist, handelt es sich um eine scharfe Zahl  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Demnach kann eine scharfe Zahl in der Form  $\tilde{a} = (x_0, 0, 0)$  ebenfalls als dreieckförmige unscharfe Zahl dargestellt werden.

Soll die Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Zahl nicht stückweise linear, sondern stückweise quadratisch sein, kommen *quadratische unscharfe Zahlen* zur Anwendung:

**Definition 3.13 (Quadratische unscharfe Zahl)** Eine unscharfe Zahl  $\tilde{a}$  wird als quadratische unscharfe Zahl bezeichnet, wenn für ihre Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_0 - \beta_l \\ 1 - \frac{(x-x_0)^2}{\beta_l^2} & \text{für } x_0 - \beta_l < x < x_0 \\ 1 - \frac{(x-x_0)^2}{\beta_r^2} & \text{für } x_0 \leq x < x_0 + \beta_r \\ 0 & \text{für } x \geq x_0 + \beta_r \end{cases}$$

mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\beta_l, \beta_r > 0$  gilt.

Dabei ist  $x_0$  wieder der Modus der unscharfen Zahl und die Spannweiten  $\beta_l$  und  $\beta_r$  geben wieder die größte Abweichung nach links bzw. rechts vom Modalwert an. Die Zugehörigkeitsfunktion einer quadratischen unscharfen Zahl ist beispielhaft in Abbildung 10 dargestellt.

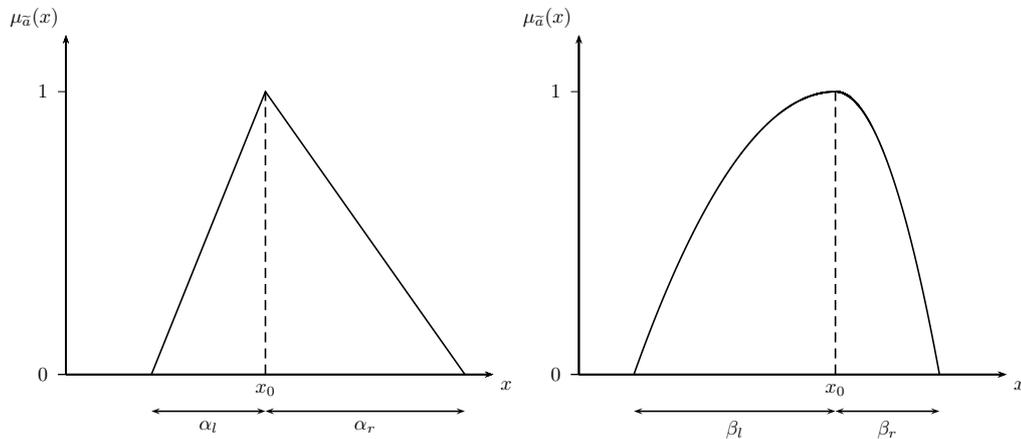


ABBILDUNG 10: Zugehörigkeitsfunktionen einer dreieckförmigen (links) und einer quadratischen (rechts) unscharfen Zahl

Ein weiterer wichtiger Typ von unscharfen Zahlen sind *Gaußsche unscharfe Zahlen*, bei denen die Zugehörigkeitsfunktion durch eine normierte Gauß-Funktion charakterisiert ist:

**Definition 3.14 (Gaußsche unscharfe Zahl)** Eine unscharfe Zahl  $\tilde{a}$  wird als Gaußsche unscharfe Zahl bezeichnet, wenn für ihre Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_l^2}\right) & \text{für } x < x_0 \\ \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_r^2}\right) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\sigma_l, \sigma_r > 0$  gilt.

Während  $x_0 \in \mathbb{R}$  wieder der Modus der unscharfen Zahl ist, ist der Träger hier im Gegensatz zur dreieckförmigen und quadratischen unscharfen Zahl durch ganz  $\mathbb{R}$  gegeben und die Parameter  $\sigma_l$  und  $\sigma_r$  geben nicht die komplette Abweichung nach links bzw. rechts vom Modalwert an, sondern sie entsprechen der Standardabweichung einer Gauß-Verteilung. Wenn  $\sigma_l$  und  $\sigma_r$  übereinstimmen, handelt es sich um eine symmetrische Gaußsche unscharfe Zahl, ansonsten um eine unsymmetrische. Ein Beispiel für die Zugehörigkeitsfunktion einer Gaußschen unscharfen Zahl ist in Abbildung 11 visualisiert.

Insbesondere im Hinblick auf praktische Anwendungen ist es zudem sinnvoll, Gaußsche unscharfe Zahlen zu definieren, die einen endlichen Träger aufweisen. Bei diesen unscharfen Zahlen, die als quasi-Gaußsche unscharfe Zahlen bezeichnet werden, wird der Zugehörigkeitsgrad für Abweichungen  $|x - x_0|$  vom Modalwert  $x_0$ , die mindestens  $3\sigma_l$  bzw.  $3\sigma_r$  betragen, gleich Null gesetzt. Dies ist dadurch motiviert, dass die Zugehörigkeitsgrade in diesen Bereichen ansonsten höchstens bei  $\exp(-4,5) \approx 0,01$ , d.h. höchstens bei  $\approx 1\%$  des Zugehörigkeitsgrads des Modalwerts, liegen. Die Zugehörigkeitsfunktion einer quasi-Gaußschen unscharfen Zahl lautet

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_0 - 3\sigma_l \\ \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_l^2}\right) & \text{für } x_0 - 3\sigma_l < x < x_0 \\ \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_r^2}\right) & \text{für } x_0 \leq x < x_0 + 3\sigma_r \\ 0 & \text{für } x \geq x_0 + 3\sigma_r \end{cases}$$

mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\sigma_l, \sigma_r > 0$ .

Ein ebenfalls populärer und oftmals verwendeter Typ von unscharfen Zahlen sind *exponentielle unscharfe Zahlen*, die wie folgt definiert sind:

**Definition 3.15 (Exponentielle unscharfe Zahl)** Eine unscharfe Zahl  $\tilde{a}$  wird als exponentielle unscharfe Zahl bezeichnet, wenn für ihre Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{x-x_0}{\tau_l}\right) & \text{für } x < x_0 \\ \exp\left(-\frac{x-x_0}{\tau_r}\right) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\tau_l, \tau_r > 0$  gilt.

Auch hier kennzeichnet  $x_0$  den Modalwert der unscharfen Zahl, der Träger ist durch ganz  $\mathbb{R}$  gegeben und die Parameter  $\tau_l$  und  $\tau_r$  geben nicht die vollständige linke bzw. rechte Abweichung von  $x_0$  an. Die Zugehörigkeitsfunktion einer exponentiellen unscharfen Zahl ist in Abbildung 11 grafisch veranschaulicht.

Wie bei den Gaußschen unscharfen Zahlen ist es auch bei den exponentiellen unscharfen Zahlen sinnvoll, sogenannte quasi-exponentielle unscharfe Zahlen mit einem endlichen Träger zu definieren. Bei diesen unscharfen Zahlen wird der Zugehörigkeitsgrad für Abweichungen  $|x - x_0|$  vom Modalwert  $x_0$ , die mindestens  $4,5\tau_l$  bzw.  $4,5\tau_r$  betragen, gleich

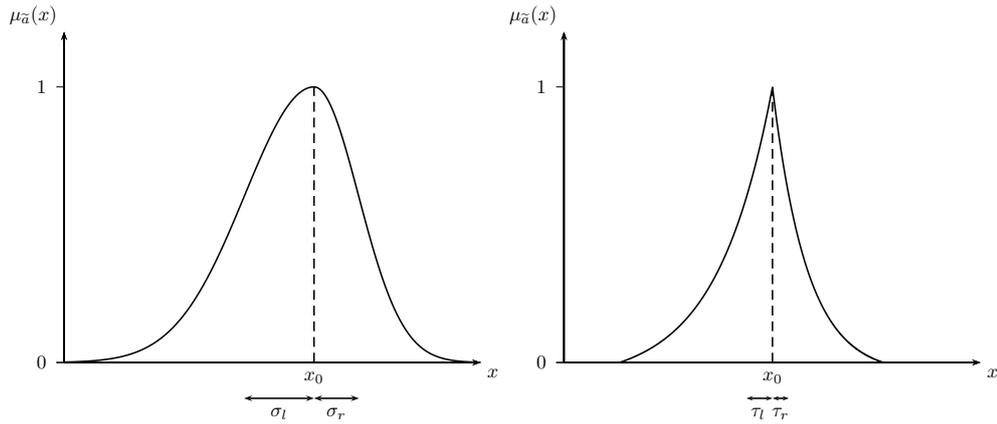


ABBILDUNG 11: Zugehörigkeitsfunktionen einer Gaußschen (links) und einer exponentiellen (rechts) unscharfen Zahl

Null gesetzt, was völlig analog zu quasi-Gaußschen unscharfen Zahlen motiviert ist. Für die Zugehörigkeitsfunktion einer quasi-exponentiellen unscharfen Zahl gilt

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_0 - 4,5\tau_l \\ \exp\left(\frac{x-x_0}{\tau_l}\right) & \text{für } x_0 - 4,5\tau_l < x < x_0 \\ \exp\left(-\frac{x-x_0}{\tau_r}\right) & \text{für } x_0 \leq x < x_0 + 4,5\tau_r \\ 0 & \text{für } x \geq x_0 + 4,5\tau_r \end{cases}$$

mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\tau_l, \tau_r > 0$ .

Eine besondere Art der Darstellung von unscharfen Zahlen, die insbesondere für das (numerische) Rechnen vorteilhaft ist, ist die 1978 von DUBOIS & PRADE eingeführte *LR-Darstellung*. Die Idee dabei ist, die Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Zahl in zwei Teile aufzuspalten: den Teil links vom Modus und den Teil rechts vom Modus, wobei an die Verläufe der Funktionen links und rechts des Modalwerts bestimmte Forderungen gestellt werden, durch die gewährleistet wird, dass es sich um eine unscharfe Zahl handelt. Damit eine unscharfe Zahl in LR-Darstellung definiert werden kann, muss zunächst der Begriff einer *Referenzfunktion* geklärt werden, mit der die Zugehörigkeitsfunktion einer LR-Zahl beschrieben werden kann:

**Definition 3.16 (Referenzfunktion)** Die Funktionen  $L, R : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  werden als Referenzfunktionen bezeichnet, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

- 1)  $L(0) = R(0) = 1$ .
- 2)  $L, R$  sind monoton fallend.
- 3)

$$L(1) = 0 \quad \text{wenn} \quad \min_{x \in [0, \infty)} L(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0 \quad \text{wenn} \quad L(x) > 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$$

und

$$R(1) = 0 \quad \text{wenn} \quad \min_{x \in [0, \infty)} R(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0 \quad \text{wenn} \quad R(x) > 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$$

$L$  kennzeichnet dabei die linke und  $R$  die rechte Referenzfunktion. Während durch die erste und die zweite Bedingung der obigen Definition sichergestellt wird, dass die unscharfe Zahl genau einen Modalwert aufweist und konvex ist, gewährleistet die dritte Bedingung, dass die Zugehörigkeitsfunktion am linken und rechten Rand (zumindest näherungsweise) den Wert 0 erreicht. Mit Hilfe der Referenzfunktionen  $L$  und  $R$  kann eine unscharfe Zahl vom Typ LR wie folgt definiert werden:

**Definition 3.17 (Unschärfe Zahl vom Typ LR)** Eine unscharfe Zahl  $\tilde{a}$  wird als unscharfe Zahl vom Typ LR (LR-Zahl) bezeichnet, wenn es zwei Referenzfunktionen  $L, R$  gibt, so dass für ihre Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{x_0 - x}{\phi_l}\right) & \text{für } x < x_0 \\ R\left(\frac{x - x_0}{\phi_r}\right) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\phi_l, \phi_r > 0$  gilt.

Verkürzt kann eine LR-Zahl in der Form  $\tilde{a} = (x_0, \phi_l, \phi_r)_{L,R}$  dargestellt werden. Ob durch die Parameter  $\phi_l$  und  $\phi_r$  dabei die vollständige linke bzw. rechte Abweichung von dem

Modalwert  $x_0$  angegeben wird oder nicht, hängt von der konkreten Spezifikation der Zugehörigkeitsfunktion ab. Soll die Zugehörigkeitsfunktion unsymmetrisch sein, können unterschiedlich parametrisierte Funktionen  $L$  und  $R$  bei  $x = x_0$  miteinander gekoppelt werden oder auch gänzlich verschiedene Funktionentypen. Durch die Wahl unterschiedlicher Funktionen für  $L$  und  $R$  kann beispielsweise eine möglicherweise vorhandene Asymmetrie in dem Wissen über die Angabe „ungefähr  $x_0$ “ zum Ausdruck gebracht werden. Stimmen die Referenzfunktionen  $L$  und  $R$  dagegen überein, d.h. gilt  $L(x) = R(x) \forall x \in \mathbb{R}_+$ , wird die LR-Zahl als *semisymmetrisch* bezeichnet. Wenn zusätzlich die Parameter  $\phi_l$  und  $\phi_r$  einer semisymmetrischen unscharfen Zahl identisch sind, d.h. wenn  $\phi_l = \phi_r$  gilt, heißt die LR-Zahl *symmetrisch*.

Bei der LR-Darstellung handelt es sich um eine sehr allgemeine Form der Darstellung, da sich die meisten der üblicherweise verwendeten Typen von unscharfen Zahlen als LR-Zahl darstellen lassen, unter anderem auch die in diesem Abschnitt eingeführten dreieckförmigen, quadratischen, Gaußschen und exponentiellen unscharfen Zahlen. So gilt etwa für exponentielle unscharfe Zahlen  $\tilde{a} = (x_0, \phi_l, \phi_r)_{e,e}$  mit  $e(u) = \exp(-u) = L(u) = R(u)$ . Die linke und die rechte Referenzfunktion stimmen bei exponentiellen unscharfen Zahlen also überein. d.h. exponentielle unscharfe Zahlen sind semisymmetrisch (vgl. Hanss (2005), S. 55).

### 3.2.2 Unscharfe Arithmetik

Die große Relevanz des Erweiterungsprinzips (siehe Abschnitt 3.1.2) resultiert daraus, dass dieses Prinzip es ermöglicht, mathematische Konzepte für scharfe Mengen bzw. Zahlen auf unscharfe Mengen bzw. Zahlen zu übertragen. Von besonderem Interesse ist es, ebenso wie für scharfe Zahlen auch für unscharfe Zahlen elementare Operationen zu definieren. Ist  $*$  allgemein eine binäre Operation auf  $\mathbb{R}$ , die für den Bereich der unscharfen Zahlen zu einer Operation  $\otimes$  erweitert wird, und sind  $\tilde{a}_1$  und  $\tilde{a}_2$  unscharfe Zahlen mit den Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_{\tilde{a}_1}$  bzw.  $\mu_{\tilde{a}_2}$ , dann ist nach dem Erweiterungsprinzip die Verknüpfung  $\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2$  eine unscharfe Menge, deren Zugehörigkeitsfunktion per Definition durch

$$\mu_{\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2}(z) = \begin{cases} \sup_{z=x*y} \min \{ \mu_{\tilde{a}_1}(x), \mu_{\tilde{a}_2}(y) \} & \text{falls } \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } z = x * y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Im Folgenden werden die vier binären Operationen  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  und  $\div$  näher betrachtet, d.h. es werden die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von den reellen Zahlen auf unscharfe Zahlen erweitert. Dadurch wird es ermöglicht, mit unscharfen Zahlen genauso wie mit reellen Zahlen zu rechnen. Die auf unscharfe Zahlen erweiterten Grundrechenoperationen umfassen die gewöhnlichen Rechenoperationen für reelle Zahlen und stellen somit Verallgemeinerungen dieser Operatoren dar. Sie werden im Rahmen dieser Arbeit in der Notation

$$\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$$

geschrieben. In Abschnitt 3.2.1 wurde bereits erwähnt, dass die von DUBOIS & PRADE 1978 eingeführten unscharfen Zahlen vom Typ LR für das Rechnen besonders geeignet sind, weil so die Berechnung erheblich vereinfacht und beschleunigt werden kann. Zudem lässt sich das Rechenergebnis oftmals, eventuell nach einer Approximation des tatsächlichen Ergebnisses, wieder als LR-Zahl mit den gleichen Referenzfunktionen darstellen. Aus diesem Grund werden hier die Grundrechenarten ausschließlich für LR-Zahlen definiert. Da es sich jedoch um eine sehr allgemeine Form der Darstellung handelt und sich die meisten der üblicherweise verwendeten unscharfen Zahlen als LR-Zahl darstellen lassen, handelt es sich dabei um keine starke Einschränkung der Allgemeinheit.

Zunächst wird die Berechnung der Summe zweier unscharfer Zahlen vom gleichen LR-Typ betrachtet:

**Satz 3.1 (Addition von LR-Zahlen)** Die Summe von zwei unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R}$  vom Typ LR ist durch

$$\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \oplus (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R} = (a_1 + a_2, l_{a_1} + l_{a_2}, r_{a_1} + r_{a_2})_{L,R} \quad (42)$$

gegeben.

**Beweis:** Es wird zunächst jeweils der linke Teilst

$$L\left(\frac{a_1 - x_1}{l_{a_1}}\right) \quad \text{bzw.} \quad L\left(\frac{a_2 - x_2}{l_{a_2}}\right)$$

der LR-Zahlen  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R}$  betrachtet und  $\mu^* \in [0, 1]$  sei ein beliebiger, aber fester Zugehörigkeitsgrad von  $x_1^*$  und  $x_2^*$ . Dann gilt

$$\mu^* = L\left(\frac{a_1 - x_1^*}{l_{a_1}}\right) \Leftrightarrow L^{-1}(\mu^*) = \frac{a_1 - x_1^*}{l_{a_1}} \Leftrightarrow x_1^* = a_1 - l_{a_1} L^{-1}(\mu^*)$$

und

$$\mu^* = L\left(\frac{a_2 - x_2^*}{l_{a_2}}\right) \Leftrightarrow L^{-1}(\mu^*) = \frac{a_2 - x_2^*}{l_{a_2}} \Leftrightarrow x_2^* = a_2 - l_{a_2}L^{-1}(\mu^*)$$

und somit:

$$z = x_1^* + x_2^* = a_1 + a_2 - (l_{a_1} + l_{a_2})L^{-1}(\mu^*) \quad (43)$$

Für den linken Teilst der unscharfen Zahl  $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2$  ergibt sich demzufolge:

$$\mu^* = L\left(\frac{a_1 + a_2 - z}{l_{a_1} + l_{a_2}}\right)$$

Analog resultiert

$$\mu^* = R\left(\frac{z - (a_1 + a_2)}{r_{a_1} + r_{a_2}}\right)$$

für den rechten Teilst von  $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2$  und somit insgesamt

$$(a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \oplus (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R} = (a_1 + a_2, l_{a_1} + l_{a_2}, r_{a_1} + r_{a_2})_{L,R}$$

für das Additionsergebnis. □

Die Summe zweier unscharfer Zahlen vom gleichen LR-Typ ist demnach selbst wieder eine LR-Zahl mit den gleichen Referenzfunktionen  $L$  und  $R$ , dem Modalwert  $a_1 + a_2$  und den Spannweiten  $l_{a_1} + l_{a_2}$  bzw.  $r_{a_1} + r_{a_2}$ . In Abbildung 12 ist die Addition  $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2$  beispielhaft für die beiden dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_1 = (2, 1, 2)_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (3, 2, 1)_{L,R}$  grafisch veranschaulicht.

Sind die unscharfen Zahlen nicht vom gleichen, sondern von unterschiedlichem LR-Typ, führt eine analoge Beweisführung wie oben zu:

$$(a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \oplus (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L^*,R^*} = (a_1 + a_2, 1, 1)_{L^{**},R^{**}}$$

Dabei weichen  $L^{**}$  und  $R^{**}$  von den ursprünglichen Referenzfunktionen ab und sind gegeben durch (vgl. Bothe (1993), S. 74):

$$L^{**} = (l_{a_1}L^{-1} + l_{a_2}L^{*-1})^{-1}$$

$$R^{**} = (r_{a_1}R^{-1} + r_{a_2}R^{*-1})^{-1}$$

Viele, aber nicht alle, der für die Grundrechenarten bei reellen Zahlen gültigen Rechengesetze gelten auch für die erweiterten Rechenoperatoren. So ist die erweiterte Addition

$\oplus$  ebenfalls kommutativ und assoziativ, das Distributivgesetz gilt im Allgemeinen jedoch nicht mehr. Das neutrale Element der erweiterten Addition ist die reelle Zahl 0, d.h. es gilt  $\tilde{a} \oplus 0 = \tilde{a}$  (vgl. Bandemer & Gottwald (1993), S. 62).

Um auch eine Formel für die Subtraktion angeben zu können, wird im Folgenden zunächst das Negative einer LR-Zahl definiert, da die Subtraktion stets als Addition einer negativen Zahl aufgefasst werden kann. Ist  $\tilde{a} = (a, l_a, r_a)_{L,R}$  eine unscharfe Zahl vom Typ LR, ist das Negative  $-\tilde{a}$  durch die RL-Zahl

$$-\tilde{a} = -(a, l_a, r_a)_{L,R} = (-a, r_a, l_a)_{R,L} \quad (44)$$

definiert. Bei der Negation einer LR-Zahl ändert sich folglich das Vorzeichen des Modalwerts und die linke und die rechte Spannweite sowie die linke und die rechte Referenzfunktion werden vertauscht. Es ist

$$-(\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2) = (-\tilde{a}_1) \oplus (-\tilde{a}_2)$$

erfüllt, allerdings gilt im Gegensatz zu den reellen Zahlen im Allgemeinen  $\tilde{a} \oplus (-\tilde{a}) \neq 0$ , d.h. für  $\oplus$  existiert kein inverses Element und die erweiterte Addition hat damit keine Gruppenstruktur. Für die Differenz einer LR- und einer RL-Zahl ergibt sich:

**Satz 3.2 (Subtraktion von LR-Zahlen)** Die Differenz zweier unscharfer Zahlen  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{R,L}$  vom Typ LR bzw. RL ist durch

$$\tilde{a}_1 \ominus \tilde{a}_2 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \ominus (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{R,L} = (a_1 - a_2, l_{a_1} + r_{a_2}, r_{a_1} + l_{a_2})_{L,R}$$

gegeben.

**Beweis:** Mit (42) und (44) erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 \ominus \tilde{a}_2 &= \tilde{a}_1 \oplus (-\tilde{a}_2) = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \oplus (-a_2, r_{a_2}, l_{a_2})_{L,R} \\ &= (a_1 - a_2, l_{a_1} + r_{a_2}, r_{a_1} + l_{a_2})_{L,R} \end{aligned} \quad \square$$

Es ist zu beachten, dass die zu subtrahierenden Zahlen vom entgegengesetzten LR-Typ sein müssen, um sicherzustellen, dass die Differenz ebenfalls wieder eine LR-Zahl ist, d.h. wenn der Minuend vom LR-Typ ist, muss der Subtrahend vom RL-Typ sein. Ein Beispiel für den Verlauf der Zugehörigkeitsfunktion der Differenz  $\tilde{a}_1 \ominus \tilde{a}_2$  ist in Abbildung 12 für die dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_1 = (2, 1, 2)_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (3, 2, 1)_{R,L}$  visualisiert.

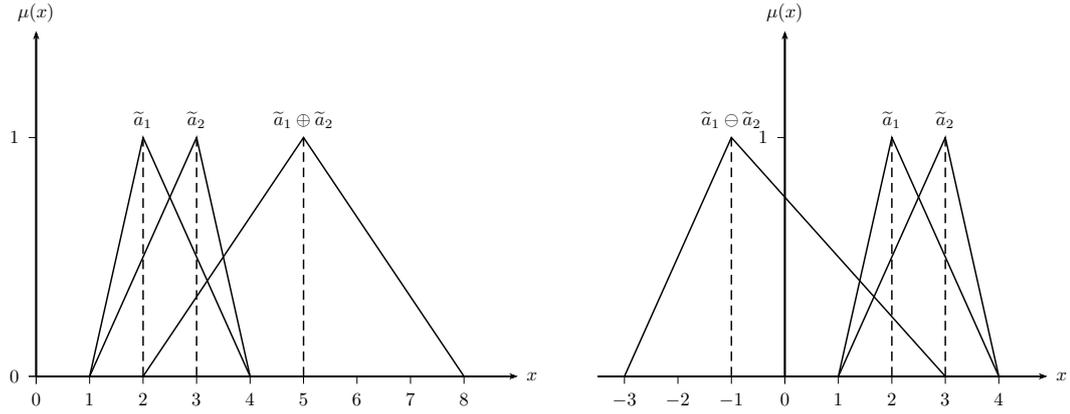


ABBILDUNG 12: Summe  $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2$  (links) und Differenz  $\tilde{a}_1 \ominus \tilde{a}_2$  (rechts) zweier unscharfer Zahlen  $\tilde{a}_1$  und  $\tilde{a}_2$

Auch für die Multiplikation einer LR-Zahl mit einem Skalar kann eine einfache Berechnungsformel angegeben werden. Das Ergebnis ist dabei abhängig vom Vorzeichen des Skalars und selbst wieder eine LR- bzw. RL-Zahl (vgl. Bothe (1993), S. 76):

$$\begin{aligned} \lambda > 0 : \lambda \otimes (a, l_a, r_a)_{L,R} &= (\lambda a, \lambda l_a, \lambda r_a)_{L,R} \\ \lambda < 0 : \lambda \otimes (a, l_a, r_a)_{L,R} &= (\lambda a, -\lambda r_a, -\lambda l_a)_{R,L} \end{aligned} \quad (45)$$

Werden zwei unscharfe LR-Zahlen miteinander multipliziert, besitzt das Ergebnis im Allgemeinen jedoch keine LR-Darstellung mehr. Hier wird das Produkt von unscharfen Zahlen des gleichen LR-Typs für die Fälle, dass beide Zahlen positiv, beide Zahlen negativ und dass eine der beiden Zahlen positiv bzw. negativ ist, vorgestellt. Zunächst wird der Fall, dass  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R}$  positiv sind, behandelt. Entsprechend (43) ergibt sich:

$$z = x_1 x_2 = a_1 a_2 - (a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1}) L^{-1}(\mu^*) + l_{a_1} l_{a_2} (L^{-1}(\mu^*))^2 \quad (46)$$

Wird diese Gleichung nach  $L^{-1}(\mu^*)$  aufgelöst, erhält man:

$$(L^{-1}(\mu^*))_{1,2} = \frac{a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1}}{2l_{a_1} l_{a_2}} \pm \sqrt{\frac{(a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1})^2}{4l_{a_1}^2 l_{a_2}^2} - \frac{a_1 a_2 - z}{l_{a_1} l_{a_2}}}$$

Um auch das Produkt  $\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2$  zumindest approximativ wieder als LR-Zahl darstellen zu können, werden oftmals Näherungen verwendet. Eine Möglichkeit, die sinnvoll ist, sofern die Spannweiten relativ zu den Modalwerten klein sind, ist, den quadratischen Ausdruck

$(L^{-1}(\mu^*))^2$  in (46) zu vernachlässigen. Dies führt für den linken Teilst zu:

$$\begin{aligned} z &\approx a_1 a_2 - (a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1}) L^{-1}(\mu^*) \\ \Leftrightarrow \mu^* &\approx L \left( \frac{a_1 a_2 - z}{a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1}} \right) \end{aligned}$$

Analog lässt sich der rechte Teilst bestimmen. Für das Produkt resultiert so die folgende Approximation:

$$(a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \otimes (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R} \approx (a_1 a_2, a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1}, a_1 r_{a_2} + a_2 r_{a_1})_{L,R} \quad (47)$$

Diese Näherungsformel wurde 1978 von DUBOIS & PRADE vorgeschlagen (vgl. Dubois & Prade (1978), S. 620) und wird als *Tangentenapproximation* bezeichnet. Wenn die Spannweiten verglichen mit  $a_1$  bzw.  $a_2$  nicht vernachlässigbar sind, sollten andere Näherungsformeln, etwa die 1980 von DUBOIS & PRADE vorgeschlagene sogenannte *Sekantenapproximation* (vgl. Dubois & Prade (1980), S. 55), herangezogen werden. Dabei wird der quadratische Term  $(L^{-1}(\mu^*))^2$  in (46) durch den linearen Term  $L^{-1}(\mu^*)$  ersetzt, da sich (46) dann eindeutig nach  $L^{-1}$  auflösen lässt. Mit diesem Vorgehen ergibt sich für den linken Teilst:

$$\begin{aligned} z = x_1 x_2 &\approx a_1 a_2 - (a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1}) L^{-1}(\mu^*) + l_{a_1} l_{a_2} L^{-1}(\mu^*) \\ \Leftrightarrow \mu^* &\approx L \left( \frac{a_1 a_2 - x_1 x_2}{a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1} - l_{a_1} l_{a_2}} \right) \end{aligned}$$

Analog bestimmt man den rechten Teilst und erhält für das Produkt so die Näherung:

$$\begin{aligned} (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \otimes (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R} \\ \approx (a_1 a_2, a_1 l_{a_2} + a_2 l_{a_1} - l_{a_1} l_{a_2}, a_1 r_{a_2} + a_2 r_{a_1} + r_{a_1} r_{a_2})_{L,R} \end{aligned} \quad (48)$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass diese approximierte Zugehörigkeitsfunktion zumindest in den folgenden drei Punkten mit dem tatsächlichen Verlauf von  $\mu_{\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2}$  übereinstimmt (vgl. Bothe (1993), S. 77):

$$(a_1 a_2, 1), \quad ((a_1 - l_{a_1})(a_2 - l_{a_2}), L(1)), \quad ((a_1 + r_{a_1})(a_2 + r_{a_2}), R(1))$$

In Abbildung 13 sind die Tangenten- und die Sekantenapproximation gemeinsam mit der exakten Zugehörigkeitsfunktion beispielhaft für das Produkt  $\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2$  der beiden positiven dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_1 = (2, 1, 2)_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (3, 2, 1)_{L,R}$  dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass in diesem Beispiel die Sekantenapproximation und die exakte

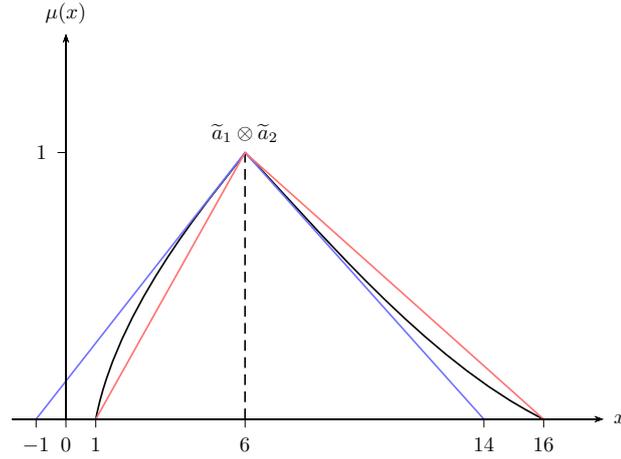


ABBILDUNG 13: Exaktes Produkt  $\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2$  (schwarz) und Tangenten- (blau) sowie Sekantenapproximation (rot)

Multiplikation zu demselben Träger führen. Der Träger, der aus der Tangentenapproximation resultiert, weicht dagegen von dem der exakten Multiplikation ab. Links des Modalwerts von  $\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2$  unterschätzt die Sekantenapproximation die Zugehörigkeitsfunktion des exakten Produkts aufgrund der Konkavität der exakten Zugehörigkeitsfunktion etwas, rechts des Modalwerts verläuft sie dagegen aufgrund der Konvexität der exakten Zugehörigkeitsfunktion etwas oberhalb der Zugehörigkeitsfunktion des exakten Produkts. Bei der Tangentenapproximation ist dies genau andersherum.

Für die Fälle, dass  $\tilde{a}_1$  negativ und  $\tilde{a}_2$  positiv ist bzw. dass beide Zahlen negativ sind, lassen sich analog zu (47) und (48) Näherungsformeln angeben. Ist  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{R,L}$  negativ und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R}$  positiv, erhält man für das Produkt die Tangentenapproximation

$$(a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{R,L} \otimes (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R} \approx (a_1 a_2, a_2 l_{a_1} - a_1 r_{a_2}, a_2 r_{a_1} - a_1 l_{a_2})_{R,L}$$

und die Sekantenapproximation:

$$\begin{aligned} & (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{R,L} \otimes (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R} \\ & \approx (a_1 a_2, a_2 l_{a_1} - a_1 r_{a_2} + l_{a_1} r_{a_2}, a_2 r_{a_1} - a_1 l_{a_2} - r_{a_1} l_{a_2})_{R,L} \end{aligned}$$

Sind  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R}$  negativ, ergibt sich die Tangentenapproximation

$$(a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \otimes (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R} \approx (a_1 a_2, -a_1 r_{a_2} - a_2 r_{a_1}, -a_1 l_{a_2} - a_2 l_{a_1})_{R,L}$$

und die Sekantenapproximation (vgl. Hanss (2005), S. 60):

$$(a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \otimes (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{L,R} \\ \approx (a_1 a_2, -a_1 r_{a_2} - a_2 r_{a_1} - r_{a_1} r_{a_2}, -a_1 l_{a_2} - a_2 l_{a_1} + l_{a_1} l_{a_2})_{R,L}$$

Wie für die erweiterte Addition gelten auch für die Multiplikation unscharfer Zahlen das Kommutativ- und das Assoziativgesetz. Zudem ist

$$(-\tilde{a}_1) \otimes \tilde{a}_2 = -(\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2)$$

erfüllt. Das neutrale Element der erweiterten Multiplikation ist durch die reelle Zahl 1 gegeben, d.h. es gilt  $\tilde{a} \otimes 1 = \tilde{a}$ .

Um auch eine Formel für den Quotienten unscharfer LR-Zahlen angeben zu können, wird aufgrund der Identität

$$\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2^{-1} \quad (49)$$

zunächst der Kehrwert einer LR-Zahl definiert. Gemäß des Erweiterungsprinzips gilt für die Zugehörigkeitsfunktion des Kehrwerts  $\tilde{a}^{-1}$  einer unscharfen Zahl  $\tilde{a}$  (vgl. Bandemer & Gottwald (1993), S. 61):

$$\mu_{\tilde{a}^{-1}}(x) = \mu_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (50)$$

Für das Produkt von einer unscharfen Zahl und ihrem Kehrwert gilt allerdings im Allgemeinen  $\tilde{a} \otimes \tilde{a}^{-1} \neq 1$  (vgl. Dubois & Prade (1979), S. 337). Im Folgenden wird beispielhaft der Kehrwert einer positiven LR-Zahl  $\tilde{a} = (a, l_a, r_a)_{L,R}$  näher betrachtet. Entsprechend (50) erhält man:

$$\mu_{\tilde{a}^{-1}}(x) = \begin{cases} R\left(\left(\frac{1}{x} - a\right) / r_a\right) = R\left(\frac{1-ax}{r_a x}\right) & \text{für } x < \frac{1}{a} \\ L\left(\left(a - \frac{1}{x}\right) / l_a\right) = L\left(\frac{ax-1}{l_a x}\right) & \text{für } x \geq \frac{1}{a} \end{cases}$$

Bei  $\tilde{a}^{-1}$  handelt es sich somit um keine LR-Zahl mehr, weshalb Näherungsformeln wie etwa

$$\tilde{a}^{-1} = (a, l_a, r_a)_{L,R}^{-1} \approx (1/a, r_a/a^2, l_a/a^2)_{R,L} \quad (51)$$

vorgeschlagen wurden. Diese Näherung ist dadurch motiviert, dass in der Umgebung des Modalwerts  $1/a$

$$\frac{1-ax}{r_a x} = \frac{1/a - x}{r_a x/a} \approx \frac{1/a - x}{r_a/a^2} \\ \frac{ax-1}{l_a x} = \frac{x - 1/a}{l_a x/a} \approx \frac{x - 1/a}{l_a/a^2}$$

gilt.  $\tilde{a}^{-1}$  ist also approximativ eine unscharfe Zahl vom Typ RL, wenn  $\tilde{a}$  eine positive unscharfe Zahl vom Typ LR ist. Sind  $l_a$  und  $r_a$  relativ zu  $a$  groß, sollte allerdings eine andere Näherung verwendet werden. Eine Möglichkeit ist, in diesem Fall die Approximation

$$\tilde{a}^{-1} \approx \left(1/a, r_a/a^2 (1 - r_a/(a + r_a)), l_a/a^2 (1 + l_a/(a - l_a))\right)_{R,L} \quad (52)$$

zu nutzen, die zumindest in den drei Punkten

$$(1/a, 1), \quad (1/(a + r_a), R(1)), \quad (1/(a - l_a), L(1))$$

mit der exakten Lösung übereinstimmt (vgl. Bothe (1993), S. 80). Für die positive dreieckförmige unscharfe Zahl  $\tilde{a} = (2, 1, 2)_{L,R}$  sind in Abbildung 14 die Approximation nach (51), die Approximation nach (52) sowie der Verlauf der exakten Zugehörigkeitsfunktion des Kehrwerts  $\tilde{a}^{-1}$  illustriert.

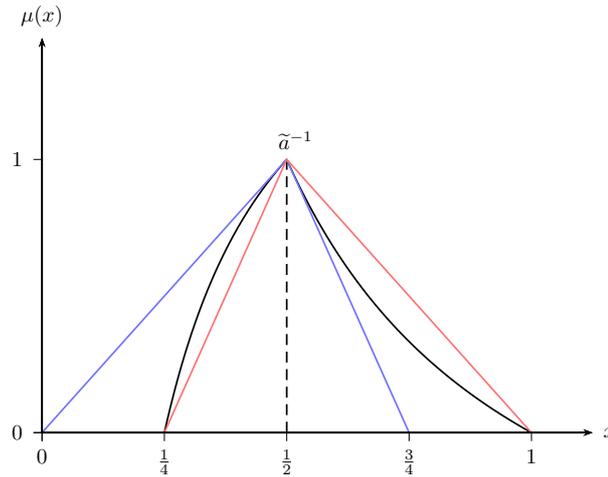


ABBILDUNG 14: Exakter Kehrwert  $\tilde{a}^{-1}$  (schwarz) und Näherung nach (51) (blau) sowie Näherung nach (52) (rot)

Für den Quotienten zweier unscharfer positiver LR- bzw. RL-Zahlen  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R}$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{R,L}$  folgt mit (47), (49) und (51) die Approximation:

$$\begin{aligned} &(a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \odot (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{R,L} \\ &\approx \left(a_1/a_2, (a_1 r_{a_2} + a_2 l_{a_1})/a_2^2, (a_1 l_{a_2} + a_2 r_{a_1})/a_2^2\right)_{L,R} \end{aligned} \quad (53)$$

Alternativ ergibt sich mit (48), (49) und (52) die folgende Näherung:

$$\begin{aligned} &(a_1, l_{a_1}, r_{a_1})_{L,R} \odot (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})_{R,L} \approx \left(a_1/a_2, (a_1 r_{a_2} + a_2 l_{a_1}) \right. \\ &\left. (1 - r_{a_2}/(a_2 + r_{a_2}))/a_2^2, (a_1 l_{a_2} + a_2 r_{a_1}) (1 + l_{a_2}/(a_2 - l_{a_2}))/a_2^2\right)_{L,R} \end{aligned} \quad (54)$$

Diese beiden Approximationsmöglichkeiten werden zusammen mit der exakten Zugehörigkeitsfunktion in Abbildung 15 für den Quotienten  $\tilde{a}_2 \oslash \tilde{a}_1$  der beiden positiven dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_2 = (3, 2, 1)_{L,R}$  und  $\tilde{a}_1 = (2, 1, 2)_{R,L}$  grafisch veranschaulicht.

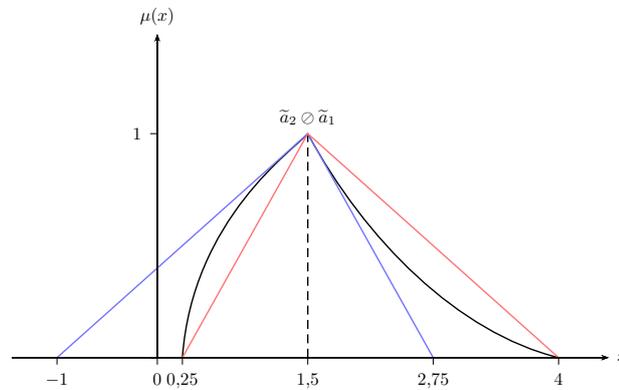


ABBILDUNG 15: Exakter Quotient  $\tilde{a}_2 \oslash \tilde{a}_1$  (schwarz) und Näherung nach (53) (blau) sowie Näherung nach (54) (rot)

Ähnliche Näherungsformeln für die Kehrwertbildung und den Quotienten können für den Fall, dass  $\tilde{a}_1$  und/oder  $\tilde{a}_2$  negativ sind, bestimmt werden, wobei bei der Kehrwertbildung für  $\tilde{a} < 0$  die Identität

$$-(\tilde{a}^{-1}) = (-\tilde{a})^{-1}$$

zur Anwendung kommt.

### 3.3 Maße der Unschärfe

Die in Abschnitt 3.1.1 eingeführte Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  gibt für jedes Element  $x$  der Grundmenge  $X$  den Grad der Zugehörigkeit zu der Menge  $\tilde{A}$  an und erlaubt somit die Beurteilung der lokalen Unschärfe einzelner Elemente. In vielen Fällen ist neben der Unschärfe eines einzelnen Elements aber auch die globale Unschärfe einer Menge von Interesse. Diese kann mit Hilfe sogenannter *Maße der Unschärfe* beurteilt werden. Ein Unschärfemaß ermöglicht es, die Unschärfe einer Menge als Ganzes zu bemessen und so insbesondere unterschiedliche Mengen hinsichtlich ihrer Unschärfe miteinander zu vergleichen.

Im Allgemeinen handelt es sich bei einem Maß der Unschärfe um eine Funktion  $U$  :

$\tilde{\mathcal{P}}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , wobei  $\tilde{\mathcal{P}}(X)$  die Menge aller unscharfen Mengen auf  $X$  bezeichnet. Durch die Funktion  $U$  wird also jeder unscharfen Menge  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$  ein Wert  $U(\tilde{A}) \in \mathbb{R}_+$  zugeordnet, der den Grad der Unschärfe von  $\tilde{A}$  beschreibt. Größere Werte von  $U(\tilde{A})$  stehen dabei für eine stärkere Unschärfe der Menge  $\tilde{A}$ . Damit die Funktion  $U$  die globale Unschärfe einer Menge geeignet quantifiziert, sollte  $U$  gewisse Bedingungen erfüllen. DE LUCA & TERMINI haben die folgenden drei Eigenschaften formuliert, die ein plausibles Maß der Unschärfe besitzen sollte (vgl. De Luca & Termini (1972), S. 303):

$E_1$ )  $U(\tilde{A}) = 0$  genau dann, wenn  $\mu_{\tilde{A}}(x) \in \{0, 1\} \quad \forall x \in X$  gilt.

$E_2$ )  $U(\tilde{A})$  nimmt genau dann seinen Maximalwert an, wenn  $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in X$  gilt.

$E_3$ )  $U(\tilde{A}) \geq U(\tilde{B})$ , wenn  $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$  für  $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \frac{1}{2}$  und  $\mu_{\tilde{B}}(x) \geq \mu_{\tilde{A}}(x)$  für  $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \frac{1}{2}$ , d.h. wenn  $|\mu_{\tilde{A}}(x) - \frac{1}{2}| \leq |\mu_{\tilde{B}}(x) - \frac{1}{2}| \quad \forall x \in X$ , gilt.

Demnach soll ein Unschärfemaß genau dann den Wert Null annehmen, wenn es sich bei  $\tilde{A}$  um eine scharfe Menge handelt ( $E_1$ ), und es soll diejenige Menge als am unschärfsten angesehen werden, deren Zugehörigkeitsfunktion für alle Elemente  $x \in X$  den Wert  $\frac{1}{2}$  annimmt, d.h. bei der für jedes Element der Grad der Zugehörigkeit und der Grad der Nichtzugehörigkeit gleich hoch sind ( $E_2$ ). Die Eigenschaft  $E_3$  besagt, dass das Maß der Unschärfe  $U(\tilde{A})$  größer gleich  $U(\tilde{B})$  sein soll, wenn die Menge  $\tilde{B}$  mindestens so scharf wie die Menge  $\tilde{A}$  ist. Dabei wird  $\tilde{B}$  als mindestens so scharf wie  $\tilde{A}$  betrachtet, wenn die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{B}}(x)$  für  $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \frac{1}{2}$  stets mindestens so nah an 0 und für  $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \frac{1}{2}$  stets mindestens so nah an 1, also mindestens so nah an der Nichtzugehörigkeit bzw. an der vollen Zugehörigkeit, liegt wie die Zugehörigkeitsfunktion von  $\tilde{A}$ .

Im Laufe der Zeit sind zahlreiche verschiedene Maße, welche die von DE LUCA & TERMINI postulierten Eigenschaften erfüllen, vorgeschlagen worden. Eines der populärsten und zuerst veröffentlichten Unschärfemaße ist das 1972 von DE LUCA & TERMINI vorgeschlagene Maß (vgl. De Luca & Termini (1972), S. 305), das auf dem in der Informationstheorie verwendeten Entropiebegriff nach SHANNON (vgl. Shannon (1948)) basiert. Bei diesem Maß wird die Unschärfe einer Menge  $\tilde{A}$ , die auf einer endlichen Grundmenge  $X$  definiert ist, durch

$$\begin{aligned} U_E(\tilde{A}) &= K \sum_{x \in X} S(\mu_{\tilde{A}}(x)) \\ &= -K \sum_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}(x) \ln \mu_{\tilde{A}}(x) + (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \ln(1 - \mu_{\tilde{A}}(x))) \end{aligned}$$

quantifiziert, wobei  $K \in \mathbb{R}_+$  gilt und  $S(x) = -x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)$  die SHANNONSche Funktion ist<sup>4</sup>.

Ein weiterer ebenfalls sehr bekannter Ansatz zur Messung der globalen Unschärfe einer Menge geht auf YAGER zurück (vgl. Yager (1979)). Ausgangspunkt seiner Überlegungen zur Konstruktion eines Unschärfemaßes war, dass der Zugehörigkeitsgrad eines Elements sowohl zu einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  als auch zu ihrem Komplement  $\tilde{A}^C$  (siehe Definition 3.7) größer als 0 sein kann, während bei scharfen Mengen stets nur entweder der Zugehörigkeitsgrad zu einer Menge selbst oder zu ihrem Komplement größer als 0 sein kann. YAGER folgert daraus, dass in der Beziehung zwischen einer Menge und ihrem Komplement der Kern von Unschärfe liegt und ein geeignetes Unschärfemaß auf dieser Beziehung basieren sollte. Je weniger sich  $\tilde{A}$  und  $\tilde{A}^C$  voneinander unterscheiden, als desto unschärfer betrachtet er die Menge  $\tilde{A}$ . Die Unterschiedlichkeit von  $\tilde{A}$  und  $\tilde{A}^C$  wird dabei im Fall einer endlichen Grundmenge  $X$  über ihren Abstand gemessen, den YAGER mit Hilfe der Zugehörigkeitsfunktionen und der Minkowski-Metrik

$$M_p(\tilde{A}, \tilde{A}^C) = \left( \sum_{x \in X} |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{A}^C}(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (55)$$

für  $p = 1, 2, 3, \dots$  bestimmt. Wegen  $\mu_{\tilde{A}^C}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$  lässt sich die Minkowski-Metrik auch in der Form

$$M_p(\tilde{A}, \tilde{A}^C) = \left( \sum_{x \in X} |\mu_{\tilde{A}}(x) - (1 - \mu_{\tilde{A}}(x))|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{x \in X} |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

darstellen. Ist  $p = 1$ , stimmt  $M_p(\tilde{A}, \tilde{A}^C)$  mit der Hamming-Metrik

$$M_1(\tilde{A}, \tilde{A}^C) = \sum_{x \in X} |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{A}^C}(x)| = \sum_{x \in X} |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1|$$

überein und für  $p = 2$  ergibt sich die euklidische Metrik:

$$M_2(\tilde{A}, \tilde{A}^C) = \left( \sum_{x \in X} |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{A}^C}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{x \in X} |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Handelt es sich bei  $\tilde{A}$  in (55) um eine scharfe Menge, dann resultiert für die Minkowski-Metrik das folgende Ergebnis (vgl. Yager (1979), S. 224f.):

<sup>4</sup>Die SHANNONSche Funktion hat ihren Ursprung in der Informationstheorie zur Erfassung des Erwartungswerts des Informationsgehalts eines Ereignisses. Durch die Wahl des Parameters  $K$  kann der Anwender je nach subjektiver Einschätzung der Unschärfe das Ergebnis beeinflussen.

**Satz 3.3** Für eine scharfe Teilmenge  $A$  von  $X$  und ihr Komplement  $A^C$  gilt

$$M_p(A, A^C) = n^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } p = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei  $n$  die Anzahl der Elemente von  $X$  ist.

**Beweis:** Wenn  $A$  eine scharfe Menge ist, dann ist stets entweder  $\mu_A(x) = 1$  und  $\mu_{A^C}(x) = 0$  oder  $\mu_A(x) = 0$  und  $\mu_{A^C}(x) = 1$  erfüllt. Somit gilt

$$|\mu_A(x) - \mu_{A^C}(x)| = 1$$

und

$$M_p(A, A^C) = \left( \sum_{x \in X} 1^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}$$

mit  $|X| = n$ . □

Basierend auf der in (55) angegebenen Metrik und Satz 3.3 hat YAGER das folgende Maß für die Unschärfe von  $\tilde{A}$  definiert (vgl. Yager (1979), S. 225):

$$U_p(\tilde{A}) = 1 - \frac{M_p(\tilde{A}, \tilde{A}^C)}{n^{\frac{1}{p}}} \quad \text{mit } p = 1, 2, 3, \dots$$

Durch dieses Maß wird die inverse Beziehung zwischen der Distanz und dem Grad der Unschärfe berücksichtigt, d.h. je geringer der Abstand zwischen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{A}^C$  ist, desto größer ist der Wert von  $U_p(\tilde{A})$ . Des Weiteren ist das Unschärfemaß auf den Maximalwert 1 normiert, es gilt also  $U_p(\tilde{A}) \in [0, 1]$ .

Die beiden bisher vorgestellten Unschärfemaße erfüllen neben den von DE LUCA & TERMINI geforderten Eigenschaften  $E_1) - E_3)$  zudem die Bedingung, dass der Wert des Unschärfemaßes von  $\tilde{A}$  stets mit dem von  $\tilde{A}^C$  übereinstimmt:

$$E_4) \quad U(\tilde{A}) = U(\tilde{A}^C)$$

Demnach wird eine unscharfe Menge als genauso unscharf beurteilt wie ihr Komplement, was eine weitere wünschenswerte Eigenschaft eines plausiblen Unschärfemaßes darstellt. LOO (vgl. Loo (1977)) und KNOPFMACHER (vgl. Knopfmacher (1975)) haben für den Fall einer endlichen Grundmenge  $X$  gezeigt, dass sich nicht nur einzelne konkrete Maße, sondern eine *Klasse* von Unschärfemaßen formulieren lässt, welche die Eigenschaften  $E_1)$ - $E_4)$  aufweisen. Bei den beiden hier beschriebenen Maßen handelt es sich um populäre Spezialfälle dieser Klasse.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit ist auch die Unschärfe von unscharfen Zahlen zu beurteilen, d.h. von speziellen unscharfen Mengen, die auf den reellen Zahlen definiert sind. Somit werden noch Unschärfemaße benötigt, die im Fall einer überabzählbar unendlichen Grundmenge  $X$  zur Anwendung kommen können. Eine bedeutende Klasse von Unschärfemaßen für unscharfe Mengen, die auf einem Intervall reeller Zahlen definiert sind, ist die von PAL & BEZDEK eingeführte *multiplikative kontinuierliche Klasse*, deren Definition wie folgt lautet (vgl. Pal & Bezdek (1994), S. 113):

**Definition 3.18 (Multiplikative kontinuierliche Klasse)** Es sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine zweifach differenzierbare streng monoton steigende und streng konkave Funktion auf  $[0, 1]$ , d.h. es gilt  $f'(t) > 0$  und  $f''(t) < 0 \forall t \in [0, 1]$ , und  $g$  sei eine Funktion, die durch

$$g(t) = \widehat{g}(t) - \min_{0 \leq t \leq 1} \widehat{g}(t) \text{ mit}$$

$$\widehat{g}(t) = f(t)f(1-t)$$

definiert ist. Ferner sei  $\widetilde{A}$  eine unscharfe Menge auf  $X \subset \mathbb{R}$ . Dann gehört ein Maß  $U$  für die Unschärfe von  $\widetilde{A}$  zur multiplikativen kontinuierlichen Klasse, wenn es sich in der Form

$$U_{Mul}(\widetilde{A}) = K \int_X g(\mu_{\widetilde{A}}(x)) dx$$

mit  $K \in \mathbb{R}_+$  darstellen lässt.

PAL & BEZDEK haben gezeigt, dass Maße der Unschärfe, die zu dieser Klasse gehören, die vier Bedingungen  $E_1) - E_4)$  erfüllen und zudem auch mit YAGERS Auffassung von Unschärfe konsistent sind (vgl. Pal & Bezdek (1994), S. 113).

### 3.4 Methoden zur Defuzzifikation

Die Einbeziehung unscharfer Mengen bzw. die Anwendung unscharfer Methoden bei der Beschreibung und Lösung interessierender Fragestellungen liefert in der Regel als Ergebnis wieder eine unscharfe Menge. In vielen Anwendungen, zum Beispiel in der Kontrolltheorie und auch in der in dieser Arbeit betrachteten Schadenreservierung, wird jedoch als Output keine unscharfe Menge, sondern ein scharfer Wert benötigt. So führt etwa in der Schadenreservierung die Anwendung unscharfer Methoden in der Regel dazu, dass es sich bei dem ermittelten Prädiktor für die ausstehende Schadenverpflichtung, also bei

der Schadenreserve, um eine unscharfe Zahl handelt. Um die Schadenreserve in der Bilanz ausweisen zu können, muss sie allerdings in Form eines einzelnen exakten Wertes vorliegen. Daher muss die ermittelte unscharfe Schadenreserve noch in eine scharfe Zahl transformiert werden. Die Transformation einer unscharfen Menge in einen scharfen Wert erfolgt mit Hilfe sogenannter *Methoden zur Defuzzifikation*.

