Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken

Dissertation zur Erlangung des
Doktorgrades
an der Fakultät für Mathematik,
Informatik und Naturwissenschaften

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Julien Niclas Herget

2022

Erster Gutachter: Prof. Dr. Andrea Blunck

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Alexander Kreuzer

Tag der Disputation: 04.10.2022

Einleitung

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Beschreibung von Morphismen von geometrischen Strukturen, die wir als Kettengeometrien über Quadriken bezeichnen möchten.
Eine Quadrik ist eine Punktmenge eines projektiven Koordinatenraumes über einem Körper, die sich durch eine quadratische Gleichung (quadratische Form) beschreiben lässt. Die Punktmenge einer Kettengeometrie über einer Quadrik besteht genau aus den Punkten der Quadrik, die nicht ihrem Radikal angehören.
Die Schnitte der Quadrik mit einer Ebene, welche die Quadrik in drei Punkten schneidet, die nicht im Radikal der Quadrik liegen und keine Gerade enthalten, sind die Ketten unserer Kettengeometrie.
Nennt man zwei Punkte der Kettengeometrie genau dann distant zueinander, wenn ihre Verbindungsgerade eine Sekante der Quadrik ist, so geht durch drei paarweise distante Punkte genau eine Kette.
Die Struktur ist ein sogenannter Kettenraum.
Ein Morphismus zwischen zwei solchen Kettengeometrien (und von Kettenräumen im Allgemeinen) ist eine Abbildung, welche die Punktmenge der einen Kettengeometrie in die Punktmenge der anderen abbildet und dabei Ketten bijektiv auf Ketten abbildet, sowie die Distanzrelation erhält.
Der Begriff der Kettengeometrie entstand beim Versuch, drei wesentlich verschiedene Geometrien, die Möbius-Geometrie, die Laguerre-Geometrie und die pseudo-euklidische Minkowski-Geometrie, einheitlich darzustellen und zu untersuchen.
Es war W. Benz, der in seiner Monographie "Vorlesungen über Geometrie der Algebren"(siehe [2]) diese Geometrien erstmals in einheitlicher Weise als Kettengeometrien $\Sigma(K, R)$ über geeigneten K-Algebren R untersuchte (zur Definition von $\Sigma(K, R)$ verweisen wir auf 2.1 in [8], wir werden diese Struktur auch später in Kapitel 2 einführen).
Die Möbius-Geometrie entspricht dann der Kettengeometrie über der $\mathbb{R}$- Algebra $\mathbb{C}$, die Laguerre-Geometrie der Kettengeometrie über der $\mathbb{R}$-Algebra der dualen Zahlen $\mathbb{R}[\epsilon] = \mathbb{R} + \mathbb{R}\epsilon$ mit $\epsilon \notin \mathbb{R}, \epsilon^2 = 0$ und die Minkowski-Geometrie die der Kettengeometrie über der $\mathbb{R}$-Algebra der anormal-komplexen Zahlen welche zum direkten Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ isomorph ist (siehe 2.2 in [8]).
W. Benz zu Ehren bezeichnet man diese Geometrien auch als Benzebenen.

Tatsächlich kann man die Benzebenen auch als Punktmenge einer geeigneten Quadrik in der projektiven Koordinatengeometrie über dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$ darstellen. Man findet also ein geeignetes Quadrikenmodell.
Die Möbius-Geometrie besitzt als Quadrikenmodell die Einheitskugel, welche sich durch die quadratische Form $Q_M : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ beschreiben lässt (siehe Kapitel I, § 1. 4. in [2]).
Die Laguerre-Geometrie besitzt als Quadrikenmodell einen Kegel mit Spitze $\mathbb{R}(0, 0, 0, 1)$, der sich durch die quadratische Form $Q_L : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ beschreiben lässt (siehe Kapitel I, § 2. 3. in [2], man beachte, dass das dort betrachtete Zylindermodell im projektiven Raum einem Kegel entspricht).
Die Möbius-Geometrie besitzt als Quadrikenmodell eine hyperbolische Quadrik (Hyperboloid), welche sich durch die quadratische Form $Q_H : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ beschreiben lässt (siehe Kapitel I, § 4. 5. in [2]).

In [19] konstruiert H. Hotje ein Quadrikenmodell im Sonderfall von $\Sigma(K, R)$, in dem R eine kinematische Algebra ist (es gilt $x^2 \in K + Kx$ für alle $x \in R$):
Es existiert ein eindeutig bestimmter K-linearer Antiautomorphismus $\kappa : x \mapsto \overline{x}$ von R derart, dass für jedes $x \in R$ die Elemente $N(x) := \overline{x}x$ und $Sp(x) := \overline{x} + x$ in K liegen (siehe 5.2.1 in [8]).
Dann ist $Q : V := R \times K \times K \mapsto K, (x, k, l) \mapsto N(x) - kl$ eine Quadratische Form (siehe 5.2.4 in [8]).
Dann wird durch $\phi : R(a, b) \mapsto K(\overline{b}a, N(a), N(b))$ die Punktmenge der Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$ auf die Punkte der zur quadratischen Form Q gehörenden Quadrik in der projektiven Koordinatengeometrie über V abgebildet, die nicht im Radikal dieser Quadrik liegen.
Es liegt ein Isomorphismus von Kettenräume vor (Hotje-Darstellung, siehe Satz 5.2.18 in [8]).

In [36] zeigt M. Werner, dass die Automorphismen der soeben betrachteten Kettengeometrie über einer kinematischen Algebra im Quadrikenmodell einer Erweiterung zu einer Kollineation der projektiven Koordinatengeometrie über V fähig ist, d.h. schränkt man die Kollineation auf die Punkte der Quadrik ein, die nicht im Radikal der Quadrik liegen, so erhält man den ursprünglichen Automorphismus unserer Kettengeometrie.
Dieses Resultat motiviert uns, der Frage nachzugehen, ob man einen

beliebigen Morphismus zwischen zwei Kettengeometrien über Quadriken zu einem Homomorphismus der, die Quadriken enthaltenden, projektiven Räume erweitern kann.
Tatsächlich werden wir zeigen, dass nur sogenannte starke Morphismen (es werden auch nicht-distante Punkte auf nicht-distante Punkte abgebildet) einer projektiven Erweiterung fähig sind.
Wir werden zu jedem nicht-trivialen starken Morphismen eine eindeutige projektive Erweiterung konstruieren. Dabei werden wir uns an dem Beweis von (10.28)(1) und diesem Satz vorangegangenen Ausführungen in [32] orientieren. Dort wird die stereographische Projektion betrachtet, sowie vorteilhaft der zweite Fundamentalsatz der affin-metrischen Geometrie (siehe (9.7) in [32]) angewendet, um eine projektive Erweiterung eines Isomorphismus von Kreisgeometrien auf Quadriken zu konstruieren. Dabei haben Kreisgeometrien auf Quadriken die selbe Punktmenge, wie unsere Kettengeometrien über Quadriken, nur werden hier auch Schnitte der Quadrik mit Ebenen zugelassen, die auch Geraden enthalten können (siehe 10.17 in [32]).

Im ersten Kapitel stellen wir alle Definitionen und Sätze zusammen, die wir aus dem Bereich der metrischen Geometrie und der Kettengeometrie benötigen, um Kettengeometrien über Quadriken, sowie deren Morphismen definieren zu können.
Wir diskutieren zwei verschiedene Möglichkeiten Homomorphismen von projektiven Räumen zu definieren und führen projektive Erweiterungen von Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken ein.
Für die Darstellung solcher projektiven Erweiterungen wird unsere Definition eines Morphismus von metrischen Vektorräumen von Bedeutung sein. Eine Untersuchung des Kerns solcher Morphismen von metrischen Vektorräumen zeigt, dass sich eine projektive Erweiterung zerlegen lässt in eine Zentralprojektion, die von einem Teilraum des Radikals der Quadrik im Definitionsbereich ausgeht und eine anschließende Einbettung.
Wir zeigen weiter, dass nur sogenannte starke Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken einer projektiven Erweiterung fähig sind.

Im zweiten Kapitel gehen wir auf eine Darstellung von Kettengeometrien über Quadriken mittels einer Kettengeometrie über einem geeigneten Jordan-System in einer Clifford-Algebra, wie sie in [6] zu finden ist, ein.
Hierzu werden wir entsprechend grundlegende Definitionen und Sätze bezüglich solcher Jordan-Systeme zusammenstellen. Auch werden wir

auf eine neue, allgemeinere Definition einer Kettengeometrie über einem Jordan-System eingehen, wie sie in [4] zu finden ist. Wir werden einige Kriterien benennen, wann die neue Definition mit der alten übereinstimmt.
Der Grund warum wir dies einführen ist der folgende: Im Beweis des Darstellungssatzes in [6] wird ab einer gewissen Stelle eine Einschränkung vorgenommen. Es werden nur noch Kettengeometrien über Quadriken betrachtet, bei denen die Mächtigkeit des die Quadrik enthaltende projektiven Koordinatenraumes wenigstens fünf ist.
Mit Hilfe der neuen Definition zeigen wir einen alternativen Beweisansatz, der, falls man zwei Annahmen zeigen kann, den Darstellungssatz wie in [6] für den allgemeinen Fall zu beweisen gestattet.

Im dritten Kapitel werden wir zu einem starken, nicht-trivialen Morphismus von Kettengeometrien über Quadriken eine projektive Erweiterung konstruieren. Dabei wird die stereographische Projektion, welche das Residuum eines Punktes, den wir als Nordpol bezeichnen, auf den Tangentialraum eines zu dem Nordpol distanten Punktes, welchen wir als Südpol bezeichnen, abbildet von großer Bedeutung sein.
Wir gehen auch auf eine allgemeinere Definition einer projektiven Erweiterung ein und zeigen, dass unsere, in Kapitel 1 zu Grunde gelegten Definition der Allgemeinheit keinen Abbruch tut.
Wir gehen auch auf die Darstellung von trivialen Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken ein (die gesamte Punktmenge wird auf eine Kette abgebildet).
Es zeigt sich, dass man einen trivialen Morphismus zwischen zwei Kettengeometrien über Quadriken eindeutig zerlegen kann in einen trivialen Morphismus, der die Punktmenge des Definitionsbereichs auf eine vorher beliebig festgelegte Kette des Definitionsbereiches abbildet und einem anschließenden trivialen Morphismus dieser Kette auf eine Kette im Bildraum.
Nicht von jeder Kettengeometrie über einer Quadrik kann ein trivialer Morphismus ausgehen.
Die Existenz eines dreidimensionalen Teilraumes, welcher die Quadrik der Kettengeometrie in einem Ovoid oder einem Kegel, dessen Spitze nicht im Radikal der Quadrik liegt, belegt die Unmöglichkeit eines von dieser Kettengeometrie ausgehenden, trivialen Morphismus.
Existieren solche Teilräume nicht, so zeigen wir, dass man einen trivialen Morphismus, der von dieser Kettengeometrie ausgeht und sämtliche Punkte auf eine vorher festgelegte Kette abbildet, konstruieren kann.

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen der metrischen Geometrie und Kettengeometrie

In diesem ersten Kapitel stellen wir alle Definitionen und Sätze aus dem Bereich der metrischen Geometrie und der Kettengeometrie zusammen, die wir für einen Beweis des Darstellungssatzes für Morphsismen von Kettengeometrien über Quadriken benötigen.
Da wir, wie in der Einleitung angekündigt besagte Morphismen mit projektiven Erweiterungen beschreiben möchten und dabei vorteilhaft den zweiten Fundamentalsatz der affin-metrischen Geometrie anwenden möchten, befassen wir uns im ersten Abschnitt mit Homomorphismen von affinen- und projektiven Koordinatenräumen.
Je nachdem, wie man Homomorphismen von projektiven Räumen definiert, werden die der Koordinatenräume durch eine von einem Unterraum ausgehende Zentralprojektion mit anschließender linear induzierten Injektion (siehe z.B. [17], [33], [11], [12]) oder von einer durch eine Teilmenge der Punktmenge ausgehenden Zentralprojektion mit anschließender, mittels einer Bewertung des Grundkörpers induzierten verallgemeinerten linearen Abbildung (siehe z.B. [28], [15]) dargestellt. Wir orientierten uns an [33], sodass unsere Homomorphismen durch semilineare Abbildungen induziert sind, gehen aber auch auf die in [15] angegebene allgemeinere Definition eines Homomorphismus von projektiven Räumen ein. Es wird sich allerdings in Kapitel 3 zeigen, dass für unsere projektiven Erweiterungen nur solche Homomorphismen, die durch semilineare Abbildungen induziert sind in Frage kommen.
Im zweiten Abschnitt stellen wir grundlegende Definitionen und Sätze der metrischen Geometrie zusammen, wie sie in [32] und [29] zu finden sind. Wir führen den Begriff eines Morphsimus von metrischen Vektorräumen ein. Es wird sich zeigen, dass genau solche Abbildungen projektive Erweiterungen induzieren.
Danach führen wir Quadriken in projektiven Räumen ein. Die sogenannten einfachen Punkte solcher Quadriken werden die Punktmenge unserer Kettengeometrie darstellen.
Wir stellen einige Sätze bezüglich ebener und räumlicher Quadriken zusammen und geben Beispiele an.
Danach definieren wir affin-metrische Räume, sowie deren Isomorphismen. Das entscheidende beim Beweis des Darstellungssatzes für Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken ist eine Anwendung des

zweiten Fundamentalsatzes der affin-metrischen Geometrie. Wir werden alle nötigen Definitionen einführen, um diesen Satz formulieren zu können.

Im dritten Abschnitt definieren wir Kettengeometrien über Quadriken und deren Morphismen. Dabei orientieren wir uns an [8], bzw. [4]. Wir zeigen, dass jeder Morphismus von metrischen Vektorräumen einen Morphismus der Kettengeometrie induziert und, dass wenn ein Morphismus der Kettengeometrie einer projektive Erweiterung (im Sinne von [33]) fähig ist, diese durch einen Morphismus von metrischen Vektorräumen induziert wird.

1.1. **Homomorphismen von affinen- und projektiven Koordinatenräumen.**

Wir möchten uns bei der Einführung der Homomorphismen von projektiven- und affinen Räumen an der Arbeit [33] von K. Sörensen orientieren.
In dieser Arbeit wird zunächst von einen Homomorphismusbegriff von Inzidenzräumen ausgegangen. Wir möchten daher auf die Definition solcher Räume eingehen.

Definition 1.1.1. *Sei P eine Menge, deren Elemente wir* ***Punkte*** *nennen und G eine Menge von Teilmengen von P, deren Elemente wir* ***Geraden*** *nennen.*

Das Paar (P, G) ist ein ***Inzidenzraum****, wenn gilt:*

(1) *Zu $a, b \in P$, $a \neq b$ gibt es genau ein $g \in G$ mit $a, b \in g$.*

(2) *Für alle $g \in G$ ist $\mid g \mid \geq 2$.*

(Siehe (5.01) in [31] *und beachte Satz (5.1))*

Für einen Punkt $p \in P$ sagen wir, dass dieser auf einer Gerade $g \in G$ liegt, falls $p \in g$.
Sei $M \subset P$ eine Menge von Punkten. Falls es eine Gerade $g \in G$ mit $M \subset g$ gibt, nennen wir die Punkte der Menge M **kollinear**.
Die nach 1.1.1(1) eindeutig bestimmte Gerade g von zwei verschiedenen Punkten a, b bezeichnen wir mit ab.

Falls $T \subset P$ die Eigenschaft hat, dass zu $a, b \in T$ stets $ab \subset T$ gilt, so nennen wir T einen **Teilraum** von (P, G).
Nach Satz (5.4) in [31] gibt es zu einer Teilmenge $M \subset P$ einen kleinsten, M umfassenden Teilraum. Diesen bezeichnen wir mit $< M >$ und nennen ihn die **lineare Hülle** von M.
Für eine endliche Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ schreiben wir $< a_1, \ldots, a_n > := < \{a_1, \ldots, a_n\} >$. Insbesondere ist also $ab = < a, b >$ für zwei Punkte a, b mit $a \neq b$.
Wir nennen $< a, b, c >$ für drei paarweise verschiedene, nicht kollineare Punkte a, b, c eine **Ebene**. Für solche Punkte setzen wir
$abc := < a, b, c >$.
Punkte, die in einer Ebene liegen, nennen wir **komplanar**

Nun möchten wir affine und projektive Koordinatenräume einführen. Sei dazu V ein Vektorraum über einen kommutativen Körper K (in dieser Arbeit sind alle Körper kommutativ). Mit $\mathbf{U}$ bezeichnen wir die Menge der Untervektorräume von V und mit U_1 die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von V.
Setzen wir nun $P := V$, $G := \{a + U \mid a \in V, U \in U_1\}$, sowie
$a + U \parallel a' + U' :\iff U = U'$ für $a, a' \in V$ und $U, U' \in U_1$.
Dann nennen wir das Tripel $A(V, K) := (P, G, \parallel)$ den **affinen Koordinatenraum** über V.
Nach (5.53) in [31] ist (P, G) ein Inzidenzraum.
Nach (5.64) in [31] sind die von $\emptyset$ verschiedenen Teilräume von $A(V, K)$ mit $\mid K \mid > 2$ die Mengen $a + U$ mit $a \in V$ und $U \in \mathbf{U}$.
Für Teilräume $a + U$ setzen wir $dim(a + U) := dim_V(U)$ und nennen dies die **affine Dimension** von $a + U$. Dabei bezeichnet $dim_V(U)$ die vektorielle Dimension von U.

Um projektive Koordinatenräume einzuführen, definieren wir für eine Teilmenge von M von V die Menge $M^{\Pi} := \{U \in U_1 \mid U \subset M\}$ die **projektive Punktmenge** von M.
Setzen wir $P := U_1$ und $G := \{U^{\Pi} \mid U \in U_2\}$, so nennen wir das Paar $\Pi(V, K) := (P, G)$ den **projektiven Koordinatenraum** über V.
Nach (6.24)(1) in [31] ist $\Pi(V, K)$ ein Inzidenzraum.
Nach (6.24)(2) gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Untervektorräumen von V und den Teilräumen von $\Pi(V, K)$, welche durch $U \mapsto U^{\Pi}$ mit Umkehrabbildung $T \mapsto \bigcup T$ für einen Vektorraum $U < V$ und Teilraum T von $\Pi(V, K)$ gegeben ist.

Nun definieren wir Homomorphismen von Inzidenzräumen.

Definition 1.1.2. *Seien* $(P,G),(P',G')$ *Inzidenzräume.*
Eine Abbildung $\chi : P \to P'$ *heißt* ***Homomorphismus von Inzidenzräumen****, falls sie* $\chi(< a,b >) =< \chi(\{a,b\}) >$ *für alle* $a,b \in P$ *erfüllt.*
Ist χ *bijektiv, so bezeichnen wir* χ *als eine* ***Kollineation****. (siehe (0) in* [33]*)*

Man beachte, dass die lineare Hülle hinter dem Gleichheitszeichen die lineare Hülle in (P',G') ist. Wir werden dies nicht streng unterscheiden und gehen davon aus, dass es stets offensichtlich ist, welche Hülle gemeint ist.

Später werden wir noch ein paar zu dieser Definition äquivalente Bedingungen benötigen. Daher formulieren wir folgenden Satz.

Satz 1.1.1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent zu Definition 1.1.2 für einen Inzidenzraum* (P,G) *mit Homomorphismus* χ *in einen Inzidenzraum* (P',G')*:*

(1) *Für* $g \in G$ *ist* $\chi(g)$ *entweder ein Punkt oder* $\chi(g)$ *eine Gerade. Im Fall, dass* $\chi(g)$ *eine Gerade ist, ist* $g \to \chi(g) : x \mapsto \chi(x)$ *bijektiv.*

(2) *Für einen Teilraum* T *von* (P,G) *und einen Teilraum* T' *von* (P',G') *ist* $\chi(T)$ *ein Teilraum von* (P',G') *und* $\chi^{-1}(T')$ *ein Teilraum von* (P,G)*.*

(3) *Für* $S \subset P$ *ist* $\chi(< S >) =< \chi(S) >$

Beweis. Siehe den Beweis von (1.1) in [33]. □

Zur Darstellung der Homomorphismen von affinen- und projektiven Koordinatenräumen benötigen wir den Begriff der semilinearen Abbildung.

Definition 1.1.3. *Sei* V *ein* K*-Vektorraum,* V' *ein* K'*-Vektorraum.*
Sei $\sigma : K \to K'$ *ein Körperisomorphismus.*
Wir nennen eine Abbildung $f : V \to V'$ ***semilinear****, falls*

(1) $f(v+u) = f(v) + f(u)$ *für alle* $v, u \in V$

(2) $f(\alpha v) = \sigma(\alpha) f(v)$ *für alle* $v \in V, \alpha \in K$

Die Abbildung σ bezeichnet man auch als einen **Begleitisomorphismus**.
Wir bemerken, dass es auch manchmal in der Literatur üblich ist, bei semilinearen Abbildungen lediglich zu fordern, dass σ ein Körperhomomorphismus ist.
Die von uns betrachteten Abbildungen werden dann als quasilinear bezeichnet (siehe Definition 6.3.1 und Bemerkung 6.3.2 in [12] auf Seite 137).

Wir möchten nun zeigen, dass sich Homomorphsimen von affinen Räumen durch solche semilinearen Abbildungen beschreiben lassen.
In [33] wird der Fall $\mid K \mid = 2$ ausgeschlossen.
Das liegt daran, dass in diesem Fall jede Abbildung von Punktmengen eines Inzidenzraumes in einem anderen ein Homomorphismus von Inzidenzräumen ist. Wir möchten jedoch diesen Fall nicht von vorneherein ausschließen und zeigen, wie auch in diesem Falle ein Darstellungssatz gelingt. Hierzu müssen wir auf eine allgemeine Definition von affinen Räumen eingehen und deren Homomorphismen geeignet definieren.

In [31] (5.23) werden affine Räume definiert als Tripel $(P, G, \|)$, wobei (P, G) ein Inzidenzraum ist und $\| \subset G \times G$ eine Äquivalenzrelation auf der Geradenmenge ist, welche die folgenden Axiome erfüllt:

(1) (Parallelenaxiom) Zu jedem $(a, g) \in P \times G$ gibt es genau ein $h \in G$ mit $a \in h$ und $h \parallel g$ (diese eindeutig bestimmte Gerade bezeichnen wir mit $\{a \parallel g\}$).

(2) (affines Veblen-Young-Axiom) Sind a, b, c, d paarweise verschiedene Punkte mit $ab \parallel cd$ oder $ab \cap cd \neq \emptyset$, so gilt $ac \parallel bd$ oder $ac \cap bd \neq \emptyset$.

Das Veblen-Young-Axiom beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Begriff der Ebene und der Parallelität, ohne den Begriff der Ebene zu verwenden, denn im Fall $\mid K \mid= 2$ besteht jede lineare Hülle von drei nicht-kollinearen Punkten aus genau den drei Punkten und dieser Unterraum ist mit der durch $\|$ vererbten Relation kein affiner Raum mehr (Im Übrigen sind nach (5.53) in [31] unsere Inzidenzräume $A(V,K)$ affine Räume im gerade definierten Sinne).

Nach (5.55),(5.62)(2) in [31] sind die Räume $A(V,K)$ genau die affinen Räume, in dem jede affine Ebene des Raumes den Satz von Pappus erfüllt (siehe für den Satz von Pappus (5.17) und zur Definition einer affinen Ebene eines affinen Raumes, siehe (5.27) in [31]).

Eine Teilmenge $U \subset P$ eines affinen Raumes $(P, G, \|)$ nennen wir einen **affinen Teilraum**, wenn U ein Teilraum hinsichtlich des Inzidenzraumes (P,G) ist und für alle $p \in U$, $g \in G$ mit $g \subset U$ gilt, dass $\{p \parallel g\} \subset U$ ist.

Offenbar sind die affinen Teilräume genau die Teilmengen von P, die mit den durch G induzierten Geraden und der von $\|$ induzierten Relation wieder ein affiner Raum sind.
Aus (5.35) und (5.35) in [31] folgt, dass für $A(V,K)$ mit $\mid K \mid> 2$ die affinen Teilräume genau den Teilräumen entsprechen, da die Parallelrelation mit der kanonischen Parallelität übereinstimmt (Zwei Geraden sind kanonisch parallel, wenn sie gleich sind oder in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden).

Für Teilmengen $M \subset P$ eines affinen Raumes kann man den kleinsten affinen Teilraum als den Durchschnitt aller M umfassenden affinen Teilräume definieren. Diesen bezeichnen wir mit $< M >_{aff}$ und nennen ihn die **affine Hülle** von M.

In (5.65)(2)(a) in [31] werden Teilmengen der Punktmenge von $A(V,K)$ mit $\mid K \mid\geq 2$ der Form $a+U, a \in V, U < V$, sowie die leere Menge als affine Teilräume definiert, um den Fall $\mid K \mid= 2$ mit einzuschliessen.
Mit unserer Definition eines affinen Teilraums kann man zeigen, dass diese Mengen Teilmengen genau die Teilräume sind. Wir möchten das hier kurz skizzieren:

Man kann sich an dem Beweis von (5.64)(1) in [31] orientieren (genauer an den Beweisschritten (a), (b), (c)).

Sei $A(V,K)$ ein affiner Raum ($\mid K \mid \geq 2$), U ein affiner Teilraum mit $0 \in U$.
Wir zeigen, dass U ein Untervektorraum ist, indem wir zeigen, dass dieser abgeschlossen gegenüber der Linearkombination zweier Vektoren ist.
Sei dazu $x \in U, x \neq 0$, dann ist die Gerade $< 0, x >= Kx \subset U$, da U ein Teilraum ist (die eindeutige Gerade durch zwei Punkte $a, b \in P$ ist durch $a + K(b-a)$ gegeben, siehe (5.35)(2) in [31]). Da U zu jedem in U liegenden Punkt und zu jeder in U liegenden Geraden auch die eindeutige Parallele durch den Punkt enthält, ist auch für $y \in U$, $y \neq 0, Kx + Ky \subset U$ (zur eindeutig bestimmten Parallelen, siehe (5.53)(4) in [31]).
Damit ist U ein Untervektorraum.
Sei nun U ein affiner Teilraum, der nicht notwendigerweise 0 enthält.
Ist $a \in U, a \neq 0$, so können wir die Abbildung $\tau_{-a} : V \to V$, $x \mapsto x + (-a)$ betrachten (eine solche Abbildung τ_v für beliebiges $v \in V$ bezeichnet man auch als **Translation**).
Da die Gerade durch Punkte $x - a, y - a \in \tau_{-a}(U)$ die Gestalt $x - a + K(y-x)$ hat und die Parallele durch Punkte $z - a \in \tau_{-a}(U)$ die Gestalt $z - a + K(y-x)$ hat und die entsprechenden Urbilder Geraden, bzw. parallele Geraden in U sind, ist $\tau_{-a}(U)$ nach obigen Ausführungen ein Untervektorraum und U hat damit die Form $(-a) + \tau_{-a}(U)$.
Offensichtlich sind umgekehrt Mengen der Form $a + U$ mit $a \in V$, U Untervektorraum von V, affine Teilräume (man beachte hierzu die Darstellungen der Geraden durch zwei Punkte, bzw. die Darstellung der Parallelen durch einen Punkt zu einer Geraden in $A(V,K)$, auf die oben hingewiesen wurde).

Wir werden nun Homomorphismen von affinen Räumen definieren.

Definition 1.1.4. *Seien $(P, G, \|), (P', G', \|')$ affine Räume.*
Eine Abbildung $\chi : P \to P'$ nennen wir einen ***Homomorphismus von affinen Räumen****, wenn für alle affinen Teilräume $U \subset P$,* *$\chi(< U >_{aff}) =< \chi(U) >_{aff}$ gilt.*

Da, wie oben bereits erwähnt, für $A(V,K)$ mit $\mid K \mid > 2$ die affinen Teilräume mit den Teilräumen übereinstimmen, folgt aus Satz 1.1.1, dass die Homomorphismen von solchen affinen Räumen mit den Homomorphismen der Inzidenzräume ihrer Punkt- und Geradenmengen übereinstimmen.

Affine Räume $A(V, K)$, aber auch projektive Räume $\Pi(V, K)$ über K-Vektorräumen erfüllen die Austauschbedingung, welche lautet:

Definition 1.1.5. *Ein Inzidenzraum (P, G) erfüllt die **Austauschbedingung**, wenn für alle Teilmengen $M \subset P$ und Punkte $a, b \in P \backslash < M >$ gilt $a \in < \{B\} \cup M > \iff b \in < \{A\} \cup M >$. (Siehe (6.18) in* [31]*)*

Dies gilt für $A(V, K)$ auch, wenn man die lineare Hülle durch die affine Hülle ersetzt (siehe den Beweis in [31] auf Seite 76). So kann man auch hier den Fall $\mid K \mid = 2$ mit einschließen. Nach (6.16)(2) in [31] erfüllen auch projektive Räume die Austauschbedingung.

Satz 1.1.2. *Seien $A(V, K) = (P, G)$ und $A(V', K') = (P', G')$ affine Koordinatenräume und $\chi : P \to P'$ ein Homomorphismus affiner Räume mit $dim(Bild(\chi)) \geq 2$.*
Dann gibt es eine eindeutige Translation $\tau_a, a \in P$ und eine semilineare Abbildung $f : V \to V'$, sodass $\chi = \tau_a \circ f$.

Beweis. Sei $\chi : P \to P'$ ein Homomorphismus affiner Räume mit $dim(Bild(\chi)) \geq 2$.
Wir können oBdA von $\chi(0) = 0$ ausgehen, indem wir $\tau_{-a} \circ \chi$ betrachten, falls $\chi(0) = a$.
Für $\mid K \mid > 2$ kann man, um zu zeigen, dass χ semilinear ist, den Beweis von (1.4) in [33] folgen.
Nach unseren Vorbereitungen führt dieser Beweis auch im Fall $\mid K \mid = 2$ zum Ziel.
Wir werden dies kurz skizzieren.
Wie im Beweis von (1.4)(1) kann man zeigen, dass $\chi(x) = \chi(y)$ genau dann, wenn $\chi(x - y) = 0$. Man beachte, dass dort die Aussage (1.3) in [33] angewendet wird, die besagt, dass wenn bei einem Homomorphismus von Inzidenzräumen eine von zwei Geraden einer Ebene, die der Austauschbedingung genügt auf einem Punkt abgebildet wird, so auch die andere.
Wie oben erwähnt erfüllen auch im Fall $\mid K \mid = 2$ affine Teilräume, die von drei nicht-kollinearen Punkten aufgespannt werden, die Austauschbedingung.
Die Teilräume $T := \chi^{-1}(0)$ und $\chi(P)$ sind Untervektorräume wegen $\chi(0) = 0$. Für die lineare Abbildung $\pi : P \to P/T, x \mapsto x + T$ gilt dann $a + T = b + T \iff \chi(a) = \chi(b)$ für alle $a, b \in P$.
Für die demnach wohldefinierte Abbildung $\delta : P/T \to \chi(P)$,

$x+T \mapsto \chi(x)$ gilt also $\chi = \delta \circ \pi$ und δ ist nach (5.57) in [31] eine semilineare Abbildung (man beachte $dim(\chi(P)) \geq 2$ und, dass in (5.57) der Fall $\mid K \mid = 2$ mit eingeschlossen ist) von $A(P/T, K)$ auf $A(\chi(P), K')$.
Da π linear ist, ist auch $\chi = \delta \circ \pi$ semiliniear.
Da die Translation τ_a wegen $\chi(0) = a$ eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung. $\square$

Wir wenden uns nun den Homomorphismen von projektiven Koordinatengeometrien $\Pi(V, K)$ zu.
Je nachdem von welcher Definition von projektiven Räumen man ausgeht, bieten sich verschiedene Möglichkeiten zur Definition von solchen Homomorphismen an.
Wir gehen auf zwei verschiedene Definitionen von projektiven Räumen ein.

In [31] (6.15) werden Inzidenzräume (P, G) als projektive Räume bezeichnet, wenn sie die folgenden beiden Axiome erfüllen:

(1) Für alle $g \in G$ gilt $\mid g \mid \geq 3$.

(2) (projektives Veblen-Young-Axiom) Seien a, b, c, d paarweise verschiedene Punkte mit $< a, b > \cap < c, d > \neq \emptyset$, so gilt $< a, c > \cap < b, d > \neq \emptyset$.

Nach (6.24) in [31] sind die projektiven Koordinatenräume projektive Räume.
Nach (6.35), (6.26)(4) in [31] sind die von uns betrachteten Koordinatenräume genau die, in der jede Ebene die projektive Version des Satzes von Pappus erfüllt (siehe (6.13) in [31] für den Satz von Pappus in projektiven Ebenen).

Nach (6.16)(2) ist jeder Teilraum von $\Pi(V, K)$ ein projektiver Raum. Damit sind alle Teilmengen der Punktmenge, welche bezüglich der Geraden wieder projektive Räume sind genau die Teilräume von $\Pi(V, K)$.

Aus (2.1)(2) in [33] folgt, dass es keine nicht-injektiven Homomorphismen zwischen zwei projektiven Räumen (aufgefasst als Inzidenzraum) geben kann.
Der Definitionsbereich von Homomorphismen von projektiven Räumen ist aber ein geschlitzter Raum. Sei hierzu (P, G) ein projektiver Raum, $M \subset P$. Wir setzen $G(M) := \{g \cap M \mid g \in G \text{ und } \mid g \cap M \mid \geq 2\}$. Dann

nennen wir den Inzidenzraum $(M, G(M))$ einen **geschlitzten Raum** (siehe auch [33] Seite 303).
Um die lineare Hülle in $(M, G(M))$ von der in (P, G) zu unterscheiden, bezeichnen wir Erstere mit $< . >_M$.

Definition 1.1.6. *Seien $(P, G), (P', G')$ projektive Räume, $T \subset P$ ein Teilraum und $(P \setminus T, G(P \setminus T))$ der entsprechende geschlitzte Raum. Einen Inzidenzraumhomomorphismus $\chi : P \setminus T \mapsto P'$ nennen wir einen* ***Homomorphismus von projektiven Räumen****.*

Man kann zeigen, dass sich Homomorphismen von projektiven Räumen zerlegen lassen in eine, von einem Unterraum ausgehende Zentralprojektion und einem injektiven Homomorphismus.

Satz 1.1.3. *Seien $(P, G), (P', G')$ projektive Räume, $T \subset P$ ein Teilraum, der keine Hyperebene ist, $C \subset P$ ein projektives Komplement von T (d.h. es ist $T \cap C = \emptyset$ und $< T \cup C >= P$) und $\chi : P \setminus T \to P'$ ein Homomorphismus von projektiven Räumen.
Sei $\pi : P \setminus T \to C, p \mapsto < \{p\} \cup T > \cap C$ die* ***Zentralprojektion*** *mit Projektionszentrum T.
Dann ist $\chi := \chi\,|_C \circ \pi$ und $\chi\,|_C$ injektiv.*

Beweis. Siehe den Beweis von (2.2) in [33]. □

Dass nahezu alle Homomorphismen von Projektiven Räumen der Form $\Pi(V, K)$ durch semilineare Abbildungen darstellbar sind, besagt der folgende Satz.

Satz 1.1.4. *Seien $\Pi(V, K) = (P, G), \Pi(V', K') = (P', G')$ projektive Koordinatenräume und U ein Untervektorraum von V. Weiter sei $\chi : P \setminus U^\Pi \to P'$ ein Homomorphismus von Projektiven Räumen mit $dim(\chi(P \setminus U^\Pi)) \geq 2$.
Dann gibt es eine semilineare Abbildung $f : V \to V'$ mit $ker(f) = U$, sodass für $x \in V \setminus U$ gilt $\chi(Kx) = K'(f(x))$.
Die Abbildung f ist bis auf $K' \setminus \{0\}$-Vielfache eindeutig bestimmt.*

Beweis. Siehe den Beweis von (2.3) in [33]. □

Hätten wir Homomorphismen von projektiven Räumen definiert als Inzidenzraumhomomorphismen $\chi : P \setminus E \to P'$, wobei $(P, G), (P', G')$ projektive Räume sind und $E \subset P$ lediglich eine Teilmenge ist, so kann man im Fall $< E > \neq P$ zeigen, dass E ein Teilraum von P sein muss.

Satz 1.1.5. *Seien $(P,G),(P',G')$ projektive Räume, $E \subset P$ mit $< E > \neq P$, $(P \setminus E, G(P))$ ein geschlitzter Raum und $\chi : P \setminus E \to P'$ ein Homomorphsimus von Inzidenzräumen.*
Dann ist E ein Teilraum von (P,G) und χ ein Homomorphismus von projektiven Räumen.

Beweis. Siehe die Beweise von (2.1), (2.2) und (2.4)(1) in [33]. □

Wir möchten im Folgenden noch auf eine allgemeinere Definition von Homomorphismen von projektiven Räumen eingehen. Diese bietet sich an, wenn man von einer allgemeineren Definition von projektiven Räumen ausgeht.

Nach Definition 2.1.1 in [12], bzw. Definition 1.1.1 in [13] kann man projektive Räume wie folgt definieren:

Sei P eine Menge und $l \subset P \times P \times P$ eine dreistellige Relation, sodass das Paar (P, l) folgenden Axiome erfüllt.

(1) Es gilt $l(a, b, a)$ für alle $a, b \in P$.

(2) Aus $l(a, p, q), l(b, p, q)$ und $a \neq b$ folgt $l(a, b, p)$.

(3) Zu $l(p, a, b)$ und $l(p, c, d)$ gibt es ein $q \in P$ mit $l(q, a, c)$ und $l(q, b, d)$.

Definieren wir für einen projektiven Raum (P, G) und Punkte $a, b, c \in P$ die Aussage $l(a, b, c)$ durch a, b, c kollinear, so erhalten wir einen projektiven Raum im gerade definierten Sinne. Die Eigenschaft (3) ist gerade das projektive Veblen-Young-Axiom.
Für den Rest des Abschnitts fassen wir projektive Koordinatenräume $\Pi(V, K)$ entsprechend als Paare (P, l) auf.

Für projektive Räume P im allgemeineren Sinne mit dreistelliger Relation l können wir auch Geraden definieren, indem wir für $a, b \in P$ mit $a \neq b$, $a \vee b := \{p \in P \mid l(a, b, p)\}$ setzen (siehe Satz 2.2.1 in [12]).

Nun können wir eine verallgemeinerte Definition von Homomorphismen von projektiven Räumen angeben (dabei gehen wir von projektiven Räumen im allgemeineren Sinne aus).

Definition 1.1.7. *Seien* $(P, l), (P', l')$ *projektive Räume,* $E \subset P$.
Wir nennen eine Abbildung $g : P \setminus E \to P'$ *einen* ***verallgemeinerten Homomorphismus von projektiven Räumen****, wenn gilt:*

(1) *Aus* $a, b, c \notin E$ *und* $l(a, b, c)$ *folgt* $l(g(a), g(b), g(c))$.

(2) *Aus* $a, b \notin E, x \in E$ *und* $l(a, b, x)$ *folgt* $g(a) = g(b)$.

Wir nennen einen verallgemeinerten Homomorphismus ***reichhaltig****, wenn gilt:*

Zu $a, b \notin E$ *mit* $g(a) \neq g(b)$ *existiert ein* $c \in (a \vee b) \setminus E$ *mit* $g(c) \neq g(a), g(b)$.

(siehe Definition 2.3 in [15]*)*

Auch die verallgemeinerten Homomorphismen von projektiven Koordinatenräumen lassen sich durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen beschreiben. Um diese zu definieren bedarf es einiger Vorbereitung.
Sei K ein Körper. Wir erweitern die Addition und Multiplikation auf $K \cup \{\infty\}$ (siehe hierzu auch die Vorbereitungen 2 in [15]), indem wir $\lambda + \infty := \infty + \lambda := \infty$ für alle $\lambda \in K$ und $\lambda\infty := \infty\lambda := \infty$ für alle $\lambda \in K \cup \{\infty\} \setminus \{0\}$ setzen.
Sei nun V ein Vektorraum über K. Wir erweitern die Addition und skalare Multiplikation auf $V \cup \{\infty\}$, indem wir $x + \infty := \infty + x := \infty$ für alle $x \in V$ und $\lambda\infty := \infty x := \infty$ für alle $\lambda \in K \cup \{\infty\} \setminus \{0\}$ und jedem Vektor $x \in V \cup \{\infty\} \setminus \{0\}\}$ setzen.
Man beachte, dass die Operationen $\infty + \infty, 0\infty$ und $\infty 0$ undefiniert sind.

Als nächstes verallgemeinern wir den Begriff des Begleithomomorphismus.

Definition 1.1.8. *Seien* K, K' *Körper.*
Eine Abbildung $\sigma : K \cup \{\infty\} \to K' \cup \{\infty\}$ *heißt* ***verallgemeinerter Begleithomomorphismus****, wenn gilt*

(1) $\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$, *vorausgesetzt die beiden Summen sind definiert.*

(2) $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$, *vorausgesetzt die beiden Produkte sind definiert.*

(3) $\sigma(1) = 1$.

Offenbar gilt $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(\infty) = \infty$. Des Weiteren ist die Teilmenge $R = \sigma^{-1}(K')$ ein **Bewertungsring** von K, also ein Unterring von K mit der Eigenschaft, dass aus $\lambda \notin R$ folgt, dass $\lambda^{-1} \in R$ und die Einschränkung von σ auf R, $\tau : R \to K'$ ein Homomorphismus von Ringen ist, welcher sämtliche nicht-Einheiten auf 0 abbildet.

Nun können wir den Begriff der semilinearen Abbildung verallgemeinern.

Definition 1.1.9. *Seie V ein K-Vektorraum, V' ein K'-Vektorraum. Eine Abbildung $f : V \cup \{\infty\} \to V' \cup \{\infty\}$ nennen wir* ***verallgemeinerte semilineare Abbildung****, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *vorausgesetzt die beiden Summen sind definiert.*

(2) *Es existiert ein verallgemeinerter Begleithomomorphismus* $\sigma : K \cup \{\infty\} \to K' \cup \{\infty\}$, *sodass* $f(\lambda x) = \sigma(\lambda)f(x)$ *gilt, vorausgesetzt die beiden Produkte sind definiert.*

(3) $f(0) = 0$ *und* $f(\infty) = \infty$.

Dass verallgemeinerte semilineare Abbildungen verallgemeinerte Homomorphismen von projektiven Koordinatenräumen induzieren, besagt der folgende Satz.

Satz 1.1.6. *Sei $f : V \cup \{\infty\} \to V' \cup \{\infty\}$ eine verallgemeinerte semilineare Abbildung.*
Dann ist $V_1 := \{x \in V \mid$ es gibt ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$, sodass $f(\lambda x) \neq \infty\}$ ein Untervektorraum von V.
Sei $E := \{X \in V_1^\Pi \mid f(x) = 0$ oder ∞ für alle $x \in X\}$.
Dann ist $\chi : V_1^\Pi \setminus E \to (V')^\Pi, X = Kx \mapsto K'f(x)$, wobei $f(x) \neq 0, \infty$, ein verallgemeinerter Homomorphismus von $\Pi(V, K)$ nach $\Pi(V', K')$.

Beweis. Siehe den Beweis von 2.4 in [15].

□

Dass sich nahezu alle verallgemeinerten Homomorphismen von projektiven Koordinatenräumen durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen beschreiben lassen, folgt aus dem folgenden Satz.

Satz 1.1.7. *Sei V ein K-Vektorraum, V' ein K'-Vektorraum, $E \subset V^\Pi$. Sei $\chi : V^\Pi \setminus E \to (V')^\Pi$ ein verallgemeinerter Homomorphismus von projektiven Koordinatenräume, bei dem im Bild drei nicht-kollineare Punkte liegen.*
Dann existiert eine verallgemeinerte semilineare Abbildung $f : V \cup \{\infty\} \to V' \cup \{\infty\}$, die den verallgemeinerten Homomorphismus χ im Sinne von Satz 1.1.6 induziert.
Außerdem ist χ ein reichhaltiger verallgemeinerter Homomorphismus von projektiven Räumen.

Beweis. Siehe den Beweis von Theorem 3.1 in [15]. □

Die verallgemeinerten Homomorphismen von projektiven Räumen werden uns erst in Kapitel 3 wieder begegnen. Dort werden wir feststellen, dass die von uns betrachteten verallgemeinerten Homomorphismen, Homomorphismen von Inzidenzräumen sind (man beachte, dass deren Definitionsbereich ein geschlitzter Raum ist). Dann können wir Satz 1.1.5 anwenden und erkennen, dass der verallgemeinerte Homomorphismus durch eine semilineare Abbildung induziert ist.

Im Weiteren setzen wir grundlegende Tatsachen der affinen und projektiven Geometrie (etwa bezüglich der Dimension von Unterräumen, Hyperebenen) als bekannt voraus. Wir verweisen hierzu auf die einführende Literatur z.B [31], [3], [24], [22].

1.2. **Metrische Geometrie.**

In diesem Abschnitt stellen wir grundlegende Definitionen und Sätze aus der metrischen Geometrie zusammen.
Wir werden Koordinatengeometrien über sogenannte metrische Vektorräumen betrachten.

Um diese definieren zu können, benötigen wir den Begriff einer quadratischen Form.

Definition 1.2.1. *Sei V ein K-Vektorraum.*
Eine Abbildung $Q : V \to K$ heißt eine ***quadratische Form*** *auf V, wenn gilt*

(1) *Es gilt $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ für alle $\lambda \in K, x \in V$.*

(2) *Für die Abbildung $f : V \times V \to K, (x, y) \mapsto Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ gilt $f(x + \lambda y, z) = f(x, z) + \lambda f(y, z)$ für alle $\lambda \in K$, $x, y, z \in V$.*

(siehe [32] *(7.4) (1) und (2))*

Aus (2) lässt sich folgern, dass die Abbildung f symmetrisch (es gilt $f(x, y) = f(y, x)$ für alle $x, y \in V$) und bilinear ist (siehe [32] (7.4) (3) und (4)).
Im Fall eines K-Vektorraumes V, auf dem eine quadratische Form Q definiert ist, nennen wir das Tripel (V, K, Q) einen **metrischen Vektorraum**.
Geht man von einer festen Basis B des K-Vektorraumes V aus, kann man zeigen, dass die quadratische Form Q ein quadratisches Polynom ist:
Sei B_2 die Menge der zweielementigen Teilmengen von B, $a_b := Q(b)$ für alle $b \in B$ und $a_{\{c,d\}} := f(c, d)$ für alle $\{c, d\} \in B_2$.
Jedes Element von V hat die Gestalt $\Sigma_{b\in B}\lambda_b b$ für gewisse $\lambda_b \in K$, wobei wir $\lambda_b = 0$ für fast alle λ_b vereinbaren, da B eine Basis ist.
Es gilt dann $Q(\Sigma_{b\in B}\lambda_b b) = \Sigma_{b\in B}\lambda_b^2 a_b + \Sigma_{\{c,d\}\in B_2}\lambda_c\lambda_d a_{\{c,d\}}$ (*)
(siehe [32] (7.4)(8)).
Legt man umgekehrt für $a_b, a_{\{c,d\}}$ beliebige Körperelemente fest, so ist durch (*) eine quadratische Form gegeben (siehe [32] (7.4)(9)).
Konkrete Beispiele werden wir erst im Zusammenhang mit Quadriken betrachten.