Im Allgemeinen wird die Defuzzifikation mit einem Defuzzifikations-Operator

$$d : \tilde{\mathcal{P}}(X) \longrightarrow X, \tilde{A} \mapsto d(\tilde{A})$$

ausgedrückt, d.h. mit einer Funktion, die den unscharfen Mengen  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$  auf  $X$  Elemente  $d(\tilde{A})$  der Grundmenge  $X$ , also scharfe Zahlen, zuordnet. Die bekanntesten Defuzzifikations-Operatoren bzw. Methoden zur Defuzzifikation werden im Folgenden vorgestellt. Eine sehr populäre Defuzzifikationsmethode ist die *Centroiden-Methode*. Bei dieser Methode wird der Schwerpunkt der Fläche unterhalb der Zugehörigkeitsfunktion berechnet und der Abszissenwert des Schwerpunktes als resultierender scharfer Wert herangezogen. Es wird also

$$d_C(\tilde{A}) = \frac{\int_{T(\tilde{A})} x \mu_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_{T(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x) dx}$$

als defuzzifizierter Wert verwendet, wobei  $T(\tilde{A})$  der Träger der unscharfen Menge  $\tilde{A}$  ist (siehe (37)). VAN LEEKWIJCK & KERRE haben gezeigt, dass die Centroiden-Methode einige wünschenswerte Eigenschaften besitzt (vgl. Van Leekwijck & Kerre (1999), S. 175). Zum einen gilt, dass sich die relative Position des defuzzifizierten Werts nicht verändert, wenn die Zugehörigkeitsfunktion in Richtung der  $x$ -Achse verschoben wird, d.h. für eine unscharfe Menge  $\tilde{B}$  mit der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{B}} : X \longrightarrow [0, 1], x \mapsto \mu_{\tilde{A}}(x - a)$  mit  $a \in \mathbb{R}$  ergibt sich nach der Centroiden-Methode:

$$d_C(\tilde{B}) = d_C(\tilde{A}) + a$$

Der Schwerpunkt verschiebt sich demnach genauso wie die Zugehörigkeitsfunktion. Zum anderen bleibt die relative Position des defuzzifizierten Werts auch unverändert, wenn die  $x$ -Achse durch Multiplikation der  $x$ -Werte mit einem konstanten Faktor  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  umskaliert wird. Es gilt also

$$d_C(\tilde{B}) = b \cdot d_C(\tilde{A})$$

mit der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{B}} : X \rightarrow [0, 1], x \mapsto \mu_{\tilde{A}}(x/b)$  mit  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Darüber hinaus ist der Schwerpunkt auch gegenüber einer Multiplikation der Zugehörigkeitswerte mit einem konstanten Faktor  $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  invariant, d.h. für  $\mu_{\tilde{B}} : X \rightarrow [0, 1], x \mapsto c\mu_{\tilde{A}}(x)$  mit  $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  gilt:

$$d_C(\tilde{B}) = d_C(\tilde{A})$$

Im Fall einer scharfen Zahl stimmt der defuzzifizierte Wert mit dem einzigen Element mit positivem Grad der Zugehörigkeit überein.

Neben der Centroiden-Methode werden oftmals *Maxima-Methoden*, bei denen ausschließlich die Elemente mit maximalem Zugehörigkeitswert betrachtet werden, zur Defuzzifikation einer unscharfen Menge verwendet. Alle anderen Elemente und somit die in dem restlichen Teil der Zugehörigkeitsfunktion enthaltenen Informationen bleiben bei diesem Vorgehen unberücksichtigt. Dahinter steht der Gedanke, dass ein hoher Grad der Zugehörigkeit für eine hohe Eignung des Elements spricht. Gibt es mehrere Elemente mit maximalem Grad der Zugehörigkeit, muss aus diesen ein defuzzifizierter Wert bestimmt werden. Dafür kommen verschiedene Möglichkeiten in Betracht. Die bekannteste und am häufigsten angewendete ist die *Mean-of-Maxima-Methode*, bei welcher der Mittelwert aller Elemente mit maximalem Zugehörigkeitswert berechnet wird. Wenn es dagegen – wie etwa bei unscharfen Zahlen (siehe Definition 3.11) – nur ein Element gibt, bei dem die Zugehörigkeitsfunktion maximal ist, wird dieses der Menge als scharfe Zahl zugeordnet. Eine weitere sehr bekannte Methode, speziell zur Defuzzifikation unscharfer Zahlen, wurde 1989 von DE CAMPOS IBÁÑEZ & MUÑOZ vorgeschlagen. Bei dieser Methode, die in zahlreichen Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung genutzt wird (siehe De Andrés Sánchez (2006, 2007, 2012), Heberle & Thomas (2014, 2016), Bahrami & Bahrami (2015), Thomas (2017), Yan, Liu, Q., Dong & Liu, W. (2018), Apollinaire et al. (2019a, 2019b) sowie die in den Abschnitten 4.2.1, 4.3.1 und 4.4.1 vorgeschlagenen Verfahren), wird einer unscharfen Zahl  $\tilde{a}$  als defuzzifizierter Wert ihr *Erwartungswert*  $\mathbb{E}_\beta[\tilde{a}]$  zugeordnet. Die Definition des Erwartungswerts lautet wie folgt (vgl. De Campos Ibáñez & Muñoz (1989), S. 147):

**Definition 3.19 (Erwartungswert einer unscharfen Zahl)** Der Erwartungswert  $\mathbb{E}_\beta[\tilde{a}]$  einer unscharfen Zahl  $\tilde{a}$  ist durch

$$\mathbb{E}_\beta[\tilde{a}] = (1 - \beta) \int_0^1 \tilde{a}_\alpha d\alpha + \beta \int_0^1 \tilde{a}_\alpha d\alpha \quad (56)$$

mit  $\beta \in [0, 1]$  definiert, wobei  $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}_\alpha, \tilde{a}_{\bar{\alpha}}]$  mit  $\tilde{a}_\alpha, \tilde{a}_{\bar{\alpha}} \in \mathbb{R}$  der  $\alpha$ -Schnitt  $\tilde{a}_\alpha$  der unscharfen Zahl  $\tilde{a}$  ist, der für alle  $\alpha \in [0, 1]$  als kompaktes Intervall vorausgesetzt wird.

Es wird also das Integral über die linken Grenzen der  $\alpha$ -Schnitte, über alle möglichen Grade der Zugehörigkeit  $\alpha$ , gebildet und entsprechend das Integral über die rechten Grenzen der  $\alpha$ -Schnitte. Diese beiden Integralwerte werden aufaddiert und mit  $(1 - \beta)$  bzw.  $\beta$  gewichtet, wobei  $\beta \in [0, 1]$  je nach subjektiver Einschätzung vom Anwender festzulegen ist. Je größer der Wert von  $\beta$  gewählt wird, desto stärker wird das Integral über die rechten Grenzen der  $\alpha$ -Schnitte gewichtet und desto höher ist dementsprechend der resultierende defuzzifizierte Wert. Durch den Parameter  $\beta \in [0, 1]$  wird also die einfache und intuitive Berücksichtigung von Risikoaversion ermöglicht, was ein großer Vorteil dieser Defuzzifikationsmethode ist. Im Bereich der Schadenreservierung geht eine Wahl von  $\beta > 0,5$  mit Vorsicht bei der Bildung von Schadenreserven einher.

Der Erwartungswert weist wie der Schwerpunkt einige gute Eigenschaften auf (vgl. De Campos Ibáñez & Muñoz (1989), S. 148f.). So verändert sich die relative Position des defuzzifizierten Werts auch hier nicht, wenn die Zugehörigkeitsfunktion in Richtung der  $x$ -Achse verschoben wird, d.h. für den Erwartungswert einer unscharfen Zahl  $\tilde{b}$  mit der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{b}} : X \rightarrow [0, 1], x \mapsto \mu_{\tilde{a}}(x - a)$  mit  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\mathbb{E}_\beta[\tilde{b}] = \mathbb{E}_\beta[\tilde{a}] + a$$

Des Weiteren bleibt die relative Position des defuzzifizierten Werts ebenfalls unverändert, wenn die  $x$ -Achse durch Multiplikation der  $x$ -Werte mit einem konstanten Faktor  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  umskaliert wird. Es gilt folglich

$$\mathbb{E}_\beta[\tilde{b}] = b \cdot \mathbb{E}_\beta[\tilde{a}]$$

mit der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{b}} : X \rightarrow [0, 1], x \mapsto \mu_{\tilde{a}}(x/b)$  mit  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Für den Erwartungswert einer scharfen Zahl  $a \in \mathbb{R}$  erhält man die scharfe Zahl selbst:

$$\mathbb{E}_\beta[a] = a$$

Eine weitere wichtige Defuzzifikationsmethode, die Anwendung in der unscharfen Schadenreservierung gefunden hat, stellt die 2001 von CHANG vorgeschlagene *gewichtete unscharfe Arithmetik*, insbesondere in Form der *gewichteten unscharfen Addition* sowie der *gewichteten unscharfen Subtraktion*, dar. Die dabei resultierende scharfe Zahl kann als eine Art Mittelwert des Ergebnisses einer unscharfen arithmetischen Operation aufgefasst

werden. Die Methode ist allerdings nur für dreieckförmige unscharfe Zahlen definiert worden. Für die gewichtete unscharfe Addition von zwei dreieckförmigen unscharfen Zahlen gilt (vgl. Chang (2001), S. 226):

**Definition 3.20 (Gewichtete unscharfe Addition)** Die gewichtete unscharfe Addition der dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})$  mit den  $\alpha$ -Schnitten  $(\tilde{a}_1)_\alpha = [(\tilde{a}_1)_{\underline{\alpha}}, (\tilde{a}_1)_{\overline{\alpha}}]$  und  $(\tilde{a}_2)_\alpha = [(\tilde{a}_2)_{\underline{\alpha}}, (\tilde{a}_2)_{\overline{\alpha}}]$  mit  $\alpha \in [0, 1]$  ist durch

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1 \oplus_g \tilde{a}_2 &= \frac{\int_0^1 ((\tilde{a}_1)_{\underline{\alpha}} + (\tilde{a}_2)_{\underline{\alpha}}) \alpha d\alpha + \int_0^1 ((\tilde{a}_1)_{\overline{\alpha}} + (\tilde{a}_2)_{\overline{\alpha}}) \alpha d\alpha}{2 \int_0^1 \alpha d\alpha} \\ &= \int_0^1 ((\tilde{a}_1)_{\underline{\alpha}} + (\tilde{a}_2)_{\underline{\alpha}}) \alpha d\alpha + \int_0^1 ((\tilde{a}_1)_{\overline{\alpha}} + (\tilde{a}_2)_{\overline{\alpha}}) \alpha d\alpha\end{aligned}\quad (57)$$

definiert.

Bei der gewichteten unscharfen Addition wird demnach das Integral über die Summe der linken Grenzen der  $\alpha$ -Schnitte der beiden unscharfen Zahlen, gewichtet mit dem Grad der Zugehörigkeit  $\alpha$ , gebildet und entsprechend das Integral mit den rechten Grenzen. Die Summe dieser beiden Integrale wird ins Verhältnis zu dem doppelten Integralwert aller möglichen Werte von  $\alpha$  gesetzt, für den  $2 \int_0^1 \alpha d\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \alpha^2 \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  gilt. CHANG hat gezeigt, dass sich (57) weiter zu

$$\tilde{a}_1 \oplus_g \tilde{a}_2 = (a_1 + a_2) + \frac{1}{6} ((r_{a_1} + r_{a_2}) - (l_{a_1} + l_{a_2}))$$

vereinfachen lässt (vgl. Chang (2001), S. 227). Dabei geht ein, dass die  $\alpha$ -Schnitte von dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})$  durch  $(\tilde{a}_1)_\alpha = [(\tilde{a}_1)_{\underline{\alpha}}, (\tilde{a}_1)_{\overline{\alpha}}] = [a_1 - (1 - \alpha)l_{a_1}, a_1 + (1 - \alpha)r_{a_1}]$  und  $(\tilde{a}_2)_\alpha = [(\tilde{a}_2)_{\underline{\alpha}}, (\tilde{a}_2)_{\overline{\alpha}}] = [a_2 - (1 - \alpha)l_{a_2}, a_2 + (1 - \alpha)r_{a_2}]$  mit  $\alpha \in [0, 1]$  gegeben sind. Analog zur gewichteten unscharfen Addition ist die gewichtete unscharfe Subtraktion wie folgt definiert:

**Definition 3.21 (Gewichtete unscharfe Subtraktion)** Die gewichtete unscharfe Subtraktion der dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_1 = (a_1, l_{a_1}, r_{a_1})$  und  $\tilde{a}_2 = (a_2, l_{a_2}, r_{a_2})$  mit den  $\alpha$ -Schnitten  $(\tilde{a}_1)_\alpha = [(\tilde{a}_1)_{\underline{\alpha}}, (\tilde{a}_1)_{\overline{\alpha}}]$  und  $(\tilde{a}_2)_\alpha = [(\tilde{a}_2)_{\underline{\alpha}}, (\tilde{a}_2)_{\overline{\alpha}}]$  mit  $\alpha \in [0, 1]$  ist durch

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1 \ominus_g \tilde{a}_2 &= \frac{\int_0^1 ((\tilde{a}_1)_{\underline{\alpha}} - (\tilde{a}_2)_{\underline{\alpha}}) \alpha d\alpha + \int_0^1 ((\tilde{a}_1)_{\overline{\alpha}} - (\tilde{a}_2)_{\overline{\alpha}}) \alpha d\alpha}{2 \int_0^1 \alpha d\alpha} \\ &= \int_0^1 ((\tilde{a}_1)_{\underline{\alpha}} - (\tilde{a}_2)_{\underline{\alpha}}) \alpha d\alpha + \int_0^1 ((\tilde{a}_1)_{\overline{\alpha}} - (\tilde{a}_2)_{\overline{\alpha}}) \alpha d\alpha\end{aligned}$$

definiert.

Dies lässt sich weiter zu

$$\tilde{a}_1 \ominus_g \tilde{a}_2 = (a_1 - a_2) + \frac{1}{6} ((r_{a_1} - r_{a_2}) - (l_{a_1} - l_{a_2}))$$

vereinfachen (vgl. Chang (2001), S. 227). Für den Fall, dass es sich bei  $\tilde{a}_1$  und  $\tilde{a}_2$  um scharfe Zahlen handelt, stimmen die Ergebnisse gewichteter unscharfer Addition und gewichteter unscharfer Subtraktion mit den Ergebnissen gewöhnlicher Arithmetik überein.

### 3.5 Abgrenzung von der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Beziehung zwischen der Theorie unscharfer Mengen und der Wahrscheinlichkeitstheorie ist bereits seit Einführung des Konzepts unscharfer Mengen durch ZADEH im Jahr 1965 ein vielfach und teilweise kontrovers diskutiertes Thema. Insbesondere die Gemeinsamkeit, dass sowohl mit unscharfen Mengen als auch mit Wahrscheinlichkeiten Unsicherheit modelliert werden kann, wird oftmals betont und ist Kernpunkt von Diskussionen. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass Unschärfe und Zufall zwei vollkommen verschiedene Ursachen von Unsicherheit darstellen und sich somit die Art der modellierten Unsicherheit sowie die zugrunde liegende Theorie in beiden Fällen deutlich voneinander unterscheiden. Während Zufall Unsicherheit bezüglich der Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit eines Objekts zu einer scharfen Menge betrifft, geht es bei Unschärfe um Klassen, bei denen es Grade der Zugehörigkeit zwischen der vollen Zugehörigkeit und der Nichtzugehörigkeit gibt. Ziel der Theorie unscharfer Mengen ist somit nicht die Modellierung von Unsicherheit aufgrund von Zufall, sondern die Beschreibung von Unsicherheit, die aus dem Fehlen scharfer Begrenzungen resultiert, durch welche die Objekte, die zu einer Menge gehören, von den nicht zu der Menge gehörenden Objekten getrennt werden. Diese Unterschiede können leicht anhand einfacher Beispiele veranschaulicht werden. So wird etwa mit einer Aussage wie „Morgen wird es mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% regnen“ Unsicherheit bezüglich der Zugehörigkeit des morgigen Tages zu der scharfen Menge von Tagen, an denen es regnet, ausgedrückt. Dagegen beinhaltet eine Aussage wie „Morgen wird es leicht regnen“ Unsicherheit aufgrund des Begriffs „leicht“, da die Menge der Tage, an denen es leicht regnet, wie zahlreiche weitere Mengen in der Realität unscharf begrenzt ist.

Aufgrund der Unterschiedlichkeit der Ursachen der Unsicherheit sollte die Theorie unscharfer Mengen nicht als Alternative zur Wahrscheinlichkeitstheorie betrachtet werden,

die in Konkurrenz zu dieser steht, sondern vielmehr als Ergänzung. So gibt es in einigen Anwendungsbereichen auch bereits Ansätze, in denen unscharfe Mengen und Wahrscheinlichkeiten gemeinsam verwendet werden. Dabei ist insbesondere das Konzept unscharfer Zufallsvariablen von Bedeutung (vgl. Shapiro (2009)). Die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden sollen folglich auch keine Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie und allgemein der Statistik in der Schadenreservierung ersetzen, sondern stellen zusätzliche komplementäre Möglichkeiten dar, Unschärfe und die daraus resultierende Unsicherheit in diesem Bereich zu modellieren.

## **3.6 Unscharfe Regression**

### **3.6.1 Das Verfahren von TANAKA ET AL. (1982)**

Bei der unscharfen Regression handelt es sich, ebenso wie bei der klassischen Regression, um ein Analyseverfahren, welches das Ziel hat, den Zusammenhang zwischen einer abhängigen und einer oder mehreren unabhängigen Variablen zu modellieren. Ein zentraler Unterschied zwischen den beiden Konzepten besteht darin, wie die Ungenauigkeit in der Beziehung zwischen der abhängigen und den unabhängigen Variablen erfasst wird. Während im klassischen linearen Regressionsmodell üblicherweise angenommen wird, dass diese Beziehung durch zufällige Fehler, bei denen es sich um Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 handelt, additiv überlagert wird, wird im unscharfen linearen Regressionsmodell unterstellt, dass die Modellstruktur unscharf ist, was durch eine lineare Funktion mit unscharfen Parametern dargestellt wird. Im unscharfen Regressionsmodell wird demnach angenommen, dass Unschärfe, und nicht wie im klassischen Regressionsmodell Zufall, für die Ungenauigkeit verantwortlich ist. Die unscharfe Regression erlaubt es, diese Unschärfe in der Beziehung zwischen den Variablen zu modellieren. Neben einem unscharfen Zusammenhang zwischen Variablen können mit vielen unscharfen Regressionsverfahren auch unscharfe Daten modelliert werden. Dies besitzt den Vorteil, dass alle vorliegenden scharfen sowie unscharfen Beobachtungen bei der Anpassung eines Regressionsmodells unverändert verwendet werden können, während bei der klassischen Regression eventuell vorhandene unscharfe Daten zunächst auf einen einzelnen scharfen Wert reduziert werden müssen. Dieser mit einer eventuell erforderlichen Reduktion der Beobachtungen der abhängigen und/oder der unabhängigen Variablen auf eine scharfe Zahl verbundene Informationsverlust entfällt bei vielen unscharfen Regressionsverfahren.

Im Laufe der Zeit sind zahlreiche verschiedene unscharfe Regressionsverfahren vorgeschlagen worden. Für eine Übersicht über die populärsten Verfahren sei etwa auf CHANG & AYYUB (2001) oder SHAPIRO (2004b) verwiesen. Hier werden im Folgenden ausschließlich diejenigen unscharfen Regressionsverfahren, die im Bereich der Schadenreservierung Anwendung gefunden haben, näher beschrieben. Zunächst wird das Verfahren von TANAKA ET AL. (1982) vorgestellt. Bei diesem Verfahren, das zu den bekanntesten und zuerst veröffentlichten unscharfen Regressionsverfahren zählt, wird angenommen, dass die beobachteten Input Daten scharf sind. Die Output Daten können dagegen unscharf sein. Es handelt sich somit um ein Verfahren, mit dem der unscharfe Zusammenhang zwischen einer unscharfen abhängigen und einer oder mehreren scharfen unabhängigen Variablen untersucht wird. TANAKA ET AL. (1982) nehmen an, dass sich die Daten durch die folgende lineare Gleichung beschreiben lassen<sup>5</sup> (vgl. Tanaka et al. (1982), S. 904):

$$\tilde{y}_i = \tilde{a}_1 x_{i1} \oplus \dots \oplus \tilde{a}_k x_{ik}, \quad i = 1, \dots, n \quad (58)$$

Dabei ist  $n$  der Stichprobenumfang,  $\tilde{y}_i = (y_i, s_{y_i}, s_{y_i})$  mit  $i = 1, \dots, n$  ist der unscharfe beobachtete Output und  $x_{ij}$  mit  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, k$  ist der  $i$ -te beobachtete scharfe Wert der  $j$ -ten erklärenden Variable. Bei  $\tilde{a}_j$  mit  $j = 1, \dots, k$  handelt es sich um die unscharfen Koeffizienten, die ebenso wie die beobachteten Output Daten als symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen unterstellt werden.

Für die unbekanntenen Koeffizienten  $\tilde{a}_j = (a_j, s_{a_j}, s_{a_j})$ ,  $j = 1, \dots, k$ , gilt es Schätzer  $\hat{\tilde{a}}_j = (\hat{a}_j, \hat{s}_{a_j}, \hat{s}_{a_j})$  zu ermitteln. Die Idee des unscharfen Regressionsverfahrens von TANAKA ET AL. ist es, diese Schätzer so zu bestimmen, dass die gesamte Unschärfe des linearen Regressionsmodells, definiert als die Summe der Spannweiten der Koeffizienten, minimiert wird. Dabei soll für alle  $i = 1, \dots, n$  der  $\alpha$ -Schnitt des beobachteten unscharfen Outputs  $\tilde{y}_i$  in dem  $\alpha$ -Schnitt des jeweiligen geschätzten Outputs  $\hat{\tilde{y}}_i$  enthalten sein, d.h. es soll

$$(\tilde{y}_i)_\alpha \subseteq (\hat{\tilde{y}}_i)_\alpha \quad (59)$$

für  $i = 1, \dots, n$  gelten. Der geschätzte Output ist dabei entsprechend (58) durch

$$\hat{\tilde{y}}_i = \hat{\tilde{a}}_1 x_{i1} \oplus \dots \oplus \hat{\tilde{a}}_k x_{ik}$$

<sup>5</sup>In späteren Publikationen wird diese Gleichung noch um einen unscharfen Intercept  $\tilde{a}_0$  ergänzt.

gegeben und als Linearkombination symmetrischer dreieckförmiger unscharfer Zahlen  $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_k$  ebenfalls eine symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl. Für den Modus und die Spannweite von  $\widehat{y}_i$  erhält man mit Hilfe unscharfer Arithmetik (vgl. De Andrés Sánchez & Terceño Gómez (2003), S. 670):

$$\widehat{y}_i = (\widehat{a}_1 x_{i1} + \dots + \widehat{a}_k x_{ik}, \widehat{s}_{\widehat{a}_1} |x_{i1}| + \dots + \widehat{s}_{\widehat{a}_k} |x_{ik}|, \widehat{s}_{\widehat{a}_1} |x_{i1}| + \dots + \widehat{s}_{\widehat{a}_k} |x_{ik}|)$$

Da  $\widehat{y}_i$  ebenso wie  $\widetilde{y}_i$  eine symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl ist, handelt es sich bei dem  $\alpha$ -Schnitt  $\left(\widehat{y}_i\right)_\alpha$  genau wie bei  $(\widetilde{y}_i)_\alpha$  um ein kompaktes Intervall. Für die linke  $\left(\widehat{y}_i\right)_\alpha$  bzw. die rechte  $\left(\widehat{y}_i\right)_{\overline{\alpha}}$  Grenze des  $\alpha$ -Schnitts des geschätzten Outputs  $\widehat{y}_i$  erhält man:

$$\begin{aligned} \left(\widehat{y}_i\right)_\alpha &= \widehat{a}_1 x_{i1} + \dots + \widehat{a}_k x_{ik} - (1 - \alpha) (\widehat{s}_{\widehat{a}_1} |x_{i1}| + \dots + \widehat{s}_{\widehat{a}_k} |x_{ik}|) \\ \left(\widehat{y}_i\right)_{\overline{\alpha}} &= \widehat{a}_1 x_{i1} + \dots + \widehat{a}_k x_{ik} + (1 - \alpha) (\widehat{s}_{\widehat{a}_1} |x_{i1}| + \dots + \widehat{s}_{\widehat{a}_k} |x_{ik}|) \end{aligned}$$

Die linke  $(\widetilde{y}_i)_\alpha$  und die rechte  $(\widetilde{y}_i)_{\overline{\alpha}}$  Grenze des  $\alpha$ -Schnitts des beobachteten Outputs  $\widetilde{y}_i$  sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} (\widetilde{y}_i)_\alpha &= y_i - (1 - \alpha) s_{y_i} \\ (\widetilde{y}_i)_{\overline{\alpha}} &= y_i + (1 - \alpha) s_{y_i} \end{aligned}$$

Damit lässt sich das lineare Programmierungsproblem (LP-Problem), durch dessen Lösung Schätzer für die unscharfen Koeffizienten bestimmt werden können, wie folgt formulieren

$$\min_{a_1, \dots, a_k, s_{a_1}, \dots, s_{a_k}} z = \sum_{j=1}^k s_{a_j}$$

unter Bedingung von (vgl. Tanaka et al. (1982), S. 905):

$$a_1 x_{i1} + \dots + a_k x_{ik} - (1 - \alpha) \sum_{j=1}^k s_{a_j} |x_{ij}| \leq y_i - (1 - \alpha) s_{y_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (60)$$

$$a_1 x_{i1} + \dots + a_k x_{ik} + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^k s_{a_j} |x_{ij}| \geq y_i + (1 - \alpha) s_{y_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (61)$$

$$s_{a_j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (62)$$

Durch die Zielfunktion des LP-Problems wird die Unschärfe des linearen Regressionsmodells minimiert. Die Ungleichungen in (60) und (61) gewährleisten, dass die Inklusionsrelation (59) erfüllt ist, während die Nebenbedingungen in (62) sicherstellen, dass

die Spannweiten der Koeffizienten nicht negativ sind. Es ist zu beachten, dass das unscharfe Regressionsmodell durch die Nebenbedingungen (60) und (61) relativ empfindlich gegenüber Ausreißern ist, so dass eventuell vorhandene Ausreißer im Datensatz dazu führen können, dass sich die Spannweiten der geschätzten Output Daten stark erhöhen. Dies ist auch in Abbildung 16 zu erkennen, in der die Beziehung zwischen dem beobachteten unscharfen Output  $\tilde{y}_i$  und dem prognostizierten unscharfen Output  $\hat{y}_i$  grafisch veranschaulicht ist.

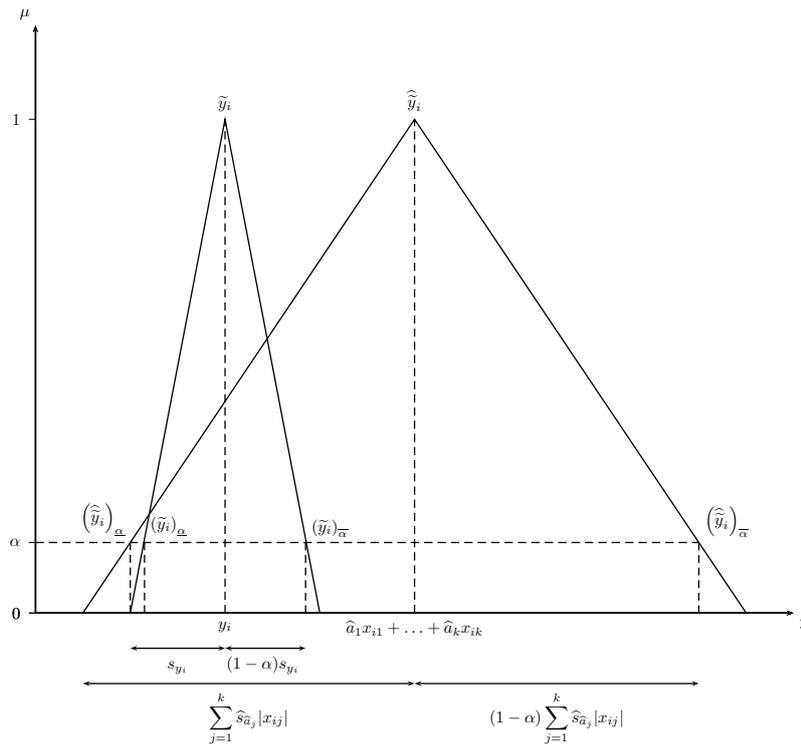


ABBILDUNG 16: Beziehung zwischen dem beobachteten unscharfen Output  $\tilde{y}_i$  und dem prognostizierten unscharfen Output  $\hat{y}_i$

Für  $\alpha \in [0, 1]$  in den Nebenbedingungen (60) und (61) ist vor dem Lösen des LP-Problems ein geeigneter Wert vom Anwender vorzugeben. Da durch diesen die Spannweiten der geschätzten unscharfen Regressionskoeffizienten beeinflusst werden – diese steigen mit steigendem  $\alpha$  – sollte die Wahl von  $\alpha$  sorgfältig erfolgen. TANAKA & WATADA empfehlen, dass  $\alpha$  in Abhängigkeit davon festgelegt werden sollte, für wie aussagekräftig die verwendeten Daten erachtet werden. In der Regel sollten kleinere Werte von  $\alpha$  gewählt werden, wenn viele Beobachtungen zur Verfügung stehen (vgl. Tanaka & Watada (1988), S. 282). Für eine ausführliche Diskussion über die Wahl des Wertes von  $\alpha$  sei auf MOSKOWITZ & KIM (1993) verwiesen.

In vielen Anwendungen, auch im Bereich der Schadenreservierung, wird nicht das gerade vorgestellte unscharfe lineare Regressionsverfahren verwendet, sondern ein leicht modifiziertes Verfahren, das 1987 von TANAKA vorgeschlagen wurde. Gegenüber TANAKA ET AL. (1982) ist bei diesem Verfahren nur die Zielfunktion verändert. Statt der Summe der Spannweiten der Koeffizienten wird die Summe der Spannweiten der Output Daten minimiert. Die Zielfunktion des LP-Problems zur Bestimmung von Schätzern für die symmetrischen dreieckförmigen unscharfen Koeffizienten lautet bei dem Verfahren von TANAKA (1987) demnach wie folgt (vgl. Tanaka (1987), S. 367):

$$\min_{a_1, \dots, a_k, s_{a_1}, \dots, s_{a_k}} z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k s_{a_j} |x_{ij}|$$

Die Nebenbedingungen sind wie bei TANAKA ET AL. (1982) durch (60) - (62) gegeben. Ein oftmals angeführter Kritikpunkt an den unscharfen Regressionsverfahren von TANAKA ET AL. (1982) und TANAKA (1987) ist, dass die Regressionskoeffizienten als symmetrisch vorausgesetzt werden. Dadurch ist es nicht möglich, eine eventuell vorhandene starke Abweichung in nur eine Richtung zu erfassen, sondern es müssen stets beide Spannweiten entsprechend groß gewählt werden. Dies kann dazu führen, dass die gesamte Spannweite deutlich größer ist als es bei einer individuellen Anpassung der linken und der rechten Spannweite der Fall wäre. Im folgenden Abschnitt wird mit dem Verfahren von ISHIBUCHI & NII (2001) ein unscharfes Regressionsverfahren vorgestellt, bei dem die Koeffizienten asymmetrisch sein können, und das somit diesen Nachteil vermeidet.

### 3.6.2 Das Verfahren von ISHIBUCHI & NII (2001)

Ein weiteres populäres unscharfes Regressionsverfahren, das Anwendung im Bereich der Schadenreservierung gefunden hat, wurde 2001 von ISHIBUCHI & NII vorgeschlagen. Bei diesem Verfahren wird die Methode von TANAKA (1987) mit dem KQ-Prinzip kombiniert, es handelt sich somit um eine Erweiterung des unscharfen Regressionsverfahrens von TANAKA (1987).<sup>6</sup>

Bei dem von ISHIBUCHI & NII entwickelten Verfahren wird angenommen, dass sowohl die vorliegenden Beobachtungen der abhängigen Variable,  $y_i$  mit  $i = 1, \dots, n$ , als auch die vorliegenden Beobachtungen der unabhängigen Variablen,  $x_{ij}$  mit  $i = 1, \dots, n$  und

<sup>6</sup>Eine Übersicht speziell über die zahlreichen unscharfen Regressionsverfahren, bei denen es sich um Weiterentwicklungen der Verfahren von TANAKA ET AL. (1982) bzw. TANAKA (1987) handelt, ist in HOJATI ET AL. (2005) zu finden.

$j = 1, \dots, k$ , scharfe Zahlen sind. Mit dem Verfahren wird demnach der unscharfe Zusammenhang zwischen einer scharfen abhängigen und einer oder mehreren scharfen unabhängigen Variablen untersucht. Die Unschärfe in der Beziehung zwischen den Variablen wird durch unscharfe Koeffizienten  $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_k$ , die als dreieckförmige unscharfe Zahlen unterstellt werden, erfasst. Im Gegensatz zu den Verfahren von TANAKA ET AL. (1982) und TANAKA (1987) können diese Koeffizienten asymmetrisch sein, d.h. die linke und die rechte Spannweite können voneinander abweichende Werte annehmen und individuell angepasst werden.

Werden die Schätzer für die unscharfen asymmetrischen Regressionskoeffizienten  $\tilde{a}_j = (a_j, l_{a_j}, r_{a_j})$  mit  $\hat{\tilde{a}}_j = (\hat{a}_j, \hat{l}_{\hat{a}_j}, \hat{r}_{\hat{a}_j})$ ,  $j = 0, \dots, k$ , bezeichnet, lässt sich der geschätzte Output in der Form

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{y}}_i &= (\hat{y}_i, \hat{l}_{\hat{y}_i}, \hat{r}_{\hat{y}_i}) = \hat{\tilde{a}}_0 \oplus \hat{\tilde{a}}_1 x_{i1} \oplus \dots \oplus \hat{\tilde{a}}_k x_{ik} \\ &= (\hat{a}_0, \hat{l}_{\hat{a}_0}, \hat{r}_{\hat{a}_0}) \oplus (\hat{a}_1, \hat{l}_{\hat{a}_1}, \hat{r}_{\hat{a}_1}) x_{i1} \oplus \dots \oplus (\hat{a}_k, \hat{l}_{\hat{a}_k}, \hat{r}_{\hat{a}_k}) x_{ik}\end{aligned}$$

mit  $i = 1, \dots, n$  darstellen. Als Linearkombination dreieckförmiger unscharfer Zahlen ist auch  $\hat{\tilde{y}}_i$  eine dreieckförmige unscharfe Zahl. Für den Modalwert und die linke sowie rechte Spannweite von  $\hat{\tilde{y}}_i$  erhält man (vgl. Ishibuchi & Nii (2001), S. 278):

$$\begin{aligned}\hat{y}_i &= \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^k \hat{a}_j x_{ij} \\ \hat{l}_{\hat{y}_i} &= \hat{l}_{\hat{a}_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{ij} \geq 0}}^k \hat{l}_{\hat{a}_j} x_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{ij} < 0}}^k \hat{r}_{\hat{a}_j} |x_{ij}| \\ \hat{r}_{\hat{y}_i} &= \hat{r}_{\hat{a}_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{ij} \geq 0}}^k \hat{r}_{\hat{a}_j} x_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{ij} < 0}}^k \hat{l}_{\hat{a}_j} |x_{ij}|\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den Verfahren von TANAKA ET AL. (1982) und TANAKA (1987), bei denen sowohl die Schätzer für die Modalwerte der Regressionskoeffizienten als auch die Schätzer für die Spannweiten durch Lösen eines LP-Problems bestimmt wurden, werden hier nur die Spannweiten auf diese Weise geschätzt. Die Modalwerte werden mit der KQ-Methode geschätzt. Die Schätzung der Modalwerte der Regressionskoeffizienten mittels KQ-Methode stellt den ersten Schritt der Schätzung der unscharfen Parameter dar. Anschließend werden in einem zweiten Schritt Schätzer für die linken sowie rechten Spann-

weiten der Regressionskoeffizienten durch Lösen des folgenden LP-Problems bestimmt

$$\min_{l_{a_0}, \dots, l_{a_k}, r_{a_0}, \dots, r_{a_k}} z = nl_{a_0} + nr_{a_0} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k l_{a_j} |x_{ij}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k r_{a_j} |x_{ij}| \quad (63)$$

unter Bedingung von (vgl. Ishibuchi & Nii (2001), S. 279):

$$\widehat{a}_0 + \sum_{j=1}^k \widehat{a}_j x_{ij} - (1 - \alpha) \left( l_{a_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{ij} \geq 0}}^k l_{a_j} x_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{ij} < 0}}^k r_{a_j} |x_{ij}| \right) \leq y_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (64)$$

$$\widehat{a}_0 + \sum_{j=1}^k \widehat{a}_j x_{ij} + (1 - \alpha) \left( r_{a_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{ij} \geq 0}}^k r_{a_j} x_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{ij} < 0}}^k l_{a_j} |x_{ij}| \right) \geq y_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (65)$$

$$l_{a_j}, r_{a_j} \geq 0, \quad j = 0, \dots, k \quad (66)$$

Bei  $\widehat{a}_0, \dots, \widehat{a}_k$  handelt es sich dabei um die Ergebnisse des ersten Schritts. Die mittels KQ-Methode bestimmten Schätzer für die Modalwerte werden also in dem LP-Problem eingesetzt. Durch die Zielfunktion wird, wie bei dem Verfahren von TANAKA (1987), die gesamte Unschärfe, definiert als die Summe der Spannweiten aller geschätzten Output Daten, minimiert. Die Nebenbedingungen in (64) und (65) stellen analog zu den Nebenbedingungen in (60) und (61) sicher, dass alle beobachteten Output Werte in dem  $\alpha$ -Schnitt des jeweiligen geschätzten Outputs enthalten sind, dass also

$$y_i \in \left( \widehat{y}_i \right)_\alpha$$

für das vor dem Lösen des LP-Problems gewählte  $\alpha \in [0, 1]$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt, während es sich bei den Nebenbedingungen in (66) um Nichtnegativitätsbedingungen für die linken und die rechten Spannweiten der Regressionskoeffizienten handelt.

Der Wert von  $\alpha$  beeinflusst, wie bereits in Abschnitt 3.6.1 erläutert, die Spannweiten der geschätzten Regressionskoeffizienten. Je kleiner der Wert von  $\alpha$  gewählt wird, desto kleiner sind die Spannweiten, weshalb oftmals gefordert wurde, dass unscharfe Regressionsverfahren die naheliegende Eigenschaft erfüllen sollten, dass die Ergebnisse der unscharfen Regression mit den Ergebnissen der klassischen Regression übereinstimmen, wenn  $\alpha$  den Wert 0 erreicht und alle vorliegenden Beobachtungen scharf sind. Dies ist bei den bisher vorgestellten unscharfen Regressionsverfahren jedoch nicht der Fall. Die Ursache hierfür liegt darin, dass bei diesen Verfahren die Unschärfe der Daten als Ersatz für den in der klassischen Regressionsanalyse unterstellten Zufall in den Daten betrachtet wird

statt als Ergänzung. Es wird somit nur Unsicherheit in Form von Unschärfe berücksichtigt. Dies hat CHANG dazu motiviert, mit dem *hybriden unscharfen Kleinste-Quadrate-Regressionsverfahren* ein Verfahren vorzuschlagen, bei dem beide Arten von Unsicherheit einbezogen werden können und welches zu den gleichen Ergebnissen wie die klassische KQ-Regression führt, wenn es sich bei allen vorliegenden Daten um scharfe Zahlen handelt.

### 3.6.3 Das Verfahren von CHANG (2001)

CHANG hat in dem 2001 veröffentlichten Artikel „*Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures*“ ein bivariates lineares hybrides unscharfes Kleinste-Quadrate-Regressionsverfahren vorgestellt, das es erlaubt sowohl Unsicherheit in Form von Zufall als auch Unsicherheit in Form von Unschärfe zu berücksichtigen und das mit den Arbeiten von APAYDIN & BASER (2010), BASER & APAYDIN (2010) und YAN, LIU, Q., LIU, J., LIU, W., LI & QI (2019) Anwendung im Bereich der Schadenreservierung gefunden hat. Bei dem Verfahren wird angenommen, dass es sich bei den vorliegenden Beobachtungen der unabhängigen Variable  $x_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  um scharfe Zahlen handelt. Die Beobachtungen der abhängigen Variable können dagegen unscharf sein. Sie werden als asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{y}_i = (y_i, l_{y_i}, r_{y_i})$  mit  $i = 1, \dots, n$  unterstellt. Somit wird mit diesem Verfahren der Zusammenhang zwischen einer unscharfen abhängigen und einer scharfen unabhängigen Variable untersucht<sup>7</sup>. Die Unschärfe in der Beziehung zwischen den beiden Variablen wird durch unscharfe Regressionskoeffizienten in Form von asymmetrischen dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\tilde{a}_0$  und  $\tilde{a}_1$  erfasst. Werden mit  $\hat{\tilde{a}}_0 = (\hat{a}_0, \hat{l}_{\tilde{a}_0}, \hat{r}_{\tilde{a}_0})$  und  $\hat{\tilde{a}}_1 = (\hat{a}_1, \hat{l}_{\tilde{a}_1}, \hat{r}_{\tilde{a}_1})$  die Schätzer für die unscharfen Regressionskoeffizienten bezeichnet, lässt sich der geschätzte Output für  $i = 1, \dots, n$  wie folgt darstellen (vgl. Chang (2001), S. 228):

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{y}}_i &= \hat{\tilde{a}}_0 \oplus \hat{\tilde{a}}_1 x_i = (\hat{a}_0, \hat{l}_{\tilde{a}_0}, \hat{r}_{\tilde{a}_0}) \oplus (\hat{a}_1, \hat{l}_{\tilde{a}_1}, \hat{r}_{\tilde{a}_1}) x_i \\ &= (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i, \hat{l}_{\tilde{a}_0} + \hat{l}_{\tilde{a}_1} x_i, \hat{r}_{\tilde{a}_0} + \hat{r}_{\tilde{a}_1} x_i)\end{aligned}$$

Die Schätzung der Regressionskoeffizienten erfolgt bei dem Ansatz von CHANG durch Minimierung der Summe der quadrierten Abweichungen zwischen dem geschätzten Out-

<sup>7</sup>CHANG hat in dem Artikel „*Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures*“ zusätzlich auch ein multiples lineares hybrides unscharfes Kleinste-Quadrate-Regressionsverfahren vorgeschlagen. Da jedoch nur das bivariate Verfahren Anwendung im Bereich der Schadenreservierung gefunden hat, konzentriert sich die Darstellung auf dieses Verfahren.

put  $\widehat{y}_i$  und dem beobachteten Output  $\widetilde{y}_i$ , wobei die Abweichung mit Hilfe gewichteter unscharfer Arithmetik (siehe Definition 3.21) berechnet wird. Die zu minimierende Summe lautet demnach wie folgt (vgl. Chang (2001), S. 228):

$$\sum_{i=1}^n \left( \widehat{y}_i \ominus_g \widetilde{y}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\int_0^1 \left( (\widehat{y}_i)_{\underline{\alpha}} - (\widetilde{y}_i)_{\underline{\alpha}} \right)^2 \alpha d\alpha + \int_0^1 \left( (\widehat{y}_i)_{\overline{\alpha}} - (\widetilde{y}_i)_{\overline{\alpha}} \right)^2 \alpha d\alpha}{2 \int_0^1 \alpha d\alpha} \quad (67)$$

Die Verwendung gewichteter unscharfer Arithmetik hat CHANG damit begründet, dass die Verwendung gewöhnlicher unscharfer Arithmetik dazu führen kann, dass die Spannweiten sehr groß werden, wenn viele arithmetische Operationen durchzuführen sind (vgl. Chang (2001), S. 226). Um dies zu vermeiden, hat CHANG die gewichtete unscharfe Arithmetik eingeführt und im Rahmen der Parameterschätzung eingesetzt. Bei  $\left( \widehat{y}_i \right)_{\underline{\alpha}}$  und  $\left( \widehat{y}_i \right)_{\overline{\alpha}}$  bzw.  $(\widetilde{y}_i)_{\underline{\alpha}}$  und  $(\widetilde{y}_i)_{\overline{\alpha}}$  in (67) handelt es sich um die linke und die rechte Grenze des  $\alpha$ -Schnitts,  $\alpha \in [0, 1]$ , des geschätzten  $\widehat{y}_i$  bzw. des beobachteten Outputs  $\widetilde{y}_i$ . Für den Nenner in (67) gilt  $2 \int_0^1 \alpha d\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \alpha^2 \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ . Des Weiteren erhält man

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( (\widehat{y}_i)_{\underline{\alpha}} - (\widetilde{y}_i)_{\underline{\alpha}} \right)^2 \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left( (a_0 + a_1 x_i) - (1 - \alpha)(l_{a_0} + l_{a_1} x_i) - (y_i - (1 - \alpha)l_{y_i}) \right)^2 \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left( (a_0 + a_1 x_i - y_i) - (1 - \alpha)(l_{a_0} + l_{a_1} x_i - l_{y_i}) \right)^2 \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left( (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 \alpha - 2\alpha(1 - \alpha)(a_0 + a_1 x_i - y_i)(l_{a_0} + l_{a_1} x_i - l_{y_i}) \right. \\ & \quad \left. + (l_{a_0} + l_{a_1} x_i - l_{y_i})^2 \alpha(1 - \alpha)^2 \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 - \frac{1}{3} (a_0 + a_1 x_i - y_i)(l_{a_0} + l_{a_1} x_i - l_{y_i}) + \frac{1}{12} (l_{a_0} + l_{a_1} x_i - l_{y_i})^2 \end{aligned}$$

und entsprechend (vgl. Chang (2001), S. 228ff.):

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( (\widehat{y}_i)_{\overline{\alpha}} - (\widetilde{y}_i)_{\overline{\alpha}} \right)^2 \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left( (a_0 + a_1 x_i) + (1 - \alpha)(r_{a_0} + r_{a_1} x_i) - (y_i + (1 - \alpha)r_{y_i}) \right)^2 \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left( (a_0 + a_1 x_i - y_i) + (1 - \alpha)(r_{a_0} + r_{a_1} x_i - r_{y_i}) \right)^2 \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left( (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 \alpha + 2\alpha(1 - \alpha)(a_0 + a_1 x_i - y_i)(r_{a_0} + r_{a_1} x_i - r_{y_i}) \right. \\ & \quad \left. + (r_{a_0} + r_{a_1} x_i - r_{y_i})^2 \alpha(1 - \alpha)^2 \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 + \frac{1}{3} (a_0 + a_1 x_i - y_i)(r_{a_0} + r_{a_1} x_i - r_{y_i}) + \frac{1}{12} (r_{a_0} + r_{a_1} x_i - r_{y_i})^2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Summe der quadrierten Abweichungen in (67), im Folgenden als Funktion  $F$  bezeichnet:

$$F(a_0, a_1, l_{a_0}, l_{a_1}, r_{a_0}, r_{a_1}) = \sum_{i=1}^n \left( (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 + \frac{1}{3} (a_0 + a_1 x_i - y_i) \right. \\ \left. ((r_{a_0} + r_{a_1} x_i - r_{y_i}) - (l_{a_0} + l_{a_1} x_i - l_{y_i})) \right. \\ \left. + \frac{1}{12} ((l_{a_0} + l_{a_1} x_i - l_{y_i})^2 + (r_{a_0} + r_{a_1} x_i - r_{y_i})^2) \right)$$

Wird diese Funktion partiell nach den sechs Unbekannten  $a_0, a_1, l_{a_0}, l_{a_1}, r_{a_0}, r_{a_1}$  abgeleitet und werden die partiellen Ableitungen von  $F$  gleich Null gesetzt, resultiert ein lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Unbekannten. CHANG hat gezeigt, dass die Schätzer, welche die Funktion  $F$  minimieren, statt durch Lösen dieses linearen Gleichungssystems auch durch Lösen der folgenden drei simultanen linearen Gleichungssysteme mit jeweils 2 Gleichungen und 2 Unbekannten bestimmt werden können (vgl. Chang (2001), S. 230ff.). Durch Lösen von

$$n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

können Schätzer für  $a_0$  und  $a_1$  bestimmt werden, mit

$$n l_{a_0} + l_{a_1} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n l_{y_i} \\ l_{a_0} \sum_{i=1}^n x_i + l_{a_1} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i l_{y_i}$$

erhält man Schätzer für  $l_{a_0}$  und  $l_{a_1}$  und mit

$$n r_{a_0} + r_{a_1} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n r_{y_i} \\ r_{a_0} \sum_{i=1}^n x_i + r_{a_1} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i r_{y_i}$$

können Schätzer für  $r_{a_0}$  und  $r_{a_1}$  ermittelt werden. Wenn es sich bei den Regressionskoeffizienten um symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen handelt, vereinfacht sich die Berechnung und es sind lediglich zwei simultane lineare Gleichungssysteme mit jeweils 2 Gleichungen und 2 Unbekannten zur Bestimmung von Schätzern für die Modalwerte sowie die identischen linken und rechten Spannweiten zu lösen.

### 3.6.4 Das Verfahren von D'URSO & GASTALDI (2001)

Ein weiteres unscharfes Regressionsverfahren, das Anwendung im Bereich der Schadenreservierung gefunden hat, ist das im Folgenden vorgestellte Verfahren von D'URSO & GASTALDI, das 2001 veröffentlicht wurde.

Bei diesem Verfahren wird angenommen, dass die vorliegenden Beobachtungen der erklärenden Variablen  $x_{i,j}$  mit  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, k$  scharfe Zahlen sind. Die Beobachtungen der abhängigen Variable werden dagegen als asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{y}_i = (y_i, l_{y_i}, r_{y_i})$  mit  $i = 1, \dots, n$  unterstellt. Mit dem Verfahren wird also der Zusammenhang zwischen einer unscharfen abhängigen Variable und einer oder mehreren scharfen unabhängigen Variablen untersucht. Das unscharfe lineare Regressionsmodell, das D'URSO & GASTALDI vorgeschlagen haben, lautet in Matrixschreibweise wie folgt (vgl. D'Urso & Gastaldi (2001), S. 259):

$$\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}, \mathbf{l}_y, \mathbf{r}_y) = (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\theta + \mathbf{1}\lambda + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\delta + \mathbf{1}\mu + \boldsymbol{\eta}) \quad (68)$$

Dabei ist  $\mathbf{y}$  ein  $n \times 1$  Vektor mit den beobachteten Modalwerten der abhängigen Variable,  $\mathbf{l}_y$  ein  $n \times 1$  Vektor mit ihren beobachteten linken Spannweiten,  $\mathbf{r}_y$  ein  $n \times 1$  Vektor mit ihren beobachteten rechten Spannweiten,  $\mathbf{1}$  ein  $n \times 1$  Vektor mit Einsen und  $\mathbf{X}$  eine  $n \times (k + 1)$  Matrix, welche den Vektor  $\mathbf{1}$  und die Beobachtungen der  $k$  scharfen Inputvariablen enthält. Bei  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  und  $\boldsymbol{\eta}$  handelt es sich um  $n \times 1$  Vektoren mit Störtermen,  $\boldsymbol{\beta}$  ist ein  $(k + 1) \times 1$  Vektor mit den Regressionsparametern für das Regressionsmodell für  $\mathbf{y}$  und  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  und  $\mu$  sind die Regressionsparameter der Regressionsmodelle für die Spannweiten  $\mathbf{l}_y$  und  $\mathbf{r}_y$ . Das Modell in (68) setzt sich also aus drei unterschiedlichen Modellen zusammen. Während sich das erste Modell auf die Modalwerte bezieht, beruhen die anderen beiden Modelle auf dem ersten Modell und beziehen sich auf die linken und die rechten Spannweiten (vgl. D'Urso & Gastaldi (2001), S. 257ff.).

Die Ermittlung von Schätzern für die unbekanntenen Regressionsparameter erfolgt bei dem Verfahren von D'URSO & GASTALDI durch Minimierung der Summe der quadrierten Abweichungen zwischen den beobachteten und den geschätzten Werten der Modalwerte und der linken sowie rechten Spannweiten des Outputs. D'URSO & GASTALDI haben gezeigt, dass mit geeigneten Startwerten für die Parameter  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  und  $\mu$  in (68) so die

folgenden iterativ zu berechnenden KQ-Schätzer resultieren (vgl. D'Urso & Gastaldi (2001), S. 260):

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{1}{(1 + \hat{\theta}^2 + \hat{\delta}^2)} \left( (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \left( \mathbf{y} + (\mathbf{1}_y - \mathbf{1}\hat{\lambda})\hat{\theta} + (\mathbf{r}_y - \mathbf{1}\hat{\mu})\hat{\delta} \right) \right) \\ \hat{\theta} &= \left( \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\beta} \right)^{-1} \left( \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{1}_y - \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{1}\hat{\lambda} \right) \\ \hat{\lambda} &= \frac{1}{n} \left( \mathbf{1}^T \mathbf{1}_y - \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{1}\hat{\theta} \right) \\ \hat{\delta} &= \left( \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\beta} \right)^{-1} \left( \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{r}_y - \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{1}\hat{\mu} \right) \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \left( \mathbf{1}^T \mathbf{r}_y - \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{1}\hat{\delta} \right)\end{aligned}$$

In einem 2019 erschienenen Artikel von APOLLINAIRE ET AL. (siehe Abschnitt 4.1.12) ist dieses unscharfe Regressionsverfahren im Rahmen der Bestimmung von Schadenreserven genutzt worden.

## **4 Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung**

### **4.1 Literaturüberblick**

Eine der zentralen Aufgaben eines Nichtlebensversicherungsunternehmens ist es, Rückstellungen für die Schadenverpflichtungen aus bereits eingetretenen, aber noch nicht vollständig abgewickelten Schäden zu bestimmen. Diese Rückstellungen stellen in der Regel den größten versicherungstechnischen Passivposten in der Bilanz dar, weshalb es von erheblicher Bedeutung ist, dass sie in angemessener Höhe ausgewiesen und weder über- noch unterschätzt werden. Aus diesem Grund sind im Laufe der Zeit zahlreiche verschiedene, sowohl rein heuristische als auch stochastische, Verfahren vorgeschlagen worden, mit denen die zukünftigen Schadenzahlungen prognostiziert und somit möglichst adäquate Schadenreserven bestimmt werden können.

In der Bilanz wird in der Regel jedoch nicht unmittelbar das mit Hilfe solch eines statistischen Verfahrens berechnete Ergebnis ausgewiesen, sondern ebenso wie in zahlreichen weiteren Bereichen der Versicherungswissenschaft sind auch in der Schadenreservierung subjektive Beurteilungen und Intuition von erheblicher Bedeutung und werden oftmals bei der Festsetzung von Schadenreserven berücksichtigt. So werden in der Praxis die erhaltenen Ergebnisse üblicherweise noch individuell bewertet und eventuell basierend auf der subjektiven Einschätzung der zukünftigen Entwicklung und aufgrund von persönlichen Erfahrungen, Erwartungen und Annahmen angepasst, weshalb im Laufe der Zeit argumentiert wurde, dass Aktuarer neben den üblichen Schadenreservierungsverfahren auch Methoden aus dem Bereich der Theorie unscharfer Mengen verwenden sollten. Diese unscharfen Methoden ermöglichen es, unscharfe Informationen einzubeziehen, und stellen daher insbesondere immer dann eine sinnvolle Ergänzung dar, wenn subjektive Beurteilungen eine wichtige Rolle spielen.

Die erste Anwendung unscharfer Methoden in der Versicherungswissenschaft ist in dem 1982 veröffentlichten Artikel „*Underwriting and uncertainty*“ zu finden (vgl. De Wit (1982)). In dieser Arbeit hat DE WIT gezeigt, wie die Theorie unscharfer Mengen im Underwriting eingesetzt werden kann. Seitdem sind zahlreiche Artikel erschienen, die Anwendungen unscharfer Methoden in der Versicherungswissenschaft zum Thema haben, und die Theorie unscharfer Mengen ist in den verschiedensten Bereichen, wie etwa

im Pricing, in der Risikoklassifizierung und in der Asset Allocation, genutzt worden. Eine Übersicht über verschiedene Anwendungen unscharfer Methoden in der Versicherungswissenschaft ist unter anderem in Shapiro (2004a), Yakoubov & Haberman (1998) oder Ostaszewski (1993) zu finden. In dem Artikel „*Applications of fuzzy regression in actuarial analysis*“ von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ, der 2003 erschienen ist, hat mit einer unscharfen Regression erstmalig eine unscharfe Methode Anwendung bei der Bestimmung von Schadenreserven gefunden. In den folgenden Abschnitten werden die Inhalte dieses Artikels sowie die weiteren bisher erschienenen Veröffentlichungen im Bereich der Schadenreservierung vorgestellt und zusammengefasst.

#### 4.1.1 Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ (2003)

DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ haben 2003 ein Verfahren veröffentlicht, das ein bekanntes Schadenreservierungsverfahren, das LCL-Verfahren von BENJAMIN & EAGLES (siehe Abschnitt 2.3.3), mit einem unscharfen Regressionsverfahren kombiniert und damit die erste Anwendung unscharfer Methoden in der Schadenreservierung darstellt. Statt der üblicherweise im LCL-Verfahren verwendeten KQ-Methode wird bei diesem Verfahren das unscharfe Regressionsverfahren von TANAKA (1987)<sup>8</sup> (siehe Abschnitt 3.6.1) genutzt. Als Argument für die Ersetzung der KQ-Methode durch ein unscharfes Verfahren führen DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ an, dass in einigen Branchen oftmals nicht ausreichend große Datensätze verwendet werden, um die KQ-Methode geeignet anwenden zu können. Insbesondere in diesen Fällen stellt die Verwendung einer unscharfen Regression bei der Bestimmung der Schadenreserve eine geeignete Alternative dar.

Bei dem Verfahren von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ wird angenommen, dass sich die Entwicklung der kumulierten Schadenzahlungen des Anfalljahres  $i$  von Abwicklungsjahr  $j$  zu Abwicklungsjahr  $j+1$  mit  $j = 0, \dots, J-1$  durch die folgende lineare Gleichung beschreiben lässt (vgl. De Andrés Sánchez & Terceño Gómez (2003), S. 691):

$$\tilde{C}_{i,j+1} = \tilde{b}_j \oplus \tilde{c}_j C_{i,j} \quad (69)$$

---

<sup>8</sup>DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ verweisen in ihrer Arbeit auf ein unscharfes Regressionsverfahren von TANAKA & ISHIBUCHI (1992), dieses stimmt jedoch mit dem vorgestellten Verfahren von TANAKA (1987) überein.

Es wird somit nicht wie im gewöhnlichen LCL-Verfahren ein durch zufällige Fehler additiv überlagerter Zusammenhang (siehe (16)), sondern ein unscharfer Zusammenhang vorausgesetzt. Die Schadenstände  $\tilde{C}_{i,j+1}$  werden ebenso wie die Koeffizienten  $\tilde{b}_j$  und  $\tilde{c}_j$  als symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{C}_{i,j+1} = (C_{i,j+1}, s_{C_{i,j+1}}, s_{C_{i,j+1}})$ ,  $\tilde{b}_j = (b_j, s_{b_j}, s_{b_j})$  bzw.  $\tilde{c}_j = (c_j, s_{c_j}, s_{c_j})$  unterstellt, so dass sich für (69)

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{i,j+1} &= (C_{i,j+1}, s_{C_{i,j+1}}, s_{C_{i,j+1}}) = (b_j, s_{b_j}, s_{b_j}) \oplus (c_j, s_{c_j}, s_{c_j})C_{i,j} \\ &= (b_j + c_j C_{i,j}, s_{b_j} + s_{c_j} C_{i,j}, s_{b_j} + s_{c_j} C_{i,j})\end{aligned}$$

ergibt. Um die nicht beobachtbaren Endschadenstände prognostizieren und die Schadenreserven bestimmen zu können, gilt es, Schätzer  $\hat{\tilde{b}}_j = (\hat{b}_j, \hat{s}_{b_j}, \hat{s}_{b_j})$  und  $\hat{\tilde{c}}_j = (\hat{c}_j, \hat{s}_{c_j}, \hat{s}_{c_j})$  für die unbekanntenscharfen Zahlen  $\tilde{b}_j = (b_j, s_{b_j}, s_{b_j})$  und  $\tilde{c}_j = (c_j, s_{c_j}, s_{c_j})$  zu ermitteln. Gemäß des unscharfen Regressionsverfahrens von TANAKA (1987) ist dafür das folgende LP-Problem, durch das die Summe der Spannweiten der geschätzten Output Daten des entsprechenden Abwicklungsjahres minimiert wird, für  $j = 0, \dots, J - 1$  zu lösen

$$\min_{b_j, c_j, s_{b_j}, s_{c_j}} z = \sum_{i=0}^{I-j-1} (s_{b_j} + s_{c_j} C_{i,j})$$

unter Bedingung von:

$$b_j + c_j C_{i,j} - (1 - \alpha)(s_{b_j} + s_{c_j} C_{i,j}) \leq C_{i,j+1}, \quad i = 0, \dots, I - j - 1 \quad (70)$$

$$b_j + c_j C_{i,j} + (1 - \alpha)(s_{b_j} + s_{c_j} C_{i,j}) \geq C_{i,j+1}, \quad i = 0, \dots, I - j - 1 \quad (71)$$

$$s_{b_j}, s_{c_j} \geq 0 \quad (72)$$

Wie bereits in Abschnitt 3.6.1 erläutert, stellen die Nebenbedingungen in (70) und (71) sicher, dass alle beobachteten Output Werte  $C_{i,j+1}$  in dem  $\alpha$ -Schnitt,  $\alpha \in [0, 1]$ , des jeweiligen geschätzten Outputs  $\hat{\tilde{C}}_{i,j+1}$  enthalten sind, während die Nebenbedingung (72) gewährleistet, dass die Spannweiten der geschätzten Koeffizienten nicht negativ sind. Es ist zu beachten, dass die obige Formulierung des LP-Problems auf der Annahme basiert, dass alle Schadenstände  $C_{i,j}$  positiv sind.

Mit den durch Lösen des LP-Problems bestimmten Schätzern  $\hat{\tilde{b}}_j = (\hat{b}_j, \hat{s}_{b_j}, \hat{s}_{b_j})$  und  $\hat{\tilde{c}}_j = (\hat{c}_j, \hat{s}_{c_j}, \hat{s}_{c_j})$  für  $\tilde{b}_j$  und  $\tilde{c}_j$  können die Endschadenstände der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  prognostiziert werden. Analog zu (17) im gewöhnlichen LCL-Verfahren ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{C}}_{i,J} &= \hat{\tilde{b}}_{J-1} \oplus \hat{\tilde{c}}_{J-1} \otimes \left( \dots \hat{\tilde{b}}_{I-i+2} \oplus \hat{\tilde{c}}_{I-i+2} \right. \\ &\quad \left. \otimes \left( \hat{\tilde{b}}_{I-i+1} \oplus \hat{\tilde{c}}_{I-i+1} \otimes \left( \hat{\tilde{b}}_{I-i} \oplus \hat{\tilde{c}}_{I-i} C_{i,I-i} \right) \right) \right) \quad (73)\end{aligned}$$

Bei dem resultierenden Prädiktor  $\widehat{C}_{i,J}$  handelt es sich allerdings um keine dreieckförmige unscharfe Zahl mehr. DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ schlagen daher vor,  $\widehat{C}_{i,J}$  für die Berechnung der Schadenreserve durch eine symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{C}'_{i,J} = (\widehat{C}'_{i,J}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}) \approx \widehat{C}_{i,J}$  zu approximieren (vgl. De Andrés Sánchez & Terceño Gómez (2003), S. 691). Wird von  $\widehat{C}'_{i,J}$  der letzte beobachtbare Schadenstand abgezogen, resultiert für die Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  ebenfalls eine dreieckförmige unscharfe Zahl:

$$\begin{aligned}\widehat{R}_i &= (\widehat{R}_i, \widehat{s}_{\widehat{R}_i}, \widehat{s}_{\widehat{R}_i}) = \widehat{C}'_{i,J} \ominus C_{i,I-i} = (\widehat{C}'_{i,J}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}) \ominus C_{i,I-i} \\ &= (\widehat{C}'_{i,J} - C_{i,I-i}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}})\end{aligned}$$

Die Gesamtreserve erhält man, wie im scharfen Fall, indem die Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre aufaddiert werden. Sie ist somit durch die symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl

$$\widehat{R} = (\widehat{R}, \widehat{s}_{\widehat{R}}, \widehat{s}_{\widehat{R}}) = \widehat{R}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{R}_I = \left( \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i, \sum_{i=1}^I \widehat{s}_{\widehat{R}_i}, \sum_{i=1}^I \widehat{s}_{\widehat{R}_i} \right)$$

gegeben.

10 Jahre nach der Veröffentlichung des gerade vorgestellten Artikels von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ sind zwei Artikel von KERKEZ erschienen, die sehr nah an dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ orientiert sind (vgl. Kerkez (2013a, 2013b)). So wird in diesen beiden Artikeln auch der in (69) angegebene Zusammenhang zwischen den kumulierten Schadenzahlungen aufeinander folgender Abwicklungsjahre unterstellt und es wird ebenfalls angenommen, dass es sich bei den Koeffizienten  $\widetilde{b}_j$  und  $\widetilde{c}_j$  um symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen handelt. Zur Schätzung dieser unbekanntenscharfen Koeffizienten zieht KERKEZ (2013a, 2013b) statt dem im Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ verwendeten Verfahren von TANAKA (1987) das unscharfe Regressionsverfahren von TANAKA ET AL. (1982) heran. Dieses Verfahren unterscheidet sich von dem Verfahren von TANAKA (1987) nur in der Zielfunktion, wobei die bei TANAKA (1987) verwendete Zielfunktion wesentlich verbreiteter ist (siehe Abschnitt 3.6.1). Mit den resultierenden Schätzern werden dann genau wie mit (73) die Endschadenstände der einzelnen Anfalljahre prognostiziert und diese Prädiktoren werden analog im Anschluss durch symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen approximiert, mit denen die Schadenreserven der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  sowie

die Gesamtreserve bestimmt werden. Da die Artikel von KERKEZ dabei keine neue Herangehensweise und keine neuen Erkenntnisse liefern, werden die einzelnen Schritte hier nicht ausführlicher besprochen. Neu im Vergleich zu dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ ist nur, dass das vorgestellte Verfahren zusätzlich im Rahmen eines Beispiels mit dem CL-Verfahren (siehe Abschnitt 2.3.1) verglichen wird und KERKEZ (2013a, 2013b) kurz erwähnt, dass es einen Zusammenhang zwischen den Abwicklungsfaktoren im CL-Verfahren und den Koeffizienten eines linearen Regressionsmodells gibt. Da dies jedoch nicht näher erläutert wird und THOMAS diesen Zusammenhang wesentlich ausführlicher thematisiert, wird dies im Rahmen der Vorstellung des Ansatzes von THOMAS erläutert (siehe Abschnitt 4.1.11).

#### 4.1.2 Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006)

Im Jahr 2006 hat DE ANDRÉS SÁNCHEZ einen weiteren Ansatz, bei dem ein unscharfes Regressionsverfahren auf ein Schadenreservierungsverfahren angewendet wird, veröffentlicht. Bei dem verwendeten unscharfen Regressionsverfahren handelt es sich dabei um das Verfahren von ISHIBUCHI & NII (siehe Abschnitt 3.6.2) und als Schadenreservierungsverfahren wird der Glättungsansatz von SHERMAN (siehe Abschnitt 2.3.4) herangezogen. Die Nutzung eines unscharfen Regressionsverfahrens statt der bei SHERMAN verwendeten KQ-Methode begründet DE ANDRÉS SÁNCHEZ wieder damit, dass die KQ-Methode nur dann verlässliche Schätzer liefert, wenn der verwendete Datensatz ausreichend groß ist, was in der Schadenreservierung, abhängig von der Branche, oftmals nicht der Fall ist. Des Weiteren argumentiert er, dass die der klassischen KQ-Regression zugrunde liegenden Annahmen in der Praxis häufig verletzt sind und es mit einem kleinen Datensatz zudem schwierig ist zu überprüfen, ob die Annahmen erfüllt sind (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3097).

Bei dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) gilt es als erstes, wie im ursprünglichen Verfahren von SHERMAN, die individuellen Abwicklungsfaktoren  $F_{i,j}$  für die Anfalljahre  $i = 0, \dots, I - j - 1$  und Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, J - 1$  zu berechnen:

$$F_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Anschließend wird jedoch, abweichend von SHERMAN, nicht der Mittelwert der individuellen Abwicklungsfaktoren eines Abwicklungsjahres gebildet, sondern es wird für jedes

Abwicklungsjahr  $j = 0, \dots, J - 1$  das Maximum sowie das Minimum der Menge der individuellen Abwicklungsfaktoren  $\{F_{0,j}, F_{1,j}, \dots, F_{I-j-1,j}\}$  ermittelt. Mit diesen Werten wird dann  $\tilde{F}_j^* = [\overline{F}_j^*, \underline{F}_j^*]$  mit

$$\begin{aligned}\overline{F}_j^* &= \ln(\max\{F_{0,j}, F_{1,j}, \dots, F_{I-j-1,j}\} - 1) \\ \underline{F}_j^* &= \ln(\min\{F_{0,j}, F_{1,j}, \dots, F_{I-j-1,j}\} - 1)\end{aligned}$$

für  $j = 0, \dots, J - 1$  bestimmt und analog zum scharfen Fall (siehe (19)) ein lineares Regressionsmodell mit  $\tilde{F}_j^*$  als abhängiger Variable und  $\ln(j+1)$  als unabhängiger Variable aufgestellt (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3100):

$$\tilde{F}_j^* = \tilde{a} \oplus \tilde{b} \ln(j+1) \quad (74)$$

Die Regressionskoeffizienten  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  werden dabei als asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{a} = (a, l_a, r_a)$  und  $\tilde{b} = (b, l_b, r_b)$  unterstellt, so dass sich für (74)

$$\begin{aligned}\tilde{F}_j^* &= (F_j^*, l_{F_j^*}, r_{F_j^*}) = (a, l_a, r_a) \oplus (b, l_b, r_b) \ln(j+1) \\ &= (a + b \ln(j+1), l_a + l_b \ln(j+1), r_a + r_b \ln(j+1))\end{aligned}$$

ergibt. Um Schätzer für die unscharfen Koeffizienten  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  dieses Regressionsmodells zu erhalten, wird bei dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) das unscharfe Regressionsverfahren von ISHIBUCHI & NII angewendet. Gemäß dieses Verfahrens werden zunächst die Modalwerte der Koeffizienten mittels KQ-Methode geschätzt. Anschließend werden Schätzer für die linken sowie die rechten Spannweiten von  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  durch Lösen des folgenden LP-Problems bestimmt

$$\min_{l_a, l_b, r_a, r_b} z = J l_a + l_b \sum_{j=0}^{J-1} \ln(j+1) + J r_a + r_b \sum_{j=0}^{J-1} \ln(j+1)$$

unter Bedingung von (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3101):

$$\begin{aligned}\hat{a} + \hat{b} \ln(j+1) - (1 - \alpha)(l_a + l_b \ln(j+1)) &\leq \underline{F}_j^*, \quad j = 0, \dots, J - 1 \\ \hat{a} + \hat{b} \ln(j+1) + (1 - \alpha)(r_a + r_b \ln(j+1)) &\geq \overline{F}_j^*, \quad j = 0, \dots, J - 1 \\ l_a, l_b, r_a, r_b &\geq 0\end{aligned}$$

Dabei ist  $\alpha \in [0, 1]$  ein vorgegebener Zugehörigkeitsgrad und  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  sind die zuvor mittels KQ-Methode geschätzten Modalwerte. Es ist zu beachten, dass bei dem hier verwendeten unscharfen Regressionsverfahren – im Gegensatz zu dem im Ansatz von DE

ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ (2003) herangezogenen unscharfen Regressionsverfahren von TANAKA (1987) – die Koeffizienten asymmetrisch sein können, was den Vorteil besitzt, dass die linke und die rechte Spannweite individuell angepasst werden können und nicht stets übereinstimmen müssen.

Mit Hilfe der ermittelten Schätzer  $\widehat{a}$  und  $\widehat{b}$  können im nächsten Schritt die Abwicklungsfaktoren der Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, J - 1$  geschätzt werden. Hierfür sind  $\widehat{a}$  und  $\widehat{b}$  in Gleichung (18) einzusetzen:

$$\widehat{f}_j^* = 1 \oplus e^{\widehat{a}} \otimes (j + 1)^{\widehat{b}}$$

Bei diesen geschätzten Abwicklungsfaktoren handelt es sich zwar um unscharfe Zahlen, allerdings sind sie im Allgemeinen nicht mehr dreieckförmig, da (18) keine lineare Funktion in  $a$  und  $b$  ist (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3102). DE ANDRÉS SÁNCHEZ verweist an dieser Stelle auf DUBOIS & PRADE (1993), die vorgeschlagen haben, in solch einem Fall das Ergebnis unter Verwendung einer Taylorentwicklung erster Ordnung durch eine dreieckförmige unscharfe Zahl zu approximieren. Für die geschätzten Abwicklungsfaktoren  $\widehat{f}_j^*$  resultiert unter Berücksichtigung von  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g(x, y) = 1 + e^x (j + 1)^y$  so die Approximation  $\widehat{f}_j^{*'} = (\widehat{f}_j^{*'}, \widehat{l}_{\widehat{f}_j^{*'}}, \widehat{r}_{\widehat{f}_j^{*'}}) \approx \widehat{f}_j^*$  mit (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3102):

$$\begin{aligned} \widehat{f}_j^{*'} &= g(\widehat{a}, \widehat{b}) = 1 + e^{\widehat{a}} (j + 1)^{\widehat{b}} \\ \widehat{l}_{\widehat{f}_j^{*'}} &= \frac{\partial g(\widehat{a}, \widehat{b})}{\partial \widehat{a}} \widehat{l}_{\widehat{a}} + \frac{\partial g(\widehat{a}, \widehat{b})}{\partial \widehat{b}} \widehat{l}_{\widehat{b}} = e^{\widehat{a}} (j + 1)^{\widehat{b}} \widehat{l}_{\widehat{a}} + e^{\widehat{a}} (j + 1)^{\widehat{b}} \ln(j + 1) \widehat{l}_{\widehat{b}} \\ &= e^{\widehat{a}} (j + 1)^{\widehat{b}} (\widehat{l}_{\widehat{a}} + \widehat{l}_{\widehat{b}} \ln(j + 1)) \\ \widehat{r}_{\widehat{f}_j^{*'}} &= \frac{\partial g(\widehat{a}, \widehat{b})}{\partial \widehat{a}} \widehat{r}_{\widehat{a}} + \frac{\partial g(\widehat{a}, \widehat{b})}{\partial \widehat{b}} \widehat{r}_{\widehat{b}} = e^{\widehat{a}} (j + 1)^{\widehat{b}} \widehat{r}_{\widehat{a}} + e^{\widehat{a}} (j + 1)^{\widehat{b}} \ln(j + 1) \widehat{r}_{\widehat{b}} \\ &= e^{\widehat{a}} (j + 1)^{\widehat{b}} (\widehat{r}_{\widehat{a}} + \widehat{r}_{\widehat{b}} \ln(j + 1)) \end{aligned}$$

Da es sich auch bei dem Schätzer

$$\widehat{q}_{j,s}^* = \widehat{f}_j^* \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{s-1}^* = \left( 1 \oplus e^{\widehat{a}} \otimes (j + 1)^{\widehat{b}} \right) \otimes \dots \otimes \left( 1 \oplus e^{\widehat{a}} \otimes (s - 1 + 1)^{\widehat{b}} \right)$$

für die Prognoserate von Abwicklungsjahr  $j$  zu Abwicklungsjahr  $s$  mit  $j = 0, \dots, J - 1$ ,  $s = 1, \dots, J$  und  $j < s$ , der sich ergibt, wenn die angepassten unscharfen Parameter  $\widehat{a}$  und  $\widehat{b}$  in (20) eingesetzt werden, im Allgemeinen um keine dreieckförmige unscharfe Zahl mehr handelt, wird  $\widehat{q}_{j,s}^*$  ebenfalls unter Verwendung einer Taylorentwicklung erster

Ordnung durch eine dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{q}_{j,s}^{*'} = (\widehat{q}_{j,s}^{*'}, \widehat{l}_{\widehat{q}_{j,s}^{*'}}, \widehat{r}_{\widehat{q}_{j,s}^{*'}}) \approx \widetilde{q}_{j,s}^{*}$  approximiert. Mit der Funktion  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto h(x, y) = \prod_{h=j}^{s-1} (1 + e^x (h+1)^y)$  resultiert hier (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3103):

$$\begin{aligned}
\widehat{q}_{j,s}^{*'} &= h(\widehat{a}, \widehat{b}) = \prod_{h=j}^{s-1} (1 + e^{\widehat{a}} (h+1)^{\widehat{b}}) \\
\widehat{l}_{\widehat{q}_{j,s}^{*'}} &= \frac{\partial h(\widehat{a}, \widehat{b})}{\partial \widehat{a}} \widehat{l}_{\widehat{a}} + \frac{\partial h(\widehat{a}, \widehat{b})}{\partial \widehat{b}} \widehat{l}_{\widehat{b}} = \left( e^{\widehat{a}} \sum_{k=j}^{s-1} (k+1)^{\widehat{b}} \prod_{h=j, h \neq k}^{s-1} (1 + e^{\widehat{a}} (h+1)^{\widehat{b}}) \right) \widehat{l}_{\widehat{a}} \\
&\quad + \left( e^{\widehat{a}} \sum_{k=j}^{s-1} (k+1)^{\widehat{b}} \ln(k+1) \prod_{h=j, h \neq k}^{s-1} (1 + e^{\widehat{a}} (h+1)^{\widehat{b}}) \right) \widehat{l}_{\widehat{b}} \\
&= e^{\widehat{a}} \sum_{k=j}^{s-1} (k+1)^{\widehat{b}} (\widehat{l}_{\widehat{a}} + \widehat{l}_{\widehat{b}} \ln(k+1)) \prod_{h=j, h \neq k}^{s-1} (1 + e^{\widehat{a}} (h+1)^{\widehat{b}}) \\
\widehat{r}_{\widehat{q}_{j,s}^{*'}} &= \frac{\partial h(\widehat{a}, \widehat{b})}{\partial \widehat{a}} \widehat{r}_{\widehat{a}} + \frac{\partial h(\widehat{a}, \widehat{b})}{\partial \widehat{b}} \widehat{r}_{\widehat{b}} = \left( e^{\widehat{a}} \sum_{k=j}^{s-1} (k+1)^{\widehat{b}} \prod_{h=j, h \neq k}^{s-1} (1 + e^{\widehat{a}} (h+1)^{\widehat{b}}) \right) \widehat{r}_{\widehat{a}} \\
&\quad + \left( e^{\widehat{a}} \sum_{k=j}^{s-1} (k+1)^{\widehat{b}} \ln(k+1) \prod_{h=j, h \neq k}^{s-1} (1 + e^{\widehat{a}} (h+1)^{\widehat{b}}) \right) \widehat{r}_{\widehat{b}} \\
&= e^{\widehat{a}} \sum_{k=j}^{s-1} (k+1)^{\widehat{b}} (\widehat{r}_{\widehat{a}} + \widehat{r}_{\widehat{b}} \ln(k+1)) \prod_{h=j, h \neq k}^{s-1} (1 + e^{\widehat{a}} (h+1)^{\widehat{b}})
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser dreieckförmigen Prognoseraten werden dann Prädiktoren für die unbekanntenen Schadenstände der Anfalljahre  $i$  und Abwicklungsjahre  $j$  mit  $i+j > I$  bestimmt. Hierfür ist der jeweilige letzte beobachtbare Schadenstand mit der entsprechenden geschätzten Prognoserate zu multiplizieren:

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_{i,j} &= \left( \widehat{C}_{i,j}, \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,j}}, \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,j}} \right) = C_{i,I-i} \otimes \widehat{q}_{I-i,j}^{*'} = C_{i,I-i} \otimes \left( \widehat{q}_{I-i,j}^{*'}, \widehat{l}_{\widehat{q}_{I-i,j}^{*'}} , \widehat{r}_{\widehat{q}_{I-i,j}^{*'}} \right) \\
&= \left( C_{i,I-i} \widehat{q}_{I-i,j}^{*'}, C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{q}_{I-i,j}^{*'}} , C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{q}_{I-i,j}^{*'}} \right)
\end{aligned} \tag{75}$$

Für  $j = J$  resultiert der Prädiktor für den Endschadenstand des entsprechenden Anfalljahres. Wird von diesem Prädiktor der jeweilige letzte beobachtbare Schadenstand abgezogen, ergibt sich die Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,J} \ominus C_{i,I-i} = \left( \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}, \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}}, \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,J}} \right)$$

Die Gesamtreserve erhält man schließlich, indem die ermittelten Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre aufaddiert werden:

$$\widehat{R} = \widehat{R}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{R}_I = \left( \sum_{i=1}^I (\widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}), \sum_{i=1}^I \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}}, \sum_{i=1}^I \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,J}} \right)$$

DE ANDRÉS SÁNCHEZ führt als Vorteil seines Verfahrens an, dass es sich bei der resultierenden Schadenreserve um eine dreieckförmige unscharfe Zahl handelt und somit mit den Spannweiten unmittelbar auch ein Maß für die Variabilität der Schadenreserve geliefert wird<sup>9</sup>. Soll im ursprünglichen Verfahren von SHERMAN eine Aussage über die Variabilität der Schadenreserve getroffen werden, muss dafür dagegen eine stochastische Simulationsmethode herangezogen werden (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3106).

Um die Schadenreserve in der Bilanz ausweisen zu können, muss sie allerdings in Form eines einzelnen exakten Wertes und nicht in Form einer unscharfen Zahl vorliegen. Die ermittelte unscharfe Schadenreserve muss hierfür also noch mit Hilfe einer Defuzzifikationsmethode (siehe Abschnitt 3.4) in eine scharfe Zahl transformiert werden. Bei dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) wird als Defuzzifikationsmethode der Erwartungswert (siehe (56)) der unscharfen Zahlen  $\widehat{R}_i$  bzw.  $\widehat{R}$  genutzt, was zu den scharfen Reserven

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i] &= (1 - \beta) \int_0^1 (\widehat{R}_i)_\alpha d\alpha + \beta \int_0^1 (\widehat{R}_i)_\alpha d\alpha \\
&= (1 - \beta) \int_0^1 (\widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} - (1 - \alpha)\widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}}) d\alpha + \beta \int_0^1 (\widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} + (1 - \alpha)\widehat{r}_{\widehat{C}_{i,J}}) d\alpha \\
&= (1 - \beta) \left( (\widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}) \alpha - \left( \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 \right) \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}} \right) \Big|_0^1 \\
&\quad + \beta \left( (\widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}) \alpha + \left( \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 \right) \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,J}} \right) \Big|_0^1 \\
&= (1 - \beta) \left( \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} - \frac{1}{2}\widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}} \right) + \beta \left( \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} + \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{C}_{i,J}} \right) \\
&= \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} - \frac{1}{2}\widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}} + \frac{1}{2}\beta \left( \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}} + \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,J}} \right)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}] = \sum_{i=1}^I \left( \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}} + \frac{1}{2}\beta \left( \sum_{i=1}^I \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,J}} + \sum_{i=1}^I \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,J}} \right)$$

führt (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3104). Je höher der Wert des festzulegenden Parameters  $\beta \in [0, 1]$  dabei gewählt wird, desto stärker wird die rechte Grenze des  $\alpha$ -Schnitts gewichtet und desto höher ist die resultierende scharfe Reserve. In der aktuellen Praxis wird üblicherweise  $\beta > 0,5$  gewählt (vgl. De Andrés Sánchez (2006), S. 3104).

<sup>9</sup>Hierbei sollte jedoch beachtet werden, dass die Spannweiten der Schadenreserven und somit das von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) vorgeschlagene Variabilitätsmaß sehr groß sind.

### 4.1.3 Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007)

Im Jahr 2007 hat DE ANDRÉS SÁNCHEZ ein weiteres unscharfes Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven, bei welchem es sich um eine Kombination eines Schadenreservierungsverfahrens mit einem unscharfen Regressionsverfahren handelt, veröffentlicht. Als Schadenreservierungsverfahren wird dabei die geometrische Separationsmethode von TAYLOR (siehe Abschnitt 2.3.5) herangezogen und als unscharfes Regressionsverfahren wird das Verfahren von ISHIBUCHI & NII genutzt (siehe Abschnitt 3.6.2).

Wie bei der gewöhnlichen geometrischen Separationsmethode von TAYLOR werden auch bei dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) zunächst die durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden berechnet. Im Gegensatz zu der ursprünglichen geometrischen Separationsmethode muss die Anzahl der Schäden des  $i$ -ten Anfalljahres dabei allerdings nicht in Form einer scharfen Zahl vorliegen, sondern kann durch eine asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl gegeben sein:  $\tilde{N}_i = (N_i, l_{N_i}, r_{N_i})$ . Dadurch ist es möglich, auch die Rückstellungen für eingetretene, aber dem Versicherungsunternehmen noch nicht gemeldete Schäden zu ermitteln, während das Verfahren von TAYLOR ursprünglich nur dafür bestimmt war, die Rückstellungen für schon gemeldete Schäden, die noch nicht abgeschlossen werden können, zu bestimmen. Mit der von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) vorgeschlagenen Erweiterung der geometrischen Separationsmethode, bei der die Anzahl der Schäden nicht mehr durch einen exakten Wert gegeben sein muss, können also nicht nur für IBNeR-Schäden, sondern auch für IBNyR-Schäden Reserven bestimmt werden (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 151).

Analog zur ursprünglichen geometrischen Separationsmethode von TAYLOR wird bei dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) angenommen, dass sich die durchschnittlichen Schadenzahlungen

$$\tilde{S}_{i,j} = X_{i,j} \odot \tilde{N}_i$$

mit  $i + j \leq I$  in zwei Faktoren zerlegen lassen: in einen Faktor  $\tilde{P}_j$ ,  $j = 0, \dots, J$ , der angibt, welchen Anteil die Schadenzahlungen des  $j$ -ten Abwicklungsjahres an den gesamten Schadenzahlungen haben, und in einen Faktor  $\tilde{\Pi}_{i+j}$ ,  $i + j = 0, \dots, I$ , der die Effekte exogener Einflüsse, wie z.B. Inflation, des Kalenderjahres  $i + j$  beinhaltet. Es wird also angenommen, dass

$$\tilde{S}_{i,j} = \tilde{P}_j \otimes \tilde{\Pi}_{i+j}$$

bzw. nach Logarithmierung

$$\ln \tilde{S}_{i,j} = \ln \tilde{P}_j \oplus \ln \tilde{\Pi}_{i+j}$$

gilt. Die Koeffizienten  $\ln \tilde{P}_j$  und  $\ln \tilde{\Pi}_{i+j}$  werden dabei als asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\ln \tilde{P}_j = (\ln P_j, l_{\ln P_j}, r_{\ln P_j})$  bzw.  $\ln \tilde{\Pi}_{i+j} = (\ln \Pi_{i+j}, l_{\ln \Pi_{i+j}}, r_{\ln \Pi_{i+j}})$  unterstellt, so dass  $\ln \tilde{S}_{i,j}$  ebenfalls durch eine asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl gegeben ist:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{S}_{i,j} &= (\ln S_{i,j}, l_{\ln S_{i,j}}, r_{\ln S_{i,j}}) = (\ln P_j, l_{\ln P_j}, r_{\ln P_j}) \oplus (\ln \Pi_{i+j}, l_{\ln \Pi_{i+j}}, r_{\ln \Pi_{i+j}}) \\ &= (\ln P_j + \ln \Pi_{i+j}, l_{\ln P_j} + l_{\ln \Pi_{i+j}}, r_{\ln P_j} + r_{\ln \Pi_{i+j}}) \end{aligned} \quad (76)$$

Für die unscharfen Koeffizienten  $\ln \tilde{P}_j$  und  $\ln \tilde{\Pi}_{i+j}$  gilt es Schätzer zu bestimmen. Wie bereits in Abschnitt 2.3.5 erläutert wurde, sollte vor der Anwendung eines Verfahrens zur Schätzung der Koeffizienten der Wert eines Koeffizienten fixiert werden, da ansonsten keine eindeutigen Schätzer ermittelt werden können. Aus diesem Grund wird angenommen, dass  $\ln \tilde{P}_0 = (0, 0, 0)$  gilt, so dass nur noch für  $\ln \tilde{P}_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , und  $\ln \tilde{\Pi}_{i+j}$ ,  $i + j = 0, \dots, I$ , Schätzer zu bestimmen sind (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 153). Hierfür wird bei dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) das unscharfe Regressionsverfahren von ISHIBUCHI & NII genutzt. Gemäß dieses Verfahrens werden zunächst die Modalwerte der Koeffizienten mittels KQ-Methode geschätzt, was zu den KQ-Schätzern  $\ln \hat{P}_j$  und  $\ln \hat{\Pi}_{i+j}$  führt. Anschließend werden Schätzer für die Spannweiten der Koeffizienten durch Lösung des LP-Problems

$$\min_{l_{\ln P_j}, l_{\ln \Pi_k}, r_{\ln P_j}, r_{\ln \Pi_k}} z = \sum_{j=1}^J (I + 1 - j) (l_{\ln P_j} + r_{\ln P_j}) + \sum_{k=0}^I (k + 1) (l_{\ln \Pi_k} + r_{\ln \Pi_k})$$

unter Bedingung von

$$\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{v}}_* \leq \underline{\ln S_i}, \quad i = 0, \dots, I \quad (77)$$

$$\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{v}}^* \geq \overline{\ln S_i}, \quad i = 0, \dots, I \quad (78)$$

$$l_{\ln P_j}, l_{\ln \Pi_k}, r_{\ln P_j}, r_{\ln \Pi_k} \geq 0, \quad j = 1, \dots, J, k = 0, \dots, I \quad (79)$$



wobei  $\mathbf{I}_{a \times a}$  eine Einheitsmatrix mit Rang  $a$  und  $\mathbf{0}_{b \times c}$  eine Nullmatrix mit  $b$  Zeilen und  $c$  Spalten ist (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 152f.). Durch die Nebenbedingungen (77) und (78) des LP-Problems wird, wie durch (64) und (65), sichergestellt, dass der  $\alpha$ -Schnitt aller beobachteten Output Werte in dem  $\alpha$ -Schnitt des jeweiligen geschätzten Outputs enthalten ist. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Verfahren sind die Nebenbedingungen hier in Matrixschreibweise angegeben. Die Matrix  $\mathbf{A}_0$  liefert die Bedingungen für die nullte Zeile des Abwicklungsdreiecks, die Matrix  $\mathbf{A}_1$  für die erste Zeile und entsprechend weiter.

Das bisher beschriebene Vorgehen erlaubt es, Schätzer für die unscharfen Parameter  $\ln \tilde{P}_j$  und  $\ln \tilde{\Pi}_{i+j}$  für  $j = 1, \dots, J$  und  $i + j = 0, \dots, I$  zu ermitteln. Um  $\tilde{S}_{i,j}$  auch für  $i + j > I$  prognostizieren und schließlich die Schadenreserve bestimmen zu können, müssen noch Schätzer für  $\ln \tilde{\Pi}_{i+j}$  für die Perioden, in denen sie bisher noch nicht angepasst wurden, d.h. für  $i + j = I + 1, \dots, 2I$ , bestimmt werden. DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) schlägt, angelehnt an VAN EEGHEN (1981), vor, dafür zunächst an die bereits ermittelten Schätzer  $\ln \hat{\Pi}_{i+j}$  mit  $i + j \leq I$  eine lineare Funktion anzupassen (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 154):

$$\ln \hat{\Pi}_{i+j} = \tilde{a} \oplus \tilde{b}(i + j) \quad (80)$$

Die beiden Koeffizienten  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  werden als asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen unterstellt, so dass sich für Gleichung (80)

$$\begin{aligned} \ln \hat{\Pi}_{i+j} &= (\ln \hat{\Pi}_{i+j}, \hat{l}_{\ln \hat{\Pi}_{i+j}}, \hat{r}_{\ln \hat{\Pi}_{i+j}}) = (a, l_a, r_a) \oplus (b, l_b, r_b)(i + j) \\ &= (a + b(i + j), l_a + l_b(i + j), r_a + r_b(i + j)) \end{aligned}$$

mit  $i + j \leq I$  ergibt. Zur Schätzung von  $\tilde{a} = (a, l_a, r_a)$  und  $\tilde{b} = (b, l_b, r_b)$  wird wieder das unscharfe Regressionsverfahren von ISHIBUCHI & NII herangezogen. Es werden also zunächst die Modalwerte von  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  mit der KQ-Methode geschätzt. Die resultierenden Schätzer werden mit  $\hat{a}$  bzw.  $\hat{b}$  bezeichnet. Anschließend ist das folgende LP-Problem mit  $\alpha \in [0, 1]$  zu lösen, um die Spannweiten der unscharfen Koeffizienten anzupassen

$$\min_{l_a, l_b, r_a, r_b} z = l_a + r_a + \frac{I}{2}(l_b + r_b)$$

unter Bedingung von<sup>10</sup> (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 154f.):

$$\widehat{a} - l_a + (1 - \alpha)(\widehat{b} - l_b)(i + j) \leq \ln \widehat{\Pi}_{i+j} - (1 - \alpha)\widehat{l}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \quad i + j = 0, \dots, I \quad (81)$$

$$\widehat{a} + r_a + (1 - \alpha)(\widehat{b} + r_b)(i + j) \geq \ln \widehat{\Pi}_{i+j} + (1 - \alpha)\widehat{r}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \quad i + j = 0, \dots, I \quad (82)$$

$$l_a, l_b, r_a, r_b \geq 0 \quad (83)$$

Mit den erhaltenen Schätzern  $\widehat{\widehat{a}} = (\widehat{a}, \widehat{l}_a, \widehat{r}_a)$  und  $\widehat{\widehat{b}} = (\widehat{b}, \widehat{l}_b, \widehat{r}_b)$  können dann für  $i + j > I$  durch

$$\begin{aligned} \ln \widehat{\widehat{\Pi}}_{i+j} &= (\ln \widehat{\Pi}_{i+j}, \widehat{l}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \widehat{r}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}) = \widehat{\widehat{a}} \oplus \widehat{\widehat{b}}(i + j) \\ &= (\widehat{a} + \widehat{b}(i + j), \widehat{l}_a + \widehat{l}_b(i + j), \widehat{r}_a + \widehat{r}_b(i + j)) \end{aligned}$$

die logarithmierten Faktoren der exogenen Einflüsse zukünftiger Perioden geschätzt werden. DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) weist an dieser Stelle darauf hin, dass die Spannweiten von  $\ln \widehat{\widehat{\Pi}}_{i+j}$  mit steigendem  $(i + j)$  zunehmen. Dies sieht er jedoch nicht als Problem, sondern vielmehr als positive Eigenschaft, da es naheliegend ist, dass Faktoren für die Effekte exogener Einflüsse, die weiter in der Zukunft liegen, also weiter von dem aktuellen Zeitpunkt entfernt sind, unsicherer sind und somit größere Spannweiten aufweisen (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 154).

Werden die Schätzer  $\ln \widehat{\widehat{P}}_j$  und  $\ln \widehat{\widehat{\Pi}}_{i+j}$  in Gleichung (76) eingesetzt, erhält man die Prädiktoren

$$\begin{aligned} \ln \widehat{\widehat{S}}_{i,j} &= \left( \ln \widehat{S}_{i,j}, \widehat{l}_{\ln \widehat{S}_{i,j}}, \widehat{r}_{\ln \widehat{S}_{i,j}} \right) = \ln \widehat{\widehat{P}}_j \oplus \ln \widehat{\widehat{\Pi}}_{i+j} \\ &= \left( \ln \widehat{P}_j + \ln \widehat{\Pi}_{i+j}, \widehat{l}_{\ln \widehat{P}_j} + \widehat{l}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \widehat{r}_{\ln \widehat{P}_j} + \widehat{r}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}} \right) \end{aligned}$$

für die logarithmierten durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden für  $i + j > I$ , mit denen dann die durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden für zukünftige Perioden prognostiziert werden können:

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{S}}_{i,j} &= \exp \left( \ln \widehat{\widehat{S}}_{i,j} \right) = \exp \left( \ln \widehat{\widehat{P}}_j \oplus \ln \widehat{\widehat{\Pi}}_{i+j} \right) \\ &= \exp \left( \left( \ln \widehat{P}_j + \ln \widehat{\Pi}_{i+j}, \widehat{l}_{\ln \widehat{P}_j} + \widehat{l}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \widehat{r}_{\ln \widehat{P}_j} + \widehat{r}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}} \right) \right) \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Wie bereits in THOMAS (2017) herausgestellt wurde, ist es verwunderlich, weshalb in den Nebenbedingungen (81) und (82) nicht die Spannweiten  $(l_a + l_b(i + j))$  und  $(r_a + r_b(i + j))$ , sondern stattdessen die Terme  $(\widehat{b} - l_b)(i + j)$  und  $(\widehat{b} + r_b)(i + j)$  mit dem Faktor  $(1 - \alpha)$  multipliziert werden. Es sollte in Erwägung gezogen werden, die Nebenbedingungen (81) und (82) durch

$$\begin{aligned} \widehat{a} + \widehat{b}(i + j) - (1 - \alpha)(l_a + l_b(i + j)) &\leq \ln \widehat{\Pi}_{i+j} - (1 - \alpha)\widehat{l}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \quad i + j = 0, \dots, I \\ \widehat{a} + \widehat{b}(i + j) + (1 - \alpha)(r_a + r_b(i + j)) &\geq \ln \widehat{\Pi}_{i+j} + (1 - \alpha)\widehat{r}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \quad i + j = 0, \dots, I \end{aligned}$$

zu ersetzen.

Bei dem resultierenden Prädiktor  $\widehat{\widehat{S}}_{i,j}$  für die durchschnittliche Schadenzahlung des Anfalljahres  $i$  und Abwicklungsjahres  $j$  handelt es sich im Allgemeinen um keine dreieckförmige unscharfe Zahl mehr, weshalb DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) vorschlägt, nicht  $\widehat{\widehat{S}}_{i,j}$  für die weitere Berechnung zu nutzen, sondern, wie auch in dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006), eine Taylorentwicklung erster Ordnung zu verwenden, um eine Approximation durch eine dreieckförmige unscharfe Zahl zu erhalten. Für  $\widehat{\widehat{S}}_{i,j}$  ergibt sich unter Berücksichtigung von  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \exp(x)$  so die Approximation  $\widehat{\widehat{S}}'_{i,j} = (\widehat{S}'_{i,j}, \widehat{l}'_{\widehat{S}'_{i,j}}, \widehat{r}'_{\widehat{S}'_{i,j}}) \approx \widehat{\widehat{S}}_{i,j}$  mit (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 155):

$$\begin{aligned}\widehat{S}'_{i,j} &= g(\ln \widehat{S}_{i,j}) = \exp(\ln \widehat{S}_{i,j}) = \exp(\ln \widehat{P}_j + \ln \widehat{\Pi}_{i+j}) \\ \widehat{l}'_{\widehat{S}'_{i,j}} &= \frac{\partial g(\ln \widehat{S}_{i,j})}{\partial \ln \widehat{S}_{i,j}} \widehat{l}_{\ln \widehat{S}_{i,j}} = \exp(\ln \widehat{S}_{i,j}) \widehat{l}_{\ln \widehat{S}_{i,j}} = \exp(\ln \widehat{P}_j + \ln \widehat{\Pi}_{i+j}) (\widehat{l}_{\ln \widehat{P}_j} + \widehat{l}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}) \\ \widehat{r}'_{\widehat{S}'_{i,j}} &= \frac{\partial g(\ln \widehat{S}_{i,j})}{\partial \ln \widehat{S}_{i,j}} \widehat{r}_{\ln \widehat{S}_{i,j}} = \exp(\ln \widehat{S}_{i,j}) \widehat{r}_{\ln \widehat{S}_{i,j}} = \exp(\ln \widehat{P}_j + \ln \widehat{\Pi}_{i+j}) (\widehat{r}_{\ln \widehat{P}_j} + \widehat{r}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}})\end{aligned}$$

Diese dreieckförmigen Prädiktoren für die durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden werden dann genutzt, um die inkrementellen Schadenzahlungen  $\widehat{\widehat{X}}_{i,j}$  für  $i + j > I$  zu prognostizieren:

$$\widehat{\widehat{X}}_{i,j} = \widehat{\widehat{S}}'_{i,j} \otimes \widetilde{N}_i$$

Da auch die sich hier ergebende unscharfe Zahl  $\widehat{\widehat{X}}_{i,j}$  im Allgemeinen nicht mehr dreieckförmig ist, wird  $\widehat{\widehat{X}}_{i,j}$  ebenfalls unter Verwendung einer Taylorentwicklung erster Ordnung durch eine dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{\widehat{X}}'_{i,j} = (\widehat{X}'_{i,j}, \widehat{l}'_{\widehat{X}'_{i,j}}, \widehat{r}'_{\widehat{X}'_{i,j}}) \approx \widehat{\widehat{X}}_{i,j}$  approximiert. Hier resultiert mit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto h(x, y) = xy$  (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 155):

$$\begin{aligned}\widehat{X}'_{i,j} &= h(\widehat{S}'_{i,j}, N_i) = \widehat{S}'_{i,j} N_i \\ \widehat{l}'_{\widehat{X}'_{i,j}} &= \frac{\partial h(\widehat{S}'_{i,j}, N_i)}{\partial \widehat{S}'_{i,j}} \widehat{l}'_{\widehat{S}'_{i,j}} + \frac{\partial h(\widehat{S}'_{i,j}, N_i)}{\partial N_i} l_{N_i} = N_i \widehat{l}'_{\widehat{S}'_{i,j}} + \widehat{S}'_{i,j} l_{N_i} \\ \widehat{r}'_{\widehat{X}'_{i,j}} &= \frac{\partial h(\widehat{S}'_{i,j}, N_i)}{\partial \widehat{S}'_{i,j}} \widehat{r}'_{\widehat{S}'_{i,j}} + \frac{\partial h(\widehat{S}'_{i,j}, N_i)}{\partial N_i} r_{N_i} = N_i \widehat{r}'_{\widehat{S}'_{i,j}} + \widehat{S}'_{i,j} r_{N_i}\end{aligned}$$

Mit Hilfe der dreieckförmigen Prädiktoren  $\widehat{\widehat{X}}'_{i,j}$  für die zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen werden dann schließlich die Schadenreserven bestimmt. Addiert man alle prognostizierten inkrementellen Schadenzahlungen eines Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  auf,

erhält man die Schadenreserve dieses Anfalljahres:

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{R}}_i &= (\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i}) = \widehat{\widehat{X}}'_{i,I-i+1} \oplus \dots \oplus \widehat{\widehat{X}}'_{i,J} \\ &= \left( \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{X}'_{i,j}, \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{l}_{\widehat{X}'_{i,j}}, \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{r}_{\widehat{X}'_{i,j}} \right)\end{aligned}$$

Die Gesamtreserve ergibt sich, wenn die Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre aufaddiert werden:

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{R}} &= (\widehat{R}, \widehat{l}_{\widehat{R}}, \widehat{r}_{\widehat{R}}) = \left( \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i, \sum_{i=1}^I \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \sum_{i=1}^I \widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{X}'_{i,j}, \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{l}_{\widehat{X}'_{i,j}}, \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{r}_{\widehat{X}'_{i,j}} \right)\end{aligned}$$

Um die Schadenreserve in der Bilanz ausweisen zu können, muss sie noch in eine scharfe Zahl transformiert werden. Wie bei dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) erfolgt dies mit dem Erwartungswert als Defuzzifikationsmethode. Eine analoge Berechnung wie in Abschnitt 4.1.2 führt zu der scharfen Reserve

$$\mathbb{E}_\beta[\widehat{\widehat{R}}_i] = \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{X}'_{i,j} - \frac{1}{2} \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{l}_{\widehat{X}'_{i,j}} + \frac{1}{2}\beta \left( \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{l}_{\widehat{X}'_{i,j}} + \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{r}_{\widehat{X}'_{i,j}} \right)$$

des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  mit  $\beta \in [0, 1]$  und zu der scharfen Gesamtreserve (vgl. De Andrés Sánchez (2007), S. 156):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\beta[\widehat{\widehat{R}}] &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{X}'_{i,j} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{l}_{\widehat{X}'_{i,j}} + \frac{1}{2}\beta \left( \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{l}_{\widehat{X}'_{i,j}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{r}_{\widehat{X}'_{i,j}} \right)\end{aligned}$$

Die Idee, die geometrische Separationsmethode von TAYLOR durch die Anwendung eines unscharfen Regressionsverfahrens zu einem unscharfen Schadenreservierungsverfahren zu erweitern, wurde von BAHRAMI & BAHRAMI in einem 2015 erschienenen Artikel noch einmal aufgegriffen. Da es sich bei dem Ansatz von BAHRAMI & BAHRAMI jedoch im Wesentlichen um eine verkürzte Version des Ansatzes von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) handelt, die keine neuen Herangehensweisen oder Erkenntnisse liefert, wird dieser Ansatz hier nicht näher erläutert.

#### 4.1.4 Der Ansatz von APAYDIN & BASER (2010)

Die geometrische Separationsmethode von TAYLOR (siehe Abschnitt 2.3.5) hat nicht nur in den in Abschnitt 4.1.3 besprochenen Ansätzen von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) und BAHRAMI & BAHRAMI Anwendung im Bereich der unscharfen Schadenreservierung gefunden, sondern ist in dem 2010 veröffentlichten Artikel „*Hybrid fuzzy least-squares regression analysis in claims reserving with geometric separation method*“ von APAYDIN & BASER ein weiteres Mal als Ausgangspunkt zur Entwicklung eines unscharfen Verfahrens zur Bestimmung von Schadenreserven verwendet worden.

Wie bei der ursprünglichen geometrischen Separationsmethode von TAYLOR wird auch bei dem Ansatz von APAYDIN & BASER angenommen, dass sich die durchschnittlichen Schadenzahlungen

$$S_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{N_i}$$

in einen Faktor  $P_j$ , der den Anteil der Schadenzahlungen des  $j$ -ten Abwicklungsjahres an den gesamten Schadenzahlungen angibt, und in einen Faktor  $\Pi_{i+j}$ , der die Effekte exogener Einflüsse des Kalenderjahres  $i + j$  beinhaltet, zerlegen lassen, dass also

$$S_{i,j} = P_j \Pi_{i+j} \quad (84)$$

bzw. nach Logarithmierung

$$\ln S_{i,j} = \ln P_j + \ln \Pi_{i+j}$$

gilt. Zudem wird die rechte Seite der Gleichung ebenfalls um einen Fehlerterm  $\epsilon_{i,j}$  ergänzt, so dass sich das folgende lineare Regressionsmodell ergibt:

$$\ln S_{i,j} = \ln P_j + \ln \Pi_{i+j} + \epsilon_{i,j}, \quad i + j \leq I \quad (85)$$

Die Schätzung der unbekanntenen Regressionskoeffizienten  $\ln P_j$  und  $\ln \Pi_{i+j}$  erfolgt, wie in Abschnitt 2.3.5 beschrieben, mit der KQ-Methode, wobei der Wert eines Parameters vor der Anwendung der KQ-Methode zu fixieren ist. Die resultierenden Schätzer sowie der vorgegebene Wert werden im Folgenden mit  $\ln \hat{P}_j$ ,  $j = 0, \dots, J$ , bzw.  $\ln \hat{\Pi}_{i+j}$ ,  $i + j = 0, \dots, I$ , bezeichnet.

Von nun an weichen APAYDIN & BASER von dem Vorgehen von TAYLOR ab und bestimmen als nächstes Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten, mit deren Hilfe

die ermittelten Schätzer  $\ln \widehat{P}_j$ ,  $j = 0, \dots, J$ , und  $\ln \widehat{\Pi}_{i+j}$ ,  $i + j = 0, \dots, I$ , anschließend *fuzzifiziert* werden. Da die Stichprobenverteilung von

$$\frac{\ln \widehat{P}_j - \ln P_j}{\widehat{\sigma}_{\ln \widehat{P}_j}}$$

sowie

$$\frac{\ln \widehat{\Pi}_{i+j} - \ln \Pi_{i+j}}{\widehat{\sigma}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}}$$

unter der Annahme, dass die Fehlerterme  $\epsilon_{i,j}$  in (85) unabhängig und identisch normalverteilt sind, durch eine  $t$ -Verteilung mit  $J - 2$  Freiheitsgraden gegeben ist<sup>11</sup>, lassen sich in diesem Fall unmittelbar Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten angeben:

$$\left[ \ln \widehat{P}_j - t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_{\ln \widehat{P}_j}, \ln \widehat{P}_j + t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_{\ln \widehat{P}_j} \right]$$

und

$$\left[ \ln \widehat{\Pi}_{i+j} - t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \ln \widehat{\Pi}_{i+j} + t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}} \right]$$

Dabei ist  $(1-\gamma) \in (0, 1)$  das Konfidenzniveau,  $\widehat{\sigma}_{\ln \widehat{P}_j}$  der Standardfehler von  $\ln \widehat{P}_j$ ,  $\widehat{\sigma}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}$  der Standardfehler von  $\ln \widehat{\Pi}_{i+j}$  und  $t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}}$  das  $(1 - \frac{\gamma}{2})$ -Quantil einer  $t$ -Verteilung mit  $J - 2$  Freiheitsgraden. APAYDIN & BASER verwenden die Konfidenzintervalle dann, um symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\ln \widehat{\widetilde{P}}_j$  und  $\ln \widehat{\widetilde{\Pi}}_{i+j}$  zu konstruieren. Als Modalwert wird jeweils die Mitte des Konfidenzintervalls, die durch den jeweiligen KQ-Schätzer gegeben ist, gewählt und als linke sowie rechte Spannweite der Wert, der im Konfidenzintervall von dem KQ-Schätzer subtrahiert bzw. auf den KQ-Schätzer addiert wird, also die Hälfte der Breite des jeweiligen Konfidenzintervalls. Die fuzzifizierten geschätzten Regressionskoeffizienten  $\ln \widehat{\widetilde{P}}_j$  und  $\ln \widehat{\widetilde{\Pi}}_{i+j}$  lauten demnach wie folgt (vgl. Apaydin & Baser (2010), S. 118):

$$\ln \widehat{\widetilde{P}}_j = \left( \ln \widehat{P}_j, \widehat{s}_{\ln \widehat{P}_j}, \widehat{s}_{\ln \widehat{P}_j} \right) = \left( \ln \widehat{P}_j, t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_{\ln \widehat{P}_j}, t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_{\ln \widehat{P}_j} \right) \quad (86)$$

$$\ln \widehat{\widetilde{\Pi}}_{i+j} = \left( \ln \widehat{\Pi}_{i+j}, \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}} \right) = \left( \ln \widehat{\Pi}_{i+j}, t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, t_{J-2, 1-\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}} \right) \quad (87)$$

<sup>11</sup>Wie bereits in THOMAS (2017) thematisiert wurde, ist es fraglich, wieso von einer  $t$ -Verteilung mit  $J - 2$  Freiheitsgraden gesprochen wird. Es liegen  $\frac{1}{2}(J+1)(J+2)$  Beobachtungen in dem Abwicklungsdreieck vor und es sind  $I + J + 1$  Parameter zu schätzen, weshalb in Erwägung gezogen werden sollte, eine  $t$ -Verteilung mit  $\frac{1}{2}(J+1)(J+2) - (I + J + 1) = \frac{1}{2}(J^2 + J - 2I)$  Freiheitsgraden zu nutzen und die weiteren Schritte entsprechend anzupassen.