Für zwei Vektoren $x, y \in V$ eines metrischen Vektorraumes setzen wir $x \perp y :\iff f(x, y) = 0$ und sagen, dass x und y **orthogonal** zueinander sind.
Wir setzen für eine Teilmenge $M \subset V$ und $v \in V$

$M^\perp := \{x \in V \mid x \perp a \text{ für alle } a \in M\}$ und $v^\perp := \{v\}^\perp$.
Nach (7.7)(2) in [32] ist $a^\perp$ eine Hyperebene von V oder es ist $a^\perp = V$.
Wir nennen $V^\perp$ das **Radikal** von Q, bzw. von V.
Wir bezeichnen die Menge $ker(Q) := \{x \in V \mid Q(v) = 0\}$ als den **Kern der quadratischen Form** Q.
Die Elemente von $ker(Q)$ werden als **singuläre Vektoren**, die restlichen Vektoren aus V werden als **reguläre Vektoren** bezeichnet.
Gilt für eine quadratische Form Q auf V, dass $Q(v) = 0$ für alle $v \in V$, so nennen wir die quadratische Form **singulär**.
Gilt dagegen $Q(v) = 0$ nur für $v = 0$, so nennen wir Q **euklidisch**.
Enthält $ker(Q)$ wenigstens zwei verschiedene eindimensionale Untervektorräume, aber keinen zweidimensionalen Untervektorraum, so wird Q **minkowskisch** genannt.
Ist $ker(Q)$ die Vereinigung zweier Hyperebenen, so wird Q als **2-singulär** bezeichnet.
Ist $ker(Q)$ ein eindimensionaler Untervektorraum von V, so heißt Q **galileisch**.
Als Nächstes formulieren wir einen Satz, der die Kerne von quadratischen Formen im Fall $dim(V) = 2$ beschreibt.

Satz 1.2.1. *Sei V ein K-Vektorraum mit $dim(V) = 2$ und einer quadratischen Form Q, die weder singulär noch euklidisch ist.*
Dann ist Q entweder gallileisch oder minkowskisch.
Im gallileischen Fall gibt es eine Basis $\{a, b\}$ von V mit
$ker(Q) = Kb$ und im minkowskischen Fall gibt es eine Basis $\{a, b\}$ von V mit $ker(Q) = Ka \cup Kb$.
Jede minkowskische Ebene ist 2-singulär.

Beweis. Siehe den Beweis von (7.23) (3) und (8) in [32]. □

Wir möchten nun Morphismen von metrischen Vektorräumen geeignet definieren.
Hierzu verallgemeinern wir die in [32] (7.47) gegebene Definition.

Definition 1.2.2. *Seien (V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2) metrische Vektorräume.*
$\delta : V_1 \to V_2$ semilinear mit Begleitisomorphismus σ.
*Wir nennen δ ist einen **Morphismus von metrischen Vektorräumen**, genau dann, wenn ein $\lambda \in K_1 \setminus \{0\}$ existiert, sodass*
$\lambda\sigma(Q_1(v)) = Q_2(\delta(v))$ für alle $v \in V_1$.

Offenbar ist diese Definition mit der Definition eines Isomorphismus von metrischen Vektorräumen in [32] (7.47) äquivalent, wenn f bijektiv ist (man beachte die Definition der geometrischen Äquivalenz auf Seite 28 in [32]).

Wir möchten nun die Kerne von solchen Abbildungen untersuchen, denn es wird sich später herausstellen, dass genau diese semilinearen Abbildungen projektive Erweiterungen für unsere Kettengeometrie über einer Quadrik induzieren. Man beachte, dass nach Satz 1.1.4 bei durch semilineare Abbildungen induzierten Homomorphismen projektiver Koordinatenräume der Definitionsbereich eine durch die projektive Punktmenge des Kerns der semilinearen Abbildung geschlitzte Punktmenge ist.
Vorher definieren wir noch für einen metrischen Vektorraum (V, K, Q) die Menge $V_Q^{\perp} := ker(Q) \cap V^{\perp}$ und nennen diesen Untervektorraum von V das **Radikal des Kerns** von Q.

Satz 1.2.2. *Seien* $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$ *metrische Vektorräume und* $\delta : V_1 \to V_2$ *ein Morphismus von metrischen Vektorräumen. Der Kern von* f *ist ein Untervektorraum von* $V_{Q_1}^{\perp}$.

Beweis. Sei $u \in ker(\delta)$.
Dann ist $\delta(u) = 0$, also $Q_2(\delta(u)) = 0 = \lambda\sigma(Q_1(u)) \Rightarrow \sigma(Q_1(u)) = 0 \Rightarrow Q_1(u) = 0 \Rightarrow u \in ker(Q_1)$.
Sei nun $v \in V_1$.
Dann ist $\sigma(f(v, u)) = \sigma(Q_1(v+u)) - \sigma(Q_1(v)) - \sigma(Q_1(u)) = \lambda^{-1}Q_2(\delta(v) + \delta(u)) - \lambda^{-1}Q_2(\delta(v)) - \lambda^{-1}Q_2(\delta(u)) = 0$, da $u \in ker(f)$. □

Man kann auch umgekehrt zeigen, dass für einen metrischen Vektorraum (V, K, Q) jeder Untervektorraum von $V_Q^{\perp}$ einen Morphismus metrischer Vektorräume auf V induziert.

Satz 1.2.3. *Sei* (V, K, Q) *ein metrischer Vektorraum,* $U \leq V_Q^{\perp}$, W *ein komplementärer Untervektorraum von* U.
Dann ist $f : V \to V, u + w \mapsto w$ *ein Morphismus von metrischen Vektrorräumen mit* $\lambda = 1, \sigma = id_K, Bild(f) = W$ *und* $ker(f) = U$.

Beweis. Die Abbildung ist offenbar linear (also $\sigma = id_K$) mit $Bild(f) = W$.
Für $u + w \in V$ mit $u \in U, w \in W$ gilt
$Q(u + w) = f(u, w) + Q(u) + Q(w) = Q(w)$. Also $\lambda = 1$. □

Für spätere Zwecke werden wir zeigen, dass Morphismen von metrischen Vektorräumen mit den Kernen und der Orthogonalitätsrelation der entsprechenden quadratischen Formen verträglich sind.

Satz 1.2.4. *Seien* $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$ *metrische Vektorräume,* $f : V_1 \to V_2$ *ein Morphismus von metrischen Vektorräumen.*
Seien $v, v' \in V_1$.
Dann ist $f(v, v') = 0 \iff f(f(v), f(v')) = 0$ *und* $Q_1(v) = 0 \iff Q_2(f(v)) = 0$.

Beweis. Folgt sofort aus der Definition von Morphismen metrischer Vektorräume, der Tatsache, dass σ ein Körperisomorphismus ist, und aus $\sigma(f(v, v'))$
$= \sigma(Q_1(v + v')) - \sigma(Q_1(v)) - \sigma(Q_2(v')) = \lambda^{-1}(Q_2(f(v) + f(v')) - Q_2(f(v)) - Q_2(f(v'))) = \lambda^{-1} f(f(v), f(v'))$ □

Nun werden wir Quadriken definieren, als gewisse projektive Punktmengen.

Definition 1.2.3. *Sei* (V, K, Q) *ein metrischer Vektorraum.*
Wir nennen $F_Q := (ker(Q))^\Pi$ *die* ***durch Q bestimmte Quadrik****.*
(siehe (8.1)(1) in [32]*)*

Wir bezeichnen Punkte Kx mit $Q(x) \neq 0$ als **reguläre Punkte** von $\Pi(V, K)$ und alle übrigen Punkte als **singuläre Punkte**.
Die Menge der regulären Punkte bezeichnen wir mit R_Q.

Eine quadratische Form bestimmt auch Quadriken auf Teilräumen von $\Pi(V, K)$.

Satz 1.2.5. *Sei* (V, K, Q) *ein metrischer Vektorraum,* $U < V$ *ein Untervektorraum.*
Dann ist $U^\Pi \cap F_Q = (U \cap ker(Q))^\Pi$ *eine Quadrik des projektiven Teilraumes* U^Π *von* $\Pi(V, K) = (P, G)$*, nämlich die durch* $Q \mid_U$ *bestimmte Quadrik.*
Insbesondere gilt $\mid g \cap F_Q \mid \leq 2$ *oder* $g \subset F_Q$ *für alle* $g \in G$.

Beweis. Siehe den Beweis von (8.2) in [32]. □

Eine Gerade von $\Pi(V, K)$ trifft also eine Quadrik in höchstens zwei Punkten, wenn sie nicht ganz in der Quadrik liegt.
Das motiviert die folgenden Definitionen.

Definition 1.2.4. *Sei* (V, K, Q) *ein metrischer Vektorraum,* $\Pi(V, K) = (P, G)$ *der projektive Koordinatenraum über* V*.*
Ist $g \in G$*, so wird* g *im Falle* $g \cap F_Q = \emptyset$ *als* ***Passante*** *von* F_Q*, im Falle* $\mid g \cap F_Q \mid = 2$ *als* ***Sekante*** *und im Falle* $\mid g \cap F_Q \mid = 1$ *oder* $g \subset F_Q$ *als* ***Tangente*** *bezeichnet.*
Des Weiteren nennen wir eine Quadrik F_Q ***echt****, wenn wenigstens eine Sekante existiert.*
(siehe (8.3) in [32]*)*

Weiter möchten wir zwei Punktmengen auf der Quadrik definieren. Eine davon wird später die Punktmenge unserer Kettengeometrie über der Quadrik darstellen.

Definition 1.2.5. *Sei* (V, K, Q) *ein metrischer Vektorraum,* $\Pi(V, K) = (P, G)$*.*
Wir nennen für $a \in F_Q$ *die Menge* $\tau_a := \{a\} \cup \{\bigcup\{t \in G \mid a \in t$ *und* $\mid t \cap F_Q \mid \neq 2\}\}$ *den* ***Tangentialraum*** *von* F_a *in* a*. Insbesondere heißt* a *ein* ***einfacher Punkt*** *von* F_Q*, wenn* τ_a *eine Hyperebene von* $\Pi(V, K)$ *ist, und ein* ***Doppelpunkt*** *von* F_Q*, wenn* $\tau_a = P$ *ist.*
Die Menge der Doppelpunkte bezeichnen wir mit D_{F_Q}*.*
(siehe (8.3) in [32]*)*

Für den Tangentialraum eines Punktes und der Menge die Doppelpunkte einer Quadrik gilt das Folgende.

Satz 1.2.6. *Sei* (V, K, Q) *ein metrischer Vektorraum.*
Für $a \in F_Q$ *gilt* $\tau_a = (a^\perp)^\Pi$*.*
Des Weiteren ist $(V_Q^\perp)^\Pi$ *die Menge der Doppelpunkte von* F_Q*.*

Beweis. Siehe den Beweis von (8.4) in [32]. □

Eine echte Quadrik enthält auch stets eine Basis aus einfachen Punkten.

Satz 1.2.7. *Sei* (V, K, Q) *ein metrischer Vektorraum,* F_Q *eine echte Quadrik.*
Dann besitzt $\Pi(V, K) = (P, G)$ *eine Basis aus einfachen Punkten von* F_Q*. Es ist* $< F_Q \setminus D_{F_Q} >=< F_Q >= P$

Beweis. Siehe den Beweis von (8.11) in [32]. □

Eine echte Quadrik von $\Pi(V,K)$ bezeichnen wir als **Ovoid**, bzw. im Fall $dim(\Pi(V,K)) = 2$ als **Oval**, falls F_Q keine Gerade enthält.
Damit gilt für ebene Quadriken das Folgende.

Satz 1.2.8. *Sei (V,K,Q) ein metrischer Vektorraum, ϵ eine Ebene des projektiven Raumes $\Pi(V,K)$.*
Dann ist $\epsilon \cap F_Q$ ein Teilraum, ein Geradenkreuz oder ein Oval.

Beweis. Siehe den Beweis von (8.9) in [32]. □

Nun werden wir räumliche, echte Quadriken betrachten.

Satz 1.2.9. *Sei (V,K,Q) ein metrischer Vektorraum, $dim(\Pi(V,K) = 3$ und F_Q sei eine echte Quadrik.*
Dann ist D_{F_Q} ein Teilraum mit $dim(D_{F_Q}) \leq 1$.
Besteht D_{F_Q} aus genau einem Punkt d und ist ϵ eine Ebene von $\Pi(V,K)$ mit $d \notin \epsilon$, so ist $F_Q \cap \epsilon$ ein Oval in ϵ und es ist $F_Q = \bigcup_{x \in F_Q \cap \epsilon} < d, x >$.
In diesem Fall bezeichnen wir F_Q als einen ***Kegel*** *mit der* ***Spitze*** *d.*
D_{F_Q} ist genau dann eine Gerade, wenn F_Q ein Ebenenkreuz ist.

Beweis. Siehe den Beweis von (8.16) in [32]. □

Wir bezeichnen eine Quadrik F_Q als **Hyperboloid**, wenn sie wenigstens eine doppelpunktfreie Gerade enthält.
Eine echte Quadrik in einem dreidimensionalen projektiven, metrischen Koordinatenraum ist demnach entweder ein Ovoid, ein Kegel, ein Hyperboloid oder ein Ebenenkreuz.
Wir werden im nächsten Satz genauer auf die Struktur eines Hyperboloid eingehen.

Satz 1.2.10. *Sei (V,K,Q) ein metrischer Vektorraum, $dim(\Pi(V,K)) = 3$, sodass F_Q ein Hyperboloid ist.*
Dann enthält F_Q drei paarweise windschiefe Geraden g, h, k, sowie drei weitere paarweise verschiedene Geraden g', h', k', die jeweils mit den Geraden g, h, k genau einen Schnittpunkt besitzen (eine Gerade, die drei paarweise windschiefe Geraden in jeweils genau einem Punkt treffen, bezeichnen wir als ***Treffgerade*** *der Geraden).*
Sei R_1, bzw. R_2 die Menge aller Treffergeraden von g, h, k, bzw. g', h', k'.
Dann ist $R_1 \cup R_2$ die Menge aller in F_Q gelegenen Geraden.
Es ist $g, h, k \in R_2$ und $g', h', k' \in R_1$.

Die Geraden in R_1, bzw. R_2 sind paarweise windschief.
Es ist $F_Q = \bigcup R_1 = \bigcup R_2$.
Für $x \in F_Q$ gibt es genau ein $g_1 \in R_1$ und genau ein $g_2 \in R_1$ mit $x \in g_1$ und $x \in g_2$ und es ist $\tau_x =< g_1 \cup g_2 >$.
Jede Gerade aus R_1 trifft jede Gerade aus R_2 und es ist $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Beweis. Siehe den Beweis von (8.22) in [32]. $\square$

Wir werden die eben im Satz genannten Mengen R_1 und R_2 als die beiden auf F_Q gelegenen **Reguli** bezeichnen.

Wir werden nun Beispiele angeben, auf die wir uns später beziehen werden.

Beispiele 1.2.1.

(1) *In $\Pi(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ ist die durch die quadratische Form $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ bestimmte Quadrik ein Ovoid. Es ist $(\mathbb{R}^4)^\perp = \{0\}$.*

(2) *Die durch $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ bestimmte Quadrik in $\Pi(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ ist ein Kegel mit Spitze $\mathbb{R}(0, 0, 0, 1) = (\mathbb{R}^4)^\perp$.*

(3) *Durch $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ ist ein Hyperboloid defininiert. Es ist $(\mathbb{R}^4)^\perp = \{0\}$*

(4) *Allgemeiner hat man in $\Pi(K^4, K)$, wobei K ein beliebiger Körper ist, durch $Q : K^4 \to K, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 - x_3x_4$ einen Kegel mit Spitze $K(0, 1, 0, 0) = (K^4)^\perp$ und durch $x_1x_2 - x_3x_4$ einen Hyperboloid.*

(5) *In $\Pi(K^6, K)$ ist durch $Q : K^5 \to K, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto x_1x_4 - x_2x_3 - x_5x_6$ die sogenannte **Klein-Quadrik** (oder **Plücker-Quadrik**) bestimmt. Es ist $(K^6)^\perp = \{0\}$.*

(Für (1), (2), (3) siehe (7.3)(2) in [32] *Für (4) siehe* [9] *(4.9) und für (5) siehe* [9] *4.4)*

Da wir später den zweiten Fundamentalsatz der affin-metrischen Geometrie anwenden möchten, werden wir uns jetzt affin-metrischen Räumen zuwenden.
Wir werden diese als affine Koordinatenräume zusammen mit einer planaren Winkelvergleichung definieren. Um diese einführen zu können,

benötigen wir den Begriff des metrischen Produktes.

Definition 1.2.6. *Sei (V, K, Q) ein metrischer Vektorraum, $a, b, c \in V \setminus \{0\}$ linear abhängig.*
Dann heißt

$$d := \begin{cases} \alpha f(a,b)a - \alpha Q(a)b & \text{im Falle } c = \alpha a \\ \alpha Q(a)c + \gamma Q(c)a & \text{im Falle } b = \alpha a + \gamma c \end{cases}$$

der ***vierte Spielgelungsvektor*** *zu a, b, c.*
Außerdem setzen wir $[KaKbKc] := Kd$ und nennen dies die ***vierte Spiegelungsgerade*** *zu Ka, Kb, Kc. (siehe (1.8) in* [29]*)*

Die Bezeichnung vierter Spiegelungsvektor rechtfertigt sich aus der folgenden Tatsache:
Wir setzen $\tilde{a} : V \to V, x \mapsto x - \frac{f(x,a)}{Q(a)}a$ für $a \in V \setminus ker(Q)$. Diese Abbildung nennen wir die Q-Spiegelung mit a an $a^{\perp}$ (siehe (7.62) in [32]).
Es gilt für linear abhängige Vektoren $a, b, c \in V \setminus ker(Q)$ die Gleichung $\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c} = d$ (siehe (7.66) (4) in [32]).

Wir möchten nun die affine Koordinatengeometrie über einem metrischen Vektorraum (V, K, Q) mit $dim(V) \geq 2$ betrachten.
Wir bezeichnen die Geraden aus $G_Q^r := \{a + Kb \mid a, b \in VQ(b) \neq 0\}$ als **reguläre Geraden**. Alle übrigen Geraden von $A(V, K)$ heißen **singuläre Geraden**. Die Menge aller solchen Geraden bezeichnen wir mit G_Q^s.
Sind g, h zwei komplanare reguläre Geraden, so bezeichnen wir (g, h) als **orientierten Winkel**.
Wir nennen zwei orientierte Winkel $(g, h), (k, l)$ **konform**, in Zeichen $(g, h) \wedge_Q (k, l)$, wenn g, h, k, l komplanar sind und
$\{0 \parallel l\} = [\{0 \parallel g\}\{0 \parallel h\}\{0 \parallel k\}]$ gilt.
Wir nennen $(A(V, K), \wedge_Q)$ den zu (V, K, Q) gehörigen **affin-metrischen Raum**.

Nun können wir Isomorphismen von affin-metrischen Räumen definieren.

Definition 1.2.7. *Seien $(V, K, Q), (V', K', Q')$ metrische Vektorräume mit $dim(V) \geq 2$, $(A(V, K), \wedge_Q), (A(V', K'), \wedge_{Q'})$ die entsprechenden affin-metrischen Räume.*

Eine Abbildung $\phi : V \to V'$ nennen wir einen ***Isomorphismus von affin-metrischen Räumen****, wenn ϕ ein Isomorphismus der affinen Koordinatenräume $A(V,K), A(V',K')$ ist und für alle $(g,h),(k,l) \in G \times G$ gilt: $(g,h) \wedge_Q (k,l) \iff (\phi(g),\phi(h)) \wedge_{Q'} (\phi(k),\phi(l))$.*
(siehe (9.3)(1) in [32]*)*

Da $\wedge_Q$, bzw. $\wedge_{Q'}$ nur für Elemente von G_Q^r, bzw. $G_{Q'}^r$ erklärt sind, folgt mit $g = h = k = l \in G_Q^r$, dass $\phi(G_Q^r) = G_{Q'}^r$ und $\phi(G_Q^s) = G_{Q'}^r$ ist.

Der erste Fundamentalsatz der affin-metrischen Geometrie besagt, dass die Isomorphismen von affin-metrischen Räumen genau die Isomorphismen der metrischen Koordinatenvektorräume mit anschließender Translation sind.

Satz 1.2.11. *Seien $(V,K,Q),(V',K',Q')$ metrische Vektorräume mit $dim(V), dim(V') \geq 2$.*
Die Isomorphismen von $(A(V,K),\wedge_Q)$ auf $(A(V',K'),\wedge_{Q'}))$ sind genau die Abbildungen $f : V \to V', x \mapsto \phi(x) + c$ mit $c \in V'$ und ϕ ist ein Isomorphismus von metrischen Vektorräumen.

Beweis. Siehe den Beweis von (9.4) in [32]. □

Für den zweiten Fundamentalsatz der affin-metrischen Geometrie benötigen wir den Begriff des Kreises.
Hierzu die folgende vorbereitende Definition.

Definition 1.2.8. *Sei $(A(V,K),\wedge_Q)$ ein affin-metrischer Raum, $\phi : V \to K$ eine beliebige Linearform und $\alpha \in K$.*
Wir nennen $Q_A = \{x \in V \mid Q(x)+\phi(x)+\alpha = 0\}$ eine ***affine Quadrik*** *von $(A(V,K),\wedge_Q)$.*
(Siehe (9.1)(8) in [32]*)*

Ist Q_A eine affine Quadrik von $(A(V,K),\wedge_Q)$ und U ein Teilraum von $A(V,K)$, so wird $U \cap Q_A$ als eine **Q-Sphäre** vom **Rang** $dim(< U \cap Q_A >)$ bezeichnet.
Die Q-Sphären vom Rang 2 bezeichnen wir als **Q-Kreise**. Die Menge aller Q-Kreise bezeichnen wir mit K_Q.
Man beachte, dass wir nicht gefordert haben, dass ein Q-Kreis keine Gerade enthält. Ein Q-Kreis kann im Extremfall auch ein Teilraum sein.
Nach Aufgabe 9.A.1 d) in [32] geht durch drei nicht-kollineare Punkte

eines affin-metrischen Raumes genau ein Q-Kreis und auf jedem Q-Kreis liegen drei nicht-kollineare Punkte.
Seien a_1, a_2, a_3 drei nicht-kollineare Punkte eines affin-metrischen Raumes, so bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Q-Kreis durch diese Punkte mit $k(a_1, a_2, a_3)$.
Aus 9A.1. b) folgt $k(a_1, a_2, a_3) = \{\Sigma_{i=1}^3 \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in K, \Sigma_{i=1}^3 \lambda_i = 1, Q(\Sigma_{i=1}^3 \lambda_i a_i) = \Sigma_{i=1}^3 \lambda_i Q(a_i)\}$.

Nun werden wir den **zweiten Fundamentalsatz der affin-metrischen Geometrie** formulieren.

Satz 1.2.12. *Seien $(A(V,K),Q), (A(V',V'),Q')$ mit $\mid K \mid, \mid K' \mid \geq 3$ affin-metrische Räume und sei $\phi : V \to V'$ ein Isomorphismus von affinen Räumen.*
Dann ist ϕ ein Isomorphismus von affin-metrischen Räumen, wenn $\phi(K_Q) = K_{Q'}$.

Beweis. Siehe den Beweis von (9.7)(4) in [32]. □

1.3. **Kettengeometrien über Quadriken.**

In diesem Abschnitt möchten wir nun Kettengeomtetrien über Quadriken definieren, sowie deren Morphismen.
Wir werden zeigen, dass Morphismen von metrischen Vektorräumen starke Morphismen der Kettengeometrien der entsprechenden Quadriken induzieren.
Umgekehrt zeigen wir, dass, wenn ein Morphismus von Kettengeometrien über Quadriken einer projektiven Erweiterung fähig ist, diese von einem Morphismus von metrischen Vektorräumen induziert sein muss.

Wir werden Morphismen für Kettenräume definieren. Dies sind gewisse Distanzräume.

Definition 1.3.1. *Sei P eine nichtleere Menge und $\Delta \subset P \times P$ eine zweistellige Relation auf P.*
*Wir nennen das Paar (P, Δ) einen **Distanzraum** mit **Distanzrelation** Δ, wenn gilt:*

(1) Δ *ist symmetrisch, d.h.* $p\Delta q$ *impliziert* $q\Delta p$ *für alle* $p, q \in P$.