Durch die Wahl des Konfidenzniveaus  $(1 - \gamma)$  kann der Anwender, je nach subjektiver Einschätzung, die Breite des Intervalls und damit auch die Unschärfe beeinflussen.

Um die zukünftigen, unbekanntes Schadenzahlungen prognostizieren zu können, müssen zusätzlich zu den Schätzern  $\ln \widehat{P}_j$ ,  $j = 0, \dots, J$ , und  $\ln \widehat{\Pi}_{i+j}$ ,  $i + j = 0, \dots, I$ , noch die logarithmierten Faktoren exogener Einflüsse für die zukünftigen Perioden, d.h. für  $i + j = I + 1, \dots, 2I$ , bestimmt werden. Hierfür wird, wie auch in dem Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007), zunächst an die bereits ermittelten fuzzifizierten Schätzer  $\ln \widehat{\Pi}_{i+j}$  mit  $i + j \leq I$  eine lineare Funktion angepasst (vgl. Apaydin & Baser (2010), S. 118):

$$\ln \widehat{\Pi}_{i+j} = \tilde{a} \oplus \tilde{b}(i + j) \oplus \epsilon_{i+j}$$

$\epsilon_{i+j}$  stellt dabei einen Störterm mit Erwartungswert 0 dar und die Koeffizienten  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  werden als symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{a} = (a, s_a, s_a)$  bzw.  $\tilde{b} = (b, s_b, s_b)$  unterstellt, so dass

$$\begin{aligned} \ln \widehat{\Pi}_{i+j} &= \left( \ln \widehat{\Pi}_{i+j}, \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}} \right) = (a, s_a, s_a) \oplus (b, s_b, s_b)(i + j) \oplus \epsilon_{i+j} \\ &= (a + b(i + j) + \epsilon_{i+j}, s_a + s_b(i + j), s_a + s_b(i + j)) \end{aligned}$$

resultiert. Zur Schätzung der unbekanntes Parameter  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  ziehen APAYDIN & BASER im Gegensatz zu DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) nicht das Verfahren von ISHIBUCHI & NII heran, sondern verwenden das hybride unscharfe KQ-Regressionsverfahren von CHANG (siehe Abschnitt 3.6.3), das es erlaubt, sowohl Unsicherheit in Form von Zufall als auch Unsicherheit in Form von Unschärfe zu berücksichtigen. Gemäß dieses Verfahrens sind im Fall symmetrischer Regressionskoeffizienten zwei simultane lineare Gleichungssysteme mit jeweils 2 Gleichungen und 2 Unbekanntes zu lösen, um Schätzer für die Parameter zu erhalten. Durch Lösen von

$$\begin{aligned} (I + 1)a + b \sum_{i+j=0}^I (i + j) &= \sum_{i+j=0}^I \ln \widehat{\Pi}_{i+j} \\ a \sum_{i+j=0}^I (i + j) + b \sum_{i+j=0}^I (i + j)^2 &= \sum_{i+j=0}^I (i + j) \ln \widehat{\Pi}_{i+j} \end{aligned}$$

können Schätzer für die Modalwerte der unscharfen Koeffizienten ermittelt werden und mit

$$(I+1)s_a + s_b \sum_{i+j=0}^I (i+j) = \sum_{i+j=0}^I \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}$$

$$s_a \sum_{i+j=0}^I (i+j) + s_b \sum_{i+j=0}^I (i+j)^2 = \sum_{i+j=0}^I (i+j) \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}$$

erhält man Schätzer für die Spannweiten (vgl. Apaydin & Baser (2010), S. 118). Mit den ermittelten Schätzern  $\widehat{a} = (\widehat{a}, \widehat{s}_{\widehat{a}}, \widehat{s}_{\widehat{a}})$  und  $\widehat{b} = (\widehat{b}, \widehat{s}_{\widehat{b}}, \widehat{s}_{\widehat{b}})$  erhält man für die logarithmierten Faktoren exogener Einflüsse für  $i+j = I+1, \dots, 2I$  die symmetrischen dreieckförmigen unscharfen Zahlen

$$\ln \widehat{\Pi}_{i+j} = \left( \ln \widehat{\Pi}_{i+j}, \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}} \right) = \left( \widehat{a} + \widehat{b}(i+j), \widehat{s}_{\widehat{a}} + \widehat{s}_{\widehat{b}}(i+j), \widehat{s}_{\widehat{a}} + \widehat{s}_{\widehat{b}}(i+j) \right),$$

mit deren Hilfe anschließend Prädiktoren für die logarithmierten durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden

$$\begin{aligned} \ln \widehat{S}_{i,j} &= \left( \ln \widehat{S}_{i,j}, \widehat{s}_{\ln \widehat{S}_{i,j}}, \widehat{s}_{\ln \widehat{S}_{i,j}} \right) = \ln \widehat{P}_j \oplus \ln \widehat{\Pi}_{i+j} \\ &= \left( \ln \widehat{P}_j + \ln \widehat{\Pi}_{i+j}, \widehat{s}_{\ln \widehat{P}_j} + \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}}, \widehat{s}_{\ln \widehat{P}_j} + \widehat{s}_{\ln \widehat{\Pi}_{i+j}} \right) \end{aligned} \quad (88)$$

sowie Prädiktoren für die durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden für  $i+j > I$  bestimmt werden können:

$$\widehat{S}_{i,j} = \exp \left( \ln \widehat{S}_{i,j} \right)$$

Im Gegensatz zu DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007) schlagen APAYDIN & BASER vor, schon an dieser Stelle eine Defuzzifikationsmethode anzuwenden. Es werden also bereits die Prädiktoren  $\widehat{S}_{i,j}$  in scharfe Zahlen transformiert und diese scharfen Zahlen werden zur weiteren Berechnung genutzt, so dass am Ende für die Schadenreserven ebenfalls scharfe Zahlen resultieren. Zur Defuzzifikation ziehen APAYDIN & BASER *gewichtete Funktionen unscharfer Zahlen* heran, welche an dem von CHANG vorgeschlagenen Konzept gewichteter unscharfer Arithmetik (siehe Abschnitt 3.4) orientiert sind. Neben einer allgemeinen Definition zeigen APAYDIN & BASER in ihrer Arbeit auch konkret, wie man in dem Spezialfall, dass eine Exponentialfunktion einer symmetrischen dreieckförmigen unscharfen Zahl betrachtet wird, gemäß ihrem Konzept eine scharfe Zahl erhält. Für die prognostizierten zukünftigen durchschnittlichen Schadenzahlungen resultieren gemäß

diesem Ergebnis die folgenden scharfen Zahlen (vgl. Apaydin & Baser (2010), S. 116ff.):

$$\widehat{S}_{i,j} = \exp\left(\ln \widehat{S}_{i,j}\right) \left( \frac{\exp\left(\widehat{s}_{\ln \widehat{S}_{i,j}}\right) + \exp\left(-\widehat{s}_{\ln \widehat{S}_{i,j}}\right) - 2}{\widehat{s}_{\ln \widehat{S}_{i,j}}^2} \right)$$

Wird  $\widehat{S}_{i,j}$  dann mit der Schadenanzahl des  $i$ -ten Anfalljahres multipliziert, ergibt sich der Prädiktor

$$\widehat{X}_{i,j} = \widehat{S}_{i,j} N_i$$

für die inkrementelle Schadenzahlung des Anfalljahres  $i$  und Abwicklungsjahres  $j$  mit  $i + j > I$  und durch Addition der prognostizierten inkrementellen Schadenzahlungen des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  erhält man die Schadenreserve des entsprechenden Anfalljahres:

$$\widehat{R}_i = \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{X}_{i,j}$$

Um den Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung bzw. die Gesamtreserve zu erhalten, sind zuletzt noch die Schadenreserven über die Anfalljahre hinweg zu aggregieren:

$$\widehat{R} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{X}_{i,j}$$

Im Jahr 2019 haben YAN, LIU, Q., LIU, J., LIU, W., LI & QI in dem Artikel „*Payments Per Claim Model of Outstanding Claims Reserve Based on Fuzzy Linear Regression*“ ein unscharfes Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven vorgeschlagen, bei dem die gleiche Zerlegung der durchschnittlichen Schadenzahlungen wie bei APAYDIN & BASER (siehe (84)) unterstellt und entsprechend auch das gleiche lineare Regressionsmodell wie in (85) betrachtet wird. Genauso wie APAYDIN & BASER fuzzifizieren YAN, LIU, Q., LIU, J., LIU, W., LI & QI die Schätzer für die Regressionskoeffizienten mit Hilfe von Konfidenzintervallen, so dass sich die gleichen symmetrischen dreieckförmigen unscharfen Zahlen wie in (86) und (87) ergeben. Darüber hinaus werden auch die logarithmierten Faktoren exogener Einflüsse für die zukünftigen Perioden genauso wie bei APAYDIN & BASER bestimmt und die anschließend ermittelten Prädiktoren für die zukünftigen durchschnittlichen Zahlungen pro Schaden werden ebenfalls unter Verwendung des Konzepts gewichteter Funktionen unscharfer Zahlen defuzzifiziert. Mit den resultierenden scharfen Zahlen werden dann genauso Prädiktoren für die zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen und schließlich die Schadenreserven bestimmt. Es handelt sich bei dem von

YAN, LIU, Q., LIU, J., LIU, W., LI & QI vorgeschlagenen unscharfen Verfahren also auch um eine unscharfe Version der geometrischen Separationsmethode von TAYLOR, die keine neue Herangehensweise und keine neuen Erkenntnisse liefert, weshalb dieses Verfahren hier nicht weiter behandelt wird.

#### 4.1.5 Der Ansatz von BASER & APAYDIN (2010)

BASER & APAYDIN haben 2010 noch einen weiteren Artikel veröffentlicht, in dem ein Schadenreservierungsverfahren mit einem unscharfen Verfahren kombiniert wird. Als Schadenreservierungsverfahren wird in diesem Artikel das LCL-Verfahren von BENJAMIN & EAGLES (siehe Abschnitt 2.3.3) genutzt, das bereits 2003 von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ in der ersten Anwendung unscharfer Methoden in der Schadenreservierung (siehe Abschnitt 4.1.1) herangezogen wurde. Wie auch DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ ersetzen BASER & APAYDIN in ihrem Ansatz die im LCL-Verfahren verwendete KQ-Methode durch ein unscharfes Regressionsverfahren. Im Gegensatz zu DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ verwenden sie jedoch nicht das Verfahren von TANAKA (1987), sondern das unscharfe Regressionsverfahren von CHANG (siehe Abschnitt 3.6.3).

Grundlage des Verfahrens von BASER & APAYDIN ist die Annahme, dass sich die Entwicklung der kumulierten Schadenzahlungen des Anfalljahres  $i$  von Abwicklungsjahr  $j$  zu Abwicklungsjahr  $j + 1$  mit  $j = 0, \dots, J - 1$  durch die Gleichung

$$\tilde{C}_{i,j+1} = \tilde{a}_j \oplus \tilde{b}_j C_{i,j} \oplus \epsilon_{i,j} \quad (89)$$

beschreiben lässt. Es wird also angenommen, dass der Zusammenhang zwischen den kumulierten Schadenzahlungen des Abwicklungsjahres  $j$  und den kumulierten Schadenzahlungen des folgenden Abwicklungsjahres  $j + 1$  sowohl – wie im gewöhnlichen LCL-Verfahren (siehe (16)) – durch zufällige Fehler  $\epsilon_{i,j}$  mit Erwartungswert 0 additiv überlagert wird als auch – wie bei dem Verfahren von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ (siehe (69)) – unscharf ist. Somit wird sowohl Unsicherheit in Form von Zufall als auch Unsicherheit in Form von Unschärfe berücksichtigt.

Die Koeffizienten  $\tilde{a}_j$  und  $\tilde{b}_j$  werden dabei als symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{a}_j = (a_j, s_{a_j}, s_{a_j})$  bzw.  $\tilde{b}_j = (b_j, s_{b_j}, s_{b_j})$  unterstellt, so dass für (89)

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{i,j+1} &= (C_{i,j+1}, s_{C_{i,j+1}}, s_{C_{i,j+1}}) = (a_j, s_{a_j}, s_{a_j}) \oplus (b_j, s_{b_j}, s_{b_j}) C_{i,j} \oplus \epsilon_{i,j} \\ &= (a_j + b_j C_{i,j} + \epsilon_{i,j}, s_{a_j} + s_{b_j} C_{i,j}, s_{a_j} + s_{b_j} C_{i,j})\end{aligned}$$

resultiert (vgl. Baser & Apaydin (2010), S. 166). Um Schätzer für die unbekanntenscharfen Zahlen  $\tilde{a}_j$  und  $\tilde{b}_j$  zu ermitteln, ziehen BASER & APAYDIN das hybride unscharfe KQ-Regressionsverfahren von CHANG heran. Gemäß diesem Verfahren sind zwei simultane lineare Gleichungssysteme mit jeweils 2 Gleichungen und 2 Unbekannten zu lösen, um Schätzer für die Modalwerte sowie die identischen linken und rechten Spannweiten der Koeffizienten zu erhalten. Da für die abhängige Variable jedoch nur Beobachtungen in Form von scharfen Zahlen, also unscharfe Zahlen mit einer linken und rechten Spannweite von 0, vorliegen, resultieren dabei auch für alle Koeffizienten geschätzte Spannweiten von 0. Aus diesem Grund schlagen BASER & APAYDIN vor, die Beobachtungen der abhängigen Variable nach der ersten Anpassung des hybriden unscharfen Regressionsmodells zu *fuzzifizieren*. Die Fuzzifizierung erfolgt, wie auch in dem in Abschnitt 4.1.4 vorgestellten Ansatz von APAYDIN & BASER, indem mit Hilfe von Konfidenzintervallen symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\hat{C}_{i,j+1} = (\hat{C}_{i,j+1}, \hat{s}_{\hat{C}_{i,j+1}}, \hat{s}_{\hat{C}_{i,j+1}})$  konstruiert werden (vgl. Baser & Apaydin (2010), S. 166). Mit diesen unscharfen Zahlen wird dann das Regressionsmodell erneut angepasst. Die beiden Gleichungssysteme, die für jedes Abwicklungsjahr  $j = 0, \dots, J - 1$  zu lösen sind, um Schätzer für die Regressionskoeffizienten zu erhalten, lauten wie folgt. Mit

$$\begin{aligned}(I - j)a_j + b_j \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} &= \sum_{i=0}^{I-j-1} \hat{C}_{i,j+1} \\ a_j \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} + b_j \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}^2 &= \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \hat{C}_{i,j+1}\end{aligned}$$

können Schätzer für die Modalwerte der unscharfen Koeffizienten bestimmt werden und durch Lösen von

$$\begin{aligned}(I - j)s_{a_j} + s_{b_j} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} &= \sum_{i=0}^{I-j-1} \hat{s}_{\hat{C}_{i,j+1}} \\ s_{a_j} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} + s_{b_j} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}^2 &= \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \hat{s}_{\hat{C}_{i,j+1}}\end{aligned}$$

erhält man Schätzer für die Spannweiten (vgl. Baser & Apaydin (2010), S. 166). Mit den ermittelten Schätzern  $\widehat{a}_j = (\widehat{a}_j, \widehat{s}_{\widehat{a}_j}, \widehat{s}_{\widehat{a}_j})$  und  $\widehat{b}_j = (\widehat{b}_j, \widehat{s}_{\widehat{b}_j}, \widehat{s}_{\widehat{b}_j})$  können dann im nächsten Schritt Prädiktoren für die Endschadenstände der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  bestimmt werden. Analog zu (17) im gewöhnlichen LCL-Verfahren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{i,J} = \widehat{a}_{J-1} \oplus \widehat{b}_{J-1} \otimes \left( \dots \widehat{a}_{I-i+2} \oplus \widehat{b}_{I-i+2} \right. \\ \left. \otimes \left( \widehat{a}_{I-i+1} \oplus \widehat{b}_{I-i+1} \otimes \left( \widehat{a}_{I-i} \oplus \widehat{b}_{I-i} C_{i,I-i} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Bei dem resultierenden Prädiktor  $\widehat{C}_{i,J}$  handelt es sich im Allgemeinen allerdings um keine dreieckförmige unscharfe Zahl mehr, weshalb BASER & APAYDIN vorschlagen, nicht  $\widehat{C}_{i,J}$  für die Berechnung der Schadenreserve zu nutzen, sondern  $\widehat{C}_{i,J}$  durch eine symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{C}'_{i,J} = (\widehat{C}'_{i,J}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}) \approx \widehat{C}_{i,J}$  zu approximieren und diese zu verwenden (vgl. Baser & Apaydin (2010), S. 166). Zieht man von  $\widehat{C}'_{i,J}$  den letzten beobachtbaren Schadenstand ab, ergibt sich die folgende dreieckförmige unscharfe Zahl für die Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

$$\begin{aligned} \widehat{R}_i = (\widehat{R}_i, \widehat{s}_{\widehat{R}_i}, \widehat{s}_{\widehat{R}_i}) &= \widehat{C}'_{i,J} \ominus C_{i,I-i} = (\widehat{C}'_{i,J}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}) \ominus C_{i,I-i} \\ &= (\widehat{C}'_{i,J} - C_{i,I-i}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}, \widehat{s}_{\widehat{C}'_{i,J}}) \end{aligned}$$

Um die Gesamtreserve zu erhalten, sind anschließend noch die Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre aufzuaddieren:

$$\widehat{R} = (\widehat{R}, \widehat{s}_{\widehat{R}}, \widehat{s}_{\widehat{R}}) = \widehat{R}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{R}_I = \left( \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i, \sum_{i=1}^I \widehat{s}_{\widehat{R}_i}, \sum_{i=1}^I \widehat{s}_{\widehat{R}_i} \right)$$

#### 4.1.6 Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012)

Die Idee, ein unscharfes Regressionsverfahren auf ein Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven anzuwenden, ist von DE ANDRÉS SÁNCHEZ im Jahr 2012 ein weiteres Mal umgesetzt worden. Wie auch in seinen 2006 und 2007 veröffentlichten Ansätzen (siehe Abschnitte 4.1.2 und 4.1.3) zieht DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012) als unscharfes Regressionsverfahren das Verfahren von ISHIBUCHI & NII (siehe Abschnitt 3.6.2) heran. Bei dem Schadenreservierungsverfahren, das in diesem Ansatz modifiziert wird, handelt es sich um das Verfahren von KREMER (siehe Abschnitt 2.3.6).

DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012) nimmt, ähnlich wie KREMER, an, dass sich die inkrementellen Schadenzahlungen in der Form

$$\tilde{X}_{i,j} = \tilde{\mu}_i \otimes \tilde{p}_j$$

darstellen lassen, wobei  $\tilde{\mu}_i$  der erwartete Endschadenstand des Anfalljahres  $i$  ist und  $\tilde{p}_j$  den Anteil der erwarteten Schadenzahlungen, der auf das Abwicklungsjahr  $j$  entfällt, angibt. Wie bei dem Verfahren von KREMER wird dieser multiplikative Zusammenhang dann im nächsten Schritt durch Logarithmierung in eine lineare Struktur gebracht. So resultiert das unscharfe lineare Modell

$$\ln \tilde{X}_{i,j} = \tilde{a} \oplus \tilde{b}_i \oplus \tilde{c}_j \quad (90)$$

mit  $i + j \leq I$  und (vgl. De Andrés Sánchez (2012), S. 2437):

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{1}{I+1} (\ln \tilde{\mu}_0 \oplus \dots \oplus \ln \tilde{\mu}_I) \oplus \frac{1}{J+1} (\ln \tilde{p}_0 \oplus \dots \oplus \ln \tilde{p}_J), \\ \tilde{b}_i &= \ln \tilde{\mu}_i \ominus \frac{1}{I+1} (\ln \tilde{\mu}_0 \oplus \dots \oplus \ln \tilde{\mu}_I), \quad \tilde{c}_j = \ln \tilde{p}_j \ominus \frac{1}{J+1} (\ln \tilde{p}_0 \oplus \dots \oplus \ln \tilde{p}_J) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ , und  $\tilde{c}_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , in (90) werden als asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{a} = (a, l_a, r_a)$ ,  $\tilde{b}_i = (b_i, l_{b_i}, r_{b_i})$  und  $\tilde{c}_j = (c_j, l_{c_j}, r_{c_j})$  unterstellt, so dass sich auch für  $\ln \tilde{X}_{i,j}$  eine asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl ergibt:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{X}_{i,j} &= (\ln X_{i,j}, l_{\ln X_{i,j}}, r_{\ln X_{i,j}}) = (a, l_a, r_a) \oplus (b_i, l_{b_i}, r_{b_i}) \oplus (c_j, l_{c_j}, r_{c_j}) \\ &= (a + b_i + c_j, l_a + l_{b_i} + l_{c_j}, r_a + r_{b_i} + r_{c_j}) \end{aligned} \quad (91)$$

Im Gegensatz zum scharfen Verfahren wird bei diesem Ansatz die Ungenauigkeit in der Beziehung zwischen der abhängigen und den unabhängigen Variablen also nicht durch zufällige Fehler, welche die Beziehung additiv überlagern (siehe Gleichung (24)), sondern durch die Unschärfe der Parameter erfasst. Um das Modell anzupassen, werden zunächst entsprechend des Verfahrens von KREMER Schätzer für die Modalwerte von  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}_i$  und  $\tilde{c}_j$  bestimmt. Die resultierenden Schätzer werden mit  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}_i$  und  $\hat{c}_j$  bezeichnet. Anschließend ist gemäß des Verfahrens von ISHIBUCHI & NII das folgende LP-Problem mit vorgegebenem  $\alpha \in [0, 1]$  zu lösen, um Schätzer für die linken und rechten Spannweiten der

unscharfen Koeffizienten zu erhalten

$$\min_{l_a, l_{b_i}, l_{c_j}, r_a, r_{b_i}, r_{c_j}} z = \frac{(J+1)(J+2)}{2}(l_a + r_a) + \sum_{i=1}^I (J+1-i)(l_{b_i} + r_{b_i}) + \sum_{j=1}^J (I+1-j)(l_{c_j} + r_{c_j})$$

unter Bedingung von (vgl. De Andrés Sánchez (2012), S. 2438):

$$\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j - (1-\alpha)(l_a + l_{b_i} + l_{c_j}) \leq \ln X_{i,j}, \quad i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, I-i \quad (92)$$

$$\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + (1-\alpha)(r_a + r_{b_i} + r_{c_j}) \geq \ln X_{i,j}, \quad i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, I-i \quad (93)$$

$$\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j - (l_a + l_{b_i} + l_{c_j}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, I-i \quad (94)$$

$$l_a, l_{b_i}, l_{c_j}, r_a, r_{b_i}, r_{c_j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J \quad (95)$$

Die Zielfunktion des LP-Problems sorgt, wie (63), für die Minimierung der Summe der Spannweiten von  $\ln \widehat{X}_{i,j}$  und die Nebenbedingungen (92), (93) und (95) entsprechen den Nebenbedingungen (64), (65) und (66). Durch die Ungleichungen in (94) wird dagegen sichergestellt, dass  $\ln \widehat{X}_{i,j}$  nicht negativ ist.

Mit Hilfe der ermittelten Schätzer  $\widehat{a}$ ,  $\widehat{b}_i$  und  $\widehat{c}_j$  können im Anschluss die zukünftigen unbekanntenen Schadenzahlungen prognostiziert werden. Gemäß (91) sind die Prädiktoren für die logarithmierten inkrementellen Schadenzahlungen durch die dreieckförmigen unscharfen Zahlen

$$\ln \widehat{X}_{i,j} = (\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j, \widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j}, \widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j})$$

mit  $i + j > I$  gegeben. Die zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen können somit durch

$$\widehat{X}_{i,j} = e^{\ln \widehat{X}_{i,j}} = e^{(\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j, \widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j}, \widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j})} \quad (96)$$

prognostiziert werden. Im nächsten Schritt werden die unscharfen Prädiktoren  $\widehat{X}_{i,j}$  dann unter Verwendung des Erwartungswertes (siehe (56)) in scharfe Zahlen transformiert. Dafür ist zunächst der  $\alpha$ -Schnitt  $\left(\widehat{X}_{i,j}\right)_\alpha$  von  $\widehat{X}_{i,j}$  zu bestimmen. Da es sich bei  $\ln \widehat{X}_{i,j}$  um eine dreieckförmige unscharfe Zahl handelt, resultiert (vgl. De Andrés Sánchez (2012), S. 2438):

$$\begin{aligned} \left(\widehat{X}_{i,j}\right)_\alpha &= \left[ \left(\widehat{X}_{i,j}\right)_\alpha, \left(\widehat{X}_{i,j}\right)_{\bar{\alpha}} \right] \\ &= \left[ e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j - (1-\alpha)(\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j})}, e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + (1-\alpha)(\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j})} \right] \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von  $\widehat{X}_{i,j}$  ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\beta[\widehat{X}_{i,j}] &= (1 - \beta) \int_0^1 e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j - (1-\alpha)(\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j})} d\alpha + \beta \int_0^1 e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + (1-\alpha)(\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j})} d\alpha \\
&= (1 - \beta) e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j - (\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j})} \int_0^1 e^{\alpha(\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j})} d\alpha \\
&\quad + \beta e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + (\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j})} \int_0^1 e^{-\alpha(\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j})} d\alpha \\
&= (1 - \beta) \frac{e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j - (\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j})}}{\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j}} \left( e^{\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j}} - 1 \right) \\
&\quad + \beta \frac{e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + (\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j})}}{\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j}} \left( 1 - e^{-(\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j})} \right)
\end{aligned}$$

mit  $\beta \in [0, 1]$ . Mit diesen defuzzifizierten Prädiktoren können dann die Erwartungswerte von  $\widehat{R}_i$  und  $\widehat{R}$ , d.h. scharfe Schadenreserven, bestimmt werden. Aufgrund der Eigenschaft, dass es sich bei dem Erwartungswert einer unscharfen Zahl um ein additives Maß handelt, erhält man den Erwartungswert der unscharfen Reserve

$$\widehat{R}_i = \widehat{X}_{i,I-i+1} \oplus \dots \oplus \widehat{X}_{i,J}$$

des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ , indem die bereits ermittelten Erwartungswerte  $\mathbb{E}_\beta[\widehat{X}_{i,j}]$  des entsprechenden Anfalljahres aufaddiert werden (vgl. De Andrés Sánchez (2012), S. 2438f.):

$$\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i] = \sum_{j=I-i+1}^J \mathbb{E}_\beta[\widehat{X}_{i,j}]$$

Für die scharfe Gesamtreserve ergibt sich:

$$\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}] = \mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{R}_I] = \sum_{i=1}^I \mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i]$$

#### 4.1.7 Der Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014)

Der in Abschnitt 4.1.6 vorgestellte Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012), bei dem das Schadenreservierungsverfahren von KREMER modifiziert wird, ist von DE ANDRÉS SÁNCHEZ in einem 2014 veröffentlichten Artikel erneut aufgegriffen und erweitert worden. In diesem Artikel betrachtet DE ANDRÉS SÁNCHEZ das gleiche unscharfe Regressionsmodell wie DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012), verwendet ebenfalls das unscharfe Regressionsverfahren von ISHIBUCHI & NII zur Schätzung der unbekanntenscharfen

Koeffizienten  $\tilde{a}, \tilde{b}_i, i = 1, \dots, I$ , und  $\tilde{c}_j, j = 1, \dots, J$ , und kommt somit auf die gleichen Prädiktoren für die zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen (siehe (96)). Aus diesem Grund werden diese Schritte hier nicht erneut angegeben. Von da an weicht DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) jedoch von dem Vorgehen von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012) ab und führt an, dass der Versicherer bis zur Leistung der Schadenzahlungen mit den Rückstellungen Erträge aus Kapitalanlagen erwirtschaften kann und die Rückstellungen daher entsprechend dieser Kapitalerträge verringert werden können (vgl. De Andrés Sánchez (2014), S. 830). Dies ist in den zuvor erschienenen Ansätzen nicht berücksichtigt worden, DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) ist also der erste im Bereich der unscharfen Schadenreservierung, der vorschlägt, die Schadenreserve zu *diskontieren*. Den Zinssatz, der zur Berechnung des Barwerts der zukünftigen Schadenzahlungen genutzt wird, unterstellt DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) als über den betrachteten Zeitraum konstante, dreieckförmige unscharfe Zahl  $\tilde{p} = (p, l_p, r_p)$  und nimmt zudem, unter Verweis auf das *Institute of Actuaries*, an, dass die Schadenzahlungen jeweils zur Jahreshälfte erfolgen, so dass

$$\widehat{X}_{i,j}^{Dis.} = \widehat{X}_{i,j} \otimes e^{\tilde{p}(J+\frac{1}{2}-(i+j))}$$

als Prädiktor für die diskontierten zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen resultiert, wobei  $\widehat{X}_{i,j}$  der in (96) angegebene Prädiktor ist (vgl. De Andrés Sánchez (2014), S. 830f.). Im Anschluss werden diese unscharfen Prädiktoren in scharfe Zahlen transformiert. Hierbei erweitert DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) den Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012) in einer weiteren Hinsicht und nutzt nicht den Erwartungswert zur Defuzzifikation, sondern das allgemeinere Konzept des *Wertes* einer unscharfen Zahl, bei dem die linke sowie die rechte Grenze des  $\alpha$ -Schnitts zusätzlich mit einer *Gewichtungsfunktion*  $w(\alpha)$  multipliziert werden, so dass je nach subjektiver Einschätzung eine unterschiedliche Gewichtung in Abhängigkeit vom Zugehörigkeitsgrad  $\alpha \in [0, 1]$  erfolgen kann. Ursprünglich wurde dieses Konzept von DELGADO ET AL. (1998) eingeführt, von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) ist es allerdings noch dahingehend modifiziert worden, dass die beiden Summanden zusätzlich mit  $(1 - \beta)$  bzw.  $\beta$  gewichtet werden und der Wert einer unscharfen Zahl somit den Erwartungswert einer unscharfen Zahl (siehe (56)) verallgemeinert.

Um den Wert der unscharfen Prädiktoren  $\widehat{X}_{i,j}^{Dis.}$  ermitteln zu können, sind zunächst deren

$\alpha$ -Schnitte zu bestimmen. Für diese erhält man (vgl. De Andrés Sánchez (2014), S. 831):

$$\begin{aligned} \left( \widehat{X}_{i,j}^{Dis.} \right)_{\alpha} &= \left[ \left( \widehat{X}_{i,j}^{Dis.} \right)_{\underline{\alpha}}, \left( \widehat{X}_{i,j}^{Dis.} \right)_{\overline{\alpha}} \right] \\ &= \left[ e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + p(J + \frac{1}{2} - (i+j)) - (1-\alpha)(\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j} - r_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))}, \right. \\ &\quad \left. e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + p(J + \frac{1}{2} - (i+j)) + (1-\alpha)(\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j} - l_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))} \right] \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Wert  $W_{\beta}[\widehat{X}_{i,j}^{Dis.}]$  der diskontierten inkrementellen Schadenzahlungen

$$\begin{aligned} W_{\beta}[\widehat{X}_{i,j}^{Dis.}] &= (1 - \beta) \int_0^1 w(\alpha) \left( \widehat{X}_{i,j}^{Dis.} \right)_{\underline{\alpha}} d\alpha + \beta \int_0^1 w(\alpha) \left( \widehat{X}_{i,j}^{Dis.} \right)_{\overline{\alpha}} d\alpha \\ &= (1 - \beta) \int_0^1 w(\alpha) e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + p(J + \frac{1}{2} - (i+j)) - (1-\alpha)(\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j} - r_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))} d\alpha \\ &\quad + \beta \int_0^1 w(\alpha) e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + p(J + \frac{1}{2} - (i+j)) + (1-\alpha)(\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j} - l_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))} d\alpha \end{aligned}$$

mit  $\beta \in [0, 1]$  und  $i + j > I$  (vgl. De Andrés Sánchez (2014), S. 831). Wird für die Gewichtungsfunktion  $w(\alpha) = 1$  gewählt, resultiert der Erwartungswert von  $\widehat{X}_{i,j}^{Dis.}$ . DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) schlägt jedoch, angelehnt an DELGADO ET AL. (1998), vor,  $w(\alpha) = 2\alpha$  zu wählen. In diesem Fall erhält man mittels partieller Integration (vgl. De Andrés Sánchez (2014), S. 831):

$$\begin{aligned} W_{\beta}[\widehat{X}_{i,j}^{Dis.}] &= 2 \left( \frac{(\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j} - r_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)) - 1) e^{\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j} - r_p(J + \frac{1}{2} - (i+j))} + 1}{(\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j} - r_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))^2} \right. \\ &\quad \times (1 - \beta) e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + p(J + \frac{1}{2} - (i+j)) - (\widehat{l}_a + \widehat{l}_{b_i} + \widehat{l}_{c_j} - r_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))} \\ &\quad \left. + \frac{1 - (\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j} - l_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)) + 1) e^{-(\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j} - l_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))}}{(\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j} - l_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))^2} \right) \\ &\quad \times \beta e^{\widehat{a} + \widehat{b}_i + \widehat{c}_j + p(J + \frac{1}{2} - (i+j)) + (\widehat{r}_a + \widehat{r}_{b_i} + \widehat{r}_{c_j} - l_p(J + \frac{1}{2} - (i+j)))} \end{aligned}$$

Da es sich bei dem Wert einer unscharfen Zahl ebenso wie bei dem Erwartungswert einer unscharfen Zahl um ein additives Maß handelt, erhält man die diskontierte scharfe Reserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ , indem die diskontierten defuzzifizierten zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen des entsprechenden Anfalljahres aufaddiert werden (vgl. De Andrés Sánchez (2014), S. 832):

$$W_{\beta}[\widehat{R}_i^{Dis.}] = \sum_{j=I-i+1}^J W_{\beta}[\widehat{X}_{i,j}^{Dis.}]$$

Die diskontierte scharfe Gesamtreserve ergibt sich entsprechend durch:

$$W_{\beta}[\widehat{R}^{\widehat{Dis.}}] = \sum_{i=1}^I W_{\beta}[\widehat{R}_i^{\widehat{Dis.}}] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J W_{\beta}[\widehat{X}_{i,j}^{\widehat{Dis.}}]$$

#### 4.1.8 Der Ansatz von KIM & KIM (2014)

Im Jahr 2014 haben KIM & KIM ein Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven veröffentlicht, das eine unscharfe Version des in Abschnitt 2.3.7 vorgestellten Schadenreservierungsverfahrens ist. Das scharfe Verfahren wird dabei in zweierlei Hinsicht fuzifiziert: Es wird sowohl eine unscharfe Version der Hoerl-Kurve als auch eine unscharfe Version der ANCOVA vorgeschlagen.

Die unscharfe Hoerl-Kurve, die bei dem Ansatz von KIM & KIM für die logarithmierten inkrementellen Schadenzahlungen unterstellt wird, lautet

$$\widetilde{Y}_{i,j} = \widetilde{c} \oplus \widetilde{\alpha}_i \oplus \widetilde{\beta} \otimes \ln(j+1) \oplus \widetilde{\gamma} \otimes (j+1)$$

mit  $i+j \leq I$  und  $\widetilde{Y}_{i,j} = \ln X_{i,j}$ . KIM & KIM vergleichen dieses Modell mit der im Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) betrachteten unscharfen Version des Modells von SHERMAN (siehe (74)) und führen an, dass die hier betrachtete unscharfe Hoerl-Kurve gegenüber diesem Modell den Vorteil besitzt, dass sie Kalenderjahreffekte berücksichtigt. Zudem argumentieren sie, dass sie flexibler ist, da es hier zwei erklärende Variablen und nicht wie bei DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) nur eine gibt (vgl. Kim & Kim (2014), S. 349f.).

Die unscharfe Version der ANCOVA, die KIM & KIM vorgeschlagen haben, basiert auf dem unscharfen Regressionsverfahren von ISHIBUCHI & NII (siehe Abschnitt 3.6.2) und die Schätzung der unscharfen Parameter läuft, angewendet auf die unscharfe Hoerl-Kurve, in den folgenden Schritten ab. Als erstes werden die Modalwerte von  $\widetilde{c}$ ,  $\widetilde{\alpha}_0, \dots, \widetilde{\alpha}_I$ ,  $\widetilde{\beta}$  und  $\widetilde{\gamma}$  mit der KQ-Methode geschätzt. Die resultierenden Schätzer werden mit  $\widehat{c}$ ,  $\widehat{\alpha}_0, \dots, \widehat{\alpha}_I$ ,  $\widehat{\beta}$  und  $\widehat{\gamma}$  bezeichnet und es wird  $\widetilde{c} = \widehat{c}$  sowie  $\widetilde{\alpha}_i = \widehat{\alpha}_i$  für  $i = 0, \dots, I$  gesetzt. Der Intercept  $\widetilde{c} \oplus \widetilde{\alpha}_i$  wird also für alle  $i = 0, \dots, I$  als scharfe Zahl unterstellt. Die Parameter  $\widetilde{\beta}$  und  $\widetilde{\gamma}$  werden dagegen als dreieckförmige unscharfe Zahlen unterstellt, so dass noch Schätzer für ihre linken und rechten Spannweiten zu bestimmen sind. Hierfür wird zunächst  $Y_j^* = Y_{i,j} - \widehat{c} - \widehat{\alpha}_i$  und

$$\widetilde{Y}_j^* = \widetilde{\beta} \otimes \ln(j+1) \oplus \widetilde{\gamma} \otimes (j+1) \quad (97)$$

gesetzt (vgl. Kim & Kim (2014), S. 353). Entsprechend des unscharfen Regressionsverfahrens von ISHIBUCHI & NII wird dann zu der Regressionsgleichung (97) ein LP-Problem (siehe (63)-(66)) aufgestellt, durch dessen Lösung Schätzer für die Spannweiten ermittelt werden. Für die rechte Seite der (64) entsprechenden Nebenbedingung dieses LP-Problems wird dabei

$$\bar{Y}_j = \max_{\forall i} \{\ln X_{i,j} - \hat{c} - \hat{\alpha}_i\}$$

gewählt und für die rechte Seite der (65) entsprechenden Nebenbedingung

$$\underline{Y}_j = \min_{\forall i} \{\ln X_{i,j} - \hat{c} - \hat{\alpha}_i\}$$

mit  $i = 0, \dots, I$  (vgl. Kim & Kim (2014), S. 353). Die durch Lösen des LP-Problems ermittelten Schätzer für die Spannweiten werden im Folgenden mit  $\hat{l}_{\hat{\beta}}, \hat{r}_{\hat{\beta}}, \hat{l}_{\hat{\gamma}}, \hat{r}_{\hat{\gamma}}$  bezeichnet. Mit ihnen liegen alle erforderlichen Schätzer für die Parameter vor, so dass im nächsten Schritt Schätzer für die unscharfen Prognoseraten bestimmt werden können. Analog zu (28) im scharfen Verfahren wird die unscharfe Prognoserate durch

$$\begin{aligned} \hat{q}_{j,s} = & \left( \exp \left( \hat{\beta} \otimes \ln 1 + \hat{\gamma} \otimes 1 \right) \oplus \dots \oplus \exp \left( \hat{\beta} \otimes \ln(s+1) + \hat{\gamma} \otimes (s+1) \right) \right) \\ & \otimes \left( \exp \left( \hat{\beta} \otimes \ln 1 + \hat{\gamma} \otimes 1 \right) \oplus \dots \oplus \exp \left( \hat{\beta} \otimes \ln(j+1) + \hat{\gamma} \otimes (j+1) \right) \right) \end{aligned}$$

mit  $j = 0, \dots, J-1$ ,  $s = 1, \dots, J$  und  $j < s$  geschätzt. Da (28) keine lineare Funktion in  $\hat{\beta}$  und  $\hat{\gamma}$  ist, ist die für  $\hat{q}_{j,s}$  resultierende unscharfe Zahl im Allgemeinen nicht mehr dreieckförmig. Wie bei DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) wird  $\hat{q}_{j,s}$  daher unter Verwendung einer Taylorentwicklung erster Ordnung durch eine dreieckförmige unscharfe Zahl approximiert. Mit der Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto g(x, y) = \frac{\sum_{k=0}^s \exp(x \ln(k+1) + y(k+1))}{\sum_{k=0}^j \exp(x \ln(k+1) + y(k+1))}$  resultiert für  $\hat{q}_{j,s}$  so die Approximation  $\hat{q}'_{j,s} = (\hat{q}'_{j,s}, \hat{l}'_{q'_{j,s}}, \hat{r}'_{q'_{j,s}}) \approx \hat{q}_{j,s}$  mit (vgl. Kim & Kim (2014), S. 355):

$$\begin{aligned} \hat{q}'_{j,s} &= g(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) \\ \hat{l}'_{q'_{j,s}} &= \frac{\partial g(\hat{\beta}, \hat{\gamma})}{\partial \hat{\beta}} \hat{l}_{\hat{\beta}} + \frac{\partial g(\hat{\beta}, \hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma}} \hat{l}_{\hat{\gamma}} \\ \hat{r}'_{q'_{j,s}} &= \frac{\partial g(\hat{\beta}, \hat{\gamma})}{\partial \hat{\beta}} \hat{r}_{\hat{\beta}} + \frac{\partial g(\hat{\beta}, \hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma}} \hat{r}_{\hat{\gamma}} \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen sind dabei durch

$$\frac{\partial g(\hat{\beta}, \hat{\gamma})}{\partial \hat{\beta}} = \frac{1}{\left( \sum_{k=0}^j \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right)^2} \left( \left( \sum_{k=0}^s \ln(k+1) \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right) \right. \\ \left. + \hat{\gamma}(k+1) \right) \left( \sum_{k=0}^j \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right) - \left( \sum_{k=0}^s \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right) \\ \left. + \hat{\gamma}(k+1) \right) \left( \sum_{k=0}^j \ln(k+1) \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right) \right)$$

und

$$\frac{\partial g(\hat{\beta}, \hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma}} = \frac{1}{\left( \sum_{k=0}^j \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right)^2} \left( \left( \sum_{k=0}^s (k+1) \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right) \right. \\ \left. + \hat{\gamma}(k+1) \right) \left( \sum_{k=0}^j \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right) - \left( \sum_{k=0}^s \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right) \\ \left. + \hat{\gamma}(k+1) \right) \left( \sum_{k=0}^j (k+1) \exp(\hat{\beta} \ln(k+1) + \hat{\gamma}(k+1)) \right) \right)$$

gegeben (vgl. Kim & Kim (2014), S. 353f.). Die dreieckförmigen geschätzten Prognose-raten werden dann zur Prognose der zukünftigen Schadenzahlungen und zur Bestimmung der Schadenreserven genutzt, so dass für diese Prädiktoren ebenfalls dreieckförmige un-scharfe Zahlen resultieren. Analog zum scharfen Verfahren (siehe (29)), werden die zu-künftigen Schadenstände  $\tilde{C}_{i,j}$  mit  $i + j > I$  durch

$$\tilde{C}_{i,j} = (\hat{C}_{i,j}, \hat{l}_{\hat{C}_{i,j}}, \hat{r}_{\hat{C}_{i,j}}) = C_{i,I-i} \otimes \hat{q}'_{I-i,j} = C_{i,I-i} \otimes (\hat{q}'_{I-i,j}, \hat{l}'_{\hat{q}'_{I-i,j}}, \hat{r}'_{\hat{q}'_{I-i,j}}) \\ = (C_{i,I-i} \hat{q}'_{I-i,j}, C_{i,I-i} \hat{l}'_{\hat{q}'_{I-i,j}}, C_{i,I-i} \hat{r}'_{\hat{q}'_{I-i,j}})$$

prognostiziert. Für  $j = J$  resultiert der Prädiktor für den Endschadenstand. Wird von die-sem der jeweilige letzte beobachtbare Schadenstand abgezogen, ergibt sich die un-scharfe Reserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

$$\tilde{R}_i = \tilde{C}_{i,J} \ominus C_{i,I-i} = (\hat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}, \hat{l}_{\hat{C}_{i,J}}, \hat{r}_{\hat{C}_{i,J}})$$

Durch Aggregation der Reserven über die Anfalljahre hinweg erhält man schließlich die un-scharfe Gesamtreserve:

$$\tilde{R} = \tilde{R}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{R}_I = \left( \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}), \sum_{i=1}^I \hat{l}_{\hat{C}_{i,J}}, \sum_{i=1}^I \hat{r}_{\hat{C}_{i,J}} \right)$$

#### 4.1.9 Der Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2014)

Obwohl das CL-Verfahren zu den populärsten Schadenreservierungsverfahren zählt, hat es zunächst recht wenig Aufmerksamkeit im Bereich der unscharfen Schadenreservierung gefunden. In dem in Abschnitt 4.1.1 beschriebenen Ansatz von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ ist das CL-Verfahren als Spezialfall enthalten, danach ist es erst 10 Jahre später wieder von KERKEZ (2013a, 2013b) mit der Theorie unscharfer Mengen in Verbindung gebracht worden (siehe Abschnitt 4.1.1). Im Jahr 2014 haben HEBERLE & THOMAS ein unscharfes CL-Verfahren veröffentlicht, bei dem die CL-Faktoren nicht als scharfe Zahlen, sondern stattdessen als dreieckförmige unscharfe Zahlen unterstellt werden. HEBERLE & THOMAS (2014) begründen dies damit, dass die mit dem CL-Verfahren berechneten Schätzer für die CL-Faktoren in der Praxis des Öfteren von den Aktuaren, basierend auf ihrer subjektiven Einschätzung und persönlichen Erfahrung, abgeändert werden. Bei dem von HEBERLE & THOMAS (2014) vorgeschlagenen unscharfen CL-Verfahren können die CL-Schätzer als dreieckförmige unscharfe Zahlen Unsicherheit erfassen und sind flexibel, auch ohne dass sie im Nachhinein angepasst werden. Die Modellannahmen des unscharfen CL-Modells lauten wie folgt (vgl. Heberle & Thomas (2014), S. 99):

##### Modellannahmen 4.1 (Das unscharfe CL-Modell)

- Es existieren dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{f}_j = (f_j, l_{f_j}, r_{f_j})$  mit  $j = 0, \dots, J-1$ , so dass

$$\tilde{C}_{i,j+1} = \tilde{f}_j \otimes \tilde{C}_{i,j}$$

für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, J-1$  gilt.

- Die inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j+1} = C_{i,j+1} - C_{i,j}$  sind nicht negativ.

Um die zukünftigen, nicht beobachtbaren Schadenzahlungen prognostizieren zu können, sind zunächst Schätzer für die dreieckförmigen unscharfen CL-Faktoren  $\tilde{f}_j = (f_j, l_{f_j}, r_{f_j})$  für  $j = 0, \dots, J-1$  zu bestimmen. Diese Schätzer sind bei dem Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2014) durch  $\hat{\tilde{f}}_j = (\hat{f}_j, \hat{l}_{\hat{f}_j}, \hat{r}_{\hat{f}_j})$  mit

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \quad \text{und} \quad \hat{l}_{\hat{f}_j} = \hat{r}_{\hat{f}_j} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} X_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \quad (98)$$

für  $j = 0, \dots, J - 1$  gegeben. Die unscharfen CL-Schätzer sind also alle symmetrisch, ihre Modalwerte stimmen mit den klassischen CL-Schätzern (siehe (3)) überein und die Träger der unscharfen CL-Schätzer weisen alle eine linke Grenze von 1 auf (vgl. Heberle & Thomas (2014), S. 100):

$$\begin{aligned} \widehat{f}_j - \widehat{l}_{\widehat{f}_j} &= \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} - \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} X_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} (C_{i,j+1} - C_{i,j+1} + C_{i,j})}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (99)$$

Durch die Modellannahme, dass die inkrementellen Schadenzahlungen nicht negativ sind, ist die Nichtnegativität der Spannweiten der CL-Schätzer sichergestellt.

Mit Hilfe der ermittelten Schätzer für die CL-Faktoren können im nächsten Schritt die nicht beobachtbaren Endschadenstände  $\widetilde{C}_{i,J}$  mit  $i = 1, \dots, I$  prognostiziert werden. Analog zum scharfen Verfahren lauten die Prädiktoren:

$$\widetilde{C}_{i,J} = C_{i,I-i} \otimes \widetilde{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widetilde{f}_{J-1} \quad (100)$$

Bei  $C_{i,I-i}$  handelt es sich dabei um eine scharfe Zahl, da die vorliegenden Beobachtungen des Abwicklungsdreiecks als scharfe Zahlen unterstellt werden. Zieht man von dem prognostizierten Endschadenstand den jeweiligen letzten beobachtbaren Schadenstand ab, erhält man den Prädiktor für die noch ausstehende Schadenverpflichtung des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

$$\widetilde{R}_i = \widetilde{C}_{i,J} \ominus C_{i,I-i} = C_{i,I-i} \otimes \left( \widetilde{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widetilde{f}_{J-1} - 1 \right)$$

Der Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \widetilde{R} &= \widetilde{R}_1 \oplus \dots \oplus \widetilde{R}_I \\ &= C_{1,I-1} \otimes \left( \widetilde{f}_{I-1} \otimes \dots \otimes \widetilde{f}_{J-1} - 1 \right) \oplus \dots \oplus C_{I,0} \otimes \left( \widetilde{f}_0 \otimes \dots \otimes \widetilde{f}_{J-1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Um diese Prädiktoren berechnen zu können, muss das Produkt der dreieckförmigen unscharfen CL-Schätzer bestimmt werden, wofür HEBERLE & THOMAS (2014) die Sekantenapproximation (siehe (48)) heranziehen. Für das Produkt der positiven dreieckförmigen unscharfen Zahlen  $\widetilde{f}_{I-i}, \dots, \widetilde{f}_j$  erhält man so<sup>12</sup>

$$\widetilde{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widetilde{f}_j = \left( \widehat{F}_{I-i}^j, \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^j}, \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^j} \right) \quad (101)$$

<sup>12</sup>HEBERLE & THOMAS (2014) erläutern an dieser Stelle, dass zur Vereinfachung der Darstellung ein Gleichheitszeichen verwendet wird, obwohl es sich um eine Approximation handelt.

$$\text{mit } \widehat{F}_{I-i}^j = \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k, \quad \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^j} = \widehat{F}_{I-i}^j - 1, \quad \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^j} = \prod_{k=I-i}^j (2\widehat{f}_k - 1) - \widehat{F}_{I-i}^j \quad (102)$$

für  $i = 1, \dots, I$  und  $j = I - i, \dots, J - 1$  (vgl. Heberle & Thomas (2014), S. 101). Aufgrund der Multiplikation mehrerer unscharfer Zahlen können bei dem betrachteten unscharfen CL-Verfahren schnell sehr große Spannweiten für die Reserven resultieren. Zudem ist zu beachten, dass ein Wert von Null für die Reserve möglich ist. Da die Steigung der Zugehörigkeitsfunktion links von dem Modalwert der Reserve jedoch sehr gering ist, ist der Wert Null zwar möglich, der Zugehörigkeitsgrad ist hier aber klein (vgl. Heberle & Thomas (2014), S. 101).

Im nächsten Schritt wird die Prognoseunsicherheit für einzelne und aggregierte Anfalljahre quantifiziert. Dies erfolgt nicht, wie es bei stochastischen Schadenreservierungsverfahren häufig der Fall ist, mit dem bedingten MSEP, sondern als Unschärfemaß  $U_{DUZ}$  wird das  $K$ -fache,  $K \in \mathbb{R}_+$ , der Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion der prognostizierten dreieckförmigen unscharfen Endschadenstände und der  $x$ -Achse verwendet. Dieses Unschärfemaß gehört zur multiplikativen kontinuierlichen Klasse (vgl. Thomas (2017), S. 42). Zunächst haben HEBERLE & THOMAS (2014) gezeigt, dass unter den Modellannahmen des unscharfen CL-Modells

$$U_{DUZ}(\widetilde{C}_{i,j+1}|\widetilde{C}_{i,j}) = \frac{1}{2} K C_{i,j} (l_{f_j} + r_{f_j})$$

mit  $K \in \mathbb{R}_+$  gilt, wenn  $\widetilde{C}_{i,j}$  und  $\widetilde{f}_j$  für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, J - 1$  positive (unscharfe) Zahlen sind (vgl. Heberle & Thomas (2014), S. 99). Die Notation  $U_{DUZ}(\widetilde{C}_{i,j+1}|\widetilde{C}_{i,j})$  bedeutet dabei, dass  $\widetilde{C}_{i,j} = (C_{i,j}, 0, 0)$  gilt. Es wird also angenommen, dass  $\widetilde{C}_{i,j}$  eine scharfe Zahl ist, und  $U_{DUZ}(\widetilde{C}_{i,j+1}|\widetilde{C}_{i,j})$  kann somit als eine Art bedingtes Unschärfemaß aufgefasst werden. Für die Unsicherheit des prognostizierten Endschadenstandes  $\widehat{\widetilde{C}}_{i,J}$  eines einzelnen Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  erhält man mit (101) und (102) (vgl. Heberle & Thomas (2014), S. 101):

$$U_{DUZ}(\widehat{\widetilde{C}}_{i,J}|\mathcal{D}_I) = \frac{1}{2} K C_{i,I-i} \left( \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} + \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right)$$

Da in den späteren Anfalljahren mehr unscharfe CL-Schätzer zu multiplizieren sind, um den Prädiktor für den Endschadenstand zu erhalten (siehe (100)), resultieren für diese Jahre höhere Werte des Unschärfemaßes. Für die Unsicherheit der Summe

$$\widehat{\widetilde{C}}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{\widetilde{C}}_{I,J} = \left( \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}, \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}, \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right)$$

der prognostizierten Endschadenstände der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  gilt (vgl. Heberle & Thomas (2014), S. 101):

$$U_{DUZ}(\widehat{C}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{C}_{I,J} | \mathcal{D}_I) = \sum_{i=1}^I U_{DUZ}(\widehat{C}_{i,J} | \mathcal{D}_I)$$

Man erhält sie also, indem man die Werte der Unschärfemaße der prognostizierten Endschadenstände der einzelnen Anfalljahre aufaddiert, d.h. es gibt hier keine Interaktionen zwischen der Unschärfe verschiedener Anfalljahre.

Zuletzt haben HEBERLE & THOMAS (2014) noch vorgeschlagen, die Schadenreserven mit Hilfe des Erwartungswertes (siehe (56)) in scharfe Zahlen zu transformieren. Hierfür haben sie gezeigt, dass unter den Modellannahmen des unscharfen CL-Modells für den Erwartungswert der kumulierten Schadenzahlung  $\widetilde{C}_{i,j+1}$

$$\mathbb{E}_\beta[\widetilde{C}_{i,j+1} | \widetilde{C}_{i,j}] = C_{i,j} \left( f_j - \frac{1-\beta}{2} l_{f_j} + \frac{\beta}{2} r_{f_j} \right) \quad (103)$$

mit  $\beta \in [0, 1]$  gilt, wenn  $\widetilde{C}_{i,j}$  und  $\widetilde{f}_j$  für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, J - 1$  positive (unscharfe) Zahlen sind, wobei die Notation wieder bedeutet, dass es sich bei  $\widetilde{C}_{i,j}$  um eine scharfe Zahl handelt (vgl. Heberle & Thomas (2014), S. 99). Die Berechnung der Erwartungswerte der Reserven mit Hilfe von Gleichung (103) haben HEBERLE & THOMAS (2014) anhand eines Beispiels veranschaulicht.

Im Jahr 2018 haben YAN, LIU, Q., DONG & LIU, W. ein unscharfes Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven vorgeschlagen, das stark an dem gerade vorgestellten Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2014) orientiert ist. Der Unterschied im Vergleich zu dem Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2014) ist nur, dass anstelle der kumulierten Schadenzahlungen separat die durchschnittlichen Schadenzahlungen sowie die Schadenzahlen und für diese jeweils Abwicklungsfaktoren betrachtet werden. Die Schätzer für die dreieckförmigen unscharfen Abwicklungsfaktoren stimmen jedoch beinahe mit den von HEBERLE & THOMAS (2014) vorgeschlagenen Schätzern für die CL-Faktoren (siehe (98)) überein. Die Modalwerte und die linken Spannweiten sind genauso gewählt, nur dass entsprechend als Daten die durchschnittlichen Schadenzahlungen bzw. die Schadenzahlen herangezogen werden, und die rechten Spannweiten werden gegenüber denen bei HEBERLE & THOMAS (2014) nur noch mit 0,5 bei den Schadenzahlen und mit 1,5 bei den durchschnittlichen Schadenzahlungen multipliziert. YAN, LIU, Q., DONG & LIU, W. geben dann an, dass die zukünftigen durchschnittlichen Schadenzahlungen und

Schadenzahlen mit Hilfe der geschätzten Abwicklungsfaktoren entsprechend dem CL-Verfahren prognostiziert werden sollen, d.h. indem jeweils der letzte beobachtbare Wert mit den jeweiligen geschätzten Abwicklungsfaktoren multipliziert wird. Danach sollen diese beiden Prädiktoren multipliziert werden, um Prädiktoren für die zukünftigen Schadenzahlungen und schließlich die Schadenreserven zu erhalten. Die Ausführungen hierzu sind allerdings sehr kurz gehalten und entsprechen beinahe genau denen bei HEBERLE & THOMAS (2014). Herleitungen und Erläuterungen zu den nur vereinzelt angegebenen und kaum von HEBERLE & THOMAS (2014) abweichenden Formeln fehlen gänzlich. Aus diesen Gründen wird der Ansatz von YAN, LIU, Q., DONG & LIU, W. in dieser Arbeit nicht ausführlicher besprochen.

#### 4.1.10 Der Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2016)

Das BF-Verfahren, das neben dem CL-Verfahren zu den populärsten Verfahren in der Schadenreservierung zählt, ist insbesondere dafür bekannt, dass es die Einbeziehung von a priori Informationen erlaubt. Diese a priori Informationen, bei denen es sich oftmals um Expertenwissen oder Werte aus Marktstatistiken oder ähnlichen Portefeuilles handelt, müssen bei dem BF-Verfahren in Form von scharfen Zahlen vorliegen. Im Jahr 2016 haben HEBERLE & THOMAS ein unscharfes BF-Verfahren vorgeschlagen, bei dem die a priori Informationen als dreieckförmige unscharfe Zahlen unterstellt werden. Die Spannweiten der a priori Schätzer werden dabei von dem Aktuar, je nach subjektiver Einschätzung, bestimmt. Für umso unsicherer die jeweiligen a priori Informationen erachtet werden, desto größer werden die Spannweiten in der Regel gewählt.

Die Modellannahmen des unscharfen BF-Modells lauten wie folgt (vgl. Heberle & Thomas (2016), S. 310):

#### Modellannahmen 4.2 (Das unscharfe BF-Modell)

- Es existieren positive dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{\mu}_i = (\mu_i, l_{\mu_i}, r_{\mu_i})$ ,  $i = 0, \dots, I$ , und  $\tilde{\beta}_j = (\beta_j, l_{\beta_j}, r_{\beta_j})$ ,  $j = 0, \dots, J$ , so dass

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{i,0} &= \tilde{\beta}_0 \otimes \tilde{\mu}_i \\ \tilde{C}_{i,j+k} &= \tilde{C}_{i,j} \oplus \left( \tilde{\beta}_{j+k} \ominus \tilde{\beta}_j \right) \otimes \tilde{\mu}_i\end{aligned}$$

für alle  $i = 0, \dots, I$ ,  $j = 0, \dots, J - 1$  und  $k = 1, \dots, J - j$  gilt.

- Die Summe der inkrementellen Schadenzahlungen  $\tilde{X}_{0,j+1} \oplus \dots \oplus \tilde{X}_{I-j-1,j+1}$  mit  $\tilde{X}_{i,j+1} = \tilde{C}_{i,j+1} \ominus \tilde{C}_{i,j}$  ist für alle  $j = 0, \dots, J-1$  nicht negativ.

Wie bereits in Abschnitt 2.3.2 erläutert wurde, werden in praktischen Anwendungen für die Parameter des Schadenabwicklungsmusters des Öfteren jedoch keine a priori Schätzer genutzt, sondern sie werden stattdessen unter Verwendung der geschätzten CL-Faktoren und somit aus den Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$  geschätzt. Aus diesem Grund werden auch hier Schätzer für diese Parameter vorgeschlagen, die mit Hilfe von unscharfen Schätzern für die CL-Faktoren bestimmt werden. Die resultierenden Schätzer  $\hat{\beta}_j^{(CL)}$  sind ebenfalls unscharfe Zahlen und können somit Unsicherheit erfassen. Sie sind durch

$$\hat{\beta}_j^{(CL)} = \hat{f}_j^{-1} \otimes \dots \otimes \hat{f}_{J-1}^{-1} \quad (104)$$

für  $j = 0, \dots, J-1$  und  $\hat{\beta}_J^{(CL)} = (1, 0, 0)$  gegeben, wobei  $\hat{f}_k = (\hat{f}_k, \hat{l}_{\hat{f}_k}, \hat{r}_{\hat{f}_k})$  die im Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2014) (siehe Abschnitt 4.1.9) eingeführten Schätzer für die unscharfen CL-Faktoren  $\tilde{f}_k = (f_k, l_{f_k}, r_{f_k})$  sind, für die

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k+1}}{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k}} \quad \text{und} \quad \hat{l}_{\hat{f}_k} = \hat{r}_{\hat{f}_k} = \frac{\sum_{i=0}^{I-k-1} X_{i,k+1}}{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k}}, \quad k = 0, \dots, J-1,$$

gilt (vgl. Heberle & Thomas (2016), S. 311). HEBERLE & THOMAS (2016) geben an, dass zur Bestimmung des Kehrwerts die Approximation in (52) genutzt werden soll und für die Multiplikation der resultierenden dreieckförmigen unscharfen Zahlen die Sekantenapproximation (siehe (48)).<sup>13</sup> Da durch die Kehrwertbildung und Multiplikation die Symmetrie nicht erhalten bleibt, sind die mit (104) bestimmten Schätzer für die Parameter  $\tilde{\beta}_j$  im Gegensatz zu den Schätzern für die unscharfen CL-Faktoren im Allgemeinen, außer  $\hat{\beta}_J^{(CL)} = (1, 0, 0)$ , nicht mehr symmetrisch.

Mit Hilfe der Schätzer für  $\tilde{\mu}_i$  und  $\tilde{\beta}_j$  können die Endschadenstände  $\tilde{C}_{i,J}$  für  $i = 1, \dots, I$  analog zum scharfen Verfahren wie folgt prognostiziert werden (vgl. Heberle & Thomas (2016), S. 311):

$$\tilde{C}_{i,J} = C_{i,I-i} \oplus \left( \hat{\beta}_J^{(CL)} \ominus \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \otimes \hat{\mu}_i = C_{i,I-i} \oplus \left( (1, 0, 0) \ominus \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \otimes \hat{\mu}_i$$

<sup>13</sup>Ebenso wie in HEBERLE & THOMAS (2014) werden auch hier Gleichheitszeichen verwendet, obwohl es sich um Approximationen handelt.

Für die Schadenreserve eines einzelnen Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\widehat{R}_i &= \widehat{C}_{i,J} \ominus C_{i,I-i} = C_{i,I-i} \oplus \left( (1, 0, 0) \ominus \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\mu}_i \ominus C_{i,I-i} \\ &= \left( (1, 0, 0) \ominus \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\mu}_i\end{aligned}$$

und die Gesamtreserve ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\widehat{R} &= \widehat{R}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{R}_I \\ &= \left( (1, 0, 0) \ominus \widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\mu}_1 \oplus \dots \oplus \left( (1, 0, 0) \ominus \widehat{\beta}_0^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\mu}_I\end{aligned}$$

Nach der Prognose der ausstehenden Schadenzahlungen wird noch die Prognoseunsicherheit für einzelne und aggregierte Anfalljahre quantifiziert. Dabei wird die Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion und der  $x$ -Achse als Unschärfemaß  $U_{DUZ}$  verwendet. HEBERLE & THOMAS (2016) haben gezeigt, dass für die Unsicherheit des prognostizierten Endschadenstandes  $\widehat{C}_{i,J}$  des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ , gegeben die Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$ , unter den Modellannahmen des unscharfen BF-Modells

$$\begin{aligned}U_{DUZ}(\widehat{C}_{i,J} | \mathcal{D}_I) &= \frac{1}{2} \left( \left( 1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \left( \widehat{l}_{\widehat{\mu}_i} + \widehat{r}_{\widehat{\mu}_i} \right) + \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \widehat{\mu}_i \right. \\ &\quad \left. + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \widehat{r}_{\widehat{\mu}_i} - \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \widehat{l}_{\widehat{\mu}_i} \right)\end{aligned}$$

resultiert (vgl. Heberle & Thomas (2016), S. 313). Für die Unsicherheit der aggregierten prognostizierten Endschadenstände

$$\begin{aligned}&\widehat{C}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{C}_{I,J} \\ &= \left( C_{1,I-1} \oplus \left( (1, 0, 0) \ominus \widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\mu}_1 \right) \oplus \dots \oplus \left( C_{I,0} \oplus \left( (1, 0, 0) \ominus \widehat{\beta}_0^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\mu}_I \right) \\ &= \left( C_{1,I-1} + \left( 1 - \widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)} \right) \widehat{\mu}_1, \left( 1 - \widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)} \right) \widehat{l}_{\widehat{\mu}_1} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)}} \widehat{\mu}_1 - \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)}} \widehat{l}_{\widehat{\mu}_1}, \right. \\ &\quad \left. \left( 1 - \widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)} \right) \widehat{r}_{\widehat{\mu}_1} + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)}} \widehat{\mu}_1 + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-1}^{(CL)}} \widehat{r}_{\widehat{\mu}_1} \right) \oplus \dots \oplus \left( C_{I,0} + \left( 1 - \widehat{\beta}_0^{(CL)} \right) \widehat{\mu}_I, \right. \\ &\quad \left. \left( 1 - \widehat{\beta}_0^{(CL)} \right) \widehat{l}_{\widehat{\mu}_I} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_0^{(CL)}} \widehat{\mu}_I - \widehat{r}_{\widehat{\beta}_0^{(CL)}} \widehat{l}_{\widehat{\mu}_I}, \left( 1 - \widehat{\beta}_0^{(CL)} \right) \widehat{r}_{\widehat{\mu}_I} + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_0^{(CL)}} \widehat{\mu}_I + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_0^{(CL)}} \widehat{r}_{\widehat{\mu}_I} \right)\end{aligned}$$

gilt (vgl. Heberle & Thomas (2016), S. 313f.):

$$U_{DUZ}(\widehat{C}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{C}_{I,J} | \mathcal{D}_I) = \sum_{i=1}^I U_{DUZ}(\widehat{C}_{i,J} | \mathcal{D}_I)$$

Im Gegensatz zum bedingten MSEP für aggregierte Anfalljahre sind hier also keine Kovarianzterme enthalten, d.h. es gibt keine Interaktionen zwischen den Anfalljahren, sondern es sind einfach die Werte der Unschärfemaße der einzelnen Anfalljahre aufzuaddieren. Zuletzt geben HEBERLE & THOMAS (2016) noch an, dass der Erwartungswert unscharfer Zahlen (siehe (56)) zur Defuzzifikation der unscharfen Reserven genutzt werden soll, und veranschaulichen dies anhand eines Beispiels.

#### 4.1.11 Der Ansatz von THOMAS (2017)

Wie von dem LCL-Verfahren, dem Glättungsansatz von SHERMAN, der geometrischen Separationsmethode von TAYLOR und dem Verfahren von KREMER ist auch von dem Chain-Ladder-Verfahren (siehe Abschnitt 2.3.1) eine unscharfe Version, bei der es mit einem unscharfen Regressionsverfahren kombiniert wird, vorgeschlagen worden. Zur Motivation dieses 2017 veröffentlichten unscharfen Schadenreservierungsverfahrens führt THOMAS an, dass der *Aitken-Schätzer*

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_j &= (\mathbf{X}_j^T \mathbf{W}_j^{-1} \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^T \mathbf{W}_j^{-1} \mathbf{y}_j = ((1 \ 1 \ \dots \ 1) \mathbf{X}_j)^{-1} (1 \ 1 \ \dots \ 1) \mathbf{y}_j \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}\end{aligned}$$

mit  $j = 0, \dots, J - 1$  für den Regressionskoeffizienten  $\beta_j$  des allgemeinen linearen Regressionsmodells

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j \beta_j + \epsilon_j \quad (105)$$

mit

$$\mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} C_{0,j+1} \\ C_{1,j+1} \\ \vdots \\ C_{I-j-1,j+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(I-j) \times 1}, \quad \mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} C_{0,j} \\ C_{1,j} \\ \vdots \\ C_{I-j-1,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(I-j) \times 1},$$

$$\mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} C_{0,j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{1,j} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_{I-j-1,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(I-j) \times (I-j)}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_j = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_{I-j-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(I-j) \times 1}$$

$$\text{und } \text{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}_j) = \sigma_j^2 \mathbf{W}_j, \quad \sigma_j^2 > 0$$

mit dem geschätzten CL-Faktor  $\hat{f}_j$  (siehe (3)) übereinstimmt (vgl. Thomas (2017), S. 71). Die CL-Faktoren des gewöhnlichen CL-Verfahrens entsprechen somit den Steigungsparametern eines linearen Modells ohne Intercept, in dem die zufälligen Fehler unkorreliert, aber heteroskedastisch sind. Da sich ein allgemeines lineares Modell stets in ein klassisches lineares Modell überführen lässt, können die Schätzer für die CL-Faktoren dementsprechend auch mit der KQ-Methode bestimmt werden. Hierfür ist

$$\mathbf{y}_j^* = \mathbf{W}_j^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} \frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}^{1/2}} \\ \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}^{1/2}} \\ \vdots \\ \frac{C_{I-j-1,j+1}}{C_{I-j-1,j}^{1/2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_j^* = \mathbf{W}_j^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} C_{0,j}^{1/2} \\ C_{1,j}^{1/2} \\ \vdots \\ C_{I-j-1,j}^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \boldsymbol{\epsilon}_j^* = \mathbf{W}_j^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}_j = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_0}{C_{0,j}^{1/2}} \\ \frac{\epsilon_1}{C_{1,j}^{1/2}} \\ \vdots \\ \frac{\epsilon_{I-j-1}}{C_{I-j-1,j}^{1/2}} \end{pmatrix}$$

zu definieren und statt (105) das transformierte Modell

$$\mathbf{y}_j^* = \mathbf{X}_j^* \beta_j + \boldsymbol{\epsilon}_j^*$$

zu betrachten, das die Annahmen des klassischen linearen Modells erfüllt (vgl. Thomas (2017), S. 71f.). Damit sichergestellt ist, dass die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W}_j$  positiv definit

ist und somit  $\mathbf{W}_j^{-\frac{1}{2}}$  und die transformierten Variablen berechnet werden können, sind dabei streng positive kumulierte Schadenzahlungen vorauszusetzen.

Basierend auf dem Zusammenhang zwischen dem CL-Verfahren und linearen Modellen hat THOMAS im Jahr 2017 ein unscharfes CL-Regressionsmodell, bei dem die CL-Faktoren als asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen unterstellt werden, vorgeschlagen. Die Modellannahmen lauten wie folgt (vgl. Thomas (2017), S. 123):

#### Modellannahmen 4.3 (Das unscharfe Chain-Ladder-Regressionsmodell)

Es seien  $\tilde{f}_j^{FCL} = (f_j^{FCL}, l_{f_j^{FCL}}, r_{f_j^{FCL}})$ ,  $j = 0, \dots, J - 1$ , asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen,  $\tilde{\mathbf{y}}^* = (\tilde{y}_0^*, \dots, \tilde{y}_{I-j-1}^*)^T$  ein unscharfer Outputvektor und  $\mathbf{X}^* = (x_0^*, \dots, x_{I-j-1}^*)^T$  ein scharfer Inputvektor, dessen Einträge  $x_0^*, \dots, x_{I-j-1}^*$  streng positiv sind. Das unscharfe CL-Regressionsmodell für einen einzelnen CL-Faktor ist dann durch

$$\tilde{\mathbf{y}}^* = \tilde{f}_j^{FCL} \otimes \mathbf{X}^* \quad (106)$$

gegeben.

Die Multiplikation ist dabei komponentenweise zu verstehen und bei  $\tilde{\mathbf{y}}^*$  und  $\mathbf{X}^*$  handelt es sich um die transformierten Variablen, die sich durch Multiplikation mit  $\mathbf{W}_j^{-\frac{1}{2}}$  ergeben haben. Um Schätzer für die unscharfen Koeffizienten  $\tilde{f}_j^{FCL} = (f_j^{FCL}, l_{f_j^{FCL}}, r_{f_j^{FCL}})$ ,  $j = 0, \dots, J - 1$ , zu ermitteln, zieht THOMAS das unscharfe Regressionsverfahren von ISHIBUCHI & NII (siehe Abschnitt 3.6.2) heran. Die Schätzer für die Modalwerte, im Folgenden mit  $\hat{f}_j^{FCL}$  bezeichnet, werden also mit der KQ-Methode bestimmt und zur Ermittlung von Schätzern für die linke und die rechte Spannweite eines einzelnen CL-Faktors ist das folgende LP-Problem, durch welches die gesamte Unschärfe des Modells minimiert wird, für ein gegebenes  $j$  zu lösen

$$\min_{l_{f_j^{FCL}}, r_{f_j^{FCL}}} z = \sum_{i=0}^{I-j-1} l_{f_j^{FCL}} x_i^* + \sum_{i=0}^{I-j-1} r_{f_j^{FCL}} x_i^*$$

unter Bedingung von (vgl. Thomas (2017), S. 124):

$$\hat{f}_j^{FCL} x_i^* - (1 - \alpha_j) l_{f_j^{FCL}} x_i^* \leq y_i^*, \quad i = 0, \dots, I - j - 1 \quad (107)$$

$$\hat{f}_j^{FCL} x_i^* + (1 - \alpha_j) r_{f_j^{FCL}} x_i^* \geq y_i^*, \quad i = 0, \dots, I - j - 1 \quad (108)$$

$$l_{f_j^{FCL}}, r_{f_j^{FCL}} \geq 0 \quad (109)$$

Während es sich bei (109) um eine Nichtnegativitätsbedingung für die Spannweiten handelt, stellen die Nebenbedingungen (107) und (108) sicher, dass  $y_i^*$  für  $i = 0, \dots, I - j - 1$

in dem  $\alpha_j$ -Schnitt des jeweiligen geschätzten Outputs enthalten ist. Durch die Wahl von  $\alpha_0, \dots, \alpha_{J-1}$  mit  $\alpha_j \in (0, 1)$  für  $j = 0, \dots, J - 1$  kann der Aktuar dabei für jede einzelne Regression ausdrücken, für wie aussagekräftig die Daten erachtet werden. In der Regel werden für die frühen Abwicklungsjahre kleinere Werte als für die späteren Abwicklungsjahre gewählt, da in den frühen Abwicklungsjahren mehr Daten vorliegen. Für das Abwicklungsjahr  $J - 1$  stehen nur die Beobachtungen eines einzelnen Anfalljahres ( $i = 0$ ) zur Verfügung, weshalb die Lösung des obigen LP-Problems für die Spannweiten des unscharfen CL-Schätzers  $\overset{\approx FCL}{f}_{J-1}$  oftmals keine sinnvollen Ergebnisse liefert. THOMAS hat daher vorgeschlagen, diese Spannweiten durch Extrapolation mit Hilfe log-linearer Regression, wie in MACK (1993) beschrieben, zu bestimmen. Diesen Vorschlag begründet THOMAS damit, dass die Charakteristika der CL-Faktoren denen der Varianzparameter im gewöhnlichen CL-Verfahren in dem Sinne ähneln, dass die linken und die rechten Spannweiten der CL-Faktoren im Allgemeinen ein fallendes Verhalten aufweisen, da in den späteren Abwicklungsjahren mehr Schäden endgültig abgeschlossen sind und die Variabilität in den CL-Faktoren im Allgemeinen abnimmt (vgl. Thomas (2017), S. 126). Das Regressionsmodell, das betrachtet wird, um einen Schätzer  $\widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}^{FCL}}$  für die linke Spannweite des unscharfen CL-Faktors des Abwicklungsjahres  $J - 1$  zu bestimmen, lautet wie folgt:

$$\ln \widehat{l}_{\widehat{f}_i^{FCL}} = a_0 + a_1 i, \quad i = 0, \dots, J - 2$$

Nachdem für die unbekanntenen Koeffizienten  $a_0 \in \mathbb{R}$  und  $a_1 \in \mathbb{R}$  dieses Modells mit der KQ-Methode Schätzer  $\widehat{a}_0$  und  $\widehat{a}_1$  ermittelt wurden, kann  $\widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}^{FCL}}$  durch Extrapolation bestimmt werden (vgl. Thomas (2017), S. 126):

$$\widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}^{FCL}} = \exp(\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1(J - 1))$$

Analog erhält man einen Schätzer für die rechte Spannweite des  $(J - 1)$ -ten CL-Faktors. Mit Hilfe der geschätzten CL-Faktoren der Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, J - 1$  können dann die nicht beobachtbaren Endschadenstände prognostiziert werden, indem jeweils der letzte beobachtbare Schadenstand eines Anfalljahres mit den entsprechenden geschätzten unscharfen CL-Faktoren multipliziert wird. THOMAS erwähnt an dieser Stelle, dass für die Multiplikation der dreieckförmigen unscharfen Zahlen die Sekantenapproximation (siehe (48)) genutzt werden soll, und veranschaulicht dies anhand eines Beispiels. Wird von den ermittelten prognostizierten Endschadenständen anschließend der jeweilige

letzte beobachtbare Schadenstand abgezogen, erhält man die Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre und durch Aggregation dieser Reserven schließlich die Gesamtreserve. Um scharfe Reserven zu erhalten, die in der Bilanz ausgewiesen werden können, schlägt THOMAS vor, den Erwartungswert zur Defuzzifikation zu nutzen, und die Unschärfe der ermittelten Prädiktoren soll als Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion und der  $x$ -Achse gemessen werden. Dies wird auch anhand eines Beispiels veranschaulicht.

Im Jahr 2015 haben ONOGHOJOBI & OLEWUEZI ebenfalls einen Artikel veröffentlicht, der das Ziel hat, ein unscharfes Regressionsverfahren auf das CL-Verfahren anzuwenden. Im Endeffekt werden die Schadenreserven bei diesem Ansatz jedoch nicht mit einer unscharfen Version des CL-Verfahrens, sondern mit dem gewöhnlichen CL-Verfahren berechnet, und der Artikel weist zudem weitere Schwächen auf. So wird etwa ohne Erläuterung zwischen der Betrachtung eines unscharfen Regressionsmodells mit asymmetrischen und der Betrachtung eines unscharfen Regressionsmodells mit symmetrischen Koeffizienten gewechselt und es werden Reserven auf Kalenderjahrbasis mit Reserven auf Anfalljahrbasis verglichen (vgl. Thomas (2017), S. 96f.). Aus diesen Gründen wird dieser Ansatz hier nicht näher erläutert.

#### 4.1.12 Der Ansatz von APOLLINAIRE ET AL. (2019a)

Im Jahr 2019 haben APOLLINAIRE ET AL. ein unscharfes Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven vorgeschlagen, das an die Poisson-Regression angelehnt ist. Diese hat insbesondere aufgrund des auf HACHEMEISTER & STANARD (1975) zurückgehenden Ergebnisses, dass das (Overdispersed-)Poisson-Modell die gleichen Schadenreserven wie das Chain-Ladder-Verfahren liefert, viel Aufmerksamkeit im Bereich der Schadenreservierung gefunden.

APOLLINAIRE ET AL. (2019a) treffen die Annahme, dass Unsicherheit über die Schadenzahlungen sowohl aufgrund von Unschärfe als auch aufgrund von Zufall vorliegt, und unterstellen  $\tilde{X}_{i,j}$  als unscharfe Zufallsvariable, die eine unscharfe Poisson-Verteilung besitzt<sup>14</sup> (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 935):

$$\tilde{X}_{i,j} \sim \tilde{\mathcal{P}}(\lambda_{i,j}), \quad \lambda_{i,j} = e^{\nu_{i,j}} = e^{\tau + \alpha_i + \gamma_j} \quad (110)$$

---

<sup>14</sup>Eine ausführliche Übersicht über unscharfe Zufallsvariablen im Allgemeinen sowie über die unscharfe Poisson-Verteilung ist etwa in BUCKLEY (2006) zu finden.

Der unscharfe Erwartungswert einer unscharfen Zufallsvariable<sup>15</sup> ist gemäß BUCKLEY (2006) durch den  $\alpha$ -Schnitt definiert. Hier erhält man

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{FE}[\tilde{X}_{i,j}] \right)_\alpha &= \left\{ \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda_{i,j}} \frac{(\lambda_{i,j})^x}{x!} \mid \lambda_{i,j} \in (\tilde{X}_{i,j})_\alpha \right\} \\ &= \left\{ \lambda_{i,j} \mid \lambda_{i,j} \in (\tilde{X}_{i,j})_\alpha \right\} = \tilde{\lambda}_{i,j}, \end{aligned}$$

wobei  $\mathbb{FE}[\cdot]$  der unscharfe Erwartungswertoperator ist. Der Erwartungswert einer (gewöhnlichen) Zufallsvariable  $X_{i,j} \sim \mathcal{P}(\lambda_{i,j})$  ist durch  $\lambda_{i,j}$  gegeben, der unscharfe Erwartungswert ist also die Fuzzifizierung des scharfen Erwartungswertes (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 935).

Das hybride unscharfe Regressionsmodell, das APOLLINAIRE ET AL. (2019a) vorschlagen, lautet in Matrixschreibweise wie folgt:

$$\ln \tilde{\mathbf{y}} = (\ln \mathbf{y}, \mathbf{l}_{\ln \mathbf{y}}, \mathbf{r}_{\ln \mathbf{y}}) = (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \ln(\boldsymbol{\epsilon}), \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{1}\lambda + \ln(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{1}\mu + \ln(\boldsymbol{\eta}))$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{y}}' = (\mathbf{y}', \mathbf{l}_{\mathbf{y}'}, \mathbf{r}_{\mathbf{y}'}) = (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}', \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{1}\lambda + \boldsymbol{\xi}', \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{1}\mu + \boldsymbol{\eta}') \quad (111)$$

Dabei ist  $\boldsymbol{\beta} = (\tau, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})^T \in \mathbb{R}^{I+J+1}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_I) \in \mathbb{R}^I$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_J) \in \mathbb{R}^J$ ,  $\tau, \boldsymbol{\theta}, \lambda, \boldsymbol{\delta}, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(J+1)(J+2) \times (I+J+1)}$  und  $\ln \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}'$ .  $\mathbf{1}$  ist ein  $\frac{1}{2}(J+1)(J+2) \times 1$  Vektor mit Einsen, bei  $\boldsymbol{\epsilon}'$ ,  $\boldsymbol{\xi}'$  und  $\boldsymbol{\eta}'$  handelt es sich um  $\frac{1}{2}(J+1)(J+2) \times 1$  Vektoren mit unkorrelierten Störtermen, für die  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}'] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}'] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}'] = \mathbf{0}$  gilt, und  $\mathbf{y}', \mathbf{l}_{\mathbf{y}'}, \mathbf{r}_{\mathbf{y}'}$   $\in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(J+1)(J+2)}$  sind Vektoren mit den beobachteten Modalwerten und linken sowie rechten Spannweiten der abhängigen Variable  $\tilde{v}_{i,j}$  mit  $i+j \leq I$  (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 935).

Gemäß des unscharfen Regressionsverfahrens von D'URSO & GASTALDI sind die iterativ zu berechnenden KQ-Schätzer  $\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\lambda}, \hat{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\mu}$  für die Parameter  $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \lambda, \boldsymbol{\delta}, \mu$  des Modells in (111) durch

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{1}{(1 + \hat{\boldsymbol{\theta}}^2 + \hat{\boldsymbol{\delta}}^2)} \left( (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \left( \mathbf{y}' + (\mathbf{l}_{\mathbf{y}'} - \mathbf{1}\hat{\lambda}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{r}_{\mathbf{y}'} - \mathbf{1}\hat{\mu}) \hat{\boldsymbol{\delta}} \right) \right), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \left( \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T (\mathbf{l}_{\mathbf{y}'} - \mathbf{1}\hat{\lambda}), \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}(J+1)(J+2)} \left( \mathbf{1}^T \mathbf{l}_{\mathbf{y}'} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{1} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right), \\ \hat{\boldsymbol{\delta}} &= \left( \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T (\mathbf{r}_{\mathbf{y}'} - \mathbf{1}\hat{\mu}), \quad \hat{\mu} = \frac{1}{\frac{1}{2}(J+1)(J+2)} \left( \mathbf{1}^T \mathbf{r}_{\mathbf{y}'} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{1} \hat{\boldsymbol{\delta}} \right) \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Der hier betrachtete unscharfe Erwartungswert einer unscharfen Zufallsvariable ist nicht mit dem Erwartungswert einer unscharfen Zahl (siehe (56)) zu verwechseln.

gegeben (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 935f.). Um diese Parameterschätzer bestimmen zu können, sind als erstes die „beobachteten“ Modalwerte sowie die linken und rechten Spannweiten der abhängigen Variable zu konstruieren. Hierfür gehen APOLLINAIRE ET AL. (2019a) wie folgt vor. Zunächst wird das Modell  $\nu_{i,j} = \tau + \alpha_i + \gamma_j + \epsilon_{i,j}$  mit  $i + j \leq I$  und  $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$  betrachtet und für  $\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_I, \gamma_1, \dots, \gamma_J$  werden Schätzer  $\hat{\tau}, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_I, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_J$  mit der KQ-Methode ermittelt, mit denen wiederum

$$\hat{\lambda}_{i,j} = e^{\hat{\tau} + \hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_j}$$

(siehe (110)) bestimmt wird. Mit Hilfe dieser Schätzer werden dann die inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j}$  für  $i + j \leq I$  normiert. Hierfür wird zunächst

$$\hat{r}_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{\lambda}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\lambda}_{i,j}}}$$

und anschließend

$$\hat{r}'_{i,j} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(J+1)(J+2)}{\frac{1}{2}(J+1)(J+2) - (I+J+1)}} \hat{r}_{i,j}$$

berechnet. Diese Werte nutzen APOLLINAIRE ET AL. (2019a), um die linken und rechten Spannweiten der inkrementellen Schadenzahlungen zu konstruieren und nehmen an, dass diese Spannweiten durch

$$l_{X_{i,j}} = r_{X_{i,j}} = \frac{|\hat{r}'_{i,j}|}{2}$$

mit  $i + j \leq I$  gegeben sind (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 940). Für die linken und rechten Spannweiten von  $\tilde{\nu}_{i,j}$  mit  $i + j \leq I$  gilt dementsprechend  $l_{\nu_{i,j}} = r_{\nu_{i,j}} = \ln \frac{|\hat{r}'_{i,j}|}{2}$ . Unter Verwendung dieser Ergebnisse können dann Schätzer für die unbekannt Parameter ermittelt werden, mit denen wiederum

$$\hat{\nu}_{i,j} = \left( \hat{\nu}_{i,j}, \hat{l}_{\hat{\nu}_{i,j}}, \hat{r}_{\hat{\nu}_{i,j}} \right) = \left( \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}, \mathbf{x}_i^T \hat{\beta} \hat{\theta} + \hat{\lambda}, \mathbf{x}_i^T \hat{\beta} \hat{\delta} + \hat{\mu} \right)$$

für  $i + j > I$  bestimmt werden kann (siehe (111)), so dass man schließlich die Prädiktoren

$$\hat{\tilde{X}}_{i,j} = \left( \hat{X}_{i,j}, \hat{l}_{\hat{X}_{i,j}}, \hat{r}_{\hat{X}_{i,j}} \right) = \left( e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}}, e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta} \hat{\theta} + \hat{\lambda}}, e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta} \hat{\delta} + \hat{\mu}} \right)$$

für die zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen  $\tilde{X}_{i,j}$  mit  $i + j > I$  erhält (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 940). Addiert man alle prognostizierten zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen auf, ergibt sich die Gesamtreserve:

$$\hat{\tilde{R}} = \left( \hat{R}, \hat{l}_{\hat{R}}, \hat{r}_{\hat{R}} \right) = \left( \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \hat{X}_{i,j}, \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \hat{l}_{\hat{X}_{i,j}}, \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \hat{r}_{\hat{X}_{i,j}} \right)$$

Diese dreieckförmige unscharfe Zahl wird anschließend noch unter Verwendung des Erwartungswerts unscharfer Zahlen (siehe (56)) in einen scharfen Wert transformiert. Es resultiert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}] &= (1 - \beta) \int_0^1 (\widehat{R})_{\underline{\alpha}} d\alpha + \beta \int_0^1 (\widehat{R})_{\overline{\alpha}} d\alpha \\
&= (1 - \beta) \int_0^1 \left( \widehat{R} - (1 - \alpha)\widehat{l}_{\widehat{R}} \right) d\alpha + \beta \int_0^1 \left( \widehat{R} + (1 - \alpha)\widehat{r}_{\widehat{R}} \right) d\alpha \\
&= (1 - \beta) \left( \widehat{R}\alpha - \widehat{l}_{\widehat{R}}\alpha + \frac{1}{2}\widehat{l}_{\widehat{R}}\alpha^2 \right) \Big|_0^1 + \beta \left( \widehat{R}\alpha + \widehat{r}_{\widehat{R}}\alpha - \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{R}}\alpha^2 \right) \Big|_0^1 \\
&= (1 - \beta) \left( \widehat{R} - \widehat{l}_{\widehat{R}} + \frac{1}{2}\widehat{l}_{\widehat{R}} \right) + \beta \left( \widehat{R} + \widehat{r}_{\widehat{R}} - \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{R}} \right) \\
&= (1 - \beta) \left( \widehat{R} - \frac{1}{2}\widehat{l}_{\widehat{R}} \right) + \beta \left( \widehat{R} + \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{R}} \right)
\end{aligned}$$

mit  $\beta \in [0, 1]$ . Um das betrachtete Modell beurteilen und mit der klassischen Poisson-Regression vergleichen zu können, haben APOLLINAIRE ET AL. (2019a) zudem eine Kennzahl für die Anpassungsgüte vorgeschlagen. Diese ist wie folgt definiert (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 939):

$$R_F^2 = \frac{\text{FSSE}}{\text{FSST}} = 1 - \frac{\text{FSSR}}{\text{FSST}}$$

Dabei ist

$$\text{FSST} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (\nu_{i,j} - \bar{\nu})^2 + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (l_{\nu_{i,j}} - l_{\bar{\nu}})^2 + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (r_{\nu_{i,j}} - r_{\bar{\nu}})^2$$

mit

$$\begin{aligned}
\bar{\nu} &= \frac{1}{\frac{1}{2}(J+1)(J+2)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \nu_{i,j}, \\
l_{\bar{\nu}} &= \frac{1}{\frac{1}{2}(J+1)(J+2)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} l_{\nu_{i,j}}, \\
r_{\bar{\nu}} &= \frac{1}{\frac{1}{2}(J+1)(J+2)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} r_{\nu_{i,j}}
\end{aligned}$$

die zu erklärende bzw. totale unscharfe Quadratsumme (*Fuzzy Sum of Squares Total*),

$$\text{FSSE} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (\widehat{\nu}_{i,j} - \bar{\nu})^2 + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \left( \widehat{l}_{\widehat{\nu}_{i,j}} - l_{\bar{\nu}} \right)^2 + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \left( \widehat{r}_{\widehat{\nu}_{i,j}} - r_{\bar{\nu}} \right)^2$$

ist die durch die Regression erklärte unscharfe Quadratsumme (*Fuzzy Sum of Squares Explained*) und

$$\text{FSSR} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (\nu_{i,j} - \widehat{\nu}_{i,j})^2 + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \left( l_{\nu_{i,j}} - \widehat{l}_{\widehat{\nu}_{i,j}} \right)^2 + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \left( r_{\nu_{i,j}} - \widehat{r}_{\widehat{\nu}_{i,j}} \right)^2$$

ist die durch die Regression nicht erklärte unscharfe Quadratsumme (*Fuzzy Sum of Squares Residual*). Wegen  $FSST = FSSE + FSSR$ , wie APOLLINAIRE ET AL. (2019a) gezeigt haben, gilt  $R_F^2 \in [0, 1]$  (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 938f.). Je näher der Wert von  $R_F^2$  an 1 liegt, desto höher ist der Anteil der durch die Regression erklärten unscharfen Quadratsumme FSSE an der totalen unscharfen Quadratsumme FSST und desto besser ist somit die Anpassungsgüte.

APOLLINAIRE ET AL. (2019a) haben dann im Rahmen eines Beispiels für das von ihnen vorgeschlagene Modell und für die klassische Poisson-Regression jeweils die Anpassungsgüte und die mittlere quadratische Abweichung berechnet. In diesem Beispiel ist das hier betrachtete Modell sowohl gemäß der Anpassungsgüte als auch gemäß der mittleren quadratischen Abweichung der klassischen Poisson-Regression vorzuziehen. Ein Nachteil des Modells von APOLLINAIRE ET AL. (2019a) ist allerdings, dass sehr viele Iterationen bis zur Konvergenz des iterativen Algorithmus benötigt werden (vgl. Apollinaire et al. (2019a), S. 941ff.).

#### 4.1.13 Der Ansatz von APOLLINAIRE ET AL. (2019b)

APOLLINAIRE ET AL. haben 2019 noch ein weiteres unscharfes Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven vorgeschlagen, das ebenfalls an die Poisson-Regression angelehnt ist. Bei diesem Verfahren werden die unbekannt Parameter mit Hilfe eines quadratischen Programmierungsproblems – und nicht wie bei APOLLINAIRE ET AL. (2019a) mit dem unscharfen Regressionsverfahren von D'URSO & GASTALDI – geschätzt.

Wie bei APOLLINAIRE ET AL. (2019a) wird angenommen, dass Unsicherheit über die Schadenzahlungen sowohl aufgrund von Unschärfe als auch aufgrund von Zufall vorliegt, und  $\tilde{X}_{i,j}$  wird als unscharfe Zufallsvariable, die eine unscharfe Poisson-Verteilung besitzt, unterstellt (vgl. Apollinaire et al. (2019b), S. 9):

$$\tilde{X}_{i,j} \sim \tilde{\mathcal{P}}(\lambda_{i,j}), \quad \lambda_{i,j} = e^{\nu_{i,j}} = e^{\tau + \alpha_i + \gamma_j}$$

Der unscharfe Erwartungswert von  $\tilde{X}_{i,j}$  ist also durch  $\tilde{\lambda}_{i,j}$ , d.h. durch die Fuzzifizierung des scharfen Erwartungswertes, gegeben (siehe Abschnitt 4.1.12). APOLLINAIRE ET AL. (2019b) setzen dann

$$\ln \tilde{\lambda}_{i,j} = \tilde{\nu}_{i,j}$$

und schlagen das folgende hybride unscharfe Regressionsmodell vor (vgl. Apollinaire et al. (2019b), S. 10):

$$\tilde{\nu}_{i,j} = \tilde{\tau} \oplus \tilde{\alpha}_i \oplus \tilde{\beta}_j, \quad i + j \leq I \quad (112)$$

Die Koeffizienten  $\tilde{\tau} = (\tau, l_\tau, r_\tau)$ ,  $\tilde{\alpha}_i = (\alpha_i, l_{\alpha_i}, r_{\alpha_i})$  und  $\tilde{\beta}_j = (\beta_j, l_{\beta_j}, r_{\beta_j})$  werden als asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen mit  $\tilde{\alpha}_0 = (0, 0, 0)$  und  $\tilde{\beta}_0 = (0, 0, 0)$  unterstellt.  $\tilde{\nu}_{i,j} = (\nu_{i,j}, l_{\nu_{i,j}}, r_{\nu_{i,j}})$  ist demnach auch eine asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahl mit  $\nu_{i,j} = \tau + \alpha_i + \beta_j$ ,  $l_{\nu_{i,j}} = l_\tau + l_{\alpha_i} + l_{\beta_j}$  und  $r_{\nu_{i,j}} = r_\tau + r_{\alpha_i} + r_{\beta_j}$ .

Die Schätzung der unscharfen Koeffizienten erfolgt bei dem Ansatz von APOLLINAIRE ET AL. (2019b) in zwei Schritten. Zunächst werden die Modalwerte geschätzt, anschließend die Spannweiten. Das Modell, das zur Bestimmung von Schätzern für die Modalwerte betrachtet wird, lautet:

$$\nu_{i,j} = \tau + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{i,j}, \quad i + j \leq I$$

Bei  $\epsilon_{i,j}$  handelt es sich dabei um Störterme mit Erwartungswert 0, die als unkorreliert unterstellt werden, und die Schätzung von  $\tau$ ,  $\alpha_i$  und  $\beta_j$  erfolgt mit der KQ-Methode. Die resultierenden Schätzer werden mit  $\hat{\tau}$ ,  $\hat{\alpha}_i$  und  $\hat{\beta}_j$  bezeichnet. Für  $\nu_{i,j}$  erhält man somit den Schätzer

$$\hat{\nu}_{i,j} = \hat{\tau} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$$

mit  $\hat{\alpha}_0 = \hat{\beta}_0 = 0$  (vgl. Apollinaire et al. (2019b), S. 10). Um Schätzer für die linken und rechten Spannweiten  $l_{\nu_{i,j}}$  bzw.  $r_{\nu_{i,j}}$  zu ermitteln, ist das quadratische Optimierungsproblem

$$\min_{l_{\nu_{i,j}}, r_{\nu_{i,j}}} z = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (l_{\nu_{i,j}} + r_{\nu_{i,j}})^2$$

unter Bedingung von

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_{i,j} - (1 - \alpha)l_{\nu_{i,j}} &\leq \ln X_{i,j}, & i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, I - i \\ \hat{\nu}_{i,j} + (1 - \alpha)r_{\nu_{i,j}} &\geq \ln X_{i,j}, & i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, I - i \\ l_{\nu_{i,j}}, r_{\nu_{i,j}} &\geq 0, & i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, I - i \end{aligned}$$

mit  $\hat{l}_{\hat{\alpha}_0} = \hat{r}_{\hat{\alpha}_0} = \hat{l}_{\hat{\beta}_0} = \hat{r}_{\hat{\beta}_0} = 0$  zu lösen (vgl. Apollinaire et al. (2019b), S. 11). Die Wahl des Wertes von  $\alpha$  soll dabei nicht, wie bei den meisten anderen Ansätzen vorgeschlagen,

je nach subjektiver Einschätzung der Aussagekraft der Daten durch den Anwender erfolgen, sondern APOLLINAIRE ET AL. (2019b) verweisen auf den 2016 von CHEN ET AL. veröffentlichten Artikel „*Optimizing h value for fuzzy linear regression with asymmetric triangular fuzzy coefficients*“ und schlagen vor, den *optimierten* Wert von  $\alpha$ , für den die mittlere quadratische Abweichung der Schadenreserve minimal ist, in dem obigen quadratischen Optimierungsproblem zu verwenden (vgl. Apollinaire et al. (2019b), S. 11). Mit Hilfe der ermittelten geschätzten Modalwerte und Spannweiten können dann die zukünftigen Schadenzahlungen prognostiziert werden. Der Prädiktor für die inkrementelle Schadenzahlung  $\tilde{X}_{i,j}$  lautet (vgl. Apollinaire et al. (2019b), S. 11):

$$\tilde{X}_{i,j} = e^{\hat{\nu}_{i,j}}, \quad i + j > I$$

Addiert man alle prognostizierten zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen auf, erhält man die unscharfe Gesamtreserve:

$$\hat{\tilde{R}} = \left( \hat{R}, \hat{l}_{\hat{R}}, \hat{r}_{\hat{R}} \right) = \left( \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J e^{\hat{\nu}_{i,j}}, \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J e^{\hat{l}_{\nu_{i,j}}}, \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J e^{\hat{r}_{\nu_{i,j}}} \right)$$

Diese unscharfe Gesamtreserve wird anschließend unter Verwendung des Konzepts des Erwartungswertes unscharfer Zahlen (siehe (56)) defuzzifiziert. Es ist also

$$\mathbb{E}_{\beta}[\hat{\tilde{R}}] = (1 - \beta) \int_0^1 (\hat{\tilde{R}})_{\underline{\alpha}} d\alpha + \beta \int_0^1 (\hat{\tilde{R}})_{\overline{\alpha}} d\alpha$$

mit  $\beta \in [0, 1]$ ,  $(\hat{\tilde{R}})_{\underline{\alpha}} = \hat{R} - (1 - \alpha)\hat{l}_{\hat{R}}$  und  $(\hat{\tilde{R}})_{\overline{\alpha}} = \hat{R} + (1 - \alpha)\hat{r}_{\hat{R}}$  zu berechnen. So ergibt sich für die defuzzifizierte Gesamtreserve (vgl. Apollinaire et al. (2019b), S. 11):

$$\mathbb{E}_{\beta}[\hat{\tilde{R}}] = (1 - \beta) \left( \hat{R} - \frac{1}{2}\hat{l}_{\hat{R}} \right) + \beta \left( \hat{R} + \frac{1}{2}\hat{r}_{\hat{R}} \right)$$

APOLLINAIRE ET AL. (2019b) haben zuletzt noch das hier vorgestellte Modell anhand eines Beispiels mit der klassischen Poisson-Regression und mit dem in APOLLINAIRE ET AL. (2019a) vorgeschlagenen Modell, bei dem die Parameter mit dem unscharfen Regressionsverfahren von D'URSO & GASTALDI geschätzt werden, verglichen. Dabei hat sich gezeigt, dass das hier betrachtete Modell gemäß der mittleren quadratischen Abweichung in diesem Beispiel sowohl der klassischen Poisson-Regression als auch dem Modell aus APOLLINAIRE ET AL. (2019a) vorzuziehen ist. Ein Nachteil des Modells von APOLLINAIRE ET AL. (2019b) ist jedoch der hohe Rechenaufwand, der mit der Bestimmung des optimalen Werts von  $\alpha$  einhergeht (vgl. Apollinaire et al. (2019b), S. 12f.).

#### 4.1.14 Kritische Würdigung

Obwohl die Schadenreservierung ein zentrales versicherungsmathematisches Thema darstellt und subjektive Beurteilungen und Erfahrung dort große Relevanz besitzen, hat die Theorie unscharfer Mengen erst relativ spät Anwendung in diesem Bereich gefunden und es sind bisher erst relativ wenige Veröffentlichungen zu Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung erschienen. In den vorangegangenen Abschnitten sind diese Veröffentlichungen in chronologischer Reihenfolge dargestellt worden und es ist somit ein erster vollständiger Überblick über den aktuellen Forschungsstand, einschließlich der neuesten Publikationen, in deutscher Sprache gegeben worden.

Der erste Artikel, in dem die Theorie unscharfer Mengen Anwendung im Bereich der Schadenreservierung gefunden hat, ist der im Jahr 2003 veröffentlichte Artikel von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ (siehe Abschnitt 4.1.1), in dem das LCL-Verfahren von BENJAMIN & EAGLES mit einem unscharfen Regressionsverfahren kombiniert worden ist. Betrachtet man die anschließend erschienenen Artikel, erkennt man, dass den meisten von ihnen ebenfalls die Idee, ein unscharfes Regressionsverfahren auf ein Schadenreservierungsverfahren anzuwenden, zugrunde liegt. So sind nach der Arbeit von DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ noch 12 weitere Ansätze veröffentlicht worden, bei denen jeweils verschiedene Schadenreservierungsverfahren mit verschiedenen unscharfen Regressionsverfahren kombiniert worden sind. In DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006) ist der Glättungsansatz von SHERMAN modifiziert worden und DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007), APAYDIN & BASER (2010), BAHRAMI & BAHRAMI (2015) und YAN, LIU, Q., LIU, J., LIU, W., LI & QI (2019) haben jeweils unscharfe Versionen der geometrischen Separationsmethode von TAYLOR vorgeschlagen, während BASER & APAYDIN (2010) und KERKEZ (2013a, 2013b) wie DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ (2003) das LCL-Verfahren heranziehen. DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012) verwendet als Schadenreservierungsverfahren das Verfahren von KREMER und erweitert seinen Ansatz in DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) noch einmal, in ONOGHOJOBI & OLEWUEZI (2015) und THOMAS (2017) wird das Chain-Ladder-Verfahren modifiziert.

Die Verwendung eines unscharfen Regressionsverfahrens besitzt zum einen den Vorteil, dass Unsicherheit in Form von Unschärfe bezüglich des Zusammenhangs zwischen einer abhängigen und einer oder mehreren unabhängigen Variablen modelliert werden kann. Zum anderen können auch unscharfe Daten modelliert werden, so dass alle vorliegenden

scharfen sowie unscharfen Beobachtungen bei der Anpassung eines Regressionsmodells unverändert verwendet werden können und nicht, wie bei der klassischen Regression, eventuell vorhandene unscharfe Beobachtungen der abhängigen und/oder der unabhängigen Variablen zunächst auf einen einzelnen scharfen Wert reduziert werden müssen. So entfällt der damit verbundene Informationsverlust. Darüber hinaus sind Argumente für die Ersetzung der klassischen KQ-Methode durch ein unscharfes Regressionsverfahren, dass die KQ-Methode nur dann verlässliche Schätzer liefert, wenn der verwendete Datensatz ausreichend groß ist, was in der Schadenreservierung oftmals nicht der Fall ist, und dass die der klassischen KQ-Regression zugrunde liegenden Annahmen in der Praxis häufig verletzt sind und es mit einem kleinen Datensatz zudem schwierig ist zu überprüfen, ob die Annahmen erfüllt sind. Insbesondere in diesen Fällen stellt die Verwendung eines unscharfen Regressionsverfahrens bei der Bestimmung der Schadenreserve eine geeignete Alternative dar.

Während DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ (2003) das unscharfe Regressionsverfahren von TANAKA verwenden und KERKEZ (2013a, 2013b) das unscharfe Regressionsverfahren von TANAKA ET AL., das sich von dem Verfahren von TANAKA nur in der Zielfunktion unterscheidet, findet bei DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2006), DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2007), DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2012), DE ANDRÉS SÁNCHEZ (2014) und THOMAS (2017) das unscharfe Regressionsverfahren von ISHIBUCHI & NII Anwendung. Dieses unscharfe Regressionsverfahren besitzt gegenüber den unscharfen Regressionsverfahren von TANAKA ET AL. und TANAKA den Vorteil, dass die Regressionskoeffizienten asymmetrisch sein können. Die linken und die rechten Spannweiten können also individuell angepasst werden und voneinander abweichende Werte annehmen. Dadurch ist es möglich, große Abweichungen in nur eine Richtung zu erfassen, was oftmals zu kleineren gesamten Spannweiten und somit zu aussagekräftigeren Ergebnissen führt. Bei dem von CHANG vorgeschlagenen unscharfen Regressionsverfahren, das APAYDIN & BASER (2010), BASER & APAYDIN (2010) und YAN, LIU, Q., LIU, J., LIU, W., LI & QI (2019) heranziehen, können die Regressionskoeffizienten ebenfalls asymmetrisch sein. Darüber hinaus kann bei diesem Verfahren im Gegensatz zu den anderen unscharfen Regressionsverfahren neben Unsicherheit in Form von Unschärfe auch Unsicherheit in Form von Zufall berücksichtigt werden und es führt zu den gleichen Ergebnissen wie die klassische KQ-Regression, wenn es sich bei allen vorliegenden Daten um scharfe Zahlen handelt.

Der erste Ansatz, bei dem es sich nicht um die Kombination eines Schadenreservierungsverfahrens mit einem unscharfen Regressionsverfahren handelt, ist der in Abschnitt 4.1.8 vorgestellte Ansatz von KIM & KIM (2014). Dieses Verfahren ist konzeptionell aber stark an den vorher erschienenen Veröffentlichungen orientiert. Statt eines unscharfen Regressionsverfahrens wird eine unscharfe Version der ANCOVA herangezogen und auf eine unscharfe Version der Hoerl-Kurve angewendet. In demselben Jahr haben auch HEBERLE & THOMAS einen Artikel veröffentlicht, der sich stärker von den zuvor erschienenen Publikationen unterscheidet. Wie in Abschnitt 4.1.9 beschrieben, haben sie ein unscharfes CL-Verfahren vorgeschlagen, bei dem die CL-Faktoren nicht als scharfe Zahlen, sondern stattdessen als unscharfe Zahlen unterstellt werden. So können die CL-Schätzer Unsicherheit erfassen und sind flexibel, auch ohne dass sie von den Aktuarien aufgrund ihrer subjektiven Einschätzung und persönlichen Erfahrung im Nachhinein angepasst werden. Das Verfahren weist allerdings den Nachteil auf, dass aufgrund der Multiplikation mehrerer unscharfer Zahlen schnell sehr große Spannweiten und somit nicht so aufschlussreiche Reserven resultieren. Im Jahr 2016 haben HEBERLE & THOMAS ein weiteres regressionsfreies unscharfes Verfahren zur Bestimmung von Schadenreserven – ein unscharfes BF-Verfahren – veröffentlicht, bei dem unter anderem die a priori Schätzer für die erwarteten Endschadenstände als unscharfe Zahlen modelliert werden (siehe Abschnitt 4.1.10). Die Idee, Informationen, die zusätzlich zu einem Abwicklungsdreieck eingehen, als unscharfe Zahlen zu modellieren, liegt auch dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen unscharfen additiven Verfahren und dem vorgeschlagenen unscharfen Cape-Cod-Verfahren zugrunde. Da solche Informationen oftmals mit Unsicherheit behaftet sind, ist dies eine naheliegende und sehr sinnvolle Erweiterung. Bei den beiden hier vorgeschlagenen unscharfen Verfahren müssen die Volumenmaße, die sowohl bei dem additiven Verfahren als auch bei dem Cape-Cod-Verfahren für alle Anfalljahre als bekannt vorausgesetzt werden, nicht wie bei den gewöhnlichen Verfahren in Form von scharfen Zahlen vorliegen, sondern sie werden als unscharfe Zahlen unterstellt. Dadurch wird es ermöglicht, Unsicherheit bezüglich der Volumenmaße einzubeziehen. Wie sich zeigen wird, kann bei dem unscharfen Cape-Cod-Verfahren zudem Unsicherheit bezüglich des Abwicklungsmusters, wie es in praktischen Anwendungen üblicherweise verwendet wird, berücksichtigt werden. In Abschnitt 4.3.1 bzw. 4.4.1 werden die beiden Verfahren vorgestellt und ausführlich erläutert.