(2) Δ *ist antireflexiv, d.h.* $\neg p\Delta p$ *für alle* $p \in P$.

(siehe 1.1.7 in [4]*)*

Da die Relation Δ symmetrisch und antireflexiv ist, können wir die Punktmenge P als Knotenmenge eines Graphen, den sogenannten Distanzgraphen betrachten, bei dem genau dann zwei Knoten p, q mit einer Kante verbunden sind, wenn $p\Delta q$ gilt.

Wir nennen einen Distanzraum **stabil**, wenn es zu $p, q \in P$ ein $r \in P$ mit $p\Delta r\Delta q$ gibt.

Weiter definieren wir Morphismen von Distanzräumen.

Definition 1.3.2. *Seien* $(P, \Delta), (P', \Delta')$ *Distanzräume.*
Eine Abbildung $\gamma : P \to P'$ *nennen wir einen* ***Morphismus von Distanzräumen****, wenn* $p\Delta q \implies \gamma(p)\Delta'\gamma(q)$ *für alle* $p, q \in P$.
(siehe 1.1.9 in [4]*)*

Ist ein solcher Morphismus bijektiv und ist die Umkehrfunktion ebenfalls ein Morphismus, so nennt man ihn einen Isomorphismus.
Isomorphismen von den selben Distanzräumen heißen **Automorphismen**. Die Menge der Automorphismen eines Distanzraumes (P, Δ) ist eine Gruppe und wird mit $Aut(P, \Delta)$ bezeichnet.

Nun definieren wir Kettenräume.

Definition 1.3.3. *Sei* P *eine nichtleere Menge, deren Elemente wir Punkte nennen,* $\boldsymbol{C}$ *eine Menge von Teilmengen von* P*, deren Elemente wir* ***Ketten*** *nennen.*
Wir definieren eine Distanzrelation für Punkte $p, q \in P$*, indem wir* $p\Delta q$ *genau dann, wenn* $p \neq q$ *und es eine Kette* $C \in \boldsymbol{C}$ *mit* $p, q \in C$ *gibt, setzen.*
Wir bezeichnen $\Sigma = (P, \boldsymbol{C})$ *als einen* ***Kettenraum****, wenn das Folgende gilt:*

(1) *Auf jeder Kette liegen mindestens drei Punkte und jeder Punkt liegt auf einer Kette.*

(2) *Je drei paarweise distante Punkte p, q, r liegen auf genau einer Kette $C := (pqr)$.*

(3) *Für jeden Punkt $p \in P$ ist das **Residuum** $\Sigma_p = (D_p, C_p)$ mit $D_p := \{q \in P \mid q\Delta p\}$ und $C_p := \{C \setminus \{p\} \mid p \in C \in \boldsymbol{C}\}$ ein **partieller affiner Raum**, d.h. (D_p, C_p) ist eine Struktur, die aus einem affinen Raum hervorgegangen ist, indem man aus der Geradenmenge ganze Parallelklassen entfernt (wobei auch erlaubt ist, dass keine Parllelklassen entfernt wurden) und die Punktmenge die selbe, wie die des affinen Raumes ist.*

(siehe 1.1 in [5]*)*

In naheliegender Weise definieren wir Unterräume von Kettenräumen.

Definition 1.3.4. *Sei $\Sigma = (P, \boldsymbol{C})$ ein Kettenraum.*
Eine Teilmenge $U \subset P$ heißt Unterraum, wenn Folgendes gilt.

(1) *U enthält drei paarweise distante Punkte.*

(2) *Sind $p, q, r \in U$ paarweise distant, so liegt ihre eindeutige Verbindungskette (pqr) ganz in U. Die Menge aller solcher Ketten bezeichnen wir mit $\boldsymbol{C}(U)$.*

(3) *Die Struktur $(U, \boldsymbol{C}(U))$ ist ein Kettenraum.*

Nun definieren wir Morphismen von Kettenräumen.

Definition 1.3.5. *Seien $\Sigma_1 = (P_1, \boldsymbol{C}_1), \Sigma_2 = (P_2, \boldsymbol{C}_2)$ Kettenräume mit Distanzrelationen Δ_1, Δ_2.*
*Eine Abbildung $\gamma : P_1 \to P_2$ nennen wir einen **Morphismus von Kettenräumen**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *Für alle $p, q \in P_1$ gilt $p\Delta_1 q \implies \gamma(p)\Delta_2\gamma(q)$.*

(2) *Für alle $C \in \boldsymbol{C}_1$ gilt $\gamma(C) \in \boldsymbol{C}_2$.*

(Siehe 1.9 in [5]*)*

Erfüllt ein solcher Morphismus auch $\gamma(p)\Delta_2\gamma(q) \implies p\Delta_1 q$ für alle $p, q \in P_1$, nennen wir ihn einen **starken Morphismus**.
Werden sämtliche Punkte auf eine Kette abgebildet, ist also $\gamma(P_1) = C$ für ein $C \in \mathbf{C}$, so nennen wir den Morphismus **trivial**.

Als nächstes definieren wir unsere Kettengeometrie über einer Quadrik.
Wir werden nur solche Quadriken betrachten, die einer Generalvoraussetzung genügen.

Generalvoraussetzung 1.3.1. *Sei (V, K, Q) ein metrischer Vektorraum.*
*Die Quadrik F_Q genügt der **Generalvoraussetzung**, wenn $dim(V) \geq 4$ und F_Q wenigstens eine Sekante enthält und nicht die Vereinigung zweier Hyperebenen ist.*
(siehe [8] *5.1.7)*

Damit können wir unsere Kettengeometrie über einer Quadrik defnieren.

Definition 1.3.6. *Sei (V, K, Q) ein metrischer Vektorraum, sodass F_Q der Generalvoraussetzung genügt.*
Wir setzen $\Sigma(Q) := (P, \boldsymbol{C})$, wobei P die Menge der einfachen Punkte von F_Q ist und $\boldsymbol{C} := \{\epsilon \cap F_Q \mid \epsilon$ ist eine Ebene von $\Pi(V, K)$ und $\epsilon \cap F_Q$ enthält wenigstens drei einfache Punkte, aber keine Gerade $\}$.
*Wir nennen $\Sigma(Q)$ die **Kettengeometrie über der Quadrik** F_Q.*
(Siehe 5.1.8 in [8]*)*

Zum Beweis, dass die soeben definierte Struktur ein Kettenraum ist, siehe 5.1.12 in [8].
Eine Ebene, die F_Q in wenigstens drei einfachen Punkten schneidet, sodass der Schnitt keine ganze Gerade enthält nennen wir auch **zulässig** und den Schnitt bezeichnen wir ebenfalls als einen **zulässigen Schnitt**.

Für die durch die Ketten von $\Sigma(Q)$ definierte Distanzrelation Δ gilt das Folgende.

Satz 1.3.1. *Sei (V, K, Q) ein metrischer Vektorraum, sodass F_Q der Generalvoraussetzung genügt.*

Es sind zwei Punkte von Kx, Ky von $\Sigma(Q)$ genau dann distant, wenn die Verbindungsgerade durch Kx und Ky in $\Pi(V, K)$ eine Sekante ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $f(x, y) \neq 0$.

Beweis. Siehe den Beweis von 5.1.5 (1) und 5.1.11 in [8]. $\square$

Wir werden später den folgenden Satz über Automorphismen von Kettengeometrien über Quadriken benötigen.

Satz 1.3.2. *Sei (V, K, Q) ein metrischer Vektorraum, der die Generalvoraussetzung 1.3.1 erfüllt.*
Sei $\Psi : P \to P$ eine Kollineation von $\Pi(V, K) = (P, G)$ mit $\Psi(F_Q) = F_Q$. Dann ist $\Psi\mid_{F_Q^*}$ ein Automorphismus der Kettengeometrie $\Sigma(Q)$.

Beweis. Siehe den Beweis von 5.1.15 in [8]. $\square$

Ab sofort erfüllen alle metrischen Vektorräume die Generalvoraussetzung.

Wir möchten projektive Erweiterungen von Morphismen von solchen Kettenräumen untersuchen.
Hierzu die folgende Definition.

Definition 1.3.7. *Seien $\Sigma_1 = (P_1, \boldsymbol{C}_1), \Sigma_2 = (P_2, \boldsymbol{C}_2)$ Kettengeometrien über Quadriken der metrischen Vektorräume $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$.*
Sei $\gamma : P_1 \to P_2$ ein Morphismus der Kettenräume.
*Wir nennen einen Homomorphismus $\Psi : V_1^\Pi \setminus T \to V_2^\Pi$ von projektiven Räumen, wobei T ein Teilraum von $\Pi(V_1, K_1)$ ist, eine **projektive Erweiterung**, wenn $P_1 \subset V_1^\Pi \setminus T$ und $\Psi\mid_{P_1} = \gamma$ gilt.*

Wir meinen hier tatsächlich Homomorphismen von projektiven Räumen, wie in Definition 1.1.6 angegeben.
Betrachten wir statt eines Teilraumes T eine beliebige Teilmenge der Punktmenge von $\Pi(V_1, K_1)$ und betrachten wir entsprechend verallgemeinerte Homomorphismen von projektiven Räumen, wie in Definition 1.1.7, so sprechen wir von einer **verallgemeinerten projektiven Erweiterung**.

Semilineare Abbildungen induzieren Homomorphismen auf den projektiven Koordinatenräume. Wir werden nun zeigen, dass Morphismen von metrischen Vektorräumen Morphismen der Kettengeometrien über den entsprechenden Quadriken induzieren.

Satz 1.3.3. *Seien* $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$ *metrische Vektorräume,* $\Sigma_1 = (P_1, \boldsymbol{C}_1), \Sigma_2 = (P_2, \boldsymbol{C}_2)$ *die entsprechenden Kettengeometrien. Ein Morphismus* $\delta : V_1 \to V_2$ *von metrischen Vektorräumen induziert einen starken Morphismus* $\gamma : P_1 \to P_2, Kx \mapsto K\delta(x)$ *der Kettengeometrien.*

Beweis. Da δ semilinear ist, induziert δ die einen Homomorphismus von den projektiven Räumen $\Pi(V_1, K_1), \Pi(V_2, K_2)$, nämlich durch
$\Psi : (V_1)^\Pi \setminus (ker(\delta))^\Pi \to (V_2)^\Pi, Kx \mapsto K\delta(x)$.
Der Definitionsbereich ist ein geschlitzter Raum.
Da $ker(\delta) \subset V^\perp$ und sämtliche Punkte der Kettengeometrie Σ_1 einfache Punkte sind, sind diese Punkte nicht von der Schlitzung betroffen, befinden sich also im Definitionsbereich von Ψ.
Aus Satz 1.2.4 folgt, dass Ψ auch Punkte von F_{Q_1} auf Punkte von F_{Q_2} abbildet. Da zwei Punkte $p = Kx, q = Ky$ von Σ_1 genau dann distant sind, wenn $f(x, y) \neq 0$, folgt aus Satz 1.2.4, $p\Delta_1 q \iff \Psi(p)\Delta_2\Psi(q)$.
Da jeder Punkt aus Σ_1 mit einem weiteren Punkt distant ist, folgt daraus auch, dass einfache Punkte auf einfache Punkte abgebildet werden.
Somit ist $\gamma := \Psi \mid_{P_1}$ eine Abbildung von P_1 nach P_2 .
Sie bildet auch Ketten auf Ketten ab.
Denn auf einer Kette liegen drei paarweise distante (also nicht-kollineare) Punkte $p, q, r \in P_1$, welche auf die drei paarweise distanten und damit nicht-kollinearen Punkte $\Psi(p), \Psi(q), \Psi(r)$ abgebildet werden. Ψ bildet also die von p, q, r aufgespannte Ebene bijektiv auf die von $\Psi(p), \Psi(q), \Psi(r)$ aufgespannte Ebene ab, da Ψ ein Homomorphismus ist. Da Ψ Quadrikenpunkte auf Quadrikenpunkte abbildet, wird die Kette durch p, q, r bijektiv auf die entsprechende Kette in Σ_2 abgebildet.
Damit ist γ ein starker Morphismus der Kettenräume Σ_1 und Σ_2.

□

Als Nächstes möchten wir zeigen, dass, wenn ein Morphismus von Kettengeometrien über Quadriken eine projektive Erweiterung besitzt, diese durch einen Morphismus von metrischen Vektorräumen induziert ist.

Um das zu zeigen, benötigen wir den ersten und zweiten Fundamentalsatz der projektiv-metrischen Geometrie, welcher sich auf projektiv-metrische Koordinatenräume bezieht.
Hierzu die folgenden Definitionen.

Definition 1.3.8. *Sei (V, K, Q) ein metrischer Vektorraum.*
Sei $R_Q^3 := \{(g, h, k) \mid g, h, k \in R_Q$ und g, h, k sind komplanare Geraden in $A(V, K)\}$.
Wir nennen die Abbildung $\mu_Q : R_Q^3 \to R_Q, (g, h, k) \mapsto [ghk]$ das zu Q gehörige ***metrische Produkt****.*
(siehe (7.84) in [32])

Wir bezeichnen das Paar $(\Pi(V, K), \mu_Q)$ als einen **projektiv-metrischen Raum**.
Für solche Räume werden die Isomorphismen wie folgt definiert.

Definition 1.3.9. *Seien $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$ metrische Vektorräume. Wir nennen einen Isomorphismus Ψ der projektiven Räume $\Pi(V_1, K_1)$, $\Pi(V_2, K_2)$ einen* ***Isomorphismus von projektiv-metrischen Räumen****, wenn $\Psi(R_{Q_1}) = R_{Q_2}$ und $\Psi(\mu_{Q_1}(a, b, c)) = \mu_{Q_2}(\Psi(a), \Psi(b), \Psi(c))$ für alle $(a, b, c) \in R_{Q_1}^3$ gilt.*

Nun können wir die Fundamentalsätze der projektiv-metrischen Geometrie formulieren.

Satz 1.3.4. *Seien $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$ metrische Vektorräume mit $3 \leq dim(V_1) \leq \infty, 3 \leq dim(V_2) \leq \infty$.*
Die Isomorphismen von $(\Pi(V_1, K_1))$ auf $(\Pi(V_2, K_2))$ sind durch Isomorphismen der metrischen Vektorräume V_1 und V_2 induziert.

Beweis. Siehe den Beweis von (10.4). □

Der zweite Fundamentalsatz der projektiv-metrischen Geometrie gibt ein hinreichendes Kriterium dafür an, wann ein Isomorphismus von projektiven Koordinatenräumen ein Isomorphismus der entsprechenden projektiv-metrischen Räume ist.

Satz 1.3.5. *Seien* $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$ *metrische Vektorräume mit* $dim(V_1), dim(V_2) \geq 2$ *und sei* Ψ *ein Isomorphismus projektiver Räume von* $\Pi(V_1, K_1)$ *auf* $\Pi(V_2, K_2)$.
Es ist Ψ *dann ein Isomorphismus projektiver-metrischer Räume von* $(\Pi(V_1, K_1), \mu_{Q_1})$ *und* $(\Pi(V_2, K_2), \mu_{Q_2})$, *wenn* F_{Q_1} *eine echte Quadrik oder eine Hyperebene ist, und* $\Psi(R_{Q_1}) = R_{Q_2}$ *gilt.*

Beweis. Siehe den Beweis von (10.6)(1) in [32]. □

Um zu zeigen, dass alle projektiven Erweiterungen von Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken durch Morphismen von projektiv-metrischen Vektorräumen induziert sind, beweisen wir den folgenden Hilfssatz.

Satz 1.3.6. *Seien* $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$ *metrische Vektorräume,* T *ein Teilraum von* $\Pi(V_1, K_1)$, $\Psi : V_1^\Pi \setminus T \to V_2^\Pi$ *ein Homomorphismus von projektiven Räumen mit* $\Psi^{-1}(R_{Q_2}) = R_{Q_1}$ *und sei* F_{Q_1} *eine echte Quadrik. Dann ist* $\Psi(K_1 x) = K_2 \delta(x)$, *wobei* δ *ein Morphismus von metrischen Vektorräumen ist.*

Beweis. Nach Satz 1.1.6 lässt sich Ψ zerlegen in eine Zentralprojektion auf einem zu T komplementären Teilraum U^Π, wobei $U \subset V_1$ und einem bijektiven Homomorphismus auf $Bild(\Psi)$.
Seien $F_1 := F_{Q_1} \cap U^\Pi$, $F_2 := F_{Q_2} \cap Bild(\Psi)$. Dann sind F_1, F_2 offenbar Quadriken, die zustande kommen, indem man Q_1 auf U, bzw. Q_2 auf $Bild(\delta)$ einschränkt.
Ψ bildet reguläre Punkte auf reguläre Punkte und Quadrikenpunkte auf Quadrikenpunkte ab. Denn sei $r \in R_{Q_1}$. Falls $\Psi(r) \in F_{Q_2}$, dann wäre $r \notin \Psi^{-1}(R_{Q_2})$.
Sei $q \in F_1$. Falls $\Psi(q) \in R_{Q_2}$, so wäre $q \in \Psi^{-1}(R_{Q_2})$ im Widerspruch zu $\Psi^{-1}(R_{Q_2}) = R_{Q_1}$.
Man kann auch einsehen, dass ovale ebene Schnitte mit F_{Q_1} auf ovale Ebene Schnitte in F_{Q_2} abgebildet werden.
Seien dazu p, q, r paarweise distant. Die Gerade pq ist eine Sekante, muss also bijektiv auf die Sekante $p'q'$ abgebildet werden. Würde nun die Ebene pqr auf $p'q'$ zusammengezogen werden, so müsste pr auf $p'q'$ mit $r' = q'$ und qr auf $q'r'$ mit $r' = p'$ abgebildet werden im Widerspruch zu $q' \neq p'$.
Damit ist $dim(Bild(\Psi)) \geq 2$, nach Satz 1.1.4 ist Ψ also durch eine semilineare Abbildung $\delta : V_1 \to V_2$ induziert.
Es ist auch F_1 eine echte Quadrik, denn, da F_{Q_1} echt ist, besitzt F_{Q_1} eine Sekante s. Da s zwei Quadrikenpunkte und reguläre Punkte besitzt,

muss s durch Ψ bijektiv auf eine Sekante abgebildet werden. Damit muss auch s auf eine Sekante in U^Π projiziert werden.
Wir wenden nun Satz 1.3.4 und 1.3.5 auf δ an und erhalten, dass es zu δ ein $\lambda \in K_2 \setminus \{0\}$ gibt, mit $\sigma(Q_1(v)) = \lambda Q_2(\delta(v))$ für alle $v \in U$. (Bemerkung: Streng genommen erhalten wir ein auf U definiertes δ' mit diesen Eigenschaften. Es unterscheidet sich von δ lediglich um einen Faktor $\alpha \in K_2$. Multiplizieren wir δ' mit α^{-1}, so bleibt die Eigenschaft erhalten und wir erhalten δ.)
Offenbar erfüllen auch alle $q \in F_{Q_1}$ diese Gleichung, da dann beide Seiten 0 werden.
Sei $r \in R_{Q_1} \setminus U^\Pi$. Wir konstruieren eine andere Unterraumprojektion, die r und einen regulären Punkt r' aus U^Π enthält.
Da F_1 ein Oval in U^Π hat, gibt es zwei verschiedene reguläre Punkte $r_1 = K_1x_1, r_2 = K_1x_2$ in U^Π. Wir betrachten eine Basis B_{ker} von $ker(\Psi)^\Pi$. Dann sind $B_1 := B_{ker} \cup \{r_1\}$ und $B_2 := B_{ker} \cup \{r_2\}$ unabhängig. Falls $r \notin \langle B_1 \rangle$ bauen wir $B_1 \cup \{r\}$ mit Hilfe des Basisergänzungssatzes zu einer Basis von $\Pi(V_1, K_1)$ aus. Falls nicht, machen wir es mit $B_2 \cup \{r\}$.
Sei OBdA $r \notin \langle B_1 \rangle$. Wir bauen B_1 entsprechend aus zu B. Dann ist $C^* := \langle B \setminus B_{ker} \rangle$ ein Komplement von $\langle B_{ker} \rangle = ker(\Psi)^\Pi$.
Dann ist $\phi' := \Psi \mid_{C^*}$ eine Injektion mit der Eigenschaft, dass es ein $\lambda' \in K_2 \setminus \{0\}$ mit $\sigma(Q_1(v)) = \lambda' Q_2(\delta(v))$ für alle $v \in C$ gibt.(Wir wenden also wieder Satz 1.3.4 und 1.3.5 an. Dabei gehen wir wieder OBdA von δ aus.)
Da $r_1 = K_1x_1 \in U^\Pi \cap C^\Pi$ ist $\lambda Q_2(\delta(x_1)) = \sigma(Q_1(x_1)) = \lambda' Q_2(\delta(x_1))$, also $\lambda = \lambda'$, da mit $Q_1(x_1) \neq 0$ auch $Q_2(\delta(x_1)) \neq 0$ ist. □

Satz 1.3.7. *Seien* $(V_1, K_1, Q_1), (V_2, K_2, Q_2)$ *metrische Vektorräume,* $\Sigma_1 = (P_1, \boldsymbol{C}_1), \Sigma_2 = (P_2, \boldsymbol{C}_2)$ *die entsprechenden Kettengeometrien. Sei* $\mu : P_1 \to P_2$ *ein Morphismus der Kettengeometrien, welcher eine projektive Erweiterung* Ψ *besitzt, dann ist* Ψ *von einem Morphismus* $\delta : V_1 \to V_2$ *von metrischen Vektoräumen induziert.*

Beweis. Wir zeigen, dass Ψ reguläre Punkte auf reguläre Punkte, Punkte von $(V_{Q_1}^\perp)^\Pi$ auf Punkte von $(V_{Q_2}^\perp)^\Pi$, Punkte von $(V_1^\perp \setminus V_{Q_1}^\perp)^\Pi$ (können im Fall $char(K_1) = 2$ vorkommen) auf Punkte von $(V_2^\perp)^\Pi \setminus V_{Q_2}^\perp)^\Pi$ und einfache Punkte auf einfache Punkte abbildet.
Da F_{Q_1} nach Generalvoraussetzung wenigstens eine Kette hat, können wir Satz 1.3.6 anwenden und erhalten die Behauptung.