Zu den aktuellsten Veröffentlichungen im Bereich der unscharfen Schadenreservierung gehören die zwei Artikel von APOLLINAIRE ET AL., die beide 2019 erschienen sind und an die Poisson-Regression angelehnt sind (siehe Abschnitte 4.1.12 und 4.1.13). Während in APOLLINAIRE ET AL. (2019a) das unscharfe Regressionsverfahren von D'URSO & GASTALDI genutzt wird, wird in APOLLINAIRE ET AL. (2019b) ein dem Verfahren von ISHIBUCHI & NII sehr ähnliches unscharfes Regressionsverfahren verwendet, bei dem die Spannweiten der unscharfen Parameter durch Lösen eines quadratischen Programmierungsproblems geschätzt werden. Wie auch bei den unscharfen Regressionsverfahren von TANAKA ET AL., TANAKA und ISHIBUCHI & NII ist dabei vom Anwender in den Nebenbedingungen des Programmierungsproblems ein Wert für  $\alpha \in [0, 1]$  zu wählen.<sup>16</sup> Da durch den Wert von  $\alpha$  die Spannweiten der geschätzten unscharfen Regressionskoeffizienten und somit schließlich auch die resultierenden Schadenreserven beeinflusst werden, sollte die Wahl von  $\alpha$  mit großer Sorgfalt erfolgen. In den meisten Ansätzen wird jedoch nur gesagt, dass dieser Wert in der Regel vor dem Lösen des Programmierungsproblems vom Anwender in Abhängigkeit davon festgelegt wird, für wie aussagekräftig die verwendeten Daten erachtet werden. In einigen Ansätzen wird gar nicht darauf eingegangen. Laut APOLLINAIRE ET AL. (2019b) sollte  $\alpha$  dagegen nicht einfach je nach subjektiver Einschätzung vom Anwender gewählt werden, sondern APOLLINAIRE ET AL. (2019b) verweisen auf den Artikel „*Optimizing h value for fuzzy linear regression with asymmetric triangular fuzzy coefficients*“ von CHEN ET AL. und schlagen vor, den *optimierten* Wert von  $\alpha$ , für den die mittlere quadratische Abweichung der Schadenreserve minimal ist, in dem Programmierungsproblem zu verwenden.

Ein Kritikpunkt an einigen der bisher veröffentlichten unscharfen Schadenreservierungsverfahren ist, dass die unscharfen Reserven nicht defuzzifiziert werden (siehe DE ANDRÉS SÁNCHEZ & TERCEÑO GÓMEZ (2003), BASER & APAYDIN (2010), KERKEZ (2013a, 2013b), KIM & KIM (2014), YAN, LIU, Q., LIU, J., LIU, W., LI & QI (2019)). Da die Schadenreserve in Form eines einzelnen exakten Wertes und nicht in Form einer unscharfen Zahl vorliegen muss, um sie in der Bilanz ausweisen zu können, sollte die ermittelte unscharfe Schadenreserve stets noch in eine scharfe Zahl transformiert werden. Eine Methode zur Defuzzifikation, die besonders hervorzuheben ist, ist der Erwartungswert unscharfer Zahlen. Dieser erlaubt es durch die Wahl des vom Anwender festzule-

---

<sup>16</sup>Bei den unscharfen Regressionsverfahren von CHANG und D'URSO & GASTALDI entfällt die Wahl von  $\alpha$  und es gibt somit keine Unsicherheit bei der Wahl von Inputs des unscharfen Regressionsmodells.

genden Wertes des Parameters  $\beta \in [0, 1]$  zu beeinflussen, wie vorsichtig das Ergebnis sein soll, und findet daher bei den meisten unscharfen Schadenreservierungsverfahren, bei denen eine Defuzzifikation stattfindet, Anwendung. Darüber hinaus sollte auch bei den unscharfen Schadenreservierungsverfahren, analog zu den stochastischen Schadenreservierungsverfahren, stets die Prognoseunsicherheit quantifiziert werden. Hierfür ist ein geeignetes Unschärfemaß (siehe Abschnitt 3.3) zu wählen, mit dem die globale Unschärfe der resultierenden Menge beurteilt und somit eine Aussage darüber getroffen werden kann, wie genau die ermittelten Prädiktoren sind. Obwohl dies von zentraler Bedeutung ist, wird nur bei HEBERLE & THOMAS (2014), HEBERLE & THOMAS (2016), THOMAS (2017) und YAN, LIU, Q., DONG & LIU, W. (2018) die Prognoseunsicherheit quantifiziert, bei allen anderen bisherigen Publikationen nicht.

Besonders auffallend ist, wenn man die bisher erschienenen Veröffentlichungen in der unscharfen Schadenreservierung vergleicht, dass bei allen Verfahren als unscharfe Zahlen ausschließlich (symmetrische oder asymmetrische) dreieckförmige unscharfe Zahlen verwendet werden. Diese zeichnen sich vor allem durch ihre einfache arithmetische Handhabbarkeit und ihre leichte, intuitive Interpretierbarkeit aus. Da jedoch durchaus Situationen denkbar sind, in denen unscharfe Zahlen mit einer anderen Form der Zugehörigkeitsfunktion geeigneter sind, ist es verwunderlich, weshalb in keinem der Ansätze eine andere Form von unscharfen Zahlen Anwendung gefunden hat. In Abschnitt 4.2.1 dieser Arbeit wird diese Lücke geschlossen und ein unscharfes Schadenreservierungsverfahren vorgeschlagen, bei dem quasi-exponentielle unscharfe Zahlen verwendet werden, und damit die erste Anwendung im Bereich der unscharfen Schadenreservierung, bei der die Zugehörigkeitsfunktion der unscharfen Zahlen nicht dreieckförmig ist. Bei dem vorgeschlagenen Verfahren handelt es sich um eine unscharfe Version des CL-Verfahrens und die quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen werden zur Modellierung der CL-Faktoren genutzt. Da ihre Zugehörigkeitsfunktion Werten nahe dem Modalwert hohe Zugehörigkeitswerte zuweist und dann nach links und rechts schnell abfällt, ist ihre Wahl insbesondere im Fall aussagekräftiger Daten sinnvoll. Wie sich zeigen wird, besitzt die Verwendung von quasi-exponentiellen statt dreieckförmigen unscharfen Zahlen den Vorteil, dass die Prognoseunsicherheit – im Vergleich zu dem Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014) – erheblich reduziert werden kann und man somit wesentlich aussagekräftigere Ergebnisse erhalten kann.

Generell ist festzuhalten, dass in der Schadenreservierung nicht nur Unsicherheit in Form von Zufall, die von den stochastischen Schadenreservierungsverfahren modelliert werden kann, eine zentrale Rolle spielt, sondern auch Unsicherheit in Form von Unschärfe, da oftmals Informationen verwendet werden, bei denen es sich um subjektive Einschätzungen und Erwartungen handelt und die unpräzise sind. Schadenreservierungsverfahren, die Unsicherheit in Form von Unschärfe berücksichtigen können, stellen daher eine naheliegende und sinnvolle Ergänzung dar. Auch in jüngster Zeit sind sie Thema mehrerer Publikationen gewesen, was verdeutlicht, dass es sich bei der unscharfen Schadenreservierung um ein zentrales und aktuelles Forschungsthema handelt. In Abschnitt 4.2.1, 4.3.1 und 4.4.1 dieser Arbeit werden drei neue unscharfe Schadenreservierungsverfahren vorgeschlagen, die zusätzliche Möglichkeiten bieten, Unschärfe bei der Bestimmung von Schadenreserven zu erfassen und zu modellieren. Auch darüber hinaus gibt es zukünftig noch viel Potential für neue Ansätze und Erweiterungen bisheriger Verfahren.

## 4.2 Ein unscharfes Chain-Ladder-Verfahren mit quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen

### 4.2.1 Das unscharfe Chain-Ladder-Verfahren

Basierend auf der Beobachtung, dass die mit dem CL-Verfahren ermittelten Schätzer für die CL-Faktoren in der Praxis des Öfteren von den Aktuaren aufgrund ihrer subjektiven Einschätzung und persönlichen Erfahrung abgeändert werden, haben HEBERLE & THOMAS im Jahr 2014 ein unscharfes CL-Modell veröffentlicht, bei dem die CL-Faktoren nicht als scharfe Zahlen, sondern als unscharfe Zahlen unterstellt werden (siehe Abschnitt 4.1.9). So können die CL-Schätzer Unsicherheit erfassen und sind flexibel, auch ohne dass sie im Nachhinein angepasst werden. Dieser Artikel ist eine der wenigen bisher erschienenen Publikationen, die das CL-Verfahren, das zu den populärsten Schadenreservierungsverfahren zählt, mit der Theorie unscharfer Mengen in Verbindung bringen. HEBERLE & THOMAS (2014) unterstellen die CL-Faktoren der Einfachheit halber als symmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen, da diese intuitiv interpretierbar und arithmetisch leicht handhabbar sind. Allerdings hat sich in ihrem Beispiel gezeigt, dass die Unsicherheit der Reserven sehr hoch ist und man somit nicht so aussagekräftige Ergebnisse erhält. Zudem sind nicht immer dreieckförmige unscharfe Zahlen am geeignetsten, sondern in einigen Situationen unscharfe Zahlen mit einer anderen Form der Zugehörigkeitsfunktion passender. Deshalb wird hier ein unscharfes CL-Verfahren vorgeschlagen, bei dem die CL-Faktoren nicht als dreieckförmige unscharfe Zahlen, sondern stattdessen als quasi-exponentielle unscharfe Zahlen, also als exponentielle unscharfe Zahlen mit einem endlichen Träger, unterstellt werden. Die Zugehörigkeitsfunktion einer quasi-exponentiellen unscharfen Zahl  $\tilde{f}_j$ , für die im Folgenden die Notation  $\tilde{f}_j = \text{efn}^*(f_j, l_{f_j}, r_{f_j})$  verwendet wird, ist durch

$$\mu_{\tilde{f}_j}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq f_j - 4,5l_{f_j} \\ \exp\left(\frac{x-f_j}{l_{f_j}}\right) & \text{für } f_j - 4,5l_{f_j} < x < f_j \\ \exp\left(-\frac{x-f_j}{r_{f_j}}\right) & \text{für } f_j \leq x < f_j + 4,5r_{f_j} \\ 0 & \text{für } x \geq f_j + 4,5r_{f_j} \end{cases} \quad (113)$$

mit  $f_j \in \mathbb{R}$  und  $l_{f_j}, r_{f_j} > 0$  gegeben. Der Zugehörigkeitsgrad wird also für Abweichungen  $|x - f_j|$  vom Modalwert  $f_j$ , die mindestens  $4,5l_{f_j}$  bzw.  $4,5r_{f_j}$  betragen, gleich Null gesetzt, was dadurch motiviert ist, dass die Zugehörigkeitsgrade in diesen Bereichen ansonsten höchstens bei  $\exp(-4,5) \approx 0,01$ , d.h. höchstens bei  $\approx 1\%$  des Zugehörigkeitsgrads des Modalwerts, liegen (siehe Abschnitt 3.2.1). Da Werte nahe dem Modalwert hohe Zugehörigkeitswerte besitzen und die Funktion dann nach links und rechts schnell abfällt, sind quasi-exponentielle unscharfe Zahlen insbesondere im Falle eines aussagekräftigen Datensatzes geeignet.

Die Modellannahmen des im Folgenden betrachteten unscharfen CL-Modells mit quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen lauten wie folgt:

**Modellannahmen 4.4 (Das unscharfe CL-Modell mit quasi-exp. unscharfen Zahlen)**

Es existieren positive quasi-exponentielle unscharfe Zahlen  $\tilde{f}_j = \text{efn}^*(f_j, l_{f_j}, r_{f_j})$  mit  $l_{f_j} = r_{f_j}$ , so dass

$$\tilde{C}_{i,j+1} = \tilde{f}_j \otimes \tilde{C}_{i,j}$$

für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, J - 1$  gilt.

Als erstes gilt es, Schätzer für die quasi-exponentiellen unscharfen CL-Faktoren  $\tilde{f}_j = \text{efn}^*(f_j, l_{f_j}, r_{f_j})$ ,  $j = 0, \dots, J - 1$ , zu bestimmen, d.h. Schätzer für die Modalwerte  $f_j$  sowie für die Parameter  $l_{f_j}$  und  $r_{f_j}$ . Diese Schätzer sind hier durch  $\hat{\tilde{f}}_j = \text{efn}^*(\hat{f}_j, \hat{l}_{\hat{f}_j}, \hat{r}_{\hat{f}_j})$  mit

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \quad \text{und} \quad \hat{l}_{\hat{f}_j} = \hat{r}_{\hat{f}_j} = \frac{\delta}{4,5} \hat{f}_j, \quad 0 < \delta < 1, \quad (114)$$

für  $j = 0, \dots, J - 1$  gegeben. Die unscharfen CL-Schätzer sind also alle symmetrisch und die Modalwerte stimmen, wie bei dem Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014), mit den klassischen CL-Schätzern (siehe (3)) überein. Die Schätzer für die linken und die rechten Parameter wurden so gewählt, dass

$$4,5\hat{l}_{\hat{f}_j} = 4,5\hat{r}_{\hat{f}_j} = \delta\hat{f}_j$$

gilt, dass also Abweichungen von  $\delta \cdot 100\%$  vom geschätzten Modalwert in beide Richtungen möglich sind. So ist auch sichergestellt, dass die CL-Schätzer  $\hat{\tilde{f}}_j$  stets positiv sind, da

$$\hat{f}_j - 4,5\hat{l}_{\hat{f}_j} = \hat{f}_j - \delta\hat{f}_j = (1 - \delta)\hat{f}_j > 0$$

für alle  $0 < \delta < 1$  gilt. Der Wert von  $\delta$  kann dabei vom Aktuar je nach subjektiver Einschätzung festgelegt werden. Für umso aussagekräftiger die Daten erachtet werden, desto kleiner wird im Allgemeinen der Wert von  $\delta$  und somit die Spannweite des unscharfen CL-Schätzers gewählt.

Analog zum gewöhnlichen CL-Verfahren können dann mit Hilfe der ermittelten Schätzer für die CL-Faktoren die nicht beobachtbaren Endschadenstände  $\tilde{C}_{i,J}$  der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  prognostiziert werden, indem jeweils der letzte beobachtbare Schadenstand<sup>17</sup> mit den entsprechenden CL-Schätzern multipliziert wird:

$$\tilde{C}_{i,J} = C_{i,I-i} \otimes \tilde{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \tilde{f}_{J-1} \quad (115)$$

Um den Prädiktor für die noch ausstehende Schadenverpflichtung des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ , also die Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ , zu erhalten, ist von dem prognostizierten Endschadenstand der jeweilige letzte beobachtbare Schadenstand abziehen:

$$\tilde{R}_i = \tilde{C}_{i,J} \ominus C_{i,I-i} = C_{i,I-i} \otimes \left( \tilde{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \tilde{f}_{J-1} - 1 \right)$$

Addiert man schließlich die Prädiktoren für die ausstehenden Schadenverpflichtungen der einzelnen Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  auf, ergibt sich der Prädiktor für die insgesamt noch ausstehende Schadenverpflichtung:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{R}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{R}_I \\ &= C_{1,I-1} \otimes \left( \tilde{f}_{I-1} \otimes \dots \otimes \tilde{f}_{J-1} - 1 \right) \oplus \dots \oplus C_{I,0} \otimes \left( \tilde{f}_0 \otimes \dots \otimes \tilde{f}_{J-1} - 1 \right) \end{aligned}$$

Damit diese Prädiktoren bestimmt werden können, ist das Produkt von mehreren quasi-exponentiellen unscharfen CL-Schätzern zu berechnen, wofür die Sekantenapproximation (siehe (48)) genutzt wird, so dass man wieder quasi-exponentielle unscharfe Zahlen erhält, die jedoch im Allgemeinen nicht mehr symmetrisch sind. Für das Produkt der positiven quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen  $\tilde{f}_{I-i}, \dots, \tilde{f}_j$  resultiert so<sup>18</sup>:

<sup>17</sup>Die vorliegenden Beobachtungen werden als scharf unterstellt, weshalb es sich bei dem letzten beobachtbaren Schadenstand  $C_{i,I-i}$  um eine scharfe Zahl handelt.

<sup>18</sup>Im Folgenden werden zur Vereinfachung Gleichheitszeichen verwendet, obwohl es sich um eine Approximation handelt.

**Satz 4.1** Es seien  $\widehat{f}_k$ ,  $k = 0, \dots, J-1$ , die Schätzer für die unscharfen CL-Faktoren  $\widetilde{f}_k$ ,  $k = 0, \dots, J-1$ , gemäß (114). Dann gilt

$$\widehat{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_j = \text{efn}^* \left( \widehat{F}_{I-i}^j, \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^j}, \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^j} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{I-i}^j &= \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k, \\ \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^j} &= \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^j, \\ \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^j} &= \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^j, \end{aligned}$$

wobei  $0 < \delta < 1$ ,  $i = 1, \dots, I$  und  $j = I-i, \dots, J-1$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für einen Faktor gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{I-i} &= \text{efn}^* \left( \widehat{f}_{I-i}, \widehat{l}_{\widehat{f}_{I-i}}, \widehat{r}_{\widehat{f}_{I-i}} \right) \\ &= \text{efn}^* \left( \widehat{f}_{I-i}, \frac{\delta}{4,5} \widehat{f}_{I-i}, \frac{\delta}{4,5} \widehat{f}_{I-i} \right) \\ &= \text{efn}^* \left( \prod_{k=I-i}^{I-i} \widehat{f}_k, \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{I-i-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^{I-i}, \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{I-i-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^{I-i} \right) \end{aligned}$$

Induktionsschritt: Es wird angenommen, dass für das Produkt von  $j - (I-i) + 1$  Faktoren

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_j &= \text{efn}^* \left( \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k, \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^j, \right. \\ &\quad \left. \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^j \right) \end{aligned} \tag{116}$$

gilt. Mit dieser Induktionsannahme ist zu zeigen, dass für das Produkt von  $j+1 - (I-i) + 1$  Faktoren

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{j+1} &= \text{efn}^* \left( \prod_{k=I-i}^{j+1} \widehat{f}_k, \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j+1-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^{j+1}, \right. \\ &\quad \left. \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j+1-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^{j+1} \right) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Mit (48) und (116) erhält man:

$$\begin{aligned}
& \widehat{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{j+1} = \widehat{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_j \otimes \widehat{f}_{j+1} \\
& = \text{efn}^* \left( \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k, \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^j, \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^j \right) \otimes \widehat{f}_{j+1} \\
& = \text{efn}^* \left( \widehat{f}_{j+1} \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k, \left( \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k \right) \widehat{l}_{\widehat{f}_{j+1}} + \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^j \widehat{f}_{j+1} \right. \\
& \quad - \widehat{l}_{\widehat{f}_{j+1}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^j, \left( \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k \right) \widehat{r}_{\widehat{f}_{j+1}} \\
& \quad \left. + \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^j \widehat{f}_{j+1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{j+1}} \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^j \right) \\
& = \text{efn}^* \left( \prod_{k=I-i}^{j+1} \widehat{f}_k, \left( \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k \right) \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right) \right) \widehat{f}_{j+1} + \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^{j+1} \right. \\
& \quad - \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right) \right) \widehat{f}_{j+1} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^j, \\
& \quad \left( \prod_{k=I-i}^j \widehat{f}_k \right) \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right) - 1 \right) \widehat{f}_{j+1} + \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^{j+1} \\
& \quad \left. + \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right) - 1 \right) \widehat{f}_{j+1} \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^j \right) \\
& = \text{efn}^* \left( \prod_{k=I-i}^{j+1} \widehat{f}_k, \left( \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right) \right) + \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} \right) \right) \widehat{F}_{I-i}^{j+1}, \left( \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right) - 1 \right) + \right. \\
& \quad \left. \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) + \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right) - 1 \right) \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j-I+i+1} - 1 \right) \right) \widehat{F}_{I-i}^{j+1} \right) \\
& = \text{efn}^* \left( \prod_{k=I-i}^{j+1} \widehat{f}_k, \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{4,5} \right)^{j+1-I+i+1} \right) \widehat{F}_{I-i}^{j+1}, \left( \left( 1 + \frac{\delta}{4,5} \right)^{j+1-I+i+1} - 1 \right) \widehat{F}_{I-i}^{j+1} \right)
\end{aligned}$$

□

Da neben der Prognose der ausstehenden Schadenverpflichtungen auch die Genauigkeit der Prädiktoren von zentralem Interesse ist, wird im nächsten Schritt die Prognoseunsicherheit für einzelne und aggregierte Anfalljahre quantifiziert. Wie bei HEBERLE & THOMAS (2014) wird die Unsicherheit einer unscharfen Zahl als Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion (siehe (113)) und der  $x$ -Achse berechnet, so dass sich für die Unsicherheit des prognostizierten Endschadenstandes  $\widehat{C}_{i,J}$  eines einzelnen Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  Folgendes ergibt:

**Satz 4.2** Für die Unsicherheit des prognostizierten Endschadenstandes

$$\widehat{C}_{i,J} = C_{i,I-i} \otimes \widehat{f}_{I-i} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{J-1} = C_{i,I-i} \otimes \text{efn}^* \left( \widehat{F}_{I-i}^{J-1}, \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}, \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right)$$

des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  gilt, gegeben die Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$ :

$$U_{QEUZ}(\widehat{C}_{i,J} | \mathcal{D}_I) = C_{i,I-i} \left( 1 - \frac{1}{e^{4,5}} \right) \left( \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} + \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right) \quad (117)$$

**Beweis:** Mit (45) und (113) erhält man:

$$\begin{aligned} U_{QEUZ}(\widehat{C}_{i,J} | \mathcal{D}_I) &= U_{QEUZ} \left( C_{i,I-i} \otimes \text{efn}^* \left( \widehat{F}_{I-i}^{J-1}, \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}, \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right) \right) \\ &= U_{QEUZ} \left( \text{efn}^* \left( C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}, C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}, C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right) \right) \\ &= \int_{C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1} - 4,5 C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}^{C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( \frac{x - C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}{C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) dx \\ &\quad + \int_{C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}^{C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1} + 4,5 C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \exp \left( - \frac{x - C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}{C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) dx \\ &= C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( \frac{x - C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}{C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) \Bigg|_{C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1} - 4,5 C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}^{C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \\ &\quad - C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( - \frac{x - C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}{C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) \Bigg|_{C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}^{C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1} + 4,5 C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \\ &= C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} - C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( \frac{-4,5 C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}{C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) \\ &\quad - C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( \frac{-4,5 C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}{C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) + C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \\ &= C_{i,I-i} \left( 1 - \frac{1}{e^{4,5}} \right) \left( \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} + \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right) \quad \square \end{aligned}$$

Um die Unsicherheit der prognostizierten Endschadenstände für aggregierte Anfalljahre ermitteln zu können, ist zunächst die Summe der prognostizierten Endschadenstände über alle Anfalljahre hinweg zu berechnen:

**Satz 4.3** Gegeben die Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$ , ist die Summe der prognostizierten Endschadenstände  $\widehat{C}_{i,J} = C_{i,I-i} \otimes \text{efn}^* \left( \widehat{F}_{I-i}^{J-1}, \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}, \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right)$ ,  $i = 1, \dots, I$ , durch

$$\widehat{C}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{C}_{I,J} = \text{efn}^* \left( \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}, \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}, \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right)$$

gegeben.

**Beweis:** Mit Satz 3.1, (45), (115) und Satz 4.1 erhält man:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{C}_{I,J} &= C_{1,I-1} \otimes \widehat{f}_{I-1} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{J-1} \oplus \dots \oplus C_{I,0} \otimes \widehat{f}_0 \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{J-1} \\ &= C_{1,I-1} \otimes \text{efn}^* \left( \widehat{F}_{I-1}^{J-1}, \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-1}^{J-1}}, \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-1}^{J-1}} \right) \oplus \dots \oplus C_{I,0} \otimes \text{efn}^* \left( \widehat{F}_0^{J-1}, \widehat{l}_{\widehat{F}_0^{J-1}}, \widehat{r}_{\widehat{F}_0^{J-1}} \right) \\ &= \text{efn}^* \left( C_{1,I-1} \widehat{F}_{I-1}^{J-1}, C_{1,I-1} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-1}^{J-1}}, C_{1,I-1} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-1}^{J-1}} \right) \oplus \dots \\ &\quad \oplus \text{efn}^* \left( C_{I,0} \widehat{F}_0^{J-1}, C_{I,0} \widehat{l}_{\widehat{F}_0^{J-1}}, C_{I,0} \widehat{r}_{\widehat{F}_0^{J-1}} \right) \\ &= \text{efn}^* \left( \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}, \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}, \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right) \end{aligned} \quad \square$$

Mit Hilfe von Satz 4.3 kann dann die Unsicherheit der Summe der prognostizierten Endschadenstände der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  bestimmt werden:

**Satz 4.4** Für die Unsicherheit der aggregierten prognostizierten Endschadenstände, gegeben die Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$ , ist

$$U_{QEUZ}(\widehat{C}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{C}_{I,J} | \mathcal{D}_I) = \sum_{i=1}^I U_{QEUZ}(\widehat{C}_{i,J} | \mathcal{D}_I)$$

erfüllt, wobei  $U_{QEUZ}(\widehat{C}_{i,J} | \mathcal{D}_I)$  durch (117) gegeben ist.

**Beweis:** Mit Satz 4.3 und (113) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& U_{QEUSZ} \left( \widehat{C}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{C}_{I,J} \mid \mathcal{D}_I \right) \\
&= U_{QEUSZ} \left( \text{efn}^* \left( \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}, \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}, \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right) \mid \mathcal{D}_I \right) \\
&= \int_{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1} - 4,5 \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}^{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( \frac{x - \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) dx \\
&\quad + \int_{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1} + 4,5 \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}^{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( -\frac{x - \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( \frac{x - \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) \Bigg|_{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1} - 4,5 \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}^{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \\
&\quad - \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( -\frac{x - \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) \Bigg|_{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1}}^{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{F}_{I-i}^{J-1} + 4,5 \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \\
&= \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} - \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( \frac{-4,5 \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \exp \left( \frac{-4,5 \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}}{\sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}}} \right) + \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \\
&= \left( 1 - \frac{1}{e^{4,5}} \right) \left( \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} + \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^I \left( 1 - \frac{1}{e^{4,5}} \right) \left( C_{i,I-i} \widehat{l}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} + C_{i,I-i} \widehat{r}_{\widehat{F}_{I-i}^{J-1}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^I U_{QEUSZ}(\widehat{C}_{i,J} \mid \mathcal{D}_I)
\end{aligned}$$

□

Die Unsicherheit der prognostizierten Endschatenstände für aggregierte Anfalljahre ist also durch die Summe der Werte der Unschärfemaße der prognostizierten Endschatenstände der einzelnen Anfalljahre gegeben.

Damit die Schadenreserven in der Bilanz ausgewiesen werden können, werden die ermittelten unscharfen Schadenreserven zuletzt noch defuzzifiziert. Dies erfolgt mit Hilfe des Erwartungswertes unscharfer Zahlen (siehe (56)). Für den Erwartungswert der quasi-exponentiellen unscharfen Zahl  $\widehat{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ , ergibt sich:

**Satz 4.5** Der Erwartungswert der Schadenreserve  $\widehat{R}_i = \text{efn}^*(\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$  ist durch

$$\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i] = \widehat{R}_i - (1 - \beta)\widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \beta\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$$

mit  $\beta \in [0, 1]$  und  $i = 1, \dots, I$  gegeben.

**Beweis:** Zunächst ist der  $\alpha$ -Schnitt,  $0 < \alpha \leq 1$ , zu bestimmen. Man erhält

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{x - \widehat{R}_i}{\widehat{l}_{\widehat{R}_i}}\right) &\geq \alpha \\ \Leftrightarrow x - \widehat{R}_i &\geq \ln(\alpha)\widehat{l}_{\widehat{R}_i} \\ \Leftrightarrow x &\geq \widehat{R}_i + \ln(\alpha)\widehat{l}_{\widehat{R}_i} \end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{x - \widehat{R}_i}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}}\right) &\geq \alpha \\ \Leftrightarrow -(x - \widehat{R}_i) &\geq \ln(\alpha)\widehat{r}_{\widehat{R}_i} \\ \Leftrightarrow x &\leq \widehat{R}_i - \ln(\alpha)\widehat{r}_{\widehat{R}_i} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i] &= (1 - \beta) \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 (\widehat{R}_i)_{\underline{\alpha}} d\alpha + \beta \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 (\widehat{R}_i)_{\overline{\alpha}} d\alpha \\ &= (1 - \beta) \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 \left(\widehat{R}_i + \ln(\alpha)\widehat{l}_{\widehat{R}_i}\right) d\alpha + \beta \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 \left(\widehat{R}_i - \ln(\alpha)\widehat{r}_{\widehat{R}_i}\right) d\alpha \\ &= (1 - \beta) \lim_{c \downarrow 0} \left(\widehat{R}_i\alpha + \widehat{l}_{\widehat{R}_i}(\alpha \ln(\alpha) - \alpha)\right) \Big|_c^1 + \beta \lim_{c \downarrow 0} \left(\widehat{R}_i\alpha - \widehat{r}_{\widehat{R}_i}(\alpha \ln(\alpha) - \alpha)\right) \Big|_c^1 \\ &= (1 - \beta) \left(\widehat{R}_i - \widehat{l}_{\widehat{R}_i} - \widehat{l}_{\widehat{R}_i} \lim_{c \downarrow 0} c \ln(c)\right) + \beta \left(\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i} + \widehat{r}_{\widehat{R}_i} \lim_{c \downarrow 0} c \ln(c)\right) \\ &= (1 - \beta) \left(\widehat{R}_i - \widehat{l}_{\widehat{R}_i}\right) + \beta \left(\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}\right) \\ &= \widehat{R}_i - (1 - \beta)\widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \beta\widehat{r}_{\widehat{R}_i} \end{aligned} \quad \square$$

Da es sich bei dem Erwartungswert einer unscharfen Zahl um ein additives Maß handelt, ist die erwartete Gesamtreserve durch die Summe der Erwartungswerte der Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  gegeben.

#### 4.2.2 Anwendungsbeispiel

Im Folgenden wird das im vorherigen Abschnitt vorgestellte unscharfe CL-Verfahren anhand eines Beispiels veranschaulicht. Um einen Vergleich mit dem Verfahren von HERBERLE & THOMAS (2014) zu ermöglichen, wird dabei der Datensatz von TAYLOR &

ASHE (1983) (siehe Tabelle 1) verwendet, der in HEBERLE & THOMAS (2014) und darüber hinaus auch in vielen weiteren Publikationen im Bereich der Schadenreservierung Anwendung gefunden hat. Als erstes werden die Schätzer für die quasi-exponentiellen

Anfalljahr $i$	Abwicklungsjahr $j$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	357 848	1 124 788	1 735 330	2 218 270	2 745 596	3 319 994	3 466 336	3 606 286	3 833 515	3 901 463
1	352 118	1 236 139	2 170 033	3 353 322	3 799 067	4 120 063	4 647 867	4 914 039	5 339 085	
2	290 507	1 292 306	2 218 525	3 235 179	3 985 995	4 132 918	4 628 910	4 909 315		
3	310 608	1 418 858	2 195 047	3 757 447	4 029 929	4 381 982	4 588 268			
4	443 160	1 136 350	2 128 333	2 897 821	3 402 672	3 873 311				
5	396 132	1 333 217	2 180 715	2 985 752	3 691 712					
6	440 832	1 288 463	2 419 861	3 483 130						
7	359 480	1 421 128	2 864 498							
8	376 686	1 363 294								
9	344 014									

TABELLE 1: Beobachtete kumulierte Schadenzahlungen  $C_{i,j}$  ( $i + j \leq 9$ )

unscharfen CL-Faktoren  $\tilde{f}_j$ ,  $j = 0, \dots, J - 1$ , also die geschätzten Modalwerte  $\hat{f}_j$  sowie die geschätzten Parameter  $\hat{l}_{\hat{f}_j}$  und  $\hat{r}_{\hat{f}_j}$ , mit (114) bestimmt, wobei  $\delta = 0,05$  gewählt wird. Es werden in diesem Beispiel also Abweichungen von 5% sowohl nach oben als auch nach unten vom geschätzten Modalwert zugelassen, was zu den in Tabelle 2 angegebenen Schätzern  $\hat{\tilde{f}}_j$ ,  $j = 0, \dots, J - 1$ , führt. Die geschätzten Modalwerte stimmen, wie bei dem

$\hat{\tilde{f}}_j$	Abwicklungsjahr $j$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\hat{f}_j$	3,4906	1,7473	1,4574	1,1739	1,1038	1,0863	1,0539	1,0766	1,0177	
$\hat{l}_{\hat{f}_j}$	0,0388	0,0194	0,0162	0,0130	0,0123	0,0121	0,0117	0,012	0,0113	
$\hat{r}_{\hat{f}_j}$	0,0388	0,0194	0,0162	0,0130	0,0123	0,0121	0,0117	0,012	0,0113	

TABELLE 2: Unscharfe CL-Schätzer  $\hat{\tilde{f}}_j = \text{efn}^*(\hat{f}_j, \hat{l}_{\hat{f}_j}, \hat{r}_{\hat{f}_j})$  mit  $j = 0, \dots, 8$

Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014), mit den klassischen CL-Schätzern überein, und da die CL-Faktoren als symmetrisch unterstellt werden, entspricht der geschätzte linke Parameter stets dem jeweiligen geschätzten rechten Parameter.

Mit Hilfe der berechneten Schätzer für die unscharfen CL-Faktoren werden dann die nicht beobachtbaren, zukünftigen Schadenzahlungen prognostiziert. Hierfür ist jeweils der letzte beobachtbare Schadenstand eines Anfalljahres mit den entsprechenden CL-Schätzern zu multiplizieren (siehe (115) und Satz 4.1). Die resultierenden prognosti-

zierten kumulierten Schadenzahlungen sind in Tabelle 3 angegeben. Während die erste

$\widehat{C}_{i,j}$	Abwicklungsjahr $j$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\widehat{C}_{1,j}$									5 433 719
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{1,j}}$									60 375
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{1,j}}$									60 375
$\widehat{C}_{2,j}$								5 285 148	5 378 826
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{2,j}}$								58 724	118 865
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{2,j}}$								58 724	120 194
$\widehat{C}_{3,j}$							4 835 458	5 205 637	5 297 906
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{3,j}}$							53 727	115 038	174 642
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{3,j}}$							53 727	116 324	178 566
$\widehat{C}_{4,j}$						4 207 459	4 434 133	4 773 589	4 858 200
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{4,j}}$						46 750	97 989	157 358	212 348
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{4,j}}$						46 750	99 084	160 894	219 545
$\widehat{C}_{5,j}$					4 074 999	4 426 546	4 665 023	5 022 155	5 111 172
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{5,j}}$					45 278	97 821	153 779	219 514	277 714
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{5,j}}$					45 278	98 914	157 235	226 955	290 335
$\widehat{C}_{6,j}$				4 088 678	4 513 179	4 902 528	5 166 649	5 562 182	5 660 771
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{6,j}}$				45 430	99 736	161 609	225 830	302 219	367 056
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{6,j}}$				45 430	100 850	165 240	233 484	315 954	388 024
$\widehat{C}_{7,j}$			4 174 756	4 900 545	5 409 337	5 875 997	6 192 562	6 666 635	6 784 799
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{7,j}}$			46 386	108 296	178 315	256 835	336 471	432 278	510 439
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{7,j}}$			46 386	109 506	182 322	265 540	351 762	456 972	545 626
$\widehat{C}_{8,j}$		2 382 128	3 471 744	4 075 313	4 498 426	4 886 502	5 149 760	5 544 000	5 642 266
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{8,j}}$		26 468	76 721	134 340	196 623	265 506	333 921	417 090	482 458
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{8,j}}$		26 468	77 579	137 359	203 287	277 573	352 996	445 843	521 478
$\widehat{C}_{9,j}$	1 200 818	2 098 228	3 057 984	3 589 620	3 962 307	4 304 132	4 536 015	4 883 270	4 969 825
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{9,j}}$	13 342	46 368	100 804	156 899	215 291	279 089	341 257	417 558	475 458
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{9,j}}$	13 342	46 886	103 070	162 217	225 075	295 032	364 781	451 329	519 653

TABELLE 3: Prognostizierte kumulierte Schadenzahlungen  $\widehat{C}_{i,j} = \text{efn}^*(\widehat{C}_{i,j}, \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,j}}, \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,j}})$  mit

$$i + j > 9$$

Zeile für jedes Anfalljahr die Modalwerte enthält, die mit den Ergebnissen des scharfen CL-Verfahrens übereinstimmen, sind in der jeweiligen zweiten bzw. dritten Zeile die Werte der linken bzw. der rechten Parameter zu finden. Zieht man von den ermittelten prognostizierten Endschadenständen den jeweiligen letzten beobachtbaren Schadenstand ab, erhält man die Schadenreserven der Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  und durch Addition dieser einzelnen Schadenreserven die Gesamtreserve (siehe Tabelle 4). Die Modalwerte der mit dem unscharfen CL-Verfahren berechneten Reserven stimmen mit den Reserven, die sich bei Verwendung des gewöhnlichen CL-Verfahrens ergeben, sowie mit den Modalwerten bei HEBERLE & THOMAS (2014) überein. Da es sich hier bei den Reserven um quasi-exponentielle unscharfe Zahlen handelt, sind die in Tabelle 4 angegebenen Schätzer für die linken und rechten Parameter mit 4,5 zu multiplizieren, um die größtmögli-

Anfalljahr $i$	$\widehat{R}_i$	$\widehat{l}_{\widehat{R}_i}$	$\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$
1	94 634	60 375	60 375
2	469 511	118 865	120 194
3	709 638	174 642	178 566
4	984 889	212 348	219 545
5	1 419 460	277 714	290 335
6	2 177 641	367 056	388 024
7	3 920 301	510 439	545 626
8	4 278 972	482 458	521 478
9	4 625 811	475 458	519 653
$\Sigma$	18 680 857	2 679 355	2 843 796

TABELLE 4: Unscharfe CL-Reserven  $\widehat{R}_i = \text{efn}^*(\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$  mit  $i = 1, \dots, 9$

chen Abweichungen vom Modalwert nach links und rechts zu erhalten (siehe (113)). Für die Gesamtreserve erhält man so  $4,5 \cdot 2\,679\,355 = 12\,057\,097,5$  bzw.  $4,5 \cdot 2\,843\,796 = 12\,797\,082$ . Die Zugehörigkeitsfunktion der Gesamtreserve ist also außerhalb des Intervalls  $(\widehat{R} - 4,5\widehat{l}_{\widehat{R}}; \widehat{R} + 4,5\widehat{r}_{\widehat{R}}) = (18\,680\,857 - 12\,057\,097,5; 18\,680\,857 + 12\,797\,082) = (6\,623\,759,5; 31\,477\,939)$  gleich 0. Bei HEBERLE & THOMAS (2014) resultiert für die Gesamtreserve die dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{R} = (18\,680\,856, 18\,680\,856, 45\,124\,877)$ . Die Zugehörigkeitsfunktion ist bei ihrem Verfahren also auf dem Intervall  $(18\,680\,856 - 18\,680\,856; 18\,680\,856 + 45\,124\,877) = (0; 63\,805\,733)$ , d.h. auf einem deutlich größeren Intervall, von 0 verschieden. Hier ist insbesondere auch zu erkennen, dass das unscharfe CL-Verfahren mit quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen den Nachteil des Verfahrens von HEBERLE & THOMAS (2014) vermeidet, dass die linke Spannweite der Reserve mit dem Modalwert übereinstimmt.

Zur Defuzzifikation der quasi-exponentiellen unscharfen Reserven wird der Erwartungswert verwendet (siehe Satz 4.5). Die resultierenden scharfen Reserven sind für verschiedene Werte des Parameters  $\beta$  in Tabelle 5 angegeben. Es ist zu erkennen, dass die erwartete Reserve umso höher ist, je höher der Wert von  $\beta$  gewählt wird. Vergleicht man die defuzzifizierte Gesamtreserve in Tabelle 5 mit den Schadenreserven, die sich durch Anwendung des Erwartungswertes unscharfer Zahlen bei dem unscharfen CL-Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014) ergeben (siehe Tabelle 6), stellt man fest, dass die defuzzifizierte Gesamtreserve für eine Wahl von  $\beta = 0,1$  und  $\beta = 0,25$  bei dem unscharfen CL-Verfahren mit quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen größer ist. Bei den betrachteten Werten von 0,5, 0,75 und 0,9 für den Parameter  $\beta$  führt das unscharfe CL-Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014) dagegen zu einer deutlich größeren defuzzifizierten

Anfalljahr $i$	$\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i]$					CL-Reserve
	$\beta = 0,1$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,75$	$\beta = 0,9$	
1	46 334	64 447	94 634	124 821	142 934	94 634
2	374 552	410 411	470 175	529 940	565 799	469 511
3	570 317	623 298	711 600	799 902	852 883	709 638
4	815 730	880 514	988 487	1 096 461	1 161 245	984 889
5	1 198 551	1 283 758	1 425 770	1 567 782	1 652 989	1 419 460
6	1 886 093	1 999 355	2 188 125	2 376 895	2 490 157	2 177 641
7	3 515 469	3 673 879	3 937 895	4 201 911	4 360 321	3 920 301
8	3 896 908	4 047 498	4 298 482	4 549 467	4 700 057	4 278 972
9	4 249 864	4 399 131	4 647 908	4 896 686	5 045 953	4 625 811
$\Sigma$	16 553 817	17 382 290	18 763 077	20 143 864	20 972 337	18 680 856

TABELLE 5: Erwartungswerte  $\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i]$  der CL-Reserven  $\widehat{R}_i$  mit  $i = 1, \dots, 9$  für verschiedene Werte des Parameters  $\beta \in [0, 1]$  und Reserven nach dem scharfen CL-Verfahren

Gesamtreserve. In dem üblichen Fall, dass ein Wert von mindestens 0,5 für  $\beta$  gewählt wird, werden bei Verwendung des unscharfen CL-Verfahrens mit quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen also geringere Reserven für ausreichend erachtet als bei Verwendung des unscharfen CL-Verfahrens mit dreieckförmigen unscharfen Zahlen. In der rechten

	$\beta = 0,1$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,75$	$\beta = 0,9$
$\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}]$	12 530 714	17 316 144	25 291 861	33 267 578	38 053 008

TABELLE 6: Erwartungswerte  $\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}]$  der CL-Reserven  $\widehat{R}$  für verschiedene Werte des Parameters  $\beta \in [0, 1]$  bei dem unscharfen CL-Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014)

Spalte von Tabelle 5 sind zusätzlich noch die Schadenreserven angegeben, die sich bei Verwendung des scharfen CL-Verfahrens ergeben. Dabei ist jedoch zu bedenken, dass das CL-Verfahren mit zugrunde liegendem stochastischen Modell Unsicherheit in Form von Zufall einbezieht, während das hier vorgeschlagene unscharfe CL-Verfahren Unsicherheit aufgrund von Unschärfe berücksichtigt, weshalb diese beiden Verfahren nicht direkt miteinander verglichen werden können.

Für die Unsicherheit der prognostizierten Endschadenstände und damit der Schadenreserven, die als Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion und der  $x$ -Achse berechnet wird (siehe Satz 4.2), ergeben sich die in Tabelle 7 zu findenden Werte. Hier ist zu erkennen, dass die Unsicherheit der Reserve tendenziell mit den Anfalljahren steigt, was daraus resultiert, dass in späteren Anfalljahren mehr unscharfe CL-Schätzer zu multiplizieren sind, um den Prädiktor für den Endschadenstand und damit die Reserve des jeweiligen

Anfalljahres zu erhalten. Im Gegensatz zum bedingten MSEP in stochastischen Scha-

Anfalljahr $i$	$U_{QEUS}(\hat{C}_{i,J} \mathcal{D}_I)$
1	119 407,90
2	236 403,24
3	349 284,47
4	427 095,38
5	561 737,72
6	746 691,85
7	1 044 332,90
8	992 783,79
9	984 055,78
$\Sigma$	5 461 793,03

TABELLE 7: Prognoseunsicherheit  $U_{QEUS}(\hat{C}_{i,J}|\mathcal{D}_I)$  mit  $i = 1, \dots, 9$  im unscharfen CL-Verfahren

denreservierungsverfahren gibt es hier für aggregierte Anfalljahre keine Kovarianzterme, sondern die Unsicherheit der aggregierten prognostizierten Endschadenstände ist durch die Summe der Werte der Unsicherheitsmaße der prognostizierten Endschadenstände der einzelnen Anfalljahre gegeben, da bei der Anwendung von unscharfen Zahlen keine Abhängigkeiten zwischen den Anfalljahren berücksichtigt werden. Die Unsicherheit der Gesamtreserve beträgt in diesem Beispiel 5 461 793,03 und ist somit deutlich geringer als bei HEBERLE & THOMAS (2014), bei denen die Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion der Gesamtreserve und der  $x$ -Achse durch 31 902 866,35 gegeben ist. Die Prognoseunsicherheit konnte im Vergleich zu dem Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014) also deutlich reduziert werden (17,12% des Wertes bei HEBERLE & THOMAS (2014)), d.h. die ermittelte Reserve ist hier mit einer viel geringeren Unsicherheit in Form von Unschärfe behaftet und somit wesentlich aussagekräftiger. Aufgrund der Multiplikation mehrerer unscharfer Zahlen ist die Prognoseunsicherheit allerdings weiterhin recht hoch. Um eine bessere Vergleichbarkeit zu ermöglichen, wurde noch für weitere Werte von  $\delta$  die Unsicherheit der Gesamtreserve berechnet. Dabei ist zu bedenken, dass größere Werte von  $\delta$ , die der Aktuar eher wählen wird, wenn er die Daten als nicht so aussagekräftig erachtet, zu größeren Werten von  $\hat{l}_{f_j}$  und  $\hat{r}_{f_j}$  führen und somit zu größeren Spannweiten der unscharfen CL-Schätzer und schließlich zu einer größeren Prognoseunsicherheit. Für  $\delta = 0,01$  und  $\delta = 0,1$  beträgt die Prognoseunsicherheit nur 3,42% bzw. 34,3% der Prognoseunsicherheit bei HEBERLE & THOMAS (2014). Selbst wenn Abweichungen von 20% vom Modalwert zugelassen werden, beträgt die Prognoseunsicherheit der Gesamtre-

serve nur 69,07% von der Prognoseunsicherheit bei HEBERLE & THOMAS (2014). Erst wenn sehr große Abweichungen zugelassen werden, übersteigt die Prognoseunsicherheit hier die bei HEBERLE & THOMAS (2014). So ist etwa bei einer Wahl von  $\delta = 0,5$  die Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion der Gesamtreserve und der  $x$ -Achse durch 57 771 164,08 gegeben und somit größer als 31 902 866,35.

### 4.2.3 Kritische Würdigung

Da die mit dem CL-Verfahren berechneten Schätzer für die CL-Faktoren des Öfteren von den Aktuaren aufgrund ihrer subjektiven Einschätzung und persönlichen Erfahrung abgeändert werden, ist die Idee, die CL-Faktoren nicht als scharfe Zahlen, sondern stattdessen als unscharfe Zahlen zu unterstellen, eine naheliegende Erweiterung, die es erlaubt, die Vagheit der CL-Schätzer aufgrund von subjektiver Beurteilung zu erfassen. Bei dem von HEBERLE & THOMAS (2014) vorgeschlagenen unscharfen CL-Modell werden, wie in ausnahmslos allen bisher erschienenen Veröffentlichungen im Bereich der unscharfen Schadenreservierung, der Einfachheit halber dreieckförmige unscharfe Zahlen verwendet. Da jedoch durchaus Situationen auftreten können, in denen eine andere Form der Zugehörigkeitsfunktion passender ist, ist hier ein unscharfes CL-Verfahren vorgeschlagen worden, bei dem die unscharfen CL-Faktoren nicht als dreieckförmige unscharfe Zahlen, sondern als quasi-exponentielle unscharfe Zahlen modelliert werden. Diese quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen weisen Werten nahe dem Modalwert hohe Zugehörigkeitswerte zu und fallen dann nach links und rechts schnell ab. Sie sind daher insbesondere im Falle eines aussagekräftigen Datensatzes geeignet.

Die Schätzer für die quasi-exponentiellen unscharfen CL-Faktoren sind so gewählt worden, dass die Modalwerte durch die klassischen CL-Schätzer gegeben sind. Die Schätzer für die linken und die rechten Parameter können, je nach subjektiver Einschätzung, so festgelegt werden, dass bestimmte prozentuale Abweichungen vom jeweiligen klassischen CL-Schätzer zugelassen werden. In dem Beispiel im vorherigen Abschnitt hat sich gezeigt, dass, solange nicht allzu große prozentuale Abweichungen zugelassen werden sollen, bei Verwendung von quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen Reserven mit einer viel geringeren Prognoseunsicherheit als bei dem Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014) resultieren. Die Reserven sind also wesentlich aufschlussreicher. Aufgrund der Multiplikation mehrerer unscharfer Zahlen ist die Prognoseunsicherheit allerdings

weiterhin recht hoch. In den meisten der zuvor erschienenen Artikel im Bereich der unscharfen Schadenreservierung ist gänzlich versäumt worden, die Unsicherheit der Schadenreserven zu quantifizieren. Dies sollte jedoch stets erfolgen, da die Quantifizierung der Prognoseunsicherheit neben der Prognose der ausstehenden Schadenverpflichtungen von zentraler Bedeutung ist.

Zudem sollte im Bereich der unscharfen Schadenreservierung stets eine Defuzzifikationsmethode angewendet werden, um die ermittelte unscharfe Schadenreserve in eine scharfe Zahl zu transformieren und sie so in der Bilanz ausweisen zu können. Auch dies ist nicht in allen Publikationen erfolgt. Hier wurde zur Defuzzifikation der Erwartungswert unscharfer Zahlen genutzt, der es erlaubt, durch die Wahl des Parameters  $\beta \in [0, 1]$  zu beeinflussen, wie vorsichtig das Ergebnis sein soll, so dass Risikoaversion einfach und intuitiv berücksichtigt werden kann. Sowohl für die Unsicherheit der Reserven als auch für die defuzzifizierten Reserven konnten, wie für die unscharfen Reserven selbst, geschlossene Formeln hergeleitet werden. Bezüglich der Höhe der defuzzifizierten Schadenreserven hat sich in dem im vorherigen Abschnitt betrachteten Beispiel ein weiterer Vorteil des vorgeschlagenen unscharfen CL-Verfahrens gezeigt: Ein konservativer Aktuar – ausgedrückt durch die Wahl eines hohen Werts des Parameters  $\beta$  – wird bei Verwendung des unscharfen CL-Verfahrens mit quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen geringere Reserven für ausreichend erachten als bei Verwendung des unscharfen CL-Verfahrens von HEBERLE & THOMAS (2014). Mit dem unscharfen CL-Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014) würde solch ein Aktuar also höhere Reserven ansetzen, was für das Versicherungsunternehmen kostspielig und somit von Nachteil sein kann.

Bei dem vorgeschlagenen unscharfen CL-Modell mit quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen wurden die unscharfen CL-Faktoren als symmetrisch unterstellt. Eine mögliche Erweiterung des Verfahrens wäre, asymmetrische unscharfe Zahlen zu verwenden, so dass eventuell vorhandene starke Abweichungen in nur eine Richtung erfasst werden können und die linken und die rechten Spannweiten nicht übereinstimmen müssen, sondern individuell angepasst werden können. Darüber hinaus könnte es auch von Interesse sein, noch andere spezielle LR-Zahlen, wie zum Beispiel quadratische oder Gaußsche unscharfe Zahlen, zu betrachten.

## 4.3 Eine unscharfe Version des additiven Schadenreservierungsverfahrens

### 4.3.1 Das unscharfe additive Verfahren

Das additive Verfahren, das in Abschnitt 2.3.8 dieser Arbeit vorgestellt wurde, ist ein populäres Verfahren zur Prognose der zukünftigen Schadenzahlungen und damit zur Bestimmung von Schadenreserven. Wie in Abschnitt 2.3.8 beschrieben, wird bei diesem Verfahren vorausgesetzt, dass bekannte Volumenmaße für alle Anfalljahre  $i = 0, \dots, I$  vorliegen. Diese Volumenmaße sind nicht in dem Abwicklungsdreieck enthalten, sondern zusätzlich vom Aktuar auszuwählen. Es handelt sich bei ihnen also um externe Informationen, die etwa Expertenwissen oder Informationen aus Marktstatistiken oder aus vergleichbaren Portfolios sein können. Im Folgenden wird eine unscharfe Version des additiven Verfahrens vorgeschlagen, bei der die Volumenmaße nicht wie im klassischen additiven Verfahren als scharfe Zahlen, sondern stattdessen als unscharfe Zahlen unterstellt werden. Dadurch wird der Tatsache Rechnung getragen, dass diese vom Aktuar auszuwählenden externen Informationen oftmals mit Unsicherheit behaftet sind. So kann etwa, je nachdem welche Größe als Volumenmaß verwendet wird, Unsicherheit dadurch vorliegen, dass Daten nur in aggregierter Form zur Verfügung stehen, dass die Anzahl an Schäden für jedes Anfalljahr noch nicht feststeht, da noch nachträglich welche gemeldet werden, dass die Anzahl der Verträge nicht konstant über jedes Anfalljahr ist oder dass Unsicherheit bei dem Ziehen von Informationen aus vergleichbaren Portfolios besteht. Durch die Modellierung der Volumenmaße als unscharfe Zahlen wird es ermöglicht, diese Unsicherheit einzubeziehen und die Volumenmaße nicht nur in Form von exakten, sondern in Form von approximativen Werten anzugeben. Genauer gesagt werden die Volumenmaße bei dem hier vorgeschlagenen Verfahren als asymmetrische positive dreieckförmige unscharfe Zahlen  $\tilde{v}_0 = (v_0, l_{v_0}, r_{v_0}), \dots, \tilde{v}_I = (v_I, l_{v_I}, r_{v_I})$  unterstellt. Die Modalwerte sowie die linken und rechten Spannweiten sind vom Aktuar festzulegen. Die Wahl der Spannweiten erfolgt dabei in der Regel in Abhängigkeit davon, woher die Informationen stammen und für wie aussagekräftig der Aktuar die Daten erachtet. Für umso unsicherer sie erachtet werden, desto größer werden die Spannweiten im Allgemeinen gewählt. Die Modellannahmen des im Folgenden betrachteten unscharfen additiven Modells lauten wie folgt:

#### Modellannahmen 4.5 (Das unscharfe additive Modell)

- Es existieren positive unscharfe Parameter  $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_J$  und bekannte positive dreieckförmige unscharfe Volumenmaße  $\tilde{v}_0 = (v_0, l_{v_0}, r_{v_0}), \dots, \tilde{v}_I = (v_I, l_{v_I}, r_{v_I})$ , so dass

$$\tilde{X}_{i,j} \otimes \tilde{v}_i = \tilde{\xi}_j$$

für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, J$  gilt.