Da P_1 genau aus den einfachen Punkten besteht und $\Psi\mid_{\Sigma_1(Q_1)}=\mu$ werden einfache Punkte auf einfache Punkte abgebildet.
Sei $r\in R_{Q_1}\setminus(V_1^{\perp})^{\Pi}$. Dann geht durch r wenigstens eine Sekante $s=pq$ mit $p,q\in F_{Q_1}\setminus(V_1^{\perp})^{\Pi}, p\neq q$. Da μ die Distanzrelation erhält, wird s bijektiv auf eine Sekante $s'=p'q'$ mit $\Psi(p)=p',\Psi(q)=q'\in\Sigma_2(Q_2)$ abgebildet. Dann muss $\Psi(r)$ ein regulärer Punkt, der nicht in $(V_2^{\perp})^{\Pi}$ sein (da durch $\Psi(r)$ die Sekante s' geht).
Sei $v\in(V_{Q_1}^{\perp})^{\Pi}$. Um zu erklären, dass v weder auf einen einfachen Punkt, noch auf einen regulären Punkt abgebildet werden kann, betrachten wir oBdA eine Sekante pq mit $p,q\in P_1$(je nach Fall, den wir betrachten werden, wird man immer eine solche Sekante finden). Dann sind pv,qv Tangenten mit einfachen Punkten $o\in pv, s\in qv, s\Delta_1p, o\Delta_1q$, da der Schnitt $pqv\cap F_{Q_1}$ ein Geradenkreuz mit Knotenpunkt v ist.
Seien $p':=\Psi(p),q':=\Psi(q)$.
Wird v auf q' abgebildet, so wird pv bijektiv auf $p'q'$ abgebildet. Da $\Psi(v)=q',\Psi(p)=p'$ muss $\Psi(o)$ auf einen regulären Punkt im Widerspruch zu $\Psi(o)\in P_2$ abgebildet werden.
Wird v auf einen regulären Punkt $r'\in p'q'$ abgebildet, so wird vq bijektiv auf $p'q'$ abgebildet.
Da $\Psi(s)\in P_2$ und $\Psi(q)=q'$ muss $\Psi(s)=q'$ sein. Es ist aber $p\Delta_1s$ und $\Psi(o)=p'=\Psi(s)$, also nicht $\Psi(p)\Delta_2\Psi(s)$.
Wird nun v auf $v'\in(V_2^{\perp})^{\Pi}\setminus F_{Q_2}$ abgebildet, so wird vq bijektiv auf die Tangente $v'q'$ abgebildet.
Dann muss s auf einen regulären Punkt abgebildet werden, was nicht sein kann, da $\Psi(s)\in P_2$.
Sei nun $v\in(V_1^{\perp})^{\Pi}\setminus F_{Q_1}$, pq wieder wie eben eine Sekante.
Dann gibt es ein reguläres $r\in vp$ welches nicht in $(V_1^{\perp})^{\Pi}$ liegt. Wird v auf p' abgebildet, so muss auch r auf p' abgebildet werden, was nicht sein kann.
Wird v auf einen regulären Punkt $r'\in p'q'$ abgebildet, so wird vq auf $r'q'$ bijektiv abgebildet. Da vq außer v und q sonst nur aus regulären Punkten, die nicht in $(V_1^{\perp})^{\Pi}$ sind besteht, muss es einen solchen Punkt geben, der auf p' abgebildet wird, was nicht sein kann.
Da F_{Q_1} eine echte Quadrik ist, können wir Satz 1.3.6 anwenden und erhalten die Behauptung. □

Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken, die einer projektiven Erweiterung fähig sind, lassen sich also durch Morphismen von metrischen Vektorräumen darstellen.
Die projektive Erweiterung lässt sich dann nach den Sätzen 1.1.4, 1.2.2 zerlegen in eine von einem Unterraum von $(V_Q^{\perp})^{\Pi}$ ausgehende

Zentralprojektion mit anschließenden Isomorphismus von projektiv-metrischen Räumen.
Da $V_Q^\perp = \{0\}$ für die Beispiele (1),(3) und (5) in 1.2.1 gibt es für diese Quadriken keine nicht-injektiven projektiven Erweiterungen. Für (2) und (4) ist $dim(V_Q^\perp) = 1$. Ein projektives Komplement wäre in diesen Fällen eine Ebene, der durch die Zentralprojektion entstehende Morphismus der Kettengeometrien über den Quadriken wäre also trivial.
Um Beispiele für nicht-injektive, nicht-triviale Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken angeben zu können, betrachten wir das Beispiel (2) des Kegels in höherer Dimension.

Beispiel 1.3.1. *Wir bezeichnen die durch* $Q : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_1^2+x_2^2+x_5^2-x_3^2$ *bestimmte Quadrik in* $\Pi(\mathbb{R}^5, \mathbb{R})$ *als einen höherdimensionalen Kegel mit Spitze* $\mathbb{R}(0,0,0,1,0) = (\mathbb{R}^5)^\perp$.
Sei U *der von den Vektoren* $(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1)$ *aufgespannte Untervektorraum. Dann ist* U^Π *ein zu* $(\mathbb{R}^5)^\perp$ *komplementärer Teilraum und die Unterraumprojektion nach Satz 1.2.3 induziert einen projektiv erweiterten, nicht-trivialen Morphismus von* $\Sigma(Q)$ *nach* $\Sigma(Q)$.

2. Eine algebraische Darstellung von Kettengeometrien über Quadriken

In diesem Kapitel werden wir auf eine algebraische Darstellung von Kettengeometrien über Quadriken eingehen.
M. Werner benutzt in [36] bei seinem Beweis des Darstellungssatzes der Automorphismen von den von ihm betrachteten Kettengeometrien über Quadriken mittels gewisser projektiver Kollineationen vorteilhaft die Darstellung solcher Kettenräume mittels einer Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$ über einer K-Algebra R.
Es ist daher naheliegend zu fragen, ob eine Kettengeometrie über einer Quadrik eine entsprechende Darstellung besitzt.
In [6] wird die Frage weitgehend beantwortet.
Mittels einer verallgemeinerten stereographischen Projektion kann man Kettengeometrien über Quadriken in K-Vektorräumen mit $\mid K \mid \geq 5$ als Kettenräume $\Sigma(K, R, J)$ über einem Jordansystem darstellen, welche gewisse Unterräume von $\Sigma(K, R)$ sind.
Solche Kettenräume wurden bislang nur über sogenannten starken Jordansystemen definiert, was beim Beweis des Darstellungssatzes in [6] ein Hindernis darzustellen scheint (daher die Einschränkung $\mid K \mid \geq 5$).
Vor Kurzem wurde jedoch von M. Bibik in [4] eine verallgemeinerte Definition von $\Sigma(K, R, J)$ eingeführt. Mit dieser Definition ist $\Sigma(K, R, J)$ ein Kettenraum für sogenannte Jordan-abgeschlossene Jordansysteme J.
Wir werden an die Ideen in [6] hinsichtlich dieser neuen Definition anknüpfen und einen alternativen Beweisansatz schildern, der auch Darstellung mittels einer Kettengeometrie über einem Jordan-System für den allgemeinen Fall $\mid K \mid \geq 2$ ermöglicht.

Im ersten Abschnitt definieren wir Kettengeometrien über K-Algebren und Jordansystemen und stellen einige Sätze bezüglich dieser Strukturen zusammen, die wir später benötigen werden.
Auch werden wir auf die oben genannte verallgemeinerte Definition einer Kettengeometrie über einem Jordansystem eingehen. Entscheidend hierfür ist eine alternative Definition der Punktmenge von $\Sigma(K, R, J)$, der sogenannten projektiven Geraden über J.
Wir werden ein Gleichheitskriterium angeben, welches besagt, dass die Punktmenge der alten Definition von $\Sigma(K, R, J)$ genau dann mit der der neuen Definition übereinstimmt, wenn das zugrunde liegende

Jordanssystem J stabil ist.

Im zweiten Abschnitt schildern wir einen Beweisansatz, der zeigt, wie man den Beweis in [6] auf den Fall $\mid K \mid\geq 2$ verallgemeinern kann. Wir zeigen, dass das in [6] betrachtete, zur Darstellung der Kettengeometrie über einer Qudarik verwendete Jordan-System Jordanabgeschlossen ist und fordern, dass es stabil ist, sowie eine weitere Eigenschaft besitzt, die für starke Jordan-Systeme bekannterweise gilt.
Damit kann dann der Beweis des Darstellungssatzes wie in [6] geführt werden.
Ob sich die oben erwähnten Annahmen tatsächlich beweisen lassen, bleibt allerdings zu hoffen.

Wir werden uns in diesem Kapitel hauptsächlich an [4], [6] und [8] orientieren.

2.1. **Kettengeometrien über K-Algebren und Jordan-Systemen.**

Wir werden zunächst $\Sigma(K, R)$ definieren.
Hierzu müssen wir die projektive Gerade über R definieren.

Sei R ein assoziativer Ring mit $1 \neq 0$. Die Gruppe $GL_2(R)$ der invertierbaren 2×2 Matrizen mit Einträgen aus R operiert in natürlicher Weise von rechts auf der Menge alle zyklischen Untermoduln von R^2 (das sind Untermoduln der Form Rm mit $m \in R^2$) und ist zur Automorphismengruppe von R^2 isomorph.
Damit können wir die projektive Gerade über R wie folgt definieren.

Definition 2.1.1. *Wir nennen* $P(R) := \{R(1, 0)M \mid M \in GL_2(R)\}$ *die* ***projektive Gerade zu*** R.
(siehe 1.1.2 in [4]*)*

$P(R)$ ist also die Bahn des zyklischen Untermoduls $R(1, 0)$ unter der Operation von $GL_2(R)$.

Man beachte, dass $R(a, b)$ offenbar genau dann ein Element von $P(R)$ ist, wenn es $c, d \in R$ gibt, mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R)$, da für eine Matrix

$M \in GL_2(R)$ mit a und b in der ersten Zeile $R(1,0)M = R(a,b)$ ist.

Über einem Körper K hat die projektive Gerade die folgende Gestalt.

Es ist $P(K) = \{K(\lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in K, (\lambda, \mu) \neq (0,0)\}$.
Bildet man K auf $P(K)$ ab mittels $k \mapsto K(k,1)$, so ist diese Abbildung offenbar injektiv und ihr Bild ist $\{K(k,1) \mid k \in K\}$. Setzt man $\infty := K(1,0)$ so kann die projektive Gerade $P(K)$ mit $K \cup \{\infty\}$ identifiziert werden.

Eine besondere Form hat die projektive Gerade über sogenannten stabilen Ringen. Hierzu die folgenden Definitionen.

Definition 2.1.2. *Sei R ein Ring mit $1 \neq 0$.*
*Ein Element $m \in R^2$ heißt **unimodular**, falls es eine Linearform $\lambda : R^2 \to R$ mit $\lambda(m) = 1$ gibt.*
(siehe Definition 1.4.4 in [8]*)*

Für unimoduluare Ringe gilt der folgende Satz.

Satz 2.1.1. *Sei R ein Ring mit $1 \neq 0$, $Rm, Rw \in P(R)$ und sei w unimodular.*
Es ist genau dann $Rm = Rw$, wenn $m = aw$ ist für ein $a \in R$, welches ein Linksinverses besitzt. Ist zusätzlich auch m uni modular, so gehört obiges a zu R^* (wobei R^* die Menge der invertierbaren Elemente in R ist).

Beweis. Siehe den Beweis von 1.4.6 in [8]. □

Nun können wir stabile Ringe definieren.

Definition 2.1.3. *Ein Ring R heißt **stabil**, wenn für jedes unimodulare $(x,y) \in R^2$ ein $c \in R$ existiert, sodass $xc + y \in R^*$ gilt.*
(siehe Definition 1.4.15 in [8]*)*

Für stabile Ringe hat die Projektive Gerade die folgende Darstellung.

Satz 2.1.2. *Sei R ein stabiler Ring.*
Dann ist $P(R) = \{R(a, 1 + ab) \mid a, b \in R\}$.

Beweis. Folgt aus 1.4.20 in [8]. □

Auf $P(R)$ kann eine Distanzrelation definiert werden.

Definition 2.1.4. *Zwei Punkte $p = R(a, b)$ und $q = R(c, d)$ heißen distant, wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ liegt.*
(siehe 1.1.10 in [4]*)*

Die Gruppe $GL_2(R)$ operiert auf $P(R)$ und lässt die Distanzrelation invariant. Daher induziert $GL_2(R)$ eine Untergruppe von $Aut(P(R), \Delta)$, welche die **projektive Gruppe** heißt und mit $PGL_2(R)$ bezeichnet wird.
Mit ihr können wir die Kettengeometrie $\Sigma(S, R)$ definieren, wobei R eine S-Algebra über dem Unterring $S < R$ ist.

Definition 2.1.5. *Sei R eine S-Algebra.*
Wir setzen $\boldsymbol{C}(S, R) := \{\phi(P(S)) \mid \phi \in PGL_2(R)\}$.
Die Struktur $\Sigma(S, R) := (P(R), \boldsymbol{C}(S, R))$ heißt ***Kettengeometrie über der Algebra*** *(S, R).*
(siehe 2.1.1 in [8]*)*

Diese Struktur ist nach Satz 1.2.6 in [4] ein Kettenraum, falls R eine Algebra über einem Körper ist.

Wir geben nun ein paar wohlbekannte Beispiele an.

Beispiele 2.1.1.

(1) *Die* ***reelle Möbiusebene*** *ist die Kettengeometrie $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

(2) *Die* ***Laguerre-Ebene*** *ist die Kettengeometrie $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}[\epsilon])$, wobei $\mathbb{R}[\epsilon] = \mathbb{R} + \mathbb{R}[\epsilon]$ mit $\epsilon \notin \mathbb{R}, \epsilon^2 = 0$ die Menge der dualen Zahlen ist.*

(3) *Die* ***Minkowski-Ebene*** *kann über der zweidimensionalen Algebra der anormal komplexen Zahlen, welche zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ isomorph ist dargestellt werden als $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.*

(Bemerkung: Diese Kettenräume bezeichnet man auch als Benzebenen. Zu ihrer Einführung verweisen wir auf Abschnitt 2.2 in [8]*)*

Wir werden nun die Kettengeometrie $\Sigma(K, R, J)$ einführen.
Die Punktmenge ist die projektive Gerade über einem Jordan-System J in einer K-Algebra R, welche man in Anlehnung an die projektive Gerade auf einem stabilen Ring defniniert (siehe Satz 2.1.2). Wir werden sie mit $P(J)$ bezeichnen.
Dabei werden wir uns zunächst auf sogenannte starke Jordan-Systeme beschränken, denn für solche kann man zeigen, dass $\Sigma(K, R, J)$ tatsächlich ein Unterraum von $\Sigma(K, R)$ ist.
Für beliebige Jordan-Systeme in einer K-Algebra ist dies im allgemeinen nicht der Fall, da die Punktmenge nicht umfangreich genug ist.
In [4] wurde eine neue Definition der projektiven Gerade über J untersucht (wir werden diese mit $\tilde{P}(J)$) bezeichnen). Uns wird insbesondere interessieren, wann die alte Definition der projektiven Geraden mit der neuen übereinstimmt.

Definition 2.1.6. *Sei R eine K-Algebra, J ein Untervektorraum des K-Vektorraum R mit $1 \in J$.*
Dann heißt J:

(1) ***Jordan-System*** *in R, wenn für jedes $b \in J \cap R^*$ auch $b^{-1} \in J$ gilt. Wir setzen dann $J^* := J \cap R^*$.*

(2) ***Jordan-abgeschlossen*** *in R, wenn für alle $a, b \in J$ auch $aba \in J$ ist.*

(3) ***stark****, wenn für alle $b \in J$ die Bedingung $\mid e(b) \mid > \mid K \setminus e(b) \mid$ gilt.*
Dabei ist $e(b) := \{k \in K \mid b + k \in K^*\}$.

(siehe 3.1.5 in [8]*)*

Offenbar verallgemeinern Jordan-Systeme das Konzept einer Unteralgebra.
Man kann auch zeigen, dass starke Jordan-Systeme Jordan-abgeschlossen sind.

Satz 2.1.3. *Sei J ein starkes Jordan-System in einer K-Algebra R. Dann ist J auch Jordan-abgeschlossen in R.*

Beweis. Siehe den Beweis von 3.1.11 in [8]. □

Nun definieren wir die projektive Gerade über J.

Definition 2.1.7. *Sei J ein starkes Jordan-System in einer K-Algebra R.*
*Wir nennen $P(J) := \{R(1+ab, a) \mid a, b \in J\} \subset P(R)$ die **projektive Gerade** über J.*
(siehe 3.1.14 in [8])

Für die projektive Gerade $P(J)$ kann man die folgende Eigenschaft zeigen, die auch beim Darstellungssatz im zweiten Abschnitt von Bedeutung sein wird.

Satz 2.1.4. *Sei J ein starkes Jordan-System in R.*
Dann gilt:

(1) $P(J) = \{R(1+ab, a) \mid a \in J, b \in J^*\}$

(2) $P(J) = \{R(c, 1+cd) \mid c, d \in J\}$

Beweis. Siehe den Beweis von 3.1.15 in [8]. □

Die in $P(J)$ enthaltenden Ketten von $\Sigma(K, R)$ lassen sich mittels einer Untergruppe von $PGL_2(R)$ beschreiben.

Satz 2.1.5. *Sei J ein starkes Jordan-System in R.*
Mit $\Delta(J)$ bezeichnen wir die Untergruppe von $PGL_2(R)$, welche von all den Abbildungen aus $PGL_2(R)$ erzeugt wird, die durch die Matrizen $\tau_c := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ $(c \in J)$ und $\iota := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ induziert werden.
Dann gilt: Die Gruppe $\Delta(J)$ lässt die Menge $P(J)$ invariant. Man kann also $\Delta(J)$ als eine Untergruppe von $Aut(P(J), \Delta)$ auffassen (wobei Δ die von $(P(R), \Delta)$ vererbte Relation ist).

Beweis. Siehe den Beweis von 3.1.16 in [8]. □

Das $P(J)$ ein Unterraum von $\Sigma(K, R)$ ist, folgt aus dem folgenden Satz.

Satz 2.1.6. *Sei J ein starkes Jordan-System in der K-Algebra R. Liegen die paarweise distanten Punkte p, q, r in $P(J)$, so ist ihre Verbindungskette $C \in \boldsymbol{C}(K, R)$ ganz in $P(J)$ enthalten.*
Jede solche Kette C hat die Gestalt $C = \delta(C_h)$, wobei $\delta \in \Delta(J)$, $h \in J^*$ und $C_h := \{R(sh, t) \mid K(s, t) \in P(K)\}$.
Umgekehrt ist für $\delta \in \Delta(J), h \in J^*$ stets $\delta(C_h) \subset P(J)$.

Beweis. Siehe den Beweis von 3.1.19 in [8] □

Insgesamt erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 2.1.7. *Sei J ein starkes Jordan-System in einer K-Algebra R. Dann ist $\Sigma(K, R, J) := (P(J), \boldsymbol{C}(K, R, J))$ mit $\boldsymbol{C}(K, R, J) :=$ $\{\delta(C_h) \mid h \in J^*, \delta \in \Delta(J)\}$ ein Unterraum von $\Sigma(K, R)$.*
Diesen Unterraum nennen wir die ***Kettengeometrie über*** *J*

Beweis. Siehe den Beweis von 3.1.20 in [8]. □

Ist J kein starkes Jordan-System, so ist $\Sigma(K, R, J)$ im Allgemeinen kein Kettenraum (siehe Beispiel 3.2.1 in [4]).

Für starke Jordan-Systeme ist der Distanzraum $(P(J), \Delta)$ nach 3.1.22 in [8] ein stabiler Distanzraum.
In nicht notwendigerweise stabilen Ringen kann der Durchmesser des zugehörigen Distanzgraphen im Sinne der Graphentheorie im Unterschied zu stabilen Distanzräumen großer als 2 sein (wobei ein stabiler Ring R ein solcher ist, bei dem für jedes unimodulare $(x, y) \in R^2$ ein $c \in R$ existiert, sodass $xc + y \in R^*$ ist, siehe hierzu 1.1.26 in [4]).

Satz 2.1.8. *Sei R ein Ring und C_∞ die Zusammenhangskomponente (bezüglich der Distanzrelation) des Punktes $R(1, 0) \in P(R)$.*
Dann gilt:

(1) *Die Gruppe $GL_2(R)$ operiert transitiv auf der Menge von Zusammenhangskomponenten von $P(R)$.*

(2) *Seien $t_1, t_2, \ldots, t_n \in R, n \geq 0$ und setze*
$(x, y) := (1, 0) \cdot E(t_n) \cdot E(t_{n-1}) \cdot \cdots \cdot E(t_1)$
mit $E(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *für ein beliebiges $t \in R$, dann ist*

$R(x,y) \in C_\infty$. Umgekehrt lässt sich jeder Punkt $r \in C_\infty$ in dieser Form schreiben.

(3) *Die Gruppe $GE_2(R)$ ist der Stabilisator von C_∞ in $GL_2(R)$.*

(4) *Die projektive Gerade $P(R)$ ist zusammenhängend genau dann, wenn R ein GE_2.Ring ist, d.h. $GE_2 = GL_2$.*

Beweis. Siehe den Beweis von 3.2 in [7]. □

Folglich definiert jedes Produkt $(x_i, y_i) := (1,0) \cdot E(t_i) \cdot E(t_{i-1}) \cdot \dots \cdot E(t_1), i \in \{1, \dots, n\}$, einen Punkt $p_i := R(x_i, y_i)$, sodass wir mit $p_0 := R(1,0)$ eine Folge von distanten Punkten $p_n \Delta p_{n-1} \Delta \dots \Delta p_1 \Delta p_0$ erhalten, da all diese Punkte nach Satz 2.1.8 (2) in der Zusammenhangskomponente von p_i liegen.

Dadurch inspiriert gelangt man zu einer neuen Definition der projektiven Geraden über einem Jordan-System. Hierzu die folgende, vorbereitende Definition.

Definition 2.1.8. *Sei J ein Jordan-System. Sei $E_2(J)$ die Menge aller Matrizen*
$E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n) =: E(T)$, wobei $T := (t_1, \dots, t_n), n \geq 0$ eine endliche Folge von Elementen aus J ist.
Dann nennen wir diese Untergruppe von $GL_2(R)$ die ***elementare Gruppe über*** *J.*
(siehe 3.2.3 in [4])

Definition 2.1.9. *Sei J ein nicht notwendigerweise starkes Jordan-System und $E_2(J) < GL_2(R)$ die elementare Gruppe über J.*
Dann nennen wir die Bahn von $R(1,0)$ unter $E_2(J)$ die ***projektive Gerade über*** *J:*
$\tilde{P}(J) := \{R(1,0) \cdot E(T) \mid E(T) \in E_2(J)\}$
(siehe 3.2.4 in [4])

Satz 2.1.9. *Sei J ein Jordan abgeschlossenes Jordan-System in R. Dann ist $\Sigma(\tilde{P}(J), \boldsymbol{C}(K,R,J))$ ein Unterraum von $\Sigma(K,R)$. Wir nennen $\Sigma(K,R,J)$ die* ***Kettengeometrie über*** *J.*

Beweis. Siehe den Beweis von 3.4.5 in [4]. □

Wir werden nun ein Gleichheitskriterium dafür angeben, wann die projektive Gerade $P(J)$ mit der projektiven Geraden $\tilde{P}(J)$ übereinstimmt.

Hierzu benötigen wir den Begriff eines stabilen Jordan-Systems.

Definition 2.1.10. *Sei J ein Jordan-System in R.*
Wir nennen J ***stabil*** *in R, falls für alle $p = R(a,b) \in \tilde{P}(J)$ gilt:*
Es gibt ein $x \in J$, sodass $a + bx \in R^*$.
(siehe 3.2.7 in [4]*)*

Damit gilt das folgende Gleichheitskriterium.

Satz 2.1.10. *Sei J ein Jordan abgeschlossenes Jordan-System in R. Dann ist $P(J) = \tilde{P}(J)$ genau dann, wenn J stabil in R ist.*

Beweis. Siehe den Beweis von 3.2.15 in [4]. □

2.2. Ein Darstellungssatz mittels Clifford-Algebren.

In diesen Abschnitt werden wir auf eine algebraische Darstellung von Kettengeometrien über Quadriken eingehen. Dazu betrachten wir eine Darstellung mittels Clifford-Algebren, wie sie in [8] auf Seite 104-112, bzw. in [6] zu finden ist.
Wir gehen von einem metrischen Vektorraum $(W, K, \tilde{Q})$ aus, welcher die Generalvoraussetzung 1.3.1 erfüllt.
Folgt man den Beweis in [8], bzw. [6], so stellt man fest, dass ab einer gewissen Stelle die Allgemeinheit eingeschränkt wird. Es werden nur noch oben beschriebene metrische Vektorräume über einen Körper K mit $\mid K \mid > 4$ betrachtet.
Wir möchten die im ersten Abschnitt angegebene neue Definition der Projektiven Geraden über einen Jordan-System J, welche wir mit $\tilde{P}(J)$ bezeichnet hatten, sowie die dazu zusammengestellten Sätze hinsichtlich der Gleichheit mit der projektiven Geraden $P(J)$ benutzen, um zu zeigen, dass man mit dem in [8], bzw. [6] geführten Beweisen auch den Darstellungssatz für den allgemeinen Fall $\mid K \mid \geq 2$ beweisen kann, wenn man von zwei Annahmen ausgeht.
Hierzu wird es notwendig sein auf einen Großteil der Beweise in den eben angegebenen Quellen genau einzugehen.
Wir werden uns an die Beweise in [8] halten und insbesondere ab dem Punkt, wo die besagte Einschränkung stattfindet die Beweise genau ausführen.