- Die inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j}$  sind positiv für  $i + j \leq I$ .

Zunächst wird bei dem unscharfen additiven Verfahren analog zum gewöhnlichen additiven Verfahren für jedes Abwicklungsjahr  $j = 0, \dots, J$  der erwartete Schadenquotenzuwachs  $\tilde{\xi}_j$  durch den additiven Schadenquotenzuwachs

$$\tilde{\xi}_j = \left( \sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j} \right) \otimes (\tilde{v}_0 \oplus \dots \oplus \tilde{v}_{I-j})$$

geschätzt. Die beobachteten inkrementellen Schadenzahlungen werden als scharfe Zahlen unterstellt, es ist also der Quotient von einer scharfen Zahl und einer dreieckförmigen unscharfen Zahl zu berechnen. Dies erfolgt mit der Sekantenapproximation (siehe (54)), so dass für die additiven Schadenquotenzuwächse ebenfalls dreieckförmige unscharfe Zahlen resultieren<sup>19</sup>:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_j &= \left( \sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}, 0, 0 \right) \otimes \left( \sum_{i=0}^{I-j} v_i, \sum_{i=0}^{I-j} l_{v_i}, \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i} \right) \\ &= \left( \frac{\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i}, \left( \sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j} \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i} \right) \frac{1 - \frac{\sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i + \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}}{\left( \sum_{i=0}^{I-j} v_i \right)^2}, \right. \\ &\quad \left. \left( \sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j} \sum_{i=0}^{I-j} l_{v_i} \right) \frac{1 + \frac{\sum_{i=0}^{I-j} l_{v_i}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i - \sum_{i=0}^{I-j} l_{v_i}}}{\left( \sum_{i=0}^{I-j} v_i \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (118)$$

Die Modalwerte der dreieckförmigen unscharfen Schätzer  $\tilde{\xi}_j$  stimmen mit den additiven Schadenquotenzuwächsen im klassischen additiven Verfahren überein und durch die Modellannahme, dass sowohl die Volumenmaße als auch die beobachteten inkrementellen Schadenzahlungen positiv sind, ist sichergestellt, dass auch die unscharfen additiven

<sup>19</sup>Zur Vereinfachung werden im Folgenden Gleichheitszeichen verwendet, obwohl es sich um eine Approximation handelt.

Schadenquotenzuwächse positiv sind:

$$\begin{aligned}
\widehat{\xi}_j - \widehat{l}_{\widehat{\xi}_j} &= \frac{\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i} - \left( \sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j} \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i} \right) \frac{1 - \frac{\sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i + \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}}{\left( \sum_{i=0}^{I-j} v_i \right)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i} \left( 1 - \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i} \frac{1 - \frac{\sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i + \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i} \right) \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i} \left( 1 - \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i} \frac{\frac{\sum_{i=0}^{I-j} v_i + \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i} - \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i + \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i} \right) \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i} \left( 1 - \frac{\sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}}{\sum_{i=0}^{I-j} v_i + \sum_{i=0}^{I-j} r_{v_i}} \right) > 0
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der ermittelten additiven Schadenquotenzuwächse werden dann die nicht beobachtbaren inkrementellen Schadenzahlungen analog zum scharfen additiven Verfahren durch

$$\widehat{\widehat{X}}_{i,j} = \widetilde{v}_i \otimes \widehat{\xi}_j$$

für  $i + j > I$  prognostiziert. Um diese Prädiktoren zu erhalten, ist also das Produkt von zwei positiven dreieckförmigen unscharfen Zahlen zu berechnen, wofür wieder die Sekantenapproximation (siehe (48)) genutzt wird. So ergibt sich für den prognostizierten Schadenzuwachs die dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{\widehat{X}}_{i,j} = \left( \widehat{X}_{i,j}, \widehat{l}_{\widehat{X}_{i,j}}, \widehat{r}_{\widehat{X}_{i,j}} \right)$  mit<sup>20</sup>:

$$\widehat{X}_{i,j} = v_i \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \quad (119)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{l}_{\widehat{X}_{i,j}} &= v_i \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k} \right) \frac{1 - \frac{\sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k + \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} l_{v_i}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \\
&\quad - l_{v_i} \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k} \right) \frac{1 - \frac{\sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k + \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} \\
&= (v_i - l_{v_i}) \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k} \right) \frac{1 - \frac{\sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k + \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} l_{v_i}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \quad (120)
\end{aligned}$$

<sup>20</sup>Wie auch bei der Berechnung des Quotienten mittels Sekantenapproximation werden hier zur Vereinfachung Gleichheitszeichen verwendet, obwohl es sich um eine Approximation handelt.

$$\begin{aligned}
\widehat{r}_{\widehat{X}_{i,j}} &= v_i \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k} \right) \frac{1 + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k - \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} r_{v_i}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \\
&\quad + r_{v_i} \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k} \right) \frac{1 + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k - \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} \\
&= (v_i + r_{v_i}) \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k} \right) \frac{1 + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k - \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} r_{v_i}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \quad (121)
\end{aligned}$$

Addiert man die prognostizierten inkrementellen Schadenzahlungen eines Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  anschließend auf, erhält man die unscharfe Schadenreserve dieses Anfalljahres

$$\widehat{R}_i = \widehat{X}_{i,I-i+1} \oplus \dots \oplus \widehat{X}_{i,J},$$

die als Summe von dreieckförmigen unscharfen Zahlen ebenfalls eine dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{R}_i = \left( \widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right)$  mit

$$\widehat{R}_i = \sum_{j=I-i+1}^J v_i \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \quad (122)$$

$$\widehat{l}_{\widehat{R}_i} = \sum_{j=I-i+1}^J \left( (v_i - l_{v_i}) \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k} \right) \frac{1 - \frac{\sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k + \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} l_{v_i}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \right) \quad (123)$$

$$\widehat{r}_{\widehat{R}_i} = \sum_{j=I-i+1}^J \left( (v_i + r_{v_i}) \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k} \right) \frac{1 + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k - \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} r_{v_i}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \right) \quad (124)$$

ist. Werden dann noch die unscharfen Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre aufaddiert, resultiert die unscharfe Gesamtreserve

$$\widehat{R} = \left( \widehat{R}, \widehat{l}_{\widehat{R}}, \widehat{r}_{\widehat{R}} \right) = \widehat{R}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{R}_I = \widehat{X}_{1,I} \oplus \dots \oplus \widehat{X}_{1,J} \oplus \dots \oplus \widehat{X}_{I,1} \oplus \dots \oplus \widehat{X}_{I,J}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\widehat{R} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J v_i \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \\
\widehat{l}_{\widehat{R}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \left( (v_i - l_{v_i}) \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k} \right) \frac{1 - \frac{\sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k + \sum_{k=0}^{I-j} r_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} l_{v_i}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \right) \\
\widehat{r}_{\widehat{R}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \left( (v_i + r_{v_i}) \left( \sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k} \right) \frac{1 + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k - \sum_{k=0}^{I-j} l_{v_k}}}{\left( \sum_{k=0}^{I-j} v_k \right)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j} r_{v_i}}{\sum_{k=0}^{I-j} v_k} \right)
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden die ermittelten unscharfen Schadenreserven defuzzifiziert, um scharfe Zahlen zu erhalten, die in der Bilanz ausgewiesen werden können. Dies erfolgt hier mit Hilfe des Erwartungswertes unscharfer Zahlen.

**Satz 4.6** Für den Erwartungswert der dreieckförmigen unscharfen Schadenreserve  $\widehat{\widehat{R}}_i = (\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$  gilt

$$\mathbb{E}_\beta[\widehat{\widehat{R}}_i] = \widehat{R}_i - \frac{1}{2}(1 - \beta)\widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \frac{1}{2}\beta\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$$

mit  $\beta \in [0, 1]$  und  $i = 1, \dots, I$ , wobei  $\widehat{R}_i$  in (122),  $\widehat{l}_{\widehat{R}_i}$  in (123) und  $\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$  in (124) gegeben ist.

**Beweis:** Der Erwartungswert  $\mathbb{E}_\beta[\widetilde{a}]$  einer unscharfen Zahl  $\widetilde{a}$  ist durch

$$\mathbb{E}_\beta[\widetilde{a}] = (1 - \beta) \int_0^1 \widetilde{a}_\alpha d\alpha + \beta \int_0^1 \widetilde{a}_{\overline{\alpha}} d\alpha$$

mit  $\beta \in [0, 1]$  definiert (siehe (56)) und für den  $\alpha$ -Schnitt  $\widetilde{a}_\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , einer dreieckförmigen unscharfen Zahl  $\widetilde{a} = (a, l_a, r_a)$  gilt

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x - a}{l_a} &\geq \alpha \\ \Leftrightarrow x - a &\geq (\alpha - 1)l_a \\ \Leftrightarrow x &\geq a + (\alpha - 1)l_a = a - (1 - \alpha)l_a \end{aligned} \quad (125)$$

sowie:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x - a}{r_a} &\geq \alpha \\ \Leftrightarrow x - a &\leq (1 - \alpha)r_a \\ \Leftrightarrow x &\leq a + (1 - \alpha)r_a \end{aligned} \quad (126)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\beta[\widehat{\widehat{R}}_i] &= (1 - \beta) \int_0^1 \left( \widehat{R}_i - (1 - \alpha)\widehat{l}_{\widehat{R}_i} \right) d\alpha + \beta \int_0^1 \left( \widehat{R}_i + (1 - \alpha)\widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right) d\alpha \\ &= (1 - \beta) \left( \alpha\widehat{R}_i - \left( \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 \right) \widehat{l}_{\widehat{R}_i} \right) \Big|_0^1 + \beta \left( \alpha\widehat{R}_i + \left( \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 \right) \widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right) \Big|_0^1 \\ &= (1 - \beta) \left( \widehat{R}_i - \frac{1}{2}\widehat{l}_{\widehat{R}_i} \right) + \beta \left( \widehat{R}_i + \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right) \\ &= \widehat{R}_i - \frac{1}{2}(1 - \beta)\widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \frac{1}{2}\beta\widehat{r}_{\widehat{R}_i} \end{aligned}$$

□

Den Erwartungswert der Gesamtreserve erhält man, indem man die Erwartungswerte der Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  aufaddiert, da es sich bei dem Erwartungswert einer unscharfen Zahl um ein additives Maß handelt.

Zuletzt wird noch die Prognoseunsicherheit für einzelne und für aggregierte Anfalljahre quantifiziert. Wie auch bei dem Ansatz in Abschnitt 4.2.1 wird die Unsicherheit einer unscharfen Zahl als Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion und der  $x$ -Achse gemessen. So erhält man für die Unsicherheit der Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

**Satz 4.7** Die Unsicherheit der Schadenreserve  $\widehat{\widetilde{R}}_i = (\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$  des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  mit  $\widehat{R}_i$  gemäß (122),  $\widehat{l}_{\widehat{R}_i}$  gemäß (123) und  $\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$  gemäß (124) ist, gegeben die Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$ , durch

$$U_{DUZ}(\widehat{\widetilde{R}}_i | \mathcal{D}_I) = \frac{1}{2} \left( \widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right) \quad (127)$$

gegeben.

**Beweis:** Mit Definition 3.12 erhält man:

$$\begin{aligned} U_{DUZ}(\widehat{\widetilde{R}}_i | \mathcal{D}_I) &= \int_{\widehat{R}_i - \widehat{l}_{\widehat{R}_i}}^{\widehat{R}_i} \left( 1 + \frac{x - \widehat{R}_i}{\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} \right) dx + \int_{\widehat{R}_i}^{\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \left( 1 - \frac{x - \widehat{R}_i}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \right) dx \\ &= \left( x + \frac{1}{2\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} x^2 - \frac{\widehat{R}_i}{\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} x \right) \Big|_{\widehat{R}_i - \widehat{l}_{\widehat{R}_i}}^{\widehat{R}_i} + \left( x - \frac{1}{2\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} x^2 + \frac{\widehat{R}_i}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} x \right) \Big|_{\widehat{R}_i}^{\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \\ &= \widehat{R}_i + \frac{\widehat{R}_i^2}{2\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} - \frac{\widehat{R}_i^2}{\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} - \left( \widehat{R}_i - \widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \frac{1}{2\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} (\widehat{R}_i - \widehat{l}_{\widehat{R}_i})^2 - \frac{\widehat{R}_i}{\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} (\widehat{R}_i - \widehat{l}_{\widehat{R}_i}) \right) + \widehat{R}_i \\ &\quad + \widehat{r}_{\widehat{R}_i} - \frac{1}{2\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} (\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i})^2 + \frac{\widehat{R}_i}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} (\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}) - \left( \widehat{R}_i - \frac{\widehat{R}_i^2}{2\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} + \frac{\widehat{R}_i^2}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \right) \\ &= \widehat{R}_i + \frac{\widehat{R}_i^2}{2\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} - \frac{\widehat{R}_i^2}{\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} - \widehat{R}_i + \widehat{l}_{\widehat{R}_i} - \frac{\widehat{R}_i^2}{2\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} + \widehat{R}_i - \frac{1}{2}\widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \frac{\widehat{R}_i^2}{\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} - \widehat{R}_i \\ &\quad + \widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i} - \frac{\widehat{R}_i^2}{2\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} - \widehat{R}_i - \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{R}_i} + \frac{\widehat{R}_i^2}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} + \widehat{R}_i - \widehat{R}_i + \frac{\widehat{R}_i^2}{2\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} - \frac{\widehat{R}_i^2}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right) \quad \square \end{aligned}$$

Für aggregierte Anfalljahre gilt:

**Satz 4.8** Für die Unsicherheit der Gesamtreserve ist, gegeben die Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$ ,

$$U_{DUZ}(\widehat{\widetilde{R}} | \mathcal{D}_I) = \sum_{i=1}^I U_{DUZ}(\widehat{\widetilde{R}}_i | \mathcal{D}_I)$$

erfüllt, wobei  $U_{DUZ}(\widehat{\widetilde{R}}_i | \mathcal{D}_I)$  durch (127) gegeben ist.

**Beweis:** Die Unsicherheit der Gesamtreserve  $\widehat{\widehat{R}} = \widehat{\widehat{R}}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{\widehat{R}}_I$  ist analog zu (127) durch

$$U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}}|\mathcal{D}_I) = \frac{1}{2} (\widehat{l}_{\widehat{R}} + \widehat{r}_{\widehat{R}})$$

gegeben. Da

$$\widehat{l}_{\widehat{R}} = \sum_{i=1}^I \widehat{l}_{\widehat{R}_i} \quad \text{sowie} \quad \widehat{r}_{\widehat{R}} = \sum_{i=1}^I \widehat{r}_{\widehat{R}_i}$$

gilt, erhält man:

$$U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}}|\mathcal{D}_I) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^I \widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \sum_{i=1}^I \widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right) = \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (\widehat{l}_{\widehat{R}_i} + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}) = \sum_{i=1}^I U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}}_i|\mathcal{D}_I) \quad \square$$

Die Unsicherheit der Gesamtreserve ist demnach durch die Summe der Werte der Unschärfemaße der Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre gegeben. Es werden hier also keine Abhängigkeiten zwischen den Anfalljahren berücksichtigt.

### 4.3.2 Anwendungsbeispiel

Im Folgenden wird das im vorherigen Abschnitt vorgeschlagene unscharfe additive Verfahren anhand eines Beispiels veranschaulicht. Dabei wird ein Datensatz aus RADTKE & SCHMIDT (2012) verwendet, der aus einem Abwicklungsdreieck mit inkrementellen Schadenzahlungen und (scharfen) Volumenmaßen  $v_i$  für alle Anfalljahre  $i = 0, \dots, 5$  besteht (siehe Tabelle 8). Diese Volumenmaße werden hier als Modalwerte der dreieck-

Anfalljahr $i$	Abwicklungsjahr $j$						Volumenmaß		
	0	1	2	3	4	5	$v_i$	$l_{v_i}$	$r_{v_i}$
0	1001	854	568	565	347	148	4025	201,25	402,5
1	1113	990	671	648	422		4456	222,8	445,6
2	1265	1168	800	744			5315	265,75	531,5
3	1490	1383	1007				5986	299,3	598,6
4	1725	1536					6939	693,9	1387,8
5	1889						8158	815,8	1631,6

TABELLE 8: Beobachtete inkrementelle Schadenzahlungen  $X_{i,j}$  ( $i + j \leq 5$ ) und unscharfe Volumenmaße  $\tilde{v}_i = (v_i, l_{v_i}, r_{v_i})$  mit  $i = 0, \dots, 5$

förmigen unscharfen Volumenmaße  $\tilde{v}_i$  verwendet. Zusätzlich werden noch Werte für die linken und rechten Spannweiten der Volumenmaße benötigt. Diese sind hier so gewählt worden, dass für das nullte bis dritte Anfalljahr die linke Spannweite jeweils 5% und die

rechte Spannweite jeweils 10% des Volumenmaßes des entsprechenden Anfalljahres beträgt. Für das vierte und fünfte Anfalljahr ist die linke Spannweite in Höhe von 10% und die rechte Spannweite in Höhe von 20% des jeweiligen Volumenmaßes gewählt worden. Es wird bei diesem Beispiel also angenommen, dass in den letzten beiden Anfalljahren sowohl nach unten als auch nach oben größere prozentuale Abweichungen vom Modalwert vorkommen als in den vorherigen Anfalljahren und dass in allen Anfalljahren größere prozentuale Abweichungen vom Modalwert nach oben als nach unten möglich sind. Die Werte der linken und rechten Spannweiten sind ebenfalls in Tabelle 8 zu finden.

Mit Hilfe der vorliegenden Daten werden dann als erstes die additiven Schadenquotenzuwächse, also Schätzer für die erwarteten Schadenquotenzuwächse, für alle Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, 5$  mit (118) bestimmt. Die resultierenden dreieckförmigen Schätzer sind in Tabelle 9 zu finden. Während in der ersten Zeile die geschätzten Modalwerte stehen,

$\widehat{\xi}_j$	Abwicklungsjahr $j$					
	0	1	2	3	4	5
$\widehat{\xi}_j$	0,2432	0,222	0,154	0,1419	0,0907	0,0368
$\widehat{l}_{\xi_j}$	0,0305	0,0248	0,014	0,0129	0,0082	0,0033
$\widehat{r}_{\xi_j}$	0,0188	0,0149	0,0081	0,0075	0,0048	0,0019

TABELLE 9: Unscharfe additive Schadenquotenzuwächse  $\widehat{\xi}_j = (\widehat{\xi}_j, \widehat{l}_{\xi_j}, \widehat{r}_{\xi_j})$  mit  $j = 0, \dots, 5$

die mit den additiven Schadenquotenzuwächsen im klassischen additiven Verfahren übereinstimmen, sind in der zweiten bzw. dritten Zeile die geschätzten linken bzw. rechten Spannweiten angegeben, die – ebenso wie die linken und rechten Spannweiten der Volumenmaße – voneinander abweichende Werte annehmen.

Im nächsten Schritt werden die nicht beobachtbaren, zukünftigen inkrementellen Schadenzahlungen prognostiziert, indem jeweils das Produkt des Volumenmaßes des entsprechenden Anfalljahres und des zuvor ermittelten additiven Schadenquotenzuwachses des entsprechenden Abwicklungsjahres mittels Sekantenapproximation berechnet wird (siehe (119), (120) und (121)). So ergeben sich die in Tabelle 10 angegebenen dreieckförmigen Prädiktoren, bei denen die Modalwerte und die linken sowie rechten Spannweiten jeweils wieder in einer Zeile aufgelistet sind. Addiert man die prognostizierten inkrementellen Schadenzahlungen aus Tabelle 10 anschließend auf, erhält man die unscharfen Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre  $i = 1, \dots, 5$  und schließlich die unscharfe Gesamtreserve. Die Modalwerte und die linken sowie rechten Spannweiten der unscharfen drei-

$\widehat{X}_{i,j}$	Abwicklungsjahr $j$				
	1	2	3	4	5
$\widehat{X}_{1,j}$					164
$\widehat{l}_{\widehat{X}_{1,j}}$					22
$\widehat{r}_{\widehat{X}_{1,j}}$					26
$\widehat{X}_{2,j}$				482	195
$\widehat{l}_{\widehat{X}_{2,j}}$				66	27
$\widehat{r}_{\widehat{X}_{2,j}}$				76	31
$\widehat{X}_{3,j}$			849	543	220
$\widehat{l}_{\widehat{X}_{3,j}}$			116	74	30
$\widehat{r}_{\widehat{X}_{3,j}}$			134	86	35
$\widehat{X}_{4,j}$		1068	984	629	255
$\widehat{l}_{\widehat{X}_{4,j}}$		194	179	114	46
$\widehat{r}_{\widehat{X}_{4,j}}$		281	259	166	67
$\widehat{X}_{5,j}$	1811	1256	1157	740	300
$\widehat{l}_{\widehat{X}_{5,j}}$	363	228	210	134	55
$\widehat{r}_{\widehat{X}_{5,j}}$	508	331	305	195	79

TABELLE 10: Prognostizierte inkrementelle Schadenzahlungen  $\widehat{X}_{i,j} = (\widehat{X}_{i,j}, \widehat{l}_{\widehat{X}_{i,j}}, \widehat{r}_{\widehat{X}_{i,j}})$  mit  $i + j > 5$

eckförmigen Reserven sind jeweils in einer Spalte in Tabelle 11 zu finden. Wie auch die

Anfalljahr $i$	$\widehat{R}_i$	$\widehat{l}_{\widehat{R}_i}$	$\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$
1	164	22	26
2	677	92	107
3	1612	220	255
4	2937	534	773
5	5264	991	1417
$\Sigma$	10654	1859	2578

TABELLE 11: Unscharfe additive Reserven  $\widehat{R}_i = (\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$  mit  $i = 1, \dots, 5$

Modalwerte der prognostizierten inkrementellen Schadenzahlungen stimmen die Modalwerte der mit dem unscharfen additiven Verfahren ermittelten Schadenreserven mit den jeweiligen Ergebnissen im scharfen additiven Verfahren überein.

Die Transformation der unscharfen Schadenreserven in scharfe Zahlen erfolgt, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, mit Hilfe des Erwartungswertes unscharfer Zahlen (siehe Satz 4.6). Die sich ergebenden defuzzifizierten Schadenreserven sind in Tabelle 12 für verschiedene Werte des Parameters  $\beta \in [0, 1]$  angegeben. Dabei wird auch wieder der Vorteil der Verwendung des Erwartungswertes zur Defuzzifikation unscharfer Zahlen deutlich, dass der Anwender durch die Wahl von  $\beta$  das Ergebnis je nach subjektiver Einschätzung der Situation beeinflussen kann. Je höher der Wert von  $\beta$  gewählt wird, desto

höher ist die resultierende scharfe Reserve.

Anfalljahr $i$	$\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i]$				
	$\beta = 0,1$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,75$	$\beta = 0,9$
1	155	159	165	171	174
2	641	656	681	706	721
3	1 526	1 561	1 621	1 680	1 716
4	2 735	2 833	2 997	3 160	3 258
5	4 889	5 069	5 370	5 671	5 852
$\Sigma$	9 946	10 278	10 834	11 388	11 721

TABELLE 12: Erwartungswerte  $\mathbb{E}_\beta[\widehat{R}_i]$  der additiven Reserven  $\widehat{R}_i$  mit  $i = 1, \dots, 5$  für verschiedene Werte des Parameters  $\beta \in [0, 1]$

Um auch die Genauigkeit der ermittelten Schadenreserven beurteilen zu können, ist zuletzt noch für die Anfalljahre  $i = 1, \dots, 5$  die Unsicherheit, gemessen als Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion der Schadenreserve und der  $x$ -Achse, berechnet worden (siehe Satz 4.7). Die resultierenden Werte sind in Tabelle 13 zu finden, wobei die dort angegebene Summe der berechneten Werte der Unschärfemaße der Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre gemäß Satz 4.8 der Unsicherheit der Gesamtreserve entspricht. Bei

Anfalljahr $i$	$U_{DUZ}(\widehat{R}_i \mathcal{D}_I)$
1	24,11
2	99,66
3	237,17
4	653,47
5	1 204,07
$\Sigma$	2 218,48

TABELLE 13: Prognoseunsicherheit  $U_{DUZ}(\widehat{R}_i|\mathcal{D}_I)$  mit  $i = 1, \dots, 5$  im unscharfen additiven Verfahren

der Betrachtung der in Tabelle 13 angegebenen Werte ist zu beachten, dass hier ein anderer Datensatz als in dem Beispiel zum unscharfen CL-Verfahren mit quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen (siehe Abschnitt 4.2.2) verwendet wurde, da hier inkrementelle Schadenzahlungen und zusätzlich Volumenmaße benötigt wurden. Daher kann die Prognoseunsicherheit, ebenso wie die Höhe der (defuzzifizierten) Schadenreserven, nicht mit den entsprechenden Ergebnissen in Abschnitt 4.2.2 verglichen werden. Bezüglich der Prognoseunsicherheit kann generell jedoch zum einen festgehalten werden, dass die Unsicherheit der mit dem unscharfen additiven Verfahren ermittelten Schadenreserven umso höher ist,

je größer die Spannweiten der Volumenmaße gewählt werden. Zum anderen ist hervorzuheben, dass bei dem unscharfen additiven Verfahren zur Prognose der ausstehenden Schadenverpflichtungen nicht mehrere unscharfe Zahlen miteinander zu multiplizieren sind, wodurch die Unschärfe schnell ansteigen würde. Es ist zunächst ein Quotient und anschließend ein Produkt von jeweils zwei unscharfen Zahlen zu berechnen, danach sind nur noch Summen unscharfer Zahlen zu bestimmen.

### **4.3.3 Kritische Würdigung**

In Abschnitt 4.3.1 dieser Arbeit ist eine unscharfe Version des additiven Verfahrens vorgeschlagen worden, bei der die Volumenmaße, die bei dem additiven Verfahren zusätzlich zu einem Abwicklungsdreieck mit inkrementellen Schadenzahlungen als bekannt vorausgesetzt werden, als unscharfe Zahlen modelliert worden sind. Im Gegensatz zu den meisten zuvor erschienenen Veröffentlichungen im Bereich der unscharfen Schadenreservierung handelt es sich bei dem vorgeschlagenen unscharfen Verfahren also nicht um die Kombination eines Schadenreservierungsverfahrens mit einem unscharfen Regressionsverfahren, sondern um die Kombination eines Schadenreservierungsverfahrens mit unscharfen Zahlen.

Die Idee, die Volumenmaße als unscharfe Zahlen – statt wie in dem klassischen additiven Verfahren als scharfe Zahlen – zu modellieren, ist eine naheliegende Erweiterung des additiven Verfahrens, da die Volumenmaße als externe Informationen, die vom Aktuar auszuwählen sind, oftmals mit Unsicherheit behaftet sind. Durch ihre Modellierung als unscharfe Zahlen ist es möglich, diese Unsicherheit zu berücksichtigen, während im gewöhnlichen additiven Verfahren keine Unsicherheit aufgrund von Unschärfe einbezogen werden kann.

In Abschnitt 4.3.1 wurde gezeigt, wie unter Berücksichtigung von Unschärfe Prädiktoren für die ausstehenden Schadenverpflichtungen bestimmt werden können. Zudem sind die ermittelten unscharfen Schadenreserven mit Hilfe des Erwartungswertes in scharfe Zahlen transformiert worden, damit sie in der Bilanz ausgewiesen werden können, und die Prognoseunsicherheit ist für einzelne und aggregierte Anfalljahre quantifiziert worden. Dies ist neben der Bestimmung der Schadenreserve von zentraler Bedeutung, um die Genauigkeit der Prognose beurteilen zu können, ist jedoch in den meisten bisher erschienenen Publikationen zur unscharfen Schadenreservierung versäumt worden.

Als unscharfe Zahlen zur Modellierung der Volumenmaße sind bei dem vorgeschlagenen Verfahren asymmetrische dreieckförmige unscharfe Zahlen genutzt worden. Die Verwendung von asymmetrischen unscharfen Zahlen besitzt den Vorteil, dass die linken und rechten Spannweiten nicht übereinstimmen müssen, sondern individuell je nach subjektiver Einschätzung angepasst werden können (siehe Beispiel in Abschnitt 4.3.2). Dreieckförmige unscharfe Zahlen, die die am häufigsten genutzten unscharfen Zahlen sind, sind gewählt worden, da sie intuitiv zu interpretieren und arithmetisch leicht handhabbar sind. Zudem können die Spannweiten von dreieckförmigen unscharfen Zahlen, die neben den Modalwerten vom Aktuar festzulegen sind, recht intuitiv und einfach gewählt werden. Bei ihrer Wahl wird sich der Aktuar in der Regel an der Informationsquelle und daran, für wie aussagekräftig er die Daten hält, orientieren. Für umso unsicherer die Daten erachtet werden, desto größer werden im Allgemeinen die Spannweiten der Volumenmaße gewählt und entsprechend größer ist schließlich die Unsicherheit der Schadenreserve. Falls eine andere Form der Zugehörigkeitsfunktion passender ist, ist es natürlich auch möglich, andere unscharfe Zahlen zur Modellierung der Volumenmaße zu verwenden. Dies wäre eine mögliche Modifikation des vorgeschlagenen Verfahrens.

## 4.4 Eine unscharfe Version des Cape-Cod-Verfahrens

### 4.4.1 Das unscharfe Cape-Cod-Verfahren

Wie bereits in Abschnitt 2.3.1 herausgestellt wurde, ist das CL-Verfahren zwar ein populäres und häufig angewandtes Schadenreservierungsverfahren mit vielen Vorteilen, es besitzt jedoch den Nachteil, dass es gegenüber Ausreißern auf der letzten beobachteten Diagonalen des Abwicklungsdreiecks, d.h. im aktuellen Kalenderjahr, nicht robust ist. Eine Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen und Ausreißer im aktuellen Kalenderjahr zu glätten, ist es, die Beobachtungen auf der Hauptdiagonalen zu robustifizieren. Dies erfolgt bei dem Cape-Cod-Verfahren, das in Abschnitt 2.3.9 dieser Arbeit vorgestellt wurde. Hier wird im Folgenden ein unscharfes CC-Verfahren vorgeschlagen, bei dem die Volumenmaße und auch die Parameter des Abwicklungsmusters als unscharfe Zahlen modelliert werden. Das vorgeschlagene Verfahren erlaubt somit, sowohl Unsicherheit bezüglich des Abwicklungsmusters als auch Unsicherheit bezüglich der Volumenmaße einzubeziehen. Die Modellannahmen des betrachteten unscharfen CC-Modells lauten wie folgt:

#### Modellannahmen 4.6 (Das unscharfe Cape-Cod-Modell)

- Es existieren positive unscharfe Parameter  $\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_J$  mit  $\tilde{\beta}_J = (1, 0, 0)$ , ein positiver unscharfer Parameter  $\tilde{\kappa}$  sowie bekannte positive dreieckförmige unscharfe Volumenmaße  $\tilde{v}_0 = (v_0, l_{v_0}, r_{v_0}), \dots, \tilde{v}_I = (v_I, l_{v_I}, r_{v_I})$ , so dass

$$\tilde{C}_{i,j} = \tilde{\kappa} \otimes \tilde{v}_i \otimes \tilde{\beta}_j$$

für alle  $i = 0, \dots, I$  und  $j = 0, \dots, J$  gilt.

- Die inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j}$  sind positiv für  $i + j \leq I$ .

Bei den Volumenmaßen – die hier als asymmetrische positive dreieckförmige unscharfe Zahlen unterstellt werden – handelt es sich um externe Informationen, deren Modalwerte sowie linken und rechten Spannweiten vom Aktuar je nach subjektiver Einschätzung festzulegen sind. Daher sind sie oftmals mit Unsicherheit behaftet (siehe Abschnitt 4.3.1). Für das Abwicklungsmuster werden, wie in praktischen Anwendungen üblich, keine a priori Schätzer genutzt, sondern es wird unter Verwendung der geschätzten CL-Faktoren geschätzt. Die Schätzer für  $\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_J$  sind demnach durch

$$\hat{\beta}_j^{(CL)} = \hat{f}_j^{-1} \otimes \dots \otimes \hat{f}_{J-1}^{-1}$$

für  $j = 0, \dots, J - 1$  und  $\widehat{\beta}_J^{(CL)} = (1, 0, 0)$  gegeben. Wie bereits in Abschnitt 4.2 beschrieben, werden die mit dem CL-Verfahren berechneten Schätzer für die CL-Faktoren in der Praxis des Öfteren von den Aktuaren, basierend auf ihrer subjektiven Einschätzung und persönlichen Erfahrung, angepasst. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die CL-Faktoren und dementsprechend auch die Parameter des Abwicklungsmusters als unscharfe Zahlen zu modellieren, um so die Vagheit aufgrund von subjektiver Beurteilung erfassen zu können. Als Schätzer für die unscharfen CL-Faktoren werden die im Ansatz von HEBERLE & THOMAS (2014) eingeführten symmetrischen dreieckförmigen Schätzer  $\widehat{f}_k = (\widehat{f}_k, \widehat{l}_{\widehat{f}_k}, \widehat{r}_{\widehat{f}_k})$  verwendet, die durch

$$\widehat{f}_k = \frac{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k+1}}{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k}} \quad \text{und} \quad \widehat{l}_{\widehat{f}_k} = \widehat{r}_{\widehat{f}_k} = \frac{\sum_{i=0}^{I-k-1} X_{i,k+1}}{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k}} \quad (128)$$

für  $k = 0, \dots, J - 1$  gegeben sind (siehe Abschnitt 4.1.9). Für diese Schätzer gilt  $\widehat{f}_k - \widehat{l}_{\widehat{f}_k} = 1 > 0$  für alle  $k = 0, \dots, J - 1$  (siehe (99)). Sie sind also positive unscharfe Zahlen. Zur Bestimmung ihrer Kehrwerte wird die Approximation in (52) genutzt. So ergeben sich die dreieckförmigen unscharfen Zahlen<sup>21</sup>:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k^{-1} &= \left( \widehat{f}_k^{-1}, \widehat{l}_{\widehat{f}_k^{-1}}, \widehat{r}_{\widehat{f}_k^{-1}} \right) = \left( \frac{1}{\widehat{f}_k}, \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k^2} \left( 1 - \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}} \right), \frac{\widehat{l}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k^2} \left( 1 + \frac{\widehat{l}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k - \widehat{l}_{\widehat{f}_k}} \right) \right) \\ &= \left( \frac{1}{\widehat{f}_k}, \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k^2} \left( 1 - \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}} \right), \frac{\widehat{l}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k^2} \left( 1 + \widehat{l}_{\widehat{f}_k} \right) \right), \quad k = 0, \dots, J - 1 \end{aligned} \quad (129)$$

Da die inkrementellen Schadenzahlungen gemäß den Modellannahmen 4.6 positiv sind, ist sichergestellt, dass auch die Kehrwerte der unscharfen CL-Schätzer positive unscharfe Zahlen sind:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k^{-1} - \widehat{l}_{\widehat{f}_k^{-1}} &= \frac{1}{\widehat{f}_k} - \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k^2} \left( 1 - \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_k}}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}} \right) = \frac{\widehat{f}_k \left( \widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k} \right) - \widehat{r}_{\widehat{f}_k} \left( \widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k} \right) + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}^2}{\widehat{f}_k^2 \left( \widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k} \right)} \\ &= \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}} = \frac{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k}}{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k+1} + \sum_{i=0}^{I-k-1} X_{i,k+1}} > 0 \end{aligned}$$

Die Multiplikation der gemäß (52) bestimmten Kehrwerte erfolgt mit Hilfe der Sekantenapproximation (siehe (48)). So erhält man den folgenden Satz für das Produkt der Kehrwerte der dreieckförmigen unscharfen CL-Schätzer:

<sup>21</sup>Es handelt sich zwar um eine Approximation, zur Vereinfachung werden jedoch hier und auch im weiteren Verlauf dieses Abschnitts Gleichheitszeichen verwendet, ohne dass im Folgenden explizit darauf hingewiesen wird.

**Satz 4.9** Es seien  $\widehat{f}_k$ ,  $k = 0, \dots, J-1$ , die Schätzer für die unscharfen CL-Faktoren  $\widetilde{f}_k$ ,  $k = 0, \dots, J-1$ , gemäß (128). Dann gilt

$$\widehat{\beta}_j^{(CL)} = \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)}, \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}}, \widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} \right) = \widehat{f}_j^{-1} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{J-1}^{-1}$$

mit

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_j^{(CL)} &= \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \\ \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} &= \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, \\ \widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} &= \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k - \widehat{l}_{\widehat{f}_k}} - \widehat{\beta}_j^{(CL)} = 1 - \widehat{\beta}_j^{(CL)} \end{aligned}$$

für  $j = 0, \dots, J-1$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für einen Faktor erhält man mit (129):

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{J-1}^{(CL)} &= \widehat{f}_{J-1}^{-1} = \left( \frac{1}{\widehat{f}_{J-1}}, \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}}}{\widehat{f}_{J-1}^2} \left( 1 - \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}}}{\widehat{f}_{J-1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}}} \right), \frac{\widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}}}{\widehat{f}_{J-1}^2} (1 + \widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}}) \right) \\ &= \left( \prod_{k=J-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}} (\widehat{f}_{J-1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}}) - \widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}}^2}{\widehat{f}_{J-1}^2 (\widehat{f}_{J-1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}})}, \frac{\widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}} (\widehat{f}_{J-1} - \widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}}) + \widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}}^2}{\widehat{f}_{J-1}^2 (\widehat{f}_{J-1} - \widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}})} \right) \\ &= \left( \prod_{k=J-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}}}{\widehat{f}_{J-1} (\widehat{f}_{J-1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}})}, \frac{\widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}}}{\widehat{f}_{J-1} (\widehat{f}_{J-1} - \widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}})} \right) \\ &= \left( \prod_{k=J-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \frac{1}{\widehat{f}_{J-1}} - \frac{1}{\widehat{f}_{J-1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{J-1}}}, \frac{1}{\widehat{f}_{J-1} - \widehat{l}_{\widehat{f}_{J-1}}} - \frac{1}{\widehat{f}_{J-1}} \right) \\ &= \left( \prod_{k=J-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{\beta}_{J-1}^{(CL)} - \prod_{k=J-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, 1 - \widehat{\beta}_{J-1}^{(CL)} \right) \end{aligned}$$

Induktionsschritt: Es wird angenommen, dass für das Produkt von  $J-j$  Faktoren

$$\widehat{f}_j^{-1} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{J-1}^{-1} = \left( \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, 1 - \widehat{\beta}_j^{(CL)} \right) \quad (130)$$

gilt. Mit dieser Induktionsannahme ist zu zeigen, dass für das Produkt von  $J-j+1$  Faktoren

$$\widehat{f}_{j-1}^{-1} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{J-1}^{-1} = \left( \prod_{k=j-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} - \prod_{k=j-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, 1 - \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} \right)$$

erfüllt ist. Mit (48), (129) und (130) erhält man:

$$\begin{aligned}
& \widehat{f}_{j-1}^{-1} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{j-1}^{-1} = \widehat{f}_{j-1}^{-1} \otimes \widehat{f}_j^{-1} \otimes \dots \otimes \widehat{f}_{j-1}^{-1} \\
& = \widehat{f}_{j-1}^{-1} \otimes \left( \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, 1 - \widehat{\beta}_j^{(CL)} \right) \\
& = \left( \widehat{f}_{j-1}^{-1} \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{l}_{\widehat{f}_{j-1}} \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k} + \widehat{f}_{j-1}^{-1} \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}} \right) - \widehat{l}_{\widehat{f}_{j-1}} \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}} \right), \right. \\
& \quad \left. \widehat{r}_{\widehat{f}_{j-1}} \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k} + \widehat{f}_{j-1}^{-1} \left( \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k - \widehat{l}_{\widehat{f}_k}} - \widehat{\beta}_j^{(CL)} \right) + \widehat{r}_{\widehat{f}_{j-1}} \left( \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k - \widehat{l}_{\widehat{f}_k}} - \widehat{\beta}_j^{(CL)} \right) \right) \\
& = \left( \prod_{k=j-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} - \left( \widehat{f}_{j-1}^{-1} - \widehat{l}_{\widehat{f}_{j-1}} \right) \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, \left( \widehat{f}_{j-1}^{-1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{j-1}} \right) \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k - \widehat{l}_{\widehat{f}_k}} - \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} \right) \\
& = \left( \prod_{k=j-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} - \left( \frac{1}{\widehat{f}_{j-1}} - \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_{j-1}}}{\widehat{f}_{j-1}^2} + \frac{\widehat{r}_{\widehat{f}_{j-1}}^2}{\widehat{f}_{j-1} (\widehat{f}_{j-1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{j-1}})} \right) \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, \right. \\
& \quad \left. \left( \frac{1}{\widehat{f}_{j-1}} + \frac{\widehat{l}_{\widehat{f}_{j-1}}}{\widehat{f}_{j-1}^2} + \frac{\widehat{l}_{\widehat{f}_{j-1}}^2}{\widehat{f}_{j-1} (\widehat{f}_{j-1} - \widehat{l}_{\widehat{f}_{j-1}})} \right) \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k - \widehat{l}_{\widehat{f}_k}} - \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} \right) \\
& = \left( \prod_{k=j-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} - \left( \frac{1}{\widehat{f}_{j-1} + \widehat{r}_{\widehat{f}_{j-1}}} \right) \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, \left( \frac{1}{\widehat{f}_{j-1} - \widehat{l}_{\widehat{f}_{j-1}}} \right) \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k - \widehat{l}_{\widehat{f}_k}} - \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} \right) \\
& = \left( \prod_{k=j-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k}, \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} - \prod_{k=j-1}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}}, 1 - \widehat{\beta}_{j-1}^{(CL)} \right)
\end{aligned}$$

□

Um den Schätzer für den unscharfen Parameter  $\widetilde{\kappa}$  zu erhalten, ist

$$\widehat{\kappa} = \left( \sum_{i=0}^I C_{i,I-i}, 0, 0 \right) \otimes \left( \widetilde{v}_0 \otimes \widehat{\beta}_I^{(CL)} \oplus \dots \oplus \widetilde{v}_I \otimes \widehat{\beta}_0^{(CL)} \right) \quad (131)$$

zu berechnen<sup>22</sup>. Die Volumenmaße sind gemäß den Modellannahmen 4.6 positive unscharfe Zahlen und auch für die gewählten Schätzer  $\widehat{\beta}_j^{(CL)}$  ist sichergestellt, dass es sich bei ihnen um positive unscharfe Zahlen handelt:

$$\widehat{\beta}_j^{(CL)} - \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} = \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k} - \left( \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k} - \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}} \right) = \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k + \widehat{r}_{\widehat{f}_k}} > 0, \quad j = 0, \dots, J$$

<sup>22</sup>Die vorliegenden Beobachtungen werden als scharf unterstellt, weshalb es sich bei den aktuellen Schadenständen  $C_{i,I-i}$  um scharfe Zahlen handelt.

Die Multiplikation der positiven unscharfen Zahlen  $\tilde{v}_i$  und  $\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}$  erfolgt mit Hilfe der Sekantenapproximation (siehe (48)). So ergibt sich für den Nenner in (131):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0 \otimes \hat{\beta}_I^{(CL)} \oplus \dots \oplus \tilde{v}_I \otimes \hat{\beta}_0^{(CL)} &= \left( \sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}, \sum_{i=0}^I \left( l_{v_i} \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + v_i \hat{l}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} - l_{v_i} \hat{l}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right), \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=0}^I \left( r_{v_i} \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \right) \\ &= \left( \sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}, \sum_{i=0}^I \left( l_{v_i} \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + v_i \hat{l}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} - l_{v_i} \hat{l}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right), \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right) \right) \end{aligned}$$

Zur Division wird die Approximation in (54) genutzt, so dass schließlich der dreieckförmige unscharfe Schätzer  $\hat{\kappa} = (\hat{\kappa}, \hat{l}_{\hat{\kappa}}, \hat{r}_{\hat{\kappa}})$  mit dem Modalwert

$$\hat{\kappa} = \frac{\sum_{i=0}^I C_{i,I-i}}{\sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}, \quad (132)$$

der linken Spannweite

$$\begin{aligned} \hat{l}_{\hat{\kappa}} &= \frac{\sum_{i=0}^I C_{i,I-i} \sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right) \left( 1 - \frac{\sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right)}{\sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + \sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right)} \right)}{\left( \sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^I C_{i,I-i} \sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right) \sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}{\sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + \sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right)} \\ &\quad \left( \sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right)^2 \\ &= \frac{\hat{\kappa} \sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right)}{\sum_{i=0}^I v_i \hat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + \sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right)} = \frac{\hat{\kappa} \sum_{i=0}^I \left( v_i \hat{r}_{\hat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right)}{\sum_{i=0}^I (v_i + r_{v_i})} \quad (133) \end{aligned}$$

und der rechten Spannweite

$$\begin{aligned}
\widehat{r}_{\widehat{\kappa}} &= \frac{\sum_{i=0}^I C_{i,I-i} \sum_{i=0}^I \left( l_{v_i} \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + v_i \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} - l_{v_i} \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right)}{\sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \\
&\quad 1 + \frac{\sum_{i=0}^I \left( l_{v_i} \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + v_i \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} - l_{v_i} \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right)}{\sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} - \sum_{i=0}^I \left( l_{v_i} \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + v_i \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} - l_{v_i} \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right)} \\
&\quad \times \frac{\sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}{\sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^I C_{i,I-i} \sum_{i=0}^I \left( l_{v_i} \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + v_i \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} - l_{v_i} \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}{\sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} - \sum_{i=0}^I \left( l_{v_i} \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + v_i \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} - l_{v_i} \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right)} \\
&\quad \left( \sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right)^2 \\
&= \frac{\widehat{\kappa} \sum_{i=0}^I \left( v_i \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + l_{v_i} \left( \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} - \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \right)}{\sum_{i=0}^I \left( v_i \left( \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} - \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) - l_{v_i} \left( \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} - \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \right)} \tag{134}
\end{aligned}$$

resultiert. Wegen

$$\widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} = 1 - \widehat{\beta}_j^{(CL)} = 1 - \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\widehat{f}_k} = 1 - \prod_{k=j}^{J-1} \frac{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k}}{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k+1}} < 1$$

für alle  $j = 0, \dots, J$  gilt

$$\sum_{i=0}^I v_i > \sum_{i=0}^I v_i \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}$$

und somit ist sichergestellt, dass es sich auch bei dem Schätzer  $\widehat{\kappa}$  um eine positive un-scharfe Zahl handelt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\kappa} - \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} &= \widehat{\kappa} \left( 1 - \frac{\sum_{i=0}^I \left( v_i \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + r_{v_i} \right)}{\sum_{i=0}^I (v_i + r_{v_i})} \right) \\
&= \frac{\sum_{i=0}^I C_{i,I-i}}{\sum_{i=0}^I v_i \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \left( 1 - \frac{\sum_{i=0}^I v_i \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \sum_{i=0}^I r_{v_i}}{\sum_{i=0}^I v_i + \sum_{i=0}^I r_{v_i}} \right) > 0
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der ermittelten Schätzer können dann die zukünftigen Schadenzahlungen prognostiziert werden. Analog zu (36) im scharfen CC-Verfahren sind die Prädiktoren für die zukünftigen kumulierten Schadenzahlungen durch

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_{i,j} &= C_{i,I-i} \oplus \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} \ominus \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\kappa} \otimes \widetilde{v}_i \\
&= C_{i,I-i} \oplus \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}, \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}, \widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \otimes \widehat{\kappa} \otimes \widetilde{v}_i
\end{aligned}$$

für  $i + j > I$  gegeben. Die Multiplikation erfolgt wieder mit Hilfe der Approximation in (48), so dass für  $\widehat{C}_{i,j}$  die dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{C}_{i,j} = \left( \widehat{C}_{i,j}, \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,j}}, \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,j}} \right)$  mit

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_{i,j} &= C_{i,I-i} + \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \widehat{\kappa} v_i \\
\widehat{l}_{\widehat{C}_{i,j}} &= \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \left( v_i \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} l_{v_i} - \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} l_{v_i} \right) \\
&\quad + \widehat{\kappa} v_i \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) - \left( v_i \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} l_{v_i} - \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} l_{v_i} \right) \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \\
&= \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} - \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} - \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \left( v_i \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} l_{v_i} - \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} l_{v_i} \right) + \widehat{\kappa} v_i \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \\
&= \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \widehat{\kappa} v_i - \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \left( v_i \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} l_{v_i} - \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} l_{v_i} \right) \\
\widehat{r}_{\widehat{C}_{i,j}} &= \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \left( v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i} \right) + \widehat{\kappa} v_i \left( \widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \\
&\quad + \left( v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i} \right) \left( \widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \\
&= \left( \widehat{\beta}_j^{(CL)} - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \left( v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i} \right) + \widehat{\kappa} v_i \left( \widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} + \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \\
&= \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_j^{(CL)}} \right) \widehat{\kappa} v_i + \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \left( v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i} \right)
\end{aligned}$$

resultiert. Zieht man von dem prognostizierten unscharfen Endschadenstand den aktuellen Schadenstand des entsprechenden Anfalljahres ab, erhält man die unscharfe Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

$$\widehat{R}_i = C_{i,I-i} \oplus \left( \widehat{\beta}_J^{(CL)} \ominus \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\kappa} \otimes \widetilde{v}_i \ominus C_{i,I-i} = \left( (1, 0, 0) \ominus \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \otimes \widehat{\kappa} \otimes \widetilde{v}_i$$

Für diese ergibt sich die dreieckförmige unscharfe Zahl  $\widehat{R}_i = \left( \widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i} \right)$  mit:

$$\widehat{R}_i = \left( \widehat{\beta}_J^{(CL)} - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \widehat{\kappa} v_i = \left( 1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \widehat{\kappa} v_i \quad (135)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{l}_{\widehat{R}_i} &= \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_J^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \widehat{\kappa} v_i - \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_J^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_J^{(CL)}} \right) \left( v_i \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} l_{v_i} - \widehat{l}_{\widehat{\kappa}} l_{v_i} \right) \\
&= \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \widehat{\kappa} v_i = \left( 1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)} \right) \widehat{\kappa} v_i \quad (136)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{r}_{\widehat{R}_i} &= \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_J^{(CL)}} \right) \widehat{\kappa} v_i + \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \left( v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i} \right) \\
&= \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \widehat{\kappa} v_i + \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) \left( v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i} \right) \quad (137)
\end{aligned}$$

Werden dann noch die unscharfen Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  aufaddiert, resultiert die unscharfe Gesamtreserve  $\widehat{\widehat{R}} = (\widehat{R}, \widehat{l}_{\widehat{R}}, \widehat{r}_{\widehat{R}})$  mit:

$$\begin{aligned}\widehat{R} &= \sum_{i=1}^I \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\kappa} v_i \\ \widehat{l}_{\widehat{R}} &= \sum_{i=1}^I \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\kappa} v_i \\ \widehat{r}_{\widehat{R}} &= \sum_{i=1}^I \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \widehat{\kappa} v_i + \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}\right) (v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i})\right)\end{aligned}$$

Die Transformation der unscharfen Schadenreserven in scharfe Zahlen erfolgt, wie auch in den Abschnitten 4.2.1 und 4.3.1, mit Hilfe des Erwartungswertes unscharfer Zahlen. Für diesen gilt der folgende Satz:

**Satz 4.10** Der Erwartungswert der dreieckförmigen unscharfen Schadenreserve  $\widehat{\widehat{R}}_i = (\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$  mit  $\widehat{R}_i$  gemäß (135),  $\widehat{l}_{\widehat{R}_i}$  gemäß (136) und  $\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$  gemäß (137) ist durch

$$\mathbb{E}_{\delta}[\widehat{\widehat{R}}_i] = \frac{1}{2} \left( \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\kappa} v_i + \delta \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}\right) (\widehat{\kappa} v_i + v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i}) \right)$$

mit  $\delta \in [0, 1]$  und  $i = 1, \dots, I$  gegeben<sup>23</sup>.

**Beweis:** Mit Definition 3.19, (125) und (126) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\delta}[\widehat{\widehat{R}}_i] &= (1 - \delta) \int_0^1 \left(\widehat{R}_i - (1 - \alpha) \widehat{l}_{\widehat{R}_i}\right) d\alpha + \delta \int_0^1 \left(\widehat{R}_i + (1 - \alpha) \widehat{r}_{\widehat{R}_i}\right) d\alpha \\ &= (1 - \delta) \int_0^1 \left(\alpha \widehat{l}_{\widehat{R}_i}\right) d\alpha + \delta \int_0^1 \left(\widehat{R}_i + (1 - \alpha) \widehat{r}_{\widehat{R}_i}\right) d\alpha \\ &= (1 - \delta) \left(\frac{1}{2} \alpha^2 \widehat{l}_{\widehat{R}_i}\right) \Big|_0^1 + \delta \left(\alpha \widehat{R}_i + \left(\alpha - \frac{1}{2} \alpha^2\right) \widehat{r}_{\widehat{R}_i}\right) \Big|_0^1 \\ &= (1 - \delta) \frac{1}{2} \widehat{R}_i + \delta \left(\widehat{R}_i + \frac{1}{2} \widehat{r}_{\widehat{R}_i}\right) = \frac{1}{2} \left(\widehat{R}_i + \delta \left(\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\kappa} v_i + \delta \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}\right) (\widehat{\kappa} v_i + v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i}) \right) \quad \square\end{aligned}$$

Den Erwartungswert der Gesamtreserve erhält man wieder, indem die erwarteten Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre  $i = 1, \dots, I$  aufaddiert werden, da es sich bei dem Erwartungswert einer unscharfen Zahl um ein additives Maß handelt.