Als erstes möchten wir die einfachen Punkte der Quadrik $F_{\tilde{Q}}$, welche ja die Punkte der Kettengeometrie $\Sigma(\tilde{Q})$ sind, beschreiben.

Satz 2.2.1. *Es existiert ein Vektorraum V, sodass W isomorph zu $V \times K \times K$ ist.*
Nach Identifikation $W = V \times K \times K$ gilt für die quadratische Form $Q := \tilde{Q} \mid_V : V \to K$:

(1) *Für jedes $w = (v, k, l) \in W$ ist $\tilde{Q}(w) = Q(v) - kl$.*

(2) *Es gibt ein $v \in V$ mit $Q(v) \neq 0$*

Beweis. Siehe den Beweis von 5.3.1 in [8] . □

Damit lassen sich die Punkte von $\Sigma(\tilde{Q})$ folgendermaßen beschreiben.

Satz 2.2.2. *Die Punktmenge F_Q^* von $\Sigma(Q)$ besteht aus:*

allen Punkten $K(v, Q(v), 1)$ mit $v \in V$,

allen Punkten $K(v, 1, 0)$ mit $v \in V, Q(v) = 0$,

allen Punkten $K(v, 0, 0)$ mit $v \in V \setminus V^\perp, Q(v) = 0$.

Beweis. Siehe den Beweis von 5.3.2 in [8]. □

Die Distanzrelation Δ auf $\Sigma(\tilde{Q})$ kann man wie folgt beschreiben. Man beachte, dass f für die durch Q induzierte Bilinearform steht.

Satz 2.2.3. *Für Punkte von F_Q^* in der Beschreibung gemäß Satz 2.2.2 gilt:*

(1) $K(v, 0, 0) \Delta K(u, k, l) \iff f(v, u) \neq 0,$

(2) $K(v, 1, 0) \Delta K(u, 1, 0) \iff f(v, u) \neq 0,$

(3) $K(v, 1, 0) \Delta K(u, Q(u), 1) \iff f(v, u) \neq 1.$

(4) $K(v, Q(v), 1) \Delta K(u, Q(u), 1) \iff Q(v - u) \neq 0.$

Beweis. Siehe den Beweis von 5.3.3 in [8]. □

Unser Ziel ist es $\Sigma(\tilde{Q})$ als Kettenraum $\Sigma(K, R, J)$ über einem Jordan-System in einer geeigneten K-Algebra darzustellen.
Hierzu betrachten wir die zum quadratischen Raum (V, Q) gehörige **Clifford-Algebra**. Diese werden wir kurz einführen.

Für einen metrischen Vektorraum (V, Q) gibt es eine eindeutig bestimmte K-Algebra $Cl(V, Q) := R$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:
Es gibt eine lineare Abbildung $i : V \to R$ mit $i(x)^2 = Q(x) \cdot 1$ für alle $x \in V$.
Außerdem erfüllt R die folgende universelle Eigenschaft:
Für jede K-lineare Abbildung $h : V \to A$ in eine K-Algebra A mit $h(x)^2 = Q(x) \cdot 1$ für alle $x \in V$ gibt es genau einen Algebra-Homomorphismus $g : R \to A$, sodass $g \circ i = h$ gilt.
Zur Konstruktion von $Cl(V, Q)$ verweisen wir auf die einschlägige Literatur (siehe 4.8 in [20]).
Es stellt sich heraus, dass i injektiv ist, sodass wir V mit $i(V)$ identifizieren können.
Außerdem betten wir noch K in R ein vermöge $k \mapsto k \cdot 1$, womit wir die folgenden Rechenregeln erhalten:

(1) Für $v, u \in V$ ist $v^2 = Q(v) \in K$ und damit $uv + vu = f(v, u) \in K$.

(2) Es gilt $V^* := V \cap R^* = \{v \in V \mid Q(v) \neq 0\}$ und es ist $v^{-1} = Q(v)^{-1}v$ für $v \in V^*$.

Für die Clifford-Algebra gilt des Weiteren:
Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V (mit geordneter Indexmenge I), so besteht eine ausgezeichnete Basis von R aus allen Produkten $v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \dots \cdot v_{i_k}$ mit $k \in \mathbb{N}, \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset I, i_1 < i_2 < \dots < i_k$, wobei für $k = 0$ das leere Produkt gleich 1 zu setzen ist.

Nun können wir unser Jordan-System definieren.
Sei $w \in V$ mit $Q(w) = 1$ fest gewählt. Setze $J := Vw = \{vw \mid v \in V\} \subset R$, sowie $J^* := J \cap R^*$. Es ist $w \in V^*$ wegen $w^2 = Q(w) = 1$.

Satz 2.2.4. *Es gilt:*

(1) *J ist ein Jordan-System in R, und es ist $J = wV$.*

(2) *Im Fall $\mid K \mid \geq 5$ ist J stark in R.*

Beweis. Siehe den Beweis von 5.3.5 in [8]. □

Nun zeigen wir, dass unser Jordan-System J Jordan-abgeschlossen ist.

Satz 2.2.5. *$J = Vw$ ist ein Jordan abgeschlossenes Jordan-System.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $(vw)(uw)(vw) \in J$ für $u, v \in V$.
Es ist $(vw)(uw)(vw) = vw(-wu+f(u,w))vw = -vw^2uvw+vwf(u,w)vw = -vuvw + f(u,w)vwvw = (f(u,v)vwv - vuv)w =: j$ (man beachte bei der Rechnung, dass $f(u,v) = uw + wu$ gilt).
Weiter ist $vuv = v(f(u,v)-vu) = vf(u,v)-v^2u = f(u,v)v-Q(v)u \in V$.
Analog sieht man $vwv \in V$ und damit ist offenbar $j \in Vw$. □

Nach Satz 2.1.9 ist $\Sigma(\tilde{P}(J), \mathbf{C}(K,R,J))$ ein Unterraum von $\Sigma(K,R)$.

Wir werden nun davon ausgehen, dass unser Jordan-System J stabil ist.

Annahme 2.2.1. *J ist ein stabiles Jordan-System in R.*

Nach Satz 2.1.10 ist $\tilde{P}(J) = P(J)$.

Wir brauchen noch eine weitere Tatsache bezüglich der Clifford-Algebra:
Es existiert ein eindeutig bestimmter K-linearer anti-Automorphismus $\kappa : R \to R, x \mapsto \overline{x}$, sodass $\kappa^2 = id$ und $\overline{v} = v$ für alle $v \in V$.

Unser nächstes Ziel wird es sein, die Punktmenge von $P(J)$ zu beschreiben. Doch vorher benötigen wir noch einen Hilfssatz.

Satz 2.2.6. *Für $b \in J = Vw$ gilt:*

(1) $N(b) := \overline{b}b = b\overline{b} \in K$,

(2) $\overline{b} + b \in K$,

(3) $b^2 \in K + Kb$,

(4) $\overline{v} = wbw$.

Beweis. Siehe den Beweis von 5.3.6 in [8]. In diesem Beweis wird noch nicht verwendet, dass das Jordan-System J stark ist. □

Wir benötigen noch eine weitere Annahme, die für starke Jordan-Systeme bekannt ist (siehe Satz 2.1.4).

Annahme 2.2.2. *Es ist*

(1) $P(J) = \{R(1 + ab, a) \mid a \in J, b \in J^*\}$,

(2) $P(J) = \{R(c, 1 + cd) \mid c, d \in J\}$.

Ab dieser Stelle wird beim Beweis des Darstellungssatzes in [8] die Einschränkung $\mid K \mid \geq 5$ vorgenommen.
Um sicher zu gehen, dass man mit den beiden Annahmen 2.2.1 und 2.2.2 tatsächlich den Beweis wie in [8] für den allgemeinen Fall $\mid K \mid \geq 2$ führen kann, werden wir von jetzt an die Beweise genauer ausführen.
Wir verweisen dabei ausdrücklich auf die Beweise von 5.3.7 bis 5.3.17 in [8].

Satz 2.2.7. *Die Punktmenge $P(J)$ von $\Sigma(K, R, J)$ besteht aus:*

(1) *allen Punkten $R(vw, 1)$ mit $v \in V$,*

(2) *allen punkten $R(1, wv)$ mit $v \in V \setminus V^*$,*

(3) *allen Punkten $R(1 + wvuw, wv)$ mit $u \in V^*$, $f(u, v) = -1$.*

Beweis. Die in (1), (2) und (3) beschriebenen Punkte gehören offenbar zu $P(J)$ wegen

(1): $R(vw,1) = R(vw, 1+vw\cdot 0) \in P(J)$.
(2): $R(1,wv) = R(1+wv\cdot 0, wv) \in P(J)$ (beachte $Vw = wV$).
(3): $p = R(1+wvuw, wv), u \in V^*, v \in V^*, f(u,v) = -1$, dann ist $p \in P(J)$ wegen $wv \in J = wV$.

Nun zeigen wir, dass alle Punkte einer der Klassen (1),(2) oder (3) angehören.
Sei dazu $p = R(1+ab, a)$ mit $a \in J, b \in J^*$ ein beliebiger Punkt von $P(J)$.
Falls $a \in J^*$, dann ist $p = R(a^{-1}+b, 1)$ ein Punkt vom Typ (1), denn $a^{-1}+b \in J = Vw$.
Falls $a \notin J^*, 1+ab \in R^*$, so stellen wir p in der Form $R(c, 1+cd), cd \in J$ dar, was nach Annahme 2.2.2 (2) möglich ist. Dann ist auch $c \in R^*$, da $R(1+ab,a) = R(c,1+cd)$ und die beiden Paare $(1+ab,a)$ und $(c,1+cd)$ unimodular sind, wegen $(1+ab,a)\cdot 1 + a(-b) = 1$ und $c(-d)+(1+cd)\cdot 1$ und somit existiert $e \in R^*$ mit $(1+ab,a) = e(c,1+cd)$, also ist $1+ab = ec \implies e^{-1}(1+ab) = c \in R^*$ wegen $(1+ab) \in R^*$.
Somit ist $p = R(1, c^{-1}+d) \in J \setminus J^* = wV \setminus wV^*$, also vom Typ (2), weil auch $(1, c^{-1}+d)$ unimodular ist, wegen $1\cdot(1-(c^{-1}+d)+(c^{-1}+d)\cdot 1) = 1$ und somit existiert $e' \in R^*$ mit $e'a = c^{-1}+d$, woraus $a = (e')^{-1}(c^{-1}+d) \notin J^*$ folgt.
Es bleibt noch der Fall $a \notin J^*, (1+ab) \notin R^*$ zu betrachten.
Wir setzen $a = wv, b = uw$ (beachte $Vw = wV$). Wegen $b \in J^*$ ist $u = bw \in J^*$ und entsprechend ist $v \notin V^*$. Da $(1+ab)$ nicht invertierbar ist, ist auch $w(1+ab)wu^{-1} = w(1+wvuw)wu^{-1} = u^{-1}+v \in V$ nicht invertierbar.
Also ist: $0 = Q(u^{-1}+v) = f(u^{-1},v)+Q(u^{-1})+Q(v) = Q(u)^{-1}f(u,v)+(Q(u)^{-1})^2Q(u)+Q(v) = Q(u)^{-1}(f(u,v)+1)+Q(v) = Q(u)^{-1}(f(u,v)+1) \implies f(u,v) = -1$. $\square$

Als Nächstes möchten wir unseren Automorphismus $\zeta : \Sigma(Q) \to \Sigma(K,R,J)$ definieren.

Satz 2.2.8. *Durch*

$$\zeta : \begin{cases} K(v,Q(v),1) \mapsto R(vw,1) & (v \in V) \\ K(v,1,0) \mapsto R(1,wv) & (v \in V \setminus V^*) \\ K(v,0,0) \mapsto R(1+vwuw, wv) & (v \in V \setminus (V^* \cup V^\perp), u \in V, f(u,v) = -1) \end{cases}$$

ist eine wohldefinierte surjektive Abbildung von F_Q^* auf $P(J)$ gegeben.

Beweis. Die Surjektivität ist klar, da die Punkte von $P(J)$ nach Satz 2.2.7 einen der Typen (1), (2) oder (3) entsprechen.
Falls ζ wohldefiniert ist, hätte nämlich $p = R(vw, 1)$ mit $v \in V, K(v, Q(v), 1)$, $p = R(1, wv)$ mit $V \in V \setminus V^*, K(v, 1, 0)$ und $p = R(1 + wvuw, wv)$ mit $v \in V \setminus (V^* \cup V^\perp), u \in V, f(u, v) = -1, K(v, 0, 0)$ als Urbild (beachte auch Satz 2.2.2 und dass $Q(v) = 0$, wenn $v \notin V^*$).
Zeigen wir nun die Wohldefiniertheit.
Seien $p, q \in F_Q^*, p = q$. Nach Satz 2.2.2 gehören sie zu genau einen der Typen (1), (2), (3).
Falls $p = K(v, Q(v), 1), q = K(v', Q(v'), 1)(v, v' \in V)$, so gilt:
$p = q \implies \exists k \in K \setminus \{0\} : (v, Q(v), 1) = (kv', kQ(v), k) \implies k = 1$ und $v = v', Q(v) = Q(v')$. Also ist $R(vw, 1) = R(v'w, 1)$.
Falls $p = K(v, 1, 0), q = K(v', 1, 0)(v, v' \in V \setminus V^*)$, so ist:
$p = q \implies \exists k \in K \setminus \{0\} : (v, 1, 0) = (kv', k, 0) \implies k = 1$ und $v = v'$, also $R(1, wv) = R(1, wv')$.
Für die Punkte vom Typ (3) ist die Wohldefiniertheit etwas schwieriger zu zeigen.
Sei $p = K(v, 0, 0)$ mit $Q(v) = v^2 = 0, v \notin V^\perp$ und sei $u \in V$ mit $f(u, v) = -1$.

a) $\zeta(p)$ ist unabhängig von der Wahl von u:
Für $u' \in V$ mit $u' \neq u, f(v, u') = -1$ setze man $c := u' - u$. Dann ist $0 = f(v, u') - f(v, u) = f(v, c) = vc + cv$. Es folgt $1 + vc \in R^*$, denn $(1 + vc)(1 + cv) = 1 + vc + cv + vccv = 1 + vc^2v = 1 + Q(c)v^2 = 1 + Q(c)Q(v) = 1 = (1 + cv)(1 + vc)$.
Somit ist auch $a = w(1 + vc)w = 1 + wvcw \in R^*$. Also ist $R(1 + vwuw, wv) = R(a(1 + wvuw), awv)$.
Wir berechnen: $a(1+vwuw) = 1+wvcw+wvuw+wvcvuw = 1+wvu'w$ und $awv = wv + wvcw = wv + wcv^2 = wv$. Damit haben wir gezeigt, dass $R(1 + wvuw, wv) = R(1 + wvu'w, wv)$ ist.

b) $\zeta(p)$ ist unabhängig vom Repräsentanten:
Für $k \in K \setminus \{0\}$ ist $p = K(kv, 0, 0)$ und $f(v, u) = kk^{-1}f(v, u) = f(kv, v^{-1}u) = -1$.
Zu zeigen ist also $R(1 + wvuw, wv) = R(wkvk^{-1}uw, wkv) = R(1 + wvuw, kwv)$.
Da $-1 = f(v, u) = uv + vu \implies vu = -1 - uv$ sieht man, dass $b = 1 + (1 - k)wvuw \in R^*$ ist mit $b^{-1} = 1 + (1 - k^{-1})wvuw$, denn es ist $(1 + (1 - k)wvuw)(1 + (1 - k^{-1})wvuw) = 1 + (1 - k)wvuw + (1 - k^{-1})wvuw + (1 - k)(1 - k^{-1})wvuvuw$. Beachtet man $(1 - k)(1 - k^{-1}) = 1 - k - k^{-1} + 1 = 1 - k + 1 - k^{-1}$, so ist dies weiter gleich

$1+(1-k)wvuw+(1-k^{-1})wvuw+(1-k^{-1})wvuvuw+(1-k)wvuvuw =$
$1 + (1-k)wvuw + (1-k^{-1}) - (1-k^{-1}wvuw) - (1-k)wvuw = 1.$
$(1 + (1-k^{-1})wvuw)(1 + (1-k)wvuw) = 1$ sieht man analog.

Nun gilt $b(1 + wvuw) = 1 + (1-k)wvuw + wvuw + (1-k)wvuvuw =$ $1 + wvuw$ und $bwv = wv + (1-k)(wv(-1-vu)) = kwv$, was die Behauptung liefert. □

Um die Injektivität von ζ zu zeigen, benötigen wir einen weiteren Hilfssatz.

Satz 2.2.9. *Ist $va \in V \setminus V^*$ und $a \in R$, dann sind v und va linear abhängig.*

Beweis. OBdA können wir $v \neq 0$ annehmen, da jedes System von Vektoren, welches den Nullvektor enthält linear abhängig ist.
Somit kann $v_0 := v$ zu einer Basis $\mathbf{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ ergänzt werden, derart, dass 0 das kleinste Element der geordneten Indexmenge I ist.
Damit besteht eine Basis von R aus lauter Produkten $v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_n}$, in denen v entweder als erster Faktor oder überhaupt nicht als Faktor enthalten ist.
Nun können wir a bezüglich dieser Basis ausdrücken:
Es ist $a = k + \Sigma k_i b_i + \Sigma l_j c_j$, wobei jedes b_i ein Basiselement mit v als ersten Faktor ist, und jedes c_j ein Basiselement ($\neq 1$) ohne Faktor v (und $k, k_i, j_i \in K$).
Da $v^2 = 0$ folgt $va = kv + \Sigma l_j v c_j$.
Die vc_j sind Basiselemente von R mit v an erster Stelle, also sind die $c_j \notin V$, denn gelte $vc_j \in V$ für ein j, so hätte $\mathbf{B} \cup \{vc_j\}$ ein linear abhängiges Teilsystem im Widerspruch zu der Tatsache, dass die endlichen Produkte von Basiselementen aus V eine Basis von R sind.
Also muss $l_j = 0$ für jedes j gelten und es gilt $va = kv$, also sind va und v linear abhängig. □

Satz 2.2.10. *Die Abbildung $\zeta : F_Q^* \to P(J)$ ist injektiv.*

Beweis. Für Punkte vom Typ (1) und (2) ist die Behauptung klar, denn offenbar folgt aus $R(vw, 1) = R(v', 1)$, bzw. $R(1, wv) = R(1, wv')$, dass $vw = v'w$, bzw. $wv = wv'$, in beiden Fällen also $v = v'$ und somit $K(v, Q(v), 1) = K(v', Q(v'), 1)$, bzw. $K(v, 1, 0) = K(v', 1, 0)$.
Seien also $v, v' \in V \setminus (V^* \cup V^\perp), u, u' \in V$ mit $f(u, v) = -1 = f(u', v')$

gegeben, so dass $R(1+wvuw, wv) = R(1+wv'u'w, wv')$ ist.
Wir möchten $K(v,0,0) = K(v',0,0)$ zeigen, was gleichbedeutend mit der linearen Abhängigkeit von v und v' ist.
Wegen $(1+wvuw)\cdot 1+wv(-uw) = 1$ und $(1+wv'u'w)\cdot 1+wv'(-u'w) = 1$ sind die Paare $(1+wvuw, uw)$ und $(1+wv'u'w, wv')$ unimodular. Folglich gibt es ein $c \in R^*$, sodass $wv' = cwv$ ist.
Da für $a := w\bar{c}w, va = vw\bar{c}w = \overline{wcwv} = \overline{v'} = v' \in V$ ist, folgt aus dem Hilfssatz 2.2.9, dass v und v' linear abhängig sind. $\square$

Wir möchten als Nächstes die Umkehrabbildung von ζ beschreiben.

Satz 2.2.11. *Sei p ein Punkt von $P(J)$.*
Wähle (x,y) so, dass $p = R(x,y)$ ist und einer der folgenden Fälle vorliegt.

$$(x,y) = \begin{cases} (vw,1)(v \in V), \\ (1,wv)(v \in V \setminus V^*) \\ (1+wvuw, wv)(v \in V \setminus (V^* \cup V^{\perp}), u \in V, f(v,u) = -1) \end{cases}$$

Dann ist durch
$\eta(p) := K(w\overline{(x)}y, N(x), N(y))$
eine wohldefinierte Bijektion gegeben und es gilt $\eta = \zeta^{-1}$.

Beweis. Für Punkte vom Typ (1) und (2) ist die Wohldefiniertheit klar, denn sei $R(x,y) = R(x',y')$.
Falls $(x,y) = (vw,1), (x',y') = (v'w,1)$, so folgt $vw = v'w \implies v = v'$ und somit $K(w\overline{x}y, N(x), N(y)) = K(w\overline{x'}y', N(x'), N(y'))$.
Analog sieht man es, falls $(x,y) = (1,wv), (x',y') = (1,wv')$.
Sind $(x,y) = (1+wvuw, wv), (x',y') = (1+wv'u'w, wv')$ vom Typ (3) (v, v', u, u' entsprechend beschaffen).
So ist $K(w\overline{x}y, N(x), N(y)) = K(w\overline{(1+wvuw)}wv, \overline{(1+wvuw)}(1+wvuw), \overline{wv}wv) = K(w(1+wvuw)wv, (1+wuvw)(1+wvuw), Q(v)) = K(v+uQ(v), 1+wuvw+wvuw+Q(u)Q(v), 0) = K(v, 1+wf(v,u)w, 0) = K(v,1-1,0) = K(v,0,0)$.
Analo sieht man $K(w\overline{x'}y', N(x'), N(y')) = K(v,0,0)$.
Würde $K(v,0,0) \neq K(v',0,0)$ gelten, so wäre wegen der Injektivität von ζ:
$\zeta(K(v,0,0)) \neq \zeta(K(v',0,0))$, also $R(1+wvuw, wv) \neq R(1+wv'u'w, wv')$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also ist η wohldefiniert.

Wir rechnen auch nochmal $\zeta \circ \eta = id_{P(J)}$ und $\eta \circ \zeta = id_{F_Q^*}$ nach.
Hierzu betrachten wir die Punkte der Typen (1),(2) und (3):

(1): $\zeta(\eta(R(vw,1))) = \zeta(K(w\overline{v}w, N(x, N(1)))) = \zeta(K(v, Q(v), 1)) = R(vw, 1)$ und $\eta(\zeta(K(v, Q(v,1)))) = \eta(R(vw,1)) = K(v, Q(v,1))$.
(2): $\zeta(\eta(1, wv)) = \zeta(K(wwv, N(1), N(wv))) = \zeta(K(v, 1, Q(v))) = \zeta(K(v,1,0)) = R(1, wv)$ und $\eta(\zeta(K(v,1,0))) = \eta(R(1, wv)) = K(wwv, N(1), N(wv)) = K(v, 1, 0)$.
(3): $\zeta(\eta(R(1 + wvuw, wv))) = \zeta(K(v,0,0)) = R(1 + wvuw, wv)$ und $\eta(\zeta(K(v,0,0))) = \eta(R(1 + wvuw, wv)) = K(v, 0, 0)$.

Es ist also $\eta = \zeta^{-1}$.

$\square$

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass η ein Isomorphismus ist.
Hierzu werden wir zeigen, dass η Ketten auf Ketten abbildet und dass ζ die Distanzrelation erhält. Damit ist ζ nach dem folgenden Hilfssatz ein Isomorphismus.

Satz 2.2.12. *Eine Bijekton $\beta : F_Q^* \to P(J)$ ist ein Isomorphismus von Kettenräumen, wenn die folgenden Bedingungen gelten:*

(1) *β^{-1} bildet Ketten auf Ketten ab.*

(2) *β bildet distante Punkte auf distante Punkte ab.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\beta(C) \in \mathbf{C}(J)$ für jede Kette $C \in \mathbf{C}(Q)$ gilt.
Sei $C = (pqr)$ mit $p, q, r \in F_Q^*$ paarweise distant.
Nach (2) sind die Bilder $\beta(p), \beta(q), \beta(r)$ ebenfalls paarweise distant und bestimmen somit eine eindeutige Kette $C' \in \mathbf{C}(J)$. Nach (1) ist das Urbild $D = \beta^{-1}(C')$ eine Kette von F_Q^* mit $p, q, r \in D$. Damit ist $C = (p, q, r) = D$ und $\beta(C) = \beta(D) = C' \in \mathbf{C}(J)$. $\square$

Als Nächstes beweisen wir einige weitere nützliche Sätze.

Satz 2.2.13. *Für $h \in J^*$ sei*
$E_h = K(0,1,0) \oplus K(0,0,1) \oplus K(hw, Q(hw), 1)$
Dann ist E_h eine zulässige Ebene, und es gilt $\zeta(F_Q \cap E_h) = C_h$.

Beweis. Es ist $hw \in V \setminus \{0\}$, da $h \in J^*$.
Damit sind $K(0,1,0), K(0,0,1), K(hw, Q(hw), 1)$ offenbar nicht kollinear, E_h also eine Ebene von $\Pi(W,K)$.
Sie ist auch zulässig, da $K(0,1,0), K(0,0,1), K(hw, Q(hw), 1)$ paarweise distant sind (es sind offenbar Punkte von F_Q^*, man beachte Satz 2.2.2 und 2.2.3), denn es ist $K(0,0,1) = K(0, Q(0), 1) \Delta K(0,1,0)$ nach Satz 2.2.3 (3), da $f(0,0) = 0 \neq 1$, sowie $K(hw, Q(hw), 1) \Delta K(0,1,0)$, da $f(hw, 0) = 0 \neq 1$. Weiter ist wegen Satz 2.2.3 (4) $K(0, Q(0), 1) \Delta K(hw, Q(hw), 1)$, denn $Q(0 - hw) = Q(hw) \neq 0$ wegen $h \in J^*$.
Wir zeigen $\zeta(F_Q \cap E_h) = C_h$.
Sei $q \in F_Q \cap E_h$. Es ist $q = K(thw, r + tQ(hw), s + t)$, wobei $(r, s, t) \in K^3 \setminus \{0\}$ und $Q(thw) = (r + tQ(hw))(s + t)$ ist, also $0 = Q(thw) = rs + tsQ(hw) + rt$ erfüllt ist.
Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $t = 0$.
Dann ist laut der Gleichung oben $rs = 0$ und wir erhalten $\zeta(q) = \zeta(K(0, r, s)) = R(rs, 1) = R(0, 1)$ oder $\zeta(q) = R(1, rs) = R(1, 0)$.

Fall 2: $t \neq 0$.
Wir gehen oBdA von $t = 1$ aus, denn es ist $q = K(hq, t^{-1}r + Q(hw), t^{-1}s + 1)$ mit $(t^{-1}r, t^{-1}s, 1) \in K^3 \setminus \{0\}$. Somit wird die obige Gleichung zu $0 = rs + sQ(hw) + r$. Ist $s = 0$, so ist $r = 0$ und $q = K(hw, Q(hw), 1)$, also $\zeta(q) = R(hww, 1) = R(h, 1) \in C_h$.
Ist hingegen $s \neq 0$, so schließen wir mit $Q(hw) \neq 0$, dass auch $r(1+s) \neq 0$ ist, denn wäre $r(1 + s) = 0$, so wäre $Q(hw) = r(1 + s) + Q(hw)(1 + s) \implies Q(hw) - Q(hw)(1 + s) = r(1 + s) \implies -Q(hw)s = r(1 + s)$.

Also gilt $r + Q(hw) = (q + s)^{-1}Q(hw)$, also auch $q = K((1+s)^{-1}hw, (1 + s)^{-1}(r + Q(hw)), 1) = K((1 + s)^{-1}hw, Q((1 + s)^{-1}hw), 1)$ und somit $\zeta(q) = R((1 + s)^{-1}hww, 1) = R((1 + s)^{-1}h, 1) \in C_h$.
Damit gilt $F_Q \cap E_h \subset C_h$.
Da alle Elemente von C_h von einem der Typen: $R(1, 0), R(0, 1), R(h, 1)$ und $R((1 + s)^{-1}h, 1)$ sind, kommen alle Elemente von C_h als ζ Bilder vor. □

Satz 2.2.14. *Zu jeden $\delta \in \Delta(J)$ gibt es eine F_Q invariant lassende projektive Kollineation $\hat{\delta}$ von $\Pi(W,K)$, derart, dass $\delta \circ \zeta = \zeta \circ \hat{\delta}$ gilt. Jede solche Kollineation $\hat{\delta}$ induziert insbesondere einen Automorphismus von $\Sigma(Q)$.*
Speziell haben wir für $\iota, \tau_c \in \Delta(J) (c \in J)$ folgende Kollineationen $\hat{\iota}, \hat{\tau}_c$:

$\hat{\iota} : K(v,k,l) \mapsto K(wvw,l,k)$
$\hat{\tau}_c : K(v,k,l) \mapsto K(v+lcw, f(v,cw)+k+lQ(cw), l)$

Beweis. Betrachte $(v,k,l) \mapsto (wvw,l,k)$. Dann ist wegen $k_1(v,k,l) + k_2(v',k',l') = (K_1v+k_2v, k_1k+k_2k, k_1l+K_2l) \mapsto (w(k_1v+k_2v')w, k_1l+k_2l', k_1k+k_2k') = k_1(wvw,l,k)+k_2(wv'w,l',k')$, $\hat{\iota}$ durch eine lineare Abbildung induziert.
Betrachte die Abbildung $(v,k,l) \mapsto (v+lcw, f(v,cw)+k+lQ(cw), l)$. Es ist $k_1(v,k,l)+k_2(v',k',l') = (k_1v+k_2v', k_1k+k_2k', k_1l+k_2l') \mapsto (k_1v+k_2v'+(k_1l+k_2l')cw, f(k_1v+k_2v',cw)+k_1k+k_2k'+(k_1l+k_2l')cQ(cw), k_1l+k_2l') = k_1(v+lcw, f(v,cw)+k+lQ(cw), l)+k_2(v'+l'cw, f(v',cw)+k'+l'Q(cw), l')$. Somit ist $\hat{\tau}_c$ durch eine lineare Abbildung induziert.
Damit sind $\hat{\iota}$ und $\hat{\tau}_c$ Kollineationen von $\Pi(W,K)$.
Auch kann man sehen, dass $\hat{\iota}$ und τ_c die Quadrik F_Q invariant lassen: Für $\hat{\iota}$ gilt das, weil $Q(v) = kl \iff Q(wvw) = kl$ wegen $Q(v) = Q(wvw)$ gilt, denn es ist zum einen $f(w,wvw) = wwwvw + wvww = vw + wv = f(w,v)$ und $f(v,w) = wv + vw \implies f(v,w)w = v + wvw \implies v = f(v,w)w - wvw$, also $Q(v) = Q(f(v,w)w + (-wvw)) = f(f(v,w)w, -wvw) + Q(f(v,w)w) + Q(wvw) = -f(v,w)f(w,wvw) + f(v,w)^2Q(w) + Q(wvw) = -f(v,w)^2 + f(v,w)^2 + Q(wvw) = Q(wvw)$ und für $\hat{\tau}_c$ gilt das, weil $Q(v) = kl \iff Q(v+lcw) = l(f(v,cw)+k+lQ(cw))$.
Denn sei $Q(v) = kl$, dann ist $Q(v+lcw) = f(v,lcw)+Q(v)+Q(lcw) = l(f(v,cw)+kl+l^2Q(cw)) = l(f(v,cw)+k+lQ(cw))$ und falls $Q(v+lcw) = l(f(v,cw)+k+lQ(cw))$ ist, dann ist $f(v,lcw) = Q(v+lcw) - Q(lcw) + Q(v) = lf(v,cw)+kl+l^2Q(cw) - Q(lcw) - Q(v) = f(v,lcw)+kl+Q(lcw)-Q(lcw)-Q(v) \implies Q(v) = kl$.
Somit induzieren $\hat{\iota}$ und $\hat{\tau}_c$ nach Satz 1.3.2 Automorphismen von $\Sigma(Q)$.
Da die Gruppe $\Delta(J)$ von ι und allen τ_c erzeugt wird, bleibt zu zeigen, dass $\zeta^{-1} \circ \delta = \hat{\delta} \circ \zeta^{-1}$ für $\delta = \iota$ und $\delta = \tau_c$ gilt.
Wir verwenden die Beschreibung von ζ^{-1} aus Satz 2.2.11.
Der Punkt $p \in P(J)$ sei dazu in der Form $p = R(x,y)$ gegeben mit (x,y) wie in Satz 2.2.11.

Fall 1: $\delta = \iota$.
Dann ist $\zeta^{-1}(\delta(p)) = \zeta^{-1}(\iota(R(x,y))) = \zeta^{-1}(R(y,x)) = K(w\overline{y}x, \overline{y}y, \overline{x}x)$ und $\hat{\delta}(\zeta^{-1}(p)) = \hat{\iota}(\zeta^{-1}(R(x,y))) = \hat{\iota}(K(w\overline{x}y, \overline{x}x, \overline{y}y)) = K(ww\overline{x}yw, \overline{y}y, \overline{x}x) = K(\overline{x}yw, \overline{y}y, \overline{x}x)$.
Wegen $w\overline{y}x \in V$ ist $w\overline{y}x = \overline{w\overline{y}x} = \overline{x}yw$ und damit $\zeta^{-1}(\delta(p)) = \hat{\delta}(\zeta^{-1}(p))$.
Fall 2: $\delta = \tau_c$ mit $c \in J$.

Dann ist $\zeta^{-1}(\delta(p)) = \zeta^{-1}(\tau_c(R(x,y))) = \zeta^{-1}(R(x+yc,y)) = K(w\overline{(x+yc)}y, \overline{(x+yc)}(x+yc), \overline{y}y) = K(w\overline{(x+yc)}y, \overline{x}yc + \overline{cy}x + \overline{x}x + \overline{cy}yc, \overline{y}y)$, und $\hat{\delta}(\zeta{-}1(p)) = \hat{\tau}_c(\zeta^{-1})(R(x,y)) = \hat{\tau}_c(K(w\overline{x}y, \overline{x}x, \overline{y}y)) = K(w\overline{(x+yc)}y, f(w\overline{x}y, cw) + \overline{x}x + \overline{y}yQ(cw), \overline{y}y) = K(w\overline{(x+yc)}y, \overline{y}x\overline{c} + c\overline{x}y + \overline{x}x + \overline{y}yc\overline{c}, \overline{y}y)$, wobei man bei der letzten Gleichung $f(w\overline{x}y, cw) = w\overline{x}ycw + cww\overline{x}y = w\overline{x}ywwcw + c\overline{x}y = \overline{\overline{x}y\overline{c}} + c\overline{x}y = \overline{y}x\overline{c} + c\overline{x}y$ beachte. Damit gilt $\zeta^{-1}(\delta(p)) = \hat{\delta}(\zeta^{-1}(p))$ und es folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2.2.15. *Die Bijektion $\zeta^{-1} : P(J) \to \Sigma(Q)$ bildet Ketten auf Ketten ab.*

Beweis. Jede Kette $C' \in \mathbf{C}(J)$ hat nach Satz 2.1.7 (man beachte auch Satz 2.1.9) die Gestalt $C' = \delta(C_h)$ mit $h \in J^*$ und $\delta \in \Delta(J)$.
Wegen Satz 2.2.14 ist $\hat{\delta} = \zeta^{-1} \circ \delta \circ \zeta$ ein Automorphismus von $\Sigma(Q)$.
Nach Satz 2.2.13 gibt es eine zulässige Ebene E_h derart, dass $\zeta(D) = C_h$ für die Kette $D = F_Q \cap E_h \in \mathbf{C}(Q)$ gilt.
Wir schließen $C' = \delta(C_h) = \delta(\zeta(D)) = \zeta(\hat{\delta}(D))$ und $\zeta^{-1}(C') = \hat{\delta}(D) \in \mathbf{C}(Q)$. $\square$

Satz 2.2.16. *Die Bijektion $\zeta : F_Q^* \to P(J)$ bildet distante Punkte auf distante Punkte ab.*

Beweis. Die Gruppen $\Delta(J)$ und $\hat{\Delta} := \zeta^{-1}\Delta(J)\zeta$ erhalten beide die Relation Δ. Wir zeigen, dass jedes Paar distanter Punkte (p,q) von $\Sigma(Q)$ durch ein geeignetes $\hat{\delta} = \zeta^{-1} \circ \delta \circ \zeta \in \hat{\Delta}$ auf ein Paar (p', q') abgebildet wird, von dem wir sicher wissen, dass es von ζ auf ein Paar distanter Punkte von $\Sigma(K,R,J)$ abgebildet wird, denn dann haben wir
$p\Delta q \implies \zeta^{-1} \circ \delta \circ \zeta(p) \Delta \zeta^{-1} \circ \delta \circ \zeta(q) \implies \delta \circ \zeta(p) \Delta \delta \circ \zeta(q) \implies \zeta(p)\Delta\zeta(q)$.
In Satz 2.2.3 haben wir angegeben, welche Punktepaare von $\Sigma(Q)$ distant sind. Des Weiteren ist $R(x,y)$ genau dann zu $R(1,0)$ distant, wenn $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ ist. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn $x \in R^*$ ist.
Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $p = K(x, Q(v), 1)$.
Betrachte $\hat{\tau} := \hat{\tau}_{-vw}$.
Dann ist $\hat{\tau}(p) = \hat{\tau}(K(v, Q(v), 1)) = K(v - vww, f(v, -vww) + Q(v) + Q(-vwv), 1) = K(v - v, Q(v - v) - Q(v) - Q(v) + Q(v) + Q(-v), 1) = K(0,0,1)$ und $\zeta(\hat{\tau}(p)) = R(0,1)$.

a) Sei $q = K(u, Q(u), 1)$ mit $Q(u - v) \neq 0$.

Dann ist $\hat{\tau}(q) = K(u - vww, f(u, -vww) + Q(u) + Q(-vww), 1) = K(u-v, Q(u-v)-Q(u)-Q(v)+Q(u)+Q(-v), 1) = K(u-v, Q(u-v), 1)$ und $\zeta(\hat{\tau}(q)) = R((u-v)w, 1)$ wobei $(u-v)w$ invertierbar ist, wegen $Q(u-v) \neq 0$.

b) Sei $q = K(u, 1, 0)$ mit $f(u, v) \neq 1$.
Dann ist $\hat{\tau}(q) = K(u, f(u, -vww) + 1, 0) = K(u, 1 - f(u, v), 0) = K(-uf(u, v)^{-1}, 1, 0)$ und $\zeta(\hat{\tau}(q)) = R(1, w(1 - f(u, v)^{-1}u))\Delta\zeta(\hat{\tau}(p))$.

Fall 2: $p = K(v, 1, 0)$.
Dann wird p von $\hat{\imath}$ auf $K(wvw, 0, 1)$ abgebildet und wir sind wieder im Fall 1.

Fall 3: $p = K(v, 0, 0)$.
Wähle ein $u \in V$ mit $f(v, u)01$ (ein solches existiert, da $p \in F_Q^*$, also $v \notin V^\perp$ ist). Dann bildet $\hat{\tau}_{uw}$ den Punkt p auf $K(v, f(v, u), 0) = K(v, 1, 0)$ ab und wir sind im Fall 2. □

Satz 2.2.17. $\zeta : F_Q^* \to P(J)$ *ist ein Isomorphismus von Kettenräumen.*

Beweis. Nach Satz 2.2.15 bildet ζ^{-1} Ketten auf Ketten ab. Nach Satz 2.2.16 bildet ζ distante Punkte auf distante Punkte ab.
Damit ist ζ nach Satz 2.2.12 ein Isomorphismus von Kettenräumen. □

3. Darstellung der Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken

In diesem letzten Kapitel werden wir uns mit der Darstellung von Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken befassen.
Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Beschreibung von nicht-trivialen, starken Morphismen solcher Kettengeometrien. Mit Hilfe der stereographischen Projektion konstruieren wir zu einem nicht-trivialen Morphismus einen Morphismus zwischen den die Quadriken enthaltenden projektiv-metrischen Räumen. Dabei benutzen wir vorteilhaft den zweiten Fundamentalsatz der affin-metrischen Geometrie (Satz 1.2.12).
Man sieht schnell ein, dass die so konstruierte Abbildung auf dem Residuum des Nordpols der stereographischen Projektion übereinstimmt. Zum vollständigen Nachweis, dass es sich bei der Abbildung um eine projektive Erweiterung des nicht-trivialen Morphismus handelt, benötigen wir einen analog konstruierten Morphismus der projektiv-metrischen Räume, der ebenfalls mittels einer stereographischen Projektion konstruiert ist, die den Nord- und Südpol der ursprünglich betrachteten Projektion vertauscht, sowie einen Hilfssatz.
Im zweiten Abschnitt befassen wir uns mit der Beschreibung der trivialen Morphismen.
Wir zeigen, dass man jeden trivialen Morphimus als eine Verkettung einer eindeutigen Projektion auf eine beliebig gewählte Kette im Urbildraum mit einer anschließenden Bijektion auf eine Kette im Bildraum darstellen kann.
Wir zeigen, dass nicht jede Kettengeometrie über einer Quadrik als Definitionsbereich eines trivialen Morphismus geeignet ist.
Wir identifizieren zwei Ausschlusskriterien dafür und zeigen, dass wenn eine Kettengeometrie über einer Quadrik diese nicht erfüllt, sie als Definitionsbereich eines trivialen Morphismus vorkommen kann.

3.1. **Nicht-triviale starke Morphismen.**

Seien (V_1, K_1, Q_1) und (V_2, K_2, Q_2) metrische Vektorräume mit $| K_1 |$, $| K_2 | \geq 5$, sodass beide Räume die Generalvoraussetzung 1.3.1 erfüllen. Mit $\Sigma(Q_1) = (P_1, \mathbf{C}_1)$ und $\Sigma(Q_2) = (P_2, \mathbf{C}_2)$ bezeichnen wir die Kettengeometrien über den Quadriken F_{Q_1} und F_{Q_2}.
Sei $\mu : P_1 \to P_2$ ein nicht-trivialer (nicht notwendigerweise starker) Morphismus dieser Kettengeometrien.
Unser Ziel ist es eine projektive Erweiterung von diesem Morphismus

zu konstruieren.
In Satz 1.3.7 haben wir gezeigt, dass Morphismen, welche einer projektiven Erweiterung fähig sind, durch Morphismen von metrischen Vektorräumen induziert sind. Eine projektive Erweiterung wäre also nur für starke Morphismen der Kettengeometrien möglich.
Da wir auch der Frage nachgehen möchten, ob für μ eine verallgemeinerte projektive Erweiterung existiert, gehen wir zunächst von einem nicht notwendigerweise starken Morphismus der Kettengeometrien aus. Es wird sich zeigen, dass, falls eine verallgemeinerte projektive Erweiterung möglich sein sollte, diese eine projektive Erweiterung im Sinne von Definition 1.3.7 ist.
Um das zu zeigen und um eine projektive Erweiterung zu konstruieren, werden wir von der Tatsache Gebrauch machen, dass μ auf dem Residuum eines fest gewählten Punktes (das Residuum ist ein partieller affiner Raum, siehe Definition 1.3.3) einen Homomorphismus affiner Räume induziert, wenn wir das besagte Residuum geeignet als affinen Raum auffassen.
Hier wird die wohlbekannte stereographische Projektion eine wichtige Rolle spielen, die wir nun einführen werden.
Zur Konstruktion der stereographischen Projektion verweisen wir auf (10.21) in [32].
Wir werden sie nun skizzieren.
Wir betrachten eine beliebige Sekante von F_{Q_1}. Seien $N = K_1 n$ und $S = K_1 s$ die beiden Punkte (für geeignete Wahlen von n und $s \in V_1$). Den Punkt N bezeichnen wir auch als Nordpol, den Punkt S als Südpol. Wir betrachten die beiden Tangentialräume τ_N von N und τ_S von S im projektiven Raum $\Pi(V_1, K_1)$. Zu diesen gehören Unterräume von V_1, H_N und H_S mit $(H_N)^\Pi = \tau_N$ und $(H_S)^\Pi = \tau_S$.
Wir setzen $U_1 := H_N \cap H_S$.
Nach (10.21) in [32] gilt dann $V_1 = U_1 + S + N$ und für die quadratische Form Q_1 gilt dann $Q_1(X + \alpha s + \beta n) = Q(X) - \alpha\beta$ für alle $(X, \alpha, \beta) \in U_1 \times K_1 \times K_1$. Identifizieren wir $X + \alpha s + \beta n$ mit (X, β, α), so liegt die selbe Identifikation, wie in Satz 2.2.1 vor.
Den Nordpol können wir uns demnach mit in der Darstellung $K_1(0, 1, 0)$ vorstellen, den Südpol entsprechend in der Darstellung $K_1(0, 0, 1)$.
Natürlich haben wir, wie in Kapitel 2 gezeigt, eine Darstellung von $\Sigma(Q_1)$ über dem Jordan-System $J_1 := w_1 U_1 = U_1 w_1$ über der Clifford-Algebra $R_1 := Cl(U_1, Q_1)$ für ein geeignetes $w_1 \in U_1$ mit $Q_1(w_1) = 1$ mittels einer Abbildung $\zeta_1 : P_1 \to P_{J_1}$, wobei $\Sigma(K_1, R_1, J_1) = (P_{J_1}, C_{J_1})$ (siehe Satz 2.2.8).
Wir möchten nun das Residuum $\Sigma_N = P_1 \setminus \tau_N$ betrachten (Man beachte, dass Punkte von P_1 genau dann zu N distant sind, wenn sie mit N

auf einer Sekante liegen).
Das Residuum besteht aus genau den Punkten, die zu N distant sind. Nach Satz 2.2.3 sind das genau die Punkte $K_1(X + s + Q_1(X)n)$.
Betrachten wir nun die Abbildung $\zeta : U_1 \to \Sigma_N : X \mapsto K_1(X + s + Q_1(X)n)$, so können wir uns diese Abbildung als Umkehrabbildung der stereographischen Projektion vorstellen, die die Menge $\tau_S \setminus \tau_N$ auf das Residuum von N abbildet, wenn wir den Punkt $K_1(X + s) \in \tau_S$ mit $X \in U_1$ identifiziert denken.
Es ist dann $\{\zeta(X)\} =< K(X + s), N > \cap (F_{Q_1} \setminus \tau_N)$ für alle $X \in U_1$.
Da die Geraden $< K(X + s), N >$ mit $X \in U_1$ genau die Sekanten durch N sind, die mit $\tau_S \setminus \tau_N$ in genau einem Punkt schneiden, ist ζ bijektiv.
Die Abbildung ζ^{-1} bezeichnen wir als die **stereographische Projektion** von Σ_N auf $\tau_S \setminus \tau_N$ und sie liefert uns offenbar eine Mölichkeit das Residuum von N mit dem Vektorraum U_1 zu identifizieren.
In der entsprechenden Kettengeometrie über J_1 werden die zu N distanten Punkte $K_1(X, Q_1(X), 1)$ mit $R(Xw_1, 1)$ für $X \in U_1$ identifiziert und der Punkt N mit $R_1(1, 0)$ (siehe Satz 2.2.8). Identifizieren wir $R_1(Xw_1, 1)$ mit X für $X \in U_1$, so haben wir offenbar die selbe Identifikation, die durch die stereographische Projektion zu Stande kommt (siehe hierzu auch das auf Seite 101 in [6] unten Bemerkte).
Setzen wir $N' := \mu(N)$ und $S' := \mu(S)$, so haben wir analog eine Darstellung $V_2 = U_2 + K_2 s' + K_2 n'$ mit $Q_2(X + \alpha s' + \beta n') = Q_2(X) - \alpha\beta$ für alle $X \in U_2$ für geeignete $n', s' \in V_2$. Auch hier können wir die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion $\zeta' : U_2 \to \Sigma_{N'} : K_2(X + s' + Q_2(X)) \mapsto X$ betrachten und entsprechend haben wir auch eine Darstellung der Kettengeometrie $\Sigma(Q_2)$ mittels des Jordan-Systems $J_2 := U_2 w_2 = w_2 U_2$ über der Clifford-Algebra $R_2 := Cl(U_2, Q_2)$ für ein geeignet gewähltes $w_2 \in U_2$ mit $Q_2(w_2) = 1$ mittels einer Abbildung $\zeta_2 : P_2 \to P_{J_2}$, wobei $\Sigma(K_2, R_2, J_2) = (P_{J_1}, C_{J_2})$.
Auch hier entspricht der Nordpol im Jordan-System dem Punkt $R_2(1, 0)$ und auch hier erhält man die selbe Identifikation von $\Sigma_{N'}$ mit U_2, wie sie durch die stereographische Projektion induziert wurde, indem man die zu $R_2(1, 0)$ distanten Punkte $R_2(Xw_2, 1)$ mit X identifiziert, für alle $X \in U_2$. Setzen wir $Q_{U_1} := Q_1 |_{U_1}$ und $Q_{U_2} := Q_2 |_{U_2}$, so können wir die affinen Räume $A(U_1, K_1)$, bzw. $A(U_2, K_2)$ mit den Relationen $\wedge_{Q_1}$, bzw. $\wedge_{Q_2}$ als affin-metrische Räume verstehen.
Wir haben Geraden $a_1 + K_1 b_1$, bzw. $a_2 + K_2 b_2$ mit $a_1, b_1 \in K_1, b_1 \neq 0$, bzw. $a_2, b_2 \in K_2$ mit $b_2 \neq 0$ als reguläre Geraden bezeichnet, falls $Q_1(b_1) \neq 0$, bzw. $Q_2(b_2) \neq 0$. Solche Geraden mit $Q_1(b_1) = 0$, bzw. $Q_2(b_2) = 0$ haben wir als singuläre Geraden bezeichnet.

Die Punktmenge des Residuum Σ_N, ist nach Definition 1.3.3 (3) zusammen mit den Ketten C durch N ohne den Punkt N als Geraden ein partieller affiner Raum, also eine aus einen affinen Raum hervorgegangene Struktur, wenn man eventuell einige Parallelklassen aus diesen Raum entfernt, ohne dabei Punkte zu entfernen.
Ist C eine solche Kette, so schneidet $< C >$ den Tangentialraum τ_S in einer Geraden. Entfernt man den Schnittpunkt dieser Geraden mit τ_N, so wird die daraus hervorgegangene affine Gerade mittels ζ (man beachte unsere Identifikation von $\tau_S \setminus \tau_N$ mit U_1) auf die Gerade $C \setminus \{N\}$ in Σ_N abgebildet.
Aus (10.22) 1) und 2) in [32] folgt, dass so genau die regulären Geraden aus $(A(U_1, K_1), \wedge_{Q_1})$ mit denen von Σ_N identifiziert werden.
Die verbleibenden Geraden g im affinen Raum $\tau_S \setminus \tau_N$ entsprechen genau den singulären Geraden aus $(A(U_1, K_1), \wedge_{Q_1})$.
Betrachtet man den Schnitt $< g \cup \{N\} > \cap F_{Q_1}$, so ist dieser ein Geradenkreuz, wobei eine der beiden Geraden in τ_S und die andere in τ_N liegt und der Schnittpunkt dieser beiden Geraden sich in $\tau_N \cap \tau_S$ befindet.
Man kann also den partiellen affinen Raum Σ_N als aus den affinmetrischen Raum $(A(U_1, K_1), \wedge_{Q_1})$ hervorgegangen betrachten.
Entsprechendes gilt natürlich für das Residuum $\Sigma_{N'}$ und $(A(U_2, K_2), \wedge_{Q_2})$.
Da der Morphismus μ der Kettenräume $\Sigma(Q_1)$ und $\Sigma(Q_2)$ die Distanzrelation erhält, bildet die Einschränkung μ_{Σ_N} das Residuum von N in das Residuum von N' ab.
Da $\mu(N) = N'$ und μ Ketten bijektiv auf Ketten abbildet, werden auch die Geraden des partiellen affinen Raumes Σ_N bijektiv auf Geraden von $\Sigma_{N'}$ abgebildet.
Durch $\phi := (\zeta')^{-1} \circ \mu \circ \zeta$ erhalten wir eine Abbildung, die U_1 nach U_2 abbildet und dabei reguläre Geraden bijektiv auf reguläre Geraden in den entsprechenden affin-metrischen Räumen abbildet.
Wir werden als Nächstes zeigen, dass tatsächlich ϕ einen Homomorphismus von den affinen Räumen $A(U_1, K_1)$ und $A(U_2, K_2)$ darstellt.
Hierzu werden wir Gebrauch von der Darstellung ζ_1 und ζ_2 der Punktmengen P_1 und P_2 machen und Sätze aus [5] anwenden.
Wir werden die Abbildung ϕ später zur Konstruktion einer projektiven Erweiterung von μ verwenden.

Satz 3.1.1. *Die Abbildung $\phi : U_1 \to U_2$ ist ein Homomorphismus von affinen Räumen.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\zeta_2 \circ \mu \circ (\zeta_1)^{-1}$.
Diese ist ein nicht-trivialer Morphismus von Kettengeometrien über den

starken Jordan-Systemen J_1 und J_2, welche das Residuum von $R_1(1,0)$ auf das Residuum von $R_2(1,0)$ abbildet, da $R_1(1,0)$ dem Nordpol N und $R_2(1,0)$ dem Nordpol N' entspricht.
Die Abbildung $\phi' := \zeta_2 \circ \mu \circ ((\zeta_1)^{-1} \mid_{\Sigma_{R_1(1,0)}})$ bildet offenbar die Geraden des partiellen affinen Raumes $\Sigma_{R_1(1,0)}$ bijektiv auf Geraden des partiellen affinen Raumes $\Sigma_{R_2(1,0)}$ ab, da μ den Punkt N auf N' abbildet,sowie Ketten bijektiv auf Ketten. Nach Proposition 3.3 in [5] folgt, dass ϕ' sogar ein Homomorphismus von affinen Räumen ist, wenn wir $\Sigma_{R_1(1,0)}$ und $\Sigma_{R_2(1,0)}$ folgendermaßen als affine Räume auffassen:
Sei $i = 1$ oder 2.
Die Punkte von $\Sigma_{R_i(1,0)}$ haben die Form $R_i(a,1)$ mit $a \in J_i$.
Wir identifizieren $R_i(a,1)$ mit a. Dann entsprechen die Geraden von dem partiellen affinen Raum $\Sigma_{R_i(1,0)}$ genau den Geraden $c + K_i b$ von $A(J_i, K_i)$ mit $c, b \in J_i, b \neq 0$ und b ist invertierbar in J_i (siehe hierzu die Ausführungen in [5] auf Seite 37 oben). In $\Sigma_{R_i(1,0)}$ haben die Geraden also entsprechend die Gestalt $\{R_i(c + kb, 1) \mid k \in K_i\}$, wobei b invertrierbar in J_i ist.
Nehmen wir die Geraden $\{R_i(a + kb, 1) \mid k \in K_i\}$ bei denen b nicht invertierbar ist dazu, so haben wir einen zu $A(J_i, K_i)$ isomorphen affinen Raum, den wir mit $\Sigma^{aff}_{R_i(1,0)}$ bezeichnen.
Wir betrachten die Abbildung $\zeta_1 \circ \zeta$, welche U_1 bijektiv auf das Residuum $\Sigma_{R_1(1,0)}$ abbildet. Dabei wird ein Punkt $X \in U_1$ durch ζ auf $K_1(X + s + Q_1(X)\alpha) \in \Sigma_N$ und durch ζ_1 auf $R_1(Xw_1, 1)$ abgebildet.
Die reguläre Gerade $v + K_1 u$ mit $v, u \in U_1, Q_1(u) \neq 0$ wird abgebildet auf die Gerade $\{R_1(vw + kuw, 1) \mid k \in K_1\}$ des partiellen affinen Raumes $\Sigma_{R_1(1,0)}$, da $uw \in J_1$ invertierbar in J_1 ist wegen $Q_1(u) \neq 0$.
Analog werden singuläre Geraden der Form $v + K_1 u$ mit $Q_1(u) = 0$ auf Geraden $\{R_1(vw + kuw, 1) \mid k \in K_1\}$ des affinen Raumes $\Sigma^{aff}_{R_1(1,0)}$ abgebildet, die nicht Geraden des partiellen affinen Raumes $\Sigma_{R_1(1,0)}$ sind, da uw nicht invertierbar in J_1 ist, wegen $Q_1(u) = 0$.
Damit ist $\zeta_1 \circ \zeta$ ein Isomorphismus der affinen Räume $\Sigma^{aff}_{R_1(1,0)}$ und $A(U_1, K_1)$. Analog sieht man, dass $(\zeta')^{-1} \circ (\zeta_2) \mid_{\Sigma_{R_2(1,0)}}$ ein Isomorphismus des affinen Raumes $\Sigma^{aff}_{R_2(1,0)}$ in den affinen Raum $A(U_2, K_2)$ ist.
Offenbar ist demnach $\phi = ((\zeta')^{-1} \circ (\zeta_2) \mid_{\Sigma_{R_2(1,0)}}) \circ \phi' \circ (\zeta_1 \circ \zeta)$ als Verkettung dreier Homomorphismen von affinen Räumen ein Homomorphismus von affinen Räumen. $\square$

Damit ist ϕ eine semilineare Abbildung. Mit σ bezeichnen wir den Begleitisomorphismus von ϕ.

Wir gehen nun der Frage nach der Existenz einer verallgemeinerten projektiven Erweiterung von μ nach (beachte hierzu Definition 1.1.7). Hierzu nehmen wir an, dass es einen Homomorphismus Ψ von den projektiven Raum $\Pi(V_1, K_1)$ in den projektiven Raum $\Pi(V_2, K_2)$ mit $\Psi\mid_{P_1} = \mu$ gibt.
Wir werden zeigen, dass es sich bei Ψ um eine projektive Erweiterung von μ, also um einen Homomorphismus projektiver Räume im Sinne von Definition 1.1.3 handelt.

Satz 3.1.2. *Existiert eine verallgemeinerte projektive Erweiterung Ψ von μ, so ist Ψ eine projektive Erweiterung im Sinne von Definition 1.3.7.*

Beweis. Wir wollen zeigen, dass Ψ eine projektive Erweiterung von μ ist.
Hierzu müssen wir zeigen, dass Ψ ein projektiver Homomorphismus der Räume $\Pi(V_1, K_1)$ und $\Pi(V_2, K_2)$ im Sinne von Definition 1.1.6 ist.
Da Ψ ein verallgemeinerter projektiver Homomorphismus im Sinne von Definition 1.1.7 ist, gibt es eine Teilmenge $E \subset V_1^{\Pi}$, sodass der Definitionsbereich von Ψ die Menge $V_1^{\Pi} \setminus E$ ist. Diesen können wir als den entsprechenden geschlitzten Raum auffassen (Die Geraden von $V_1^{\Pi} \setminus E$ sind genau die Schnitte von Geraden aus $\Pi(V_1, K_1)$ mit dieser Menge, falls der Schnitt wenigstens zwei Punkte enthält).
Um zu zeigen, dass Ψ ein projektive Homomorphismus ist, müssen wir zeigen, dass E ein Teilraum von $\Pi(V_1, K_1)$ ist und, dass Ψ ein Inzidenzraumhomomorphismus von dem geschlitzten Raum $V_1^{\Pi} \setminus E$ in den Raum $\Pi(V_2, K_2)$ ist.
Nach Satz 1.1.5 genügt es zu zeigen, dass $< E > \neq V_1^{\Pi}$ ist und, dass Ψ ein Inzidenzraumhomomorphismus ist.
Da Ψ eine verallgemeinerte projektive Erweiterung ist, liegt keiner der Punkte von P_1 in E.
Wir betrachten unsere Nord- und Südpole, N und S, sowie die entsprechenden Tangentialräume τ_N und τ_S.
Dann muss $E \subset \tau_N \cap \tau_S$ sein, denn gäbe es einen Punkt $p \in E$, der nicht in τ_N, bzw. τ_S liegt, so wären Np, bzw. Sp Sekanten, d.h. es liegen zwei distante Punkte aus P_1 auf diesen Sekanten. Da diese Sekanten die Menge E schneiden, werden sämtliche Punkte auf Np, bzw. Sp durch Ψ auf den selben Punkt abgebildet, also auch jeweils die zwei distanten Punkte auf dem selben Punkt. Das würde aber bedeuten, dass μ zwei distante Punkte auf den selben Punkt in P_1 abbildet, da Ψ eine verallgemeinerte projektive Erweiterung von μ ist, μ also die Distanzrelation nicht erhält. Das ist ein Widerspruch.
Da $E \subset \tau_N \cap \tau_S$ ist offenbar $< E > \neq V_1^{\Pi}$.

Wir zeigen nun, dass Ψ ein Inzidenzraumhomomorphismus ist. Nach Satz 1.1.1 (1) ist dies genau dann der Fall, wenn Ψ Geraden auf Punkte oder bijektiv auf Geraden abbildet.
Um das zu zeigen, zeigen wir zunächst, dass $\tau_S \setminus \tau_N$ mittels Ψ in $\tau_{S'} \setminus \tau_{N'}$ abgebildet wird und, dass Ψ kompatibel mit den stereographischen Projektionen ist (es ist $\Psi(p) = (\zeta')^{-1} \circ \mu \circ \zeta(p)$ für alle $p \in \tau_S$).
Hierzu betrachten wir einen Punkt $p \in \tau_S \setminus \tau_N, p \neq S$ (beachte, dass $p \notin E$, wegen $E \subset \tau_N \cap \tau_S$).
Wir betrachten die Ebene pNS. Diese schneidet die Quadrik F_{Q_1} entweder in einer Kette (also einem Oval) oder in einem Geradenkreuz.
Wir behandeln zunächst den Fall, dass pNS die Quadrik in einer Kette C schneidet.
Da C drei nicht-kollineare Punkte enthält, μ Ketten bijektiv auf Ketten abbildet und, da $\Sigma(Q_1)$ wenigstens eine Kette enthält, liegen drei nicht-kollineare Punkte im Bild von Ψ.
Nach Satz 1.1.7 ist die Abbildung Ψ reichhaltig, d.h. die Bilder von Geraden besitzen wenigstens drei Punkte, sofern die Gerade nicht auf einen Punkt abgebildet wird.
Diese Eigenschaft wird später noch nützlich sein.
Nach (8.36)(4) in [32] gehen in der Ebene pNS durch jeden Punkt wenigsten zwei Sekanten (es gibt durch jeden Punkt wenigstens $\frac{1}{2}(\mid K_1 \mid -1)$ Sekanten, beachte, dass wir $\mid K_1 \mid \geq 5$ vorausgesetzt haben) außer im Fall $char(K_1) = 2$. Dann gibt es einen sogenannten Knotenpunkt durch den sämtliche Tangenten von $F_{Q_1} \cap pNS$ gehen.
Bezeichnen wir mit g_{τ_S} die Gerade $pNS \cap \tau_S$ und analog die Gerade $pNS \cap \tau_N$ mit g_{τ_N}, so ist der Knotenpunkt, falls er existiert, der Punkt $g_{\tau_N} \cap g_{\tau_S}$.
Da die oben betrachtete Abbildung ϕ ein Homomorphismus von affinen Räumen ist (also semilinear ist), sind die Körper K_1 und K_2 im übrigen isomorph.
Wir betrachten nun die Gerade Np. Da $p \notin \tau_N$ ist diese Gerade eine Sekante. Sie schneidet also C in einem Punkt $\tilde{p}$.
Da μ die Distanzrelation erhält, wird $Np = N\tilde{p}$ in die Gerade $N'\mu(\tilde{p})$ abgebildet. Die Gerade $N'\mu(\tilde{p})$ schneidet τ'_S in einem Punkt, nennen wir ihn p'. Um zu zeigen, dass p auf p' abgebildet wird, zeigen wir zunächst, dass $Np \setminus \{N, p\}$ bijektiv auf $N'p' \setminus \{N'p'\}$ wird.
Sei hierzu $q \in Np, q \neq N, p$.
Die Gerade Sq schneidet C in einem Punkt $\tilde{q} \neq N$, da $N \in Np = Nq$ und q nicht im Tangentialraum von S liegt. Dann muss $\Psi(q)$ auf der Geraden $N'\mu(\tilde{p}) = N'p'$ und $S'\mu(\tilde{q})$ liegen. Da offenbar $N' \notin S'\mu(\tilde{q})$ und $S' \notin N'\mu(\tilde{p})$, liegt der Schnittpunkt $\Psi(q)$ auf $N'p \setminus \{N', p'\}$.

Betrachten wir umgekehrt einen Punkt $t \in N'p'$ mit $t \neq N', p'$, so finden wir analog ein Urbild von t in $Np \setminus \{N, p\}$, indem wir $S't \cap C'$ betrachten, wobei mit C' das Bild der Kette C unter der Abbildung μ zu verstehen ist (man beachte, dass μ die Kette C bijektiv auf die Kette C' abbildet).
Damit bildet Ψ die Menge $Np \setminus \{N, p\}$ surjektiv in die Menge $N'p' \setminus \{N', p'\}$ ab.
Um auch die entsprechende Injektivität einsehen zu können, betrachten wir $q_1, q_2 \in Np$ mit $q_1, q_2 \neq N, p, q_1 \neq q_2$. Wir betrachten Sq_1 und Sq_2. Diese schneiden C in den zwei von N und S verschiedenen Punkten $\tilde{q_1}$ und $\tilde{q_2}$. Diese werden durch Ψ auf die beiden verschiedenen Punkte $\mu(\tilde{q_1})$ und $\mu(\tilde{q_2})$ abgebildet. Da jeweils das Bild von q_1, bzw. q_2 der Schnittpunkt der verschiedenen Geraden $S'\mu(\tilde{q_1})$ und $S'\mu(\tilde{q_2})$ mit $N'p'$ ist, sind auch die Bilder von q_1 und q_2 verschieden.
Damit ist die besagte Injektivität gezeigt.
Um zu zeigen, dass p auf p' abgebildet wird, zeigen wir, dass p' ein Urbild in Np haben muss.
Da durch den Punkt p' wenigstens zwei Sekanten gehen, finden wir neben der Sekante $N'\mu(\tilde{p}) = N'p'$ noch eine weitere Sekante $c_1'c_2'$, wobei $c_1', c_2' \in C'$ die beiden Sekantenschnittpunkte seien. Diese Punkte haben Urbilder $c_1, c_2 \in C$ mit $\mu(c_1) = c_1'$ und $\mu(c_2) = c_2'$, welche von N und $\tilde{p}$ verschieden sind.
Dann wird offenbar der Schnittpunkt $N\tilde{p} \cap c_1c_2$ auf p' abgebildet. Es gibt für p' ein Urbild auf der Geraden Np. Da aber alle Punkte von $Np \setminus \{N, p\}$ auf $N'p' \setminus \{N', p'\}$ abgebildet werden und N auf N' abgebildet wird, so bleibt als Urbildpunkt für p' nur der Punkt p übrig.
Damit wird die Gerade $Np = N\tilde{p}$ bijektiv auf die Gerade $N'p' = N'\mu(\tilde{p})$ abgebildet. Da $\zeta(p) = \tilde{p}$ und $(\zeta')^{-1}(\mu(\tilde{p})) = p'$ ist, ist Ψ offenbar kompatibel mit den stereographischen Projektionen (es ist $\Psi(p) = (\zeta')^{-1} \circ \mu \circ \zeta(p)$).
Da $p \in g_{\tau_S} \setminus (g_{\tau_N} \cup \{S\})$ beliebig war, folgt, dass alle Punkte von g_{τ_S} auf $g_{\tau_{S'}} := \tau_{S'} \cap < C' >$ abgebildet werden.
Auch hier kann man wieder aus der Tatsache, dass μ die Menge $C \setminus \{N\}$ bijektiv auf die Menge $C' \setminus \{N'\}$ abbildet schließen, dass $g_{\tau_S} \setminus \tau_N$ bijektiv auf $g_{\tau_{S'}} \setminus \tau_{N'}$ abgebildet wird.
Damit liegen im Bild von der Geraden g_{τ_S} wenigstens zwei Punkte, womit der Schnittpunkt $g_{\tau_N} \cap g_{\tau_S}$ (das ist im Fall $char(K_1) = 2$ der oben erwähnte Knotenpunkt) nicht in der Menge E liegen, da sonst alle Punkte von g_{τ_S} auf einen Punkt abgebildet werden würden.
Analog sieht man, dass $g_{\tau_N} \setminus g_{\tau_S}$ bijektiv auf $g_{\tau_{N'}} \setminus g_{\tau_{S'}}$ abgebildet wird, wobei $g_{\tau_{N'}} :=< C' > \cap \tau_{N'}$ ist.

Damit wird auch der Punkt $g_{\tau_N} \cap g_{\tau_S}$ auf den Punkt $g_{\tau_{N'}} \cap g_{\tau_{S'}}$ abgebildet.
Von den Geraden durch N im Unterraum $< C >$ haben wir noch nicht gezeigt, dass NS bijektiv auf $N'S'$ abgebildet wird. Das zeigt man analog zum obigen Fall, bei dem wir die Bijekivität von Ψ für eine Sekante durch N, die S nicht enthält gezeigt haben. Hierzu betrachten wir einen auf C liegenden, von S und N verschiedenen Punkt. Dann ist die Gerade NS eine Sekante durch N, die diesen Punkt nicht enthält und wir können den Beweis genau so führen.
Da Ψ die Gerade g_{τ_S} bijektiv auf $g_{\tau_{S'}}$ abbildet, werden die Geraden durch N genau auf die Geraden durch N' abgebildet.
Die einzigen Geraden in $< C >$, die wir noch nicht betrachtet haben, sind die Geraden, die nicht durch N gehen und nicht die Gerade g_{τ_S} sind.
Sei g eine solche Gerade. Dann schneidet g jede Gerade durch N in genau einem Punkt. Dann wird g offenbar bijektiv auf eine Gerade abgebildet, welche die Geraden von N' jeweils in genau einem Punkt schneidet.
Damit haben wir gezeigt, dass in der Ebene $< C >$ kein Punkt der Menge E angehört und, dass sämtliche Geraden in $< C >$ bijektiv auf Geraden von $< C' >$ abgebildet werden.
Da μ nicht von der Wahl vom Nordpol N und Südpol S abhängt, haben wir für jede Ebene, die eine Kette enthält gezeigt, dass von einer solchen Ebene keine Punkte in E liegen und Geraden durch Ψ bijektiv auf Geraden abgebildet werden.
Kommen wir nun zurück zu unserer Fallunterscheidung bezüglich des Punktes $p \in \tau_S \setminus \tau_N$.
Wir gehen nun davon aus, dass die Ebene pNS keine Kette enthält, der Schnitt dieser Ebene mit der Quadrik F_{Q_1} also ein Geradenkreuz ist.
Sei wieder $g_{\tau_S} := \tau_S \cap pNS$ und $g_{\tau_N} := \tau_N \cap pNS$. Dann ist $p \in g_{\tau_S}$ und $r := g_{\tau_N} \cap g_{\tau_S}$ der einzige Punkt, der auf keiner Sekanten in pNS liegt, d.h. dies ist der einzige Punkt von pNS, der möglicherweise in E liegt.
Da $g_{\tau_S} \setminus (g_{\tau_S} \cap \tau_N)$ eine Gerade des Residuum von N ist, falls wir das Residuum wie oben als affinen Raum auffassen, wird diese Gerade durch μ auf einen Punkt, oder eine Gerade des Residuum von N' (entsprechend aufgefasst als affinen Raum) abgebildet, also entweder auf eine Kette ohne den Punkt N', oder auf eine affine Gerade von $\tau_{S'} \setminus \tau_{N'}$.
Da μ die Kollinearität erhält, kann $g_{\tau_S} \setminus (g_{\tau_S} \cap \tau_N)$ nicht auf eine Kette abgebildet werden.
Es gibt also nur die beiden Fälle, dass diese Gerade auf