Um auch die Genauigkeit der prognostizierten ausstehenden Schadenverpflichtungen beurteilen zu können, wird zuletzt noch die Prognoseunsicherheit für einzelne sowie für

<sup>23</sup>Im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten wird hier der Parameter  $\delta$  statt des Parameters  $\beta$  verwendet, um ihn besser von den Parametern des Abwicklungsmusters unterscheiden zu können.

aggregierte Anfalljahre quantifiziert, wobei die Unsicherheit einer unscharfen Zahl – wie auch bei den Ansätzen in Abschnitt 4.2.1 und 4.3.1 – als Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion und der  $x$ -Achse gemessen wird. So ergibt sich für die Unsicherheit der Schadenreserve des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$ :

**Satz 4.11** Für die Unsicherheit der Schadenreserve  $\widehat{\widehat{R}}_i = (\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$  des Anfalljahres  $i = 1, \dots, I$  mit  $\widehat{R}_i$  gemäß (135),  $\widehat{l}_{\widehat{R}_i}$  gemäß (136) und  $\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$  gemäß (137) gilt, gegeben die Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$ :

$$U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}}_i | \mathcal{D}_I) = \frac{1}{2} \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) (\widehat{\kappa}v_i + v_i\widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa}r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}}r_{v_i}) \quad (138)$$

**Beweis:** Mit Definition 3.12 ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}}_i | \mathcal{D}_I) &= \int_{\widehat{R}_i - \widehat{l}_{\widehat{R}_i}}^{\widehat{R}_i} \left( 1 + \frac{x - \widehat{R}_i}{\widehat{l}_{\widehat{R}_i}} \right) dx + \int_{\widehat{R}_i}^{\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \left( 1 - \frac{x - \widehat{R}_i}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \right) dx \\ &= \int_0^{\widehat{R}_i} \frac{x}{\widehat{R}_i} dx + \int_{\widehat{R}_i}^{\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \left( 1 - \frac{x - \widehat{R}_i}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\widehat{R}_i} x^2 \Big|_0^{\widehat{R}_i} + \left( x - \frac{1}{2\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} x^2 + \frac{\widehat{R}_i}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} x \right) \Big|_{\widehat{R}_i}^{\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \\ &= \frac{\widehat{R}_i}{2} + \widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i} - \frac{(\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i})^2}{2\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} + \frac{\widehat{R}_i(\widehat{R}_i + \widehat{r}_{\widehat{R}_i})}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} - \widehat{R}_i + \frac{\widehat{R}_i^2}{2\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} - \frac{\widehat{R}_i^2}{\widehat{r}_{\widehat{R}_i}} \\ &= \frac{1}{2}\widehat{R}_i + \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{R}_i} \quad (139) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}\widehat{\kappa}v_i + \frac{1}{2} \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}\widehat{\kappa}v_i + \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) (v_i\widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa}r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}}r_{v_i}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \right) (\widehat{\kappa}v_i + v_i\widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa}r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}}r_{v_i}) \quad \square \end{aligned}$$

Die Unsicherheit der Gesamtreserve erhält man, indem die Werte der Unschärfemaße der Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre aufaddiert werden:

**Satz 4.12** Für die Unsicherheit der Gesamtreserve ist, gegeben die Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$ ,

$$U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}} | \mathcal{D}_I) = \sum_{i=1}^I U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}}_i | \mathcal{D}_I)$$

erfüllt, wobei  $U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}}_i | \mathcal{D}_I)$  durch (138) gegeben ist.

**Beweis:** Für die Unsicherheit der Gesamtreserve gilt entsprechend zu (139):

$$U_{DUZ}(\widehat{\widehat{R}} | \mathcal{D}_I) = \frac{1}{2}\widehat{R} + \frac{1}{2}\widehat{r}_{\widehat{R}}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
& U_{DUZ}(\widehat{R}|\mathcal{D}_I) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left(1 - \widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}\right) \widehat{\kappa} v_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \widehat{\kappa} v_i + \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}\right) (v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i})\right) \\
&= \sum_{i=1}^I \left(\frac{1}{2} \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \widehat{\kappa} v_i + \frac{1}{2} \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} \widehat{\kappa} v_i + \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}\right) (v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i})\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} \left(\widehat{l}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}} + \widehat{r}_{\widehat{\beta}_{I-i}^{(CL)}}\right) (\widehat{\kappa} v_i + v_i \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} + \widehat{\kappa} r_{v_i} + \widehat{r}_{\widehat{\kappa}} r_{v_i}) \\
&= \sum_{i=1}^I U_{DUZ}(\widehat{R}_i|\mathcal{D}_I)
\end{aligned}$$

erfüllt. □

#### 4.4.2 Anwendungsbeispiel

Im Folgenden wird ein Beispiel betrachtet, anhand dessen das im vorherigen Abschnitt vorgeschlagene unscharfe CC-Verfahren veranschaulicht wird. Dabei wird der gleiche Datensatz aus RADTKE & SCHMIDT (2012) wie in dem Beispiel zum unscharfen additiven Verfahren verwendet, um einen Vergleich der beiden Verfahren zu ermöglichen. Es werden also die gleichen Schadenzahlungen betrachtet – nur dass hier die kumulierten statt der inkrementellen Schadenzahlungen angegeben sind (siehe Tabelle 8 bzw. 14) – und auch die gleichen Modalwerte der asymmetrischen dreieckförmigen unscharfen Volumenmaße. Die zusätzlich festzulegenden Spannweiten der Volumenmaße sind eben-

Anfalljahr $i$	Abwicklungsjahr $j$						Volumenmaß		
	0	1	2	3	4	5	$v_i$	$l_{v_i}$	$r_{v_i}$
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483	4025	201,25	402,5
1	1113	2103	2774	3422	3844		4456	222,8	445,6
2	1265	2433	3233	3977			5315	265,75	531,5
3	1490	2873	3880				5986	299,3	598,6
4	1725	3261					6939	693,9	1387,8
5	1889						8158	815,8	1631,6

TABELLE 14: Beobachtete kumulierte Schadenzahlungen  $C_{i,j}$  ( $i + j \leq 5$ ) und unscharfe Volumenmaße  $\tilde{v}_i = (v_i, l_{v_i}, r_{v_i})$  mit  $i = 0, \dots, 5$

falls wie in dem Beispiel zum unscharfen additiven Verfahren gewählt worden. Die linke Spannweite beträgt also für das nullte bis dritte Anfalljahr jeweils 5% und für das vierte

und fünfte Anfalljahr 10% des Volumenmaßes des entsprechenden Anfalljahres und die rechte Spannweite ist für das nullte bis dritte Anfalljahr in Höhe von 10% und für die Anfalljahre 4 und 5 in Höhe von 20% des jeweiligen Volumenmaßes gewählt worden (siehe Abschnitt 4.3.2).

Um die zukünftigen, nicht beobachtbaren Schadenzahlungen mit dem unscharfen CC-Verfahren prognostizieren zu können, werden Schätzer für die unbekannt Parameter des Abwicklungsmusters  $\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_5$  und die globale Endschadenquote  $\tilde{\kappa}$  benötigt. Da das Abwicklungsmuster bei dem vorgeschlagenen Verfahren aus den geschätzten CL-Faktoren geschätzt wird, sind dafür als erstes die Schätzer für die unscharfen CL-Faktoren  $\tilde{f}_j, j = 0, \dots, 4$ , mit (128) zu bestimmen. Die resultierenden dreieckförmigen Schätzer  $\tilde{f}_j$ , d.h. die geschätzten Modalwerte sowie die geschätzten linken und rechten Spannweiten, sind in Tabelle 15 zu finden. Unter Verwendung dieser Schätzer können dann mit

$\tilde{f}_j$	Abwicklungsjahr $j$				
	0	1	2	3	4
$\hat{f}_j$	1,8995	1,3288	1,2321	1,12	1,0444
$\hat{l}_{\hat{f}_j}$	0,8995	0,3288	0,2321	0,12	0,0444
$\hat{r}_{\hat{f}_j}$	0,8995	0,3288	0,2321	0,12	0,0444

TABELLE 15: Unscharfe CL-Schätzer  $\tilde{f}_j = (\hat{f}_j, \hat{l}_{\hat{f}_j}, \hat{r}_{\hat{f}_j})$  mit  $j = 0, \dots, 4$

Hilfe von Satz 4.9 Schätzer für die unscharfen Parameter  $\tilde{\beta}_j$  für alle Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, 5$  ermittelt werden. Diese Schätzer sind in Tabelle 16 angegeben. Im Gegen-

$\tilde{\beta}_j^{(CL)}$	Abwicklungsjahr $j$					
	0	1	2	3	4	5
$\hat{\beta}_j^{(CL)}$	0,2749	0,5222	0,6939	0,8549	0,9575	1
$\hat{l}_{\hat{\beta}_j^{(CL)}}$	0,1659	0,217	0,188	0,1142	0,039	0
$\hat{r}_{\hat{\beta}_j^{(CL)}}$	0,7251	0,4778	0,3061	0,1451	0,0425	0

TABELLE 16: Unscharfe Schätzer  $\tilde{\beta}_j^{(CL)} = (\hat{\beta}_j^{(CL)}, \hat{l}_{\hat{\beta}_j^{(CL)}}, \hat{r}_{\hat{\beta}_j^{(CL)}})$  mit  $j = 0, \dots, 5$

satz zu den Schätzern für die unscharfen CL-Faktoren sind sie durch die Kehrwertbildung und Multiplikation nicht mehr symmetrisch, die geschätzten linken und die geschätzten rechten Spannweiten (siehe zweite bzw. dritte Zeile) weichen also voneinander ab. Mit ihrer Hilfe kann dann wiederum die globale Endschadenquote  $\tilde{\kappa}$  geschätzt werden. Gemäß (132), (133) und (134) ergibt sich für die unscharfe CC-Endschadenquote die folgende

dreieckförmige unscharfe Zahl:

$$\widehat{\kappa} = (0,8897; 0,3798; 0,304)$$

Damit liegen alle erforderlichen Schätzer vor, um die zukünftigen Schadenzahlungen prognostizieren zu können. Die dreieckförmigen Prädiktoren  $\widehat{C}_{i,j}$  mit  $i + j > I$ , die sich für die kumulierten Schadenzahlungen ergeben, sind in Tabelle 17 angegeben. Während

$\widehat{C}_{i,j}$	Abwicklungsjahr $j$				
	1	2	3	4	5
$\widehat{C}_{1,j}$					4012
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{1,j}}$					168
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{1,j}}$					308
$\widehat{C}_{2,j}$				4462	4663
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{2,j}}$				695	686
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{2,j}}$				1324	1123
$\widehat{C}_{3,j}$			4738	5284	5510
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{3,j}}$			1610	1640	1630
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{3,j}}$			3026	2480	2253
$\widehat{C}_{4,j}$		4321	5315	5949	6211
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{4,j}}$		2633	2880	2947	2950
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{4,j}}$		5846	4852	4218	3956
$\widehat{C}_{5,j}$	3684	4930	6099	6843	7152
$\widehat{l}_{\widehat{C}_{5,j}}$	4396	4891	5181	5260	5263
$\widehat{r}_{\widehat{C}_{5,j}}$	8616	7370	6201	5457	5148

TABELLE 17: Prognostizierte kumulierte Schadenzahlungen  $\widehat{C}_{i,j} = (\widehat{C}_{i,j}, \widehat{l}_{\widehat{C}_{i,j}}, \widehat{r}_{\widehat{C}_{i,j}})$  mit  $i + j > 5$

die erste Zeile für jedes Anfalljahr die Modalwerte enthält, die mit den Ergebnissen des scharfen CC-Verfahrens bei entsprechender Schätzung des Abwicklungsmusters übereinstimmen, stehen in der jeweiligen zweiten bzw. dritten Zeile die linken bzw. rechten Spannweiten.

Durch Subtraktion des jeweiligen letzten beobachtbaren Schadenstands von den in Tabelle 17 angegebenen Prädiktoren der Endschadenstände erhält man die unscharfen dreieckförmigen Schadenreserven der Anfalljahre  $i = 1, \dots, 5$  und durch Addition dieser einzelnen Schadenreserven die unscharfe dreieckförmige Gesamtreserve (siehe Tabelle 18). Vergleicht man diese unscharfen Schadenreserven mit denjenigen, die sich in dem Beispiel zum unscharfen additiven Verfahren ergeben haben (siehe Tabelle 11), ist zu erkennen, dass die Modalwerte, die die beiden Verfahren liefern, für alle Anfalljahre nahe beieinander liegen. Die Spannweiten sind hier jedoch deutlich größer als beim unscharfen

Anfalljahr $i$	$\widehat{R}_i$	$\widehat{l}_{\widehat{R}_i}$	$\widehat{r}_{\widehat{R}_i}$
1	168	168	308
2	686	686	1 123
3	1 630	1 630	2 253
4	2 950	2 950	3 956
5	5 263	5 263	5 148
$\Sigma$	10 697	10 697	12 788

TABELLE 18: Unscharfe CC-Reserven  $\widehat{R}_i = (\widehat{R}_i, \widehat{l}_{\widehat{R}_i}, \widehat{r}_{\widehat{R}_i})$  mit  $i = 1, \dots, 5$

additiven Verfahren. Während die linke Spannweite der Schadenreserve bei dem unscharfen CC-Verfahren stets mit dem Modalwert übereinstimmt (siehe (135) und (136)) und die untere Grenze der unscharfen Schadenreserven somit stets durch Null gegeben ist, beträgt die linke Spannweite der Gesamtreserve beim unscharfen additiven Verfahren weniger als ein Fünftel des Modalwerts. Die rechte Spannweite der Gesamtreserve ist dort durch 2 578 gegeben, hier beträgt sie 12 788, ist also beinahe fünfmal so groß. Dementsprechend ist auch die Unsicherheit der Reserven, gemessen als Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion und der  $x$ -Achse, deutlich höher als beim unscharfen additiven Verfahren. Die Werte, die sich in diesem Beispiel mit Hilfe von Satz 4.11 für die Prognoseunsicherheit ergeben haben, sind in Tabelle 19 zu finden. In der unteren Zeile dieser Tabelle ist die

Anfalljahr $i$	$U_{DUZ}(\widehat{R}_i   \mathcal{D}_I)$
1	238,48
2	904,61
3	1 941,83
4	3 452,96
5	5 205,56
$\Sigma$	11 743,44

TABELLE 19: Prognoseunsicherheit  $U_{DUZ}(\widehat{R}_i | \mathcal{D}_I)$  mit  $i = 1, \dots, 5$  im unscharfen CC-Verfahren

Summe der berechneten Werte der Unschärfemaße der Schadenreserven der einzelnen Anfalljahre  $i = 1, \dots, 5$  angegeben, die gemäß Satz 4.12 der Unsicherheit der Gesamtreserve entspricht. Sie ist mehr als fünfmal so groß wie die Unsicherheit der Gesamtreserve im unscharfen additiven Verfahren (siehe Tabelle 13). Das unscharfe CC-Verfahren liefert also weniger aussagekräftige Ergebnisse. Betrachtet man die arithmetischen Operationen, die durchzuführen sind, um die Schadenreserve eines Anfalljahres zu erhalten, sieht man, dass hier für alle Anfalljahre mehr Multiplikationen sowie Divisionen unscharfer Zahlen erforderlich sind als beim unscharfen additiven Verfahren. Diese führen zu größeren

Spannweiten der Schadenreserven und somit zu einer höheren Prognoseunsicherheit. Die scharfen Schadenreserven, die sich durch Anwendung des Erwartungswertes unscharfer Zahlen (siehe Satz 4.10) ergeben, sind für verschiedene Werte des Parameters  $\delta \in [0, 1]$  in Tabelle 20 angegeben. Umso höher der Wert von  $\delta$  gewählt wird, desto höher

Anfalljahr $i$	$E_{\delta}[\widehat{R}_i]$				
	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,25$	$\delta = 0,5$	$\delta = 0,75$	$\delta = 0,9$
1	108	144	203	263	299
2	433	569	795	1021	1157
3	1009	1301	1786	2272	2563
4	1820	2338	3201	4065	4583
5	3152	3933	5234	6536	7316
$\Sigma$	6522	8285	11219	14157	15918

TABELLE 20: Erwartungswerte  $E_{\delta}[\widehat{R}_i]$  der CC-Reserven  $\widehat{R}_i$  mit  $i = 1, \dots, 5$  für verschiedene Werte des Parameters  $\delta \in [0, 1]$

ist die resultierende scharfe Reserve, da die rechte Grenze des  $\alpha$ -Schnitts mit steigendem  $\delta$  stärker gewichtet wird. Vergleicht man die defuzzifizierten Gesamtreserven in Tabelle 20 mit den entsprechenden Ergebnissen im unscharfen additiven Verfahren (siehe Tabelle 12), erkennt man, dass für eine Wahl von  $\beta = 0,1$  bzw.  $\delta = 0,1$  sowie  $\beta = 0,25$  bzw.  $\delta = 0,25$  die defuzzifizierte Gesamtreserve im unscharfen additiven Verfahren größer ist als im unscharfen CC-Verfahren. Wird der Parameter  $\beta$  bzw.  $\delta$  dagegen gleich 0,5, 0,75 oder 0,9 gewählt (wobei eine Wahl von mindestens 0,5 üblich ist), liefert das unscharfe CC-Verfahren eine größere defuzzifizierte Gesamtreserve. Ein konservativer Aktuar – ausgedrückt durch die Wahl eines hohen Parameters  $\beta$  bzw.  $\delta$  – wird bei Verwendung des unscharfen additiven Verfahrens also geringere Reserven für ausreichend erachten als bei Verwendung des unscharfen CC-Verfahrens.

#### 4.4.3 Kritische Würdigung

Das CC-Verfahren, von dem in Abschnitt 4.4.1 dieser Arbeit eine unscharfe Version vorgeschlagen wurde, ist ein populäres Schadenreservierungsverfahren, das sich insbesondere dadurch auszeichnet, dass bei ihm die Beobachtungen auf der Hauptdiagonalen robustifiziert werden, bevor sie zur Prognose der zukünftigen Schadenzahlungen genutzt werden. Dadurch besitzt das CC-Verfahren den großen Vorteil, dass es nicht sensitiv gegenüber Ausreißern im aktuellen Kalenderjahr ist. Bei dem vorgeschlagenen unscharfen

CC-Verfahren sind sowohl die Parameter des Abwicklungsmusters als auch die Volumenmaße als unscharfe Zahlen modelliert worden. Für die Parameter des Abwicklungsmusters sind, wie in praktischen Anwendungen üblich, keine a priori Schätzer genutzt worden, sondern sie sind unter Verwendung der geschätzten CL-Faktoren geschätzt worden. Da die geschätzten CL-Faktoren in der Praxis oftmals von den Aktuaren aufgrund ihrer persönlichen Erfahrung und subjektiven Einschätzung im Nachhinein angepasst werden, ist es naheliegend, diese Schätzer und dementsprechend auch die aus ihnen berechneten Schätzer des Abwicklungsmusters nicht als scharfe Zahlen, sondern als unscharfe Zahlen zu modellieren, um so die Unsicherheit erfassen zu können (siehe Abschnitt 4.2.1). Falls andere Schätzer für das Abwicklungsmuster als geeigneter erachtet werden, ist es natürlich auch möglich, das Abwicklungsmuster nicht mit Hilfe der geschätzten CL-Faktoren zu schätzen, sondern andere Schätzer heranzuziehen. Da es sich dann um vom Aktuar subjektiv festzulegende Schätzer handelt, ist es auch in diesem Fall äußerst sinnvoll, die Schätzer als unscharfe Zahlen zu modellieren.

Dies trifft entsprechend auch auf die vom Aktuar auszuwählenden Volumenmaße zu, die wie beim additiven Verfahren für alle Anfalljahre als bekannt vorausgesetzt werden. Durch die Modellierung der Volumenmaße als unscharfe Zahlen wird es ermöglicht, auch bezüglich ihnen Unsicherheit abzubilden und sie nicht nur in Form von exakten, sondern in Form von approximativen Werten anzugeben. Die Spannweiten der Volumenmaße wird der Aktuar in der Regel in Abhängigkeit davon, für wie aussagekräftig er die verwendeten Informationen erachtet, wählen. Für umso unsicherer sie erachtet werden, desto größer werden die Spannweiten im Allgemeinen gewählt. Beim CC-Verfahren werden die Volumenmaße des Öfteren als Prämien interpretiert. Falls keine Unsicherheit bezüglich ihnen vorliegt, können sie natürlich auch als scharfe Zahlen modelliert werden, da diese ein Spezialfall der betrachteten unscharfen Zahlen sind.

Sowohl die Volumenmaße als auch die Schätzer für die CL-Faktoren sind bei dem vorgeschlagenen Verfahren als unscharfe Zahlen mit einer dreieckförmigen Zugehörigkeitsfunktion unterstellt worden. Diese besitzen die Vorteile, dass sie gut interpretierbar sind, Berechnungen mit ihnen leicht durchgeführt werden können und sie vom Aktuar intuitiv festgelegt werden können. Eine mögliche Modifikation des Verfahrens wäre, unscharfe Zahlen mit einer anderen Form der Zugehörigkeitsfunktion zu verwenden. So könnten etwa die in Abschnitt 4.2.1 betrachteten quasi-exponentiellen unscharfen CL-Schätzer (sie-

he (114)), die Werten nahe dem Modalwert hohe Zugehörigkeitswerte zuweisen und dann nach links und rechts schnell abfallen, zur Schätzung des Abwicklungsmusters verwendet werden, falls diese passender sind. Genauso können natürlich auch für die Volumenmaße andere unscharfe Zahlen verwendet werden, wenn diese als geeigneter erachtet werden. Zudem wäre denkbar, die Schätzer für die CL-Faktoren, die zur Schätzung der Parameter des Abwicklungsmusters verwendet werden, als asymmetrische unscharfe Zahlen, gegebenenfalls in Kombination mit einer anderen Form der Zugehörigkeitsfunktion, zu modellieren. So müssten die linken und die rechten Spannweiten nicht stets übereinstimmen, sondern könnten wie bei den Volumenmaßen individuell angepasst werden.

In Abschnitt 4.4.1 konnte eine geschlossene Formel für die mit Hilfe der CL-Schätzer gemäß (128) geschätzten Parameter des Abwicklungsmusters hergeleitet werden<sup>24</sup>. Auch für die Prädiktoren der zukünftigen Schadenzahlungen sowie für die Schadenreserven sind geschlossene Formeln angegeben worden. Zudem sind, wie auch bei den Ansätzen in Abschnitt 4.2.1 und 4.3.1, die ermittelten unscharfen Schadenreserven defuzzifiziert worden und die Prognoseunsicherheit wurde für einzelne und aggregierte Anfalljahre quantifiziert. In dem Beispiel in Abschnitt 4.4.2 hat sich gezeigt, dass ein Nachteil des vorgeschlagenen unscharfen CC-Verfahrens ist, dass aufgrund der zugrunde liegenden arithmetischen Operationen recht große Spannweiten der Schadenreserven resultieren. Dementsprechend ist auch die Unsicherheit der Schadenreserven recht hoch. Das Verfahren liefert also nicht ganz so aussagekräftige Ergebnisse. Das in Abschnitt 4.3.1 vorgeschlagene unscharfe additive Verfahren, bei dem ebenfalls dreieckförmige unscharfe Zahlen verwendet wurden, konnte zu aufschlussreicheren Reserven führen.

In dem Beispiel hat sich auch gezeigt, dass die defuzzifizierten Schadenreserven, die sich durch Anwendung des Erwartungswertes unscharfer Zahlen ergeben, beim unscharfen CC-Verfahren größer sind als beim unscharfen additiven Verfahren, falls ein konservativer Aktuar – der einen hohen Wert des Parameters  $\beta$  bzw.  $\delta$  wählen wird – betrachtet wird. Solch ein Aktuar würde also, bei gleicher Risikoeinstellung, bei Verwendung des unscharfen additiven Verfahrens geringere Reserven für ausreichend erachten als bei Verwendung des unscharfen CC-Verfahrens. Mit dem unscharfen CC-Verfahren würde der Aktuar höhere Reserven ansetzen, was für das Versicherungsunternehmen kostspielig sein kann.

---

<sup>24</sup>Bei dem in Abschnitt 4.1.10 vorgestellten unscharfen BF-Verfahren ist ebenfalls vorgeschlagen worden, das Abwicklungsmuster mit Hilfe dieser CL-Schätzer zu schätzen, allerdings sind dort keine geschlossenen Formeln angegeben worden.

## 5 Schlussbetrachtung

In dieser Arbeit sind Anwendungen von unscharfen Methoden in der Schadenreservierung, einem der wichtigsten Gebiete der Versicherungsmathematik, untersucht worden. Nachdem in dem zweiten und dem dritten Kapitel zunächst alle relevanten Grundlagen der beiden Forschungsfelder, d.h. der Schadenreservierung und der Theorie unscharfer Mengen, zusammengefasst wurden, sind in Abschnitt 4.1 alle bisherigen Publikationen zu Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung in chronologischer Reihenfolge dargestellt, detailliert erläutert und zudem einer kritischen Würdigung unterzogen worden. Diese Dissertation stellt damit die erste Abhandlung in deutscher Sprache dar, die einen vollständigen Überblick über den aktuellen Forschungsstand in Bezug auf den Einsatz unscharfer Methoden in der Schadenreservierung liefert. Im Anschluss an den Literaturüberblick sind in den Abschnitten 4.2, 4.3 und 4.4 drei neue unscharfe Schadenreservierungsverfahren entwickelt worden, die zusätzliche Möglichkeiten bieten, Unschärfe bei der Bestimmung von Schadenreserven erfassen und modellieren zu können.

Das erste der vorgeschlagenen Verfahren wurde basierend auf der Beobachtung entwickelt, dass in ausnahmslos allen bisher erschienenen Veröffentlichungen im Bereich der unscharfen Schadenreservierung unscharfe Zahlen mit einer dreieckförmigen Zugehörigkeitsfunktion verwendet werden. Es wurde betont, dass dreieckförmige unscharfe Zahlen zwar positive Eigenschaften besitzen, dass jedoch in einigen Situationen durchaus unscharfe Zahlen mit einer anderen Form der Zugehörigkeitsfunktion passender sind. Daher sind statt dreieckförmigen unscharfen Zahlen quasi-exponentielle unscharfe Zahlen, also exponentielle unscharfe Zahlen mit einem endlichen Träger, verwendet worden, die insbesondere im Fall aussagekräftiger Daten geeignet sind. Die quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen sind bei dem vorgeschlagenen unscharfen Schadenreservierungsverfahren zur Modellierung der Abwicklungsfaktoren im CL-Verfahren genutzt worden. So können die CL-Schätzer Unsicherheit erfassen und sind flexibel, ohne dass sie – wie es in der Praxis ansonsten des Öfteren erfolgt – von den Aktuaren aufgrund ihrer subjektiven Einschätzung und persönlichen Erfahrung im Nachhinein noch angepasst werden. In dem Anwendungsbeispiel, anhand dessen das vorgeschlagene Verfahren veranschaulicht und mit dem Verfahren von HEBERLE & THOMAS (2014), bei dem die CL-Faktoren als dreieckförmige unscharfe Zahlen modelliert werden, verglichen wurde, hat sich gezeigt, dass die

Verwendung von quasi-exponentiellen statt dreieckförmigen unscharfen Zahlen zu einer deutlichen Reduktion der Prognoseunsicherheit führen kann. Man kann also wesentlich aufschlussreichere Ergebnisse erhalten.

Den beiden anderen in dieser Arbeit vorgeschlagenen Verfahren, dem unscharfen additiven Verfahren und dem unscharfen Cape-Cod-Verfahren, liegt die Idee zugrunde, verwendete Informationen, die nicht in dem Abwicklungsdreieck enthalten, sondern zusätzlich vom Aktuar auszuwählen sind, als unscharfe Zahlen zu modellieren. Da solche Informationen oftmals mit Unschärfe behaftet sind, ist dies eine sehr hilfreiche Erweiterung. Bei dem additiven Verfahren und dem CC-Verfahren sind es die Volumenmaße, bei denen es sich um externe Informationen, wie etwa Expertenwissen oder Informationen aus Marktstatistiken oder aus vergleichbaren Portfolios, handelt und die daher fuzzifiziert werden. Die linken und die rechten Spannweiten der Volumenmaße können bei den in dieser Arbeit entwickelten unscharfen Versionen der beiden Verfahren ebenso wie die Modalwerte je nach subjektiver Einschätzung vom Aktuar festgelegt werden. Dabei wurde erläutert, dass der Aktuar die Spannweiten in der Regel in Abhängigkeit davon wählen wird, woher die Informationen stammen und für wie aussagekräftig er die verwendeten Informationen erachtet. Bei dem vorgeschlagenen unscharfen CC-Verfahren sind neben den Volumenmaßen zudem auch die Parameter des Abwicklungsmusters als unscharfe Zahlen modelliert worden, so dass bei diesem Verfahren auch Unsicherheit bezüglich des Abwicklungsmusters berücksichtigt werden kann. Wie in praktischen Anwendungen üblich, sind für das Abwicklungsmuster keine a priori Schätzer genutzt worden, sondern es ist unter Verwendung der geschätzten CL-Faktoren geschätzt worden. Da die geschätzten CL-Faktoren in der Praxis oftmals von den Aktuaren aufgrund ihrer persönlichen Erfahrung und subjektiven Einschätzung im Nachhinein angepasst werden, ist es sinnvoll, diese Schätzer und dementsprechend auch die aus ihnen berechneten Schätzer des Abwicklungsmusters nicht als scharfe Zahlen, sondern als unscharfe Zahlen zu modellieren, um so die Unsicherheit erfassen zu können.

In dieser Arbeit ist betont worden, dass die mit Hilfe eines unscharfen Schadenreservierungsverfahrens ermittelte unscharfe Schadenreserve zum Schluss noch in eine scharfe Zahl transformiert werden sollte, damit sie in der Bilanz ausgewiesen werden kann, und dass auch bei unscharfen Schadenreservierungsverfahren – wie bei stochastischen Schadenreservierungsverfahren – stets die Unsicherheit der Schadenreserve quantifiziert wer-

den sollte, um die Genauigkeit der Prognose beurteilen zu können. Es hat sich jedoch gezeigt, dass insbesondere die Quantifizierung der Prognoseunsicherheit in vielen der bisher erschienenen Artikel im Bereich der unscharfen Schadenreservierung versäumt wurde. Bei allen drei in dieser Arbeit vorgeschlagenen Verfahren ist die Prognoseunsicherheit für einzelne und aggregierte Anfalljahre quantifiziert worden und die unscharfen Schadenreserven sind mit Hilfe des Erwartungswertes unscharfer Zahlen defuzzifiziert worden. Der Erwartungswert unscharfer Zahlen findet bei den meisten unscharfen Schadenreservierungsverfahren, bei denen eine Defuzzifikation stattfindet, Anwendung und wurde daher zur besseren Vergleichbarkeit und aufgrund seiner positiven Eigenschaften auch in dieser Arbeit gewählt.

Generell ist festzuhalten, dass neben Unsicherheit aufgrund von Zufall, die von den stochastischen Schadenreservierungsverfahren berücksichtigt werden kann, auch Unsicherheit aufgrund von Unschärfe eine zentrale Rolle in der Schadenreservierung spielt, da ebenso wie in zahlreichen weiteren Bereichen der Versicherungswissenschaft auch in der Schadenreservierung subjektive Beurteilungen und die Erfahrung sowie Intuition der Aktuarien große Relevanz besitzen. Unscharfe Methoden sind daher prädestiniert für einen Einsatz in der Schadenreservierung und die in dieser Arbeit vorgestellten und neu entwickelten Schadenreservierungsverfahren, die Unsicherheit in Form von Unschärfe einbeziehen können, stellen eine ausgesprochen sinnvolle Ergänzung zu den gewöhnlichen statistischen Schadenreservierungsverfahren dar.

Es ist in dieser Arbeit deutlich geworden, dass es sich bei der unscharfen Schadenreservierung um ein zentrales und aktuelles Forschungsthema handelt. Ein Thema einer zukünftigen Publikation könnte etwa die Quantifizierung des einjährigen Reserverisikos sein. Das einjährige Reserverisiko kann über die Unsicherheit des sogenannten Abwicklungsergebnisses, das die Veränderung der versicherungstechnischen Verpflichtungen im kommenden Kalenderjahr angibt, gemessen werden und ist von Interesse, da es dem Einjahreshorizont aktueller Solvenzanforderungen Rechnung trägt. Im Rahmen von unscharfen Schadenreservierungsverfahren ist es bisher allerdings noch nicht betrachtet worden. Zudem könnten noch weitere Schadenreservierungsverfahren dahingehend modifiziert werden, dass statt dreieckförmigen unscharfen Zahlen unscharfe Zahlen mit einer anderen Form der Zugehörigkeitsfunktion verwendet werden. So würden sich die in dieser Arbeit erstmalig herangezogenen quasi-exponentiellen unscharfen Zahlen auch für ande-

re Anwendungen eignen oder es könnten noch andere unscharfe Zahlen, wie zum Beispiel quadratische oder Gaußsche unscharfe Zahlen, verwendet werden.

Eine weitere Idee wäre, Methoden des maschinellen Lernens, die aktuell sehr viel Aufmerksamkeit erfahren, in der unscharfen Schadenreservierung einzusetzen. Von BASER & APAYDIN ist beispielsweise ein Ansatz entwickelt worden, bei dem die populären Support Vector Machines mit unscharfer Regression kombiniert werden (vgl. Baser & Apaydin (2015)). In dieser Arbeit hat sich gezeigt, dass bei vielen unscharfen Schadenreservierungsverfahren unscharfe Regressionsverfahren Anwendung finden, so dass in Erwägung gezogen werden könnte, etwa auch den von BASER & APAYDIN entwickelten Ansatz in der unscharfen Schadenreservierung zu nutzen. Es gibt also auch zukünftig noch viel Potential für neue Ansätze sowie Modifikationen und Erweiterungen bisheriger Verfahren.

## Literaturverzeichnis

- Apaydin, A. & Baser, F. (2010): *Hybrid fuzzy least-squares regression analysis in claims reserving with geometric separation method*. Insurance: Mathematics and Economics, 47/2, S. 113-122.
- Apollinaire, W., Le Doux, M. B. M. & Ronald, W. M. (2019a): *A Fuzzy Least-Squares Estimation of a Hybrid Log-Poisson Regression and Its Goodness of Fit for Optimal Loss Reserves in Insurance*. International Journal of Fuzzy Systems, 21/3, S. 930-944.
- Apollinaire, W., Le Doux, M. B. M. & Ronald, W. M. (2019b): *An Estimation of a Hybrid Log-Poisson Regression Using a Quadratic Optimization Program for Optimal Loss Reserving in Insurance*, Advances in Fuzzy Systems 2019.
- Bahrami, T. & Bahrami, M. (2015): *Claim reserving with fuzzy regression*. Cumhuriyet Science Journal, 36/3, S. 704-709.
- Bandemer, H. & Gottwald, S. (1993): *Einführung in FUZZY-Methoden*. Akademie Verlag, Berlin. 4. Auflage.
- Baser, F. & Apaydin, A. (2015): *Hybrid fuzzy support vector regression analysis*. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 28/5, S. 2037-2045.
- Baser, F. & Apaydin, A. (2010): *Calculating insurance claim reserves with hybrid fuzzy least squares regression analysis*. Gazi University Journal of Science, 23/2, S. 163-170.
- Bellman, R. E. & Giertz, M. (1973): *On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets*. Information Science, 5, S. 149-156.
- Benjamin, S. & Eagles, L. M. (1986): *Reserves in Lloyd's and the London market*. Journal of the Institute of Actuaries, 113/2, S. 197-256.
- Bornhuetter, R. L. & Ferguson, R. E. (1972): *The Actuary and IBNR*. Proc. CAS, 59, S. 181-195.
- Bothe, H.-H. (1993): *Fuzzy Logic*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Buckley, J. J. (2006): *Fuzzy probability and statistics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

- Bühlmann, H. & Straub, E. (1983): *Estimation of IBNR reserves by the methods chain ladder, Cape Cod and complementary loss ratio*. International Summer School 1983, unveröffentlicht.
- Cantor, G. (1895): *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Mathematische Annalen, 46/4, S. 481-512.
- Chang, Y.-H. O. (2001): *Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures*. Fuzzy Sets and Systems, 119/2, S. 225-246.
- Chang, Y.-H. O. & Ayyub, B. M. (2001): *Fuzzy regression methods - a comparative assessment*. Fuzzy Sets and Systems, 119/2, S. 187-203.
- Chen, F., Chen, Y., Zhou, J. & Liu, Y. (2016): *Optimizing h value for fuzzy linear regression with asymmetric triangular fuzzy coefficients*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 47, S. 16-24.
- De Andrés Sánchez, J. (2014): *Fuzzy claim reserving in non-life insurance*. Computer Science and Information Systems, 11/2, S. 825-838.
- De Andrés Sánchez, J. (2012): *Claim reserving with fuzzy regression and the two ways of ANOVA*. Applied Soft Computing, 12/8, S. 2435-2441.
- De Andrés Sánchez, J. (2007): *Claim reserving with fuzzy regression and Taylor's geometric separation method*. Insurance: Mathematics and Economics, 40/1, S. 145-163.
- De Andrés Sánchez, J. (2006): *Calculating insurance claim reserves with fuzzy regression*. Fuzzy Sets and Systems, 157/23, S. 3091-3108.
- De Andrés Sánchez, J. & Terceño Gómez, A. (2003): *Applications of fuzzy regression in actuarial analysis*. Journal of Risk and Insurance, 70/4, S. 665-699.
- De Campos Ibáñez, L. M. & Muñoz, A. G. (1989): *A subjective approach for ranking fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems, 29/2, S. 145-153.
- Delgado, M., Vila, M. A. & Voxman, W. (1998): *On a canonical representation of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems, 93/1, S. 125-135.

- De Luca, A. & Termini, S. (1972): *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control, 20/4, S. 301-312.
- De Wit, G. W. (1982): *Underwriting and uncertainty*. Insurance: Mathematics and Economics, 1/4, S. 277-285.
- Dubois, D. & Prade, H. (1993): *Fuzzy numbers: an overview*. In: Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems, Hrsg.: Dubois, D., Prade, H. & Yager, R.R., Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, S. 112-148.
- Dubois, D. & Prade, H. (1980): *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York.
- Dubois, D. & Prade, H. (1979): *Fuzzy real algebra: Some results*. Fuzzy Sets and Systems, 2/4, S. 327-348.
- Dubois, D. & Prade, H. (1978): *Operations on Fuzzy Numbers*. International Journal of Systems Science, 9/6, S. 613-626.
- D'Urso, P. & Gastaldi, T. (2001): *Linear Fuzzy Regression Analysis with Asymmetric Spreads*. In: Advances in Classification and Data Analysis, Hrsg.: Borra S., Rocci R., Vichi M. & Schader M., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, S. 257-264.
- Elpidorou, V., Margraf, C., Martínez-Miranda, M. D. & Nielsen, B. (2019): *A likelihood approach to Bornhuetter-Ferguson analysis*. Risks, 7/4, S. 1-20.
- Goovaerts, M. J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A. E. & Bauwelinckx, T. (1990): *Effective actuarial methods*. North-Holland, Amsterdam.
- Hachemeister, C. A. & Stanard, J. N. (1975): *IBNR Claims Count Estimation with Static Lag Functions*. ASTIN Colloquium 1975, Portimão, Portugal.
- Hanss, M. (2005): *Applied Fuzzy Arithmetic - An introduction with Engineering Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Heberle, J. & Thomas, A. (2016): *The fuzzy Bornhuetter-Ferguson method: an approach with fuzzy numbers*. Annals of Actuarial Science, 10/2, S. 303-321.

- Heberle, J. & Thomas, A. (2014): *Combining chain-ladder claims reserving with fuzzy numbers*. Insurance: Mathematics and Economics, 55, S. 96-104.
- Hojati, M., Bector, C. R. & Smimou, K. (2005): *A simple method for computation of fuzzy linear regression*. European Journal of Operational Research, 166/1, S. 172-184.
- Institute of Actuaries (1989): *Claims Reserving Manual*. Institute of Actuaries, London.
- Ishibuchi, H. & Nii, M. (2001): *Fuzzy regression using asymmetric fuzzy coefficients and fuzzified neural networks*. Fuzzy Sets and Systems, 119/2, S. 273-290.
- Jain, R. (1976): *Tolerance analysis using fuzzy sets*. International Journal of Systems Science, 7/12, S. 1393-1401.
- Kerkez, M. (2013a): *Fuzzy Regression Model Applied to the Incurred but not Reported Claims (IBNR)*. In: Recent Researches in Law Science and Finances, Hrsg.: Kalam-pouka, K. & Nastase, C., Proceedings of the 4th International Conference on Finance, Accounting and Law (ICFA '13), Chania, Greece, S. 216-221.
- Kerkez, M. (2013b): *Estimating Reserve for Incurred but not Reported (IBNR) Claims with Fuzzy Regression Model*. In: Advances in Accounting, Auditing and Risk Management, Hrsg.: Marascu-Klein, V., Proceedings of the 2nd International Conference on Finance, Accounting and Auditing (FAA '13), Brasov, Romania, S. 166-170.
- Kim, J. H. & Kim, J. (2014): *Fuzzy regression towards a general insurance application*. Journal of Application Mathematics & Informatics, 32/3-4, S. 343-357.
- Knopfmacher, J. (1975): *On measures of fuzziness*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 49/3, S. 529-534.
- Kremer, E. (1982): *IBNR-claims and the two-way model of ANOVA*. Scandinavian Actuarial Journal, 1982/1, S. 47-55.
- Linder, A. & Berchtold, W. (1982): *Statistische Methoden II Varianzanalyse und Regressionsrechnung*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- Loo, S. G. (1977): *Measure of fuzziness*. Cybernetica, 20, S. 201-210.

- Mack, T. (2006): *Parameter Estimation for Bornhuetter/Ferguson*. CAS Forum, Fall 2006, S. 141-157.
- Mack, T. (1993): *Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates*. ASTIN Bulletin, 23/2, S. 213-225.
- Merz, M. & Wüthrich, M. V. (2013): *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen*. Vahlen, München.
- Moskowitz, H. & Kim, K. (1993): *On assessing the H value in fuzzy linear regression*. Fuzzy Sets and Systems, 58/3, S. 303-327.
- Onoghojobi, B. & Olewuezi, N. P. (2015): *Addressing the Issue of Chain Ladder Forecasting using Fuzzy Regression Model*. Advances in Fuzzy Sets and Systems, 20/1, S. 7-24.
- Ostaszewski, K. (1993): *An investigation into possible applications of fuzzy set methods in actuarial science*. Society of Actuaries.
- Pal, N. R. & Bezdek, J. C. (1994): *Measuring fuzzy uncertainty*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2/2, S. 107-118.
- Quarg, G. & Mack, T. (2004): *Munich chain ladder*. Blätter der DGVMF, 26/4, S. 597-630.
- Radtke, M. & Schmidt, K. D. (2012): *Handbuch zur Schadenreservierung*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe. 2. Auflage.
- Saluz, A., Bühlmann, H., Gisler, A. & Moriconi, F. (2014): *Bornhuetter-Ferguson reserving method with repricing*. Verfügbar unter: <https://ssrn.com/abstract=2697167>.
- Shannon, C. E. (1948): *A Mathematical Theory of Communication*. Mobile Computing and Communications Review, 5/1, S. 1-55.
- Shapiro, A. F. (2009): *Fuzzy random variables*. Insurance: Mathematics and Economics, 44/2, S. 307-314.
- Shapiro, A. F. (2004a): *Fuzzy logic in insurance*. Insurance: Mathematics and Economics, 35/2, S. 399-424.

- Shapiro, A. F. (2004b): *Fuzzy regression and the term structure of interest rates revisited*. Proceedings of the 14th international AFIR colloquium, 1, S. 29-45.
- Sherman, R. E. (1984): *Extrapolating, smoothing and interpolating development factors*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 71, S. 122-155.
- Tanaka, H. & Ishibuchi, H. (1992): *A Possibilistic Regression Analysis Based on Linear Programming*. In: Fuzzy Regression Analysis, Hrsg.: Kacprzyk, J. & Fedrizzi, M., Physica-Verlag, Heidelberg, S. 47-60.
- Tanaka, H. & Watada, J. (1988): *Possibilistic linear systems and their application to the linear regression model*. Fuzzy Sets and Systems, 27/3, S. 275-289.
- Tanaka, H. (1987): *Fuzzy data analysis by possibilistic linear models*. Fuzzy Sets and Systems, 24/3, S. 363-375.
- Tanaka, H., Uegima, S. & Asai, K. (1982): *Linear regression analysis with fuzzy model*. IEEE Transaction Systems Man and Cybermatics, 12/6, S. 903-07.
- Taylor, G. C. (2018): *An Iterated Bornhuetter-Ferguson Model*. Verfügbar unter: <https://ssrn.com/abstract=3225556>.
- Taylor, G. C. & Ashe, F. R. (1983): *Second moments of estimates of outstanding claims*. Journal of Econometrics, 23/1, S. 37-61.
- Taylor, G. C. (1978): *Statistical testing of a non-life insurance run-off model*. In: Proceedings of the First Meeting of the Contact Group Actuarial Sciences, Hrsg.: De Vylder, F. E. & Goovaerts, M., S. 37-64.
- Taylor, G. C. (1977): *Separation of inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays*. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 9/1-2, S. 219-230.
- Thomas, A. (2017): *Fuzzy Set Theory with Applications in Claims Reserving*. Cuvillier Verlag, Göttingen.
- Van Eeghen, J. (1981): *Loss reserving methods*. Surveys of Actuarial Studies No. 1, Nationale-Nederlanden N.V., Rotterdam.

- Van Leekwijck, W. & Kerre, E. E. (1999): *Defuzzification: criteria and classification*. Fuzzy Sets and Systems, 108/2, S. 159-178.
- Wüthrich, M. V. (2018): *Neural networks applied to chain-ladder reserving*. European Actuarial Journal, 8/2, S. 407-436.
- Wüthrich, M. V. & Merz, M. (2008): *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. John Wiley & Sons, West Sussex.
- Yager, R. R. (1979): *On the measure of fuzziness and negation Part I: Membership in the unit interval*. International Journal of General Systems, 5, S. 221-229.
- Yakoubov, Y. H. & Haberman, S. (1998): *Review of actuarial applications of fuzzy set theory*. Actuarial Research Paper No. 105, City University London, Faculty of Actuarial Science & Insurance.
- Yan, C., Liu, Q., Liu, J., Liu, W., Li, M. & Qi, M. (2019): *Payments Per Claim Model of Outstanding Claims Reserve Based on Fuzzy Linear Regression*. International Journal of Fuzzy Systems, S. 1-11.
- Yan, C., Liu, Q., Dong, T. & Liu, W. (2018): *Payments Per Claim Method Based on Fuzzy Numbers*. In: 2018 14th International Conference on Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (ICNC-FSKD), IEEE, S. 643-648.
- Zadeh, L. A. (1975a): *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part I*. Information Sciences, 8/3, S. 199-249.
- Zadeh, L. A. (1975b): *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part II*. Information Sciences, 8/4, S. 301-357.
- Zadeh, L. A. (1975c): *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part III*. Information Sciences, 9/1, S. 43-80.
- Zadeh, L. A. (1965): *Fuzzy Sets*. Information and Control, 8/3, S. 338-353.
- Zhang, Y. (2010): *A general multivariate chain ladder model*. Insurance: Mathematics and Economics, 46/3, S. 588-599.
- Zimmermann, H.-J. (1996): *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London. 3. Auflage.

## Zusammenfassung

Subjektive Beurteilungen und die Erfahrung sowie Intuition der Aktuare besitzen große Relevanz in der Schadenreservierung und werden oftmals bei der Festsetzung von Schadenreserven berücksichtigt, weshalb Unsicherheit, die aus Unschärfe resultiert, eine zentrale Rolle in diesem Bereich spielt. Die gewöhnlichen statistischen Schadenreservierungsverfahren können Unsicherheit aufgrund von Unschärfe allerdings nicht einbeziehen, sondern hierzu werden Methoden aus dem Bereich der Theorie unscharfer Mengen benötigt. Solche Methoden sind daher prädestiniert für Anwendungen in der Schadenreservierung.

In dieser Arbeit ist zunächst ein vollständiger Überblick über den aktuellen Forschungsstand in Bezug auf den Einsatz unscharfer Methoden in der Schadenreservierung gegeben worden. Hierzu wurden die bisher erschienenen Veröffentlichungen in chronologischer Reihenfolge vorgestellt, detailliert erläutert und zudem einer kritischen Würdigung unterzogen. Im Anschluss wurden drei neue unscharfe Schadenreservierungsverfahren entwickelt, die zusätzliche Möglichkeiten bieten, Unschärfe bei der Bestimmung von Schadenreserven erfassen und modellieren zu können.

Bei dem ersten der vorgeschlagenen Verfahren handelt es sich um eine unscharfe Version des Chain-Ladder-Verfahrens, das sowohl in der Theorie als auch in der Praxis zu den populärsten Schadenreservierungsverfahren zählt. Dieses Verfahren wurde basierend auf der Beobachtung entwickelt, dass in ausnahmslos allen bisher erschienenen Veröffentlichungen im Bereich der unscharfen Schadenreservierung als unscharfe Zahlen dreieckförmige unscharfe Zahlen verwendet werden. Diese besitzen zwar positive Eigenschaften, in einigen Situationen sind jedoch durchaus unscharfe Zahlen mit einer anderen Form der Zugehörigkeitsfunktion geeigneter, weshalb bei dem vorgeschlagenen unscharfen Chain-Ladder-Verfahren statt dreieckförmigen unscharfen Zahlen quasi-exponentielle unscharfe Zahlen zur Modellierung der Chain-Ladder-Faktoren genutzt worden sind. Das Verfahren stellt damit die erste Anwendung im Bereich der unscharfen Schadenreservierung dar, bei der die Zugehörigkeitsfunktion der unscharfen Zahlen nicht dreieckförmig ist. Es hat sich gezeigt, dass die Verwendung von quasi-exponentiellen statt dreieckförmigen unscharfen Zahlen zur Modellierung der Chain-Ladder-Faktoren den Vorteil besitzt, dass dies zu einer erheblichen Reduktion der Prognoseunsicherheit führen kann und man somit wesentlich aufschlussreichere Ergebnisse erhalten kann.

Bei den beiden anderen in dieser Arbeit neu entwickelten Verfahren handelt es sich um unscharfe Versionen von zwei weiteren populären Schadenreservierungsverfahren, von dem additiven Verfahren und dem Cape-Cod-Verfahren. Diesen Verfahren liegt die Idee zugrunde, Informationen, die zusätzlich zu einem Abwicklungsdreieck eingehen und die vom Aktuar auszuwählen sind, als unscharfe Zahlen zu modellieren. Da solche Informationen oftmals mit Unschärfe behaftet sind, ist dies eine naheliegende und sinnvolle Erweiterung. Bei dem additiven Verfahren und dem Cape-Cod-Verfahren sind es die Volumenmaße, bei denen es sich um externe Informationen handelt und die daher fuzzifiziert werden. Dadurch wird es ermöglicht, Unsicherheit bezüglich der Volumenmaße abzubilden und bei der Bestimmung von Schadenreserven einzubeziehen. Bei dem unscharfen Cape-Cod-Verfahren sind neben den Volumenmaßen darüber hinaus auch die Parameter des Abwicklungsmusters als unscharfe Zahlen modelliert worden, so dass bei diesem Verfahren zudem Unsicherheit bezüglich des Abwicklungsmusters in seiner in praktischen Anwendungen üblicherweise verwendeten Form berücksichtigt werden kann.

Bei allen drei Verfahren sind die ermittelten unscharfen Schadenreserven zum Schluss defuzzifiziert worden, um scharfe Zahlen zu erhalten, die in der Bilanz ausgewiesen werden können. Des Weiteren wurde bei allen drei Verfahren die Prognoseunsicherheit für einzelne und aggregierte Anfalljahre quantifiziert. Dies ist von zentraler Bedeutung, um auch die Genauigkeit der Prognose beurteilen zu können, ist bei den meisten der bisherigen Publikationen, in denen unscharfe Methoden in der Schadenreservierung angewendet werden, jedoch versäumt worden.

Die in dieser Arbeit vorgestellten und neu entwickelten Schadenreservierungsverfahren, die es erlauben subjektive Einschätzungen formal zu integrieren und Unsicherheit in Form von Unschärfe einzubeziehen, stellen eine ausgesprochen sinnvolle Ergänzung zu den gewöhnlichen statistischen Schadenreservierungsverfahren dar.

Subjective judgments and the experience and intuition of the actuaries are of great relevance in claims reserving and are often taken into account when determining claims reserves, which is why uncertainty resulting from fuzziness plays a central role in this field. However, the ordinary methods of claims reserving cannot include uncertainty due to fuzziness, but for this purpose methods from the area of fuzzy set theory have to be used. Such methods are therefore predestined for applications in claims reserving.

In this thesis, a complete overview of the current state of research with regard to applications of fuzzy methods in claims reserving has been given. For this purpose, the publications published so far were presented in a chronological order, explained in detail and also subjected to a critical assessment. Subsequently, three new fuzzy methods of claims reserving were developed, which offer additional possibilities to include and model fuzziness when determining claims reserves.

The first of the proposed methods is a fuzzy version of the chain-ladder method, which is one of the most popular methods of claims reserving both in theory and in practice. This method was developed based on the observation that, without exception, all previously published publications in the area of fuzzy claims reserving use triangular fuzzy numbers as fuzzy numbers. These have positive properties, but in some situations fuzzy numbers with a different shape of membership function are more suitable. Therefore, in the proposed fuzzy chain-ladder method quasi-exponential fuzzy numbers have been used to model the chain-ladder factors instead of triangular fuzzy numbers. The method thus represents the first application in the area of fuzzy claims reserving in which the membership function of the fuzzy numbers is not triangular. It has been shown that the use of quasi-exponential instead of triangular fuzzy numbers to model the chain-ladder factors has the advantage that this can lead to a considerable reduction in the prediction uncertainty and thus one can obtain significantly more informative results.

The other two methods newly developed in this thesis are fuzzy versions of two other popular methods of claims reserving, i.e. of the additive method and the Cape-Cod method. These methods are based on the idea of modelling information that is used in addition to a claims development triangle and that has to be chosen by the actuary as fuzzy numbers. Since such information is often afflicted with vagueness, this is an obvious and sensible extension. In the additive method and the Cape-Cod method, it is the volume measures that are external information and are therefore fuzzified. This makes it possible to take into account uncertainty regarding the volume measures and to include it in the determination of claims reserves. In the fuzzy Cape-Cod method, in addition to the volume measures, the parameters of the development pattern were also modeled as fuzzy numbers so that this method can also take into account uncertainty regarding the development pattern in its form which is usually used in practical applications.

In all three methods, the determined fuzzy claims reserves were finally defuzzified in

order to obtain crisp values that can be shown on the balance sheet. Furthermore, the prediction uncertainty for single and aggregated accident years was quantified for all three methods. This is of central importance in order to also be able to assess the accuracy of the prediction, but was neglected in most of the previous publications in which fuzzy methods have been used in claims reserving.

The methods of claims reserving presented and newly developed in this thesis, which allow subjective judgments and uncertainty due to fuzziness to be formally integrated, are an extremely useful addition to the usual statistical methods of claims reserving.

## **Eidesstattliche Versicherung**

Hiermit erkläre ich, Corinna Burckhardt, an Eides statt, dass ich die Dissertation mit dem Titel „Anwendungen unscharfer Methoden in der Schadenreservierung“ selbständig und bei einer Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftlern gemäß der beigefügten Darlegung nach § 6 Abs. 4 der Promotionsordnung der Fakultät für Betriebswirtschaft vom 9. Juli 2014 verfasst und keine anderen als die von mir angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die den herangezogenen Werken wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen sind als solche gekennzeichnet.

Ich versichere, dass ich keine kommerzielle Promotionsberatung in Anspruch genommen habe und die Arbeit nicht schon in einem früheren Promotionsverfahren im In- oder Ausland angenommen oder als ungenügend beurteilt worden ist.

Hamburg, den 12.04.21

*Corinna Burckhardt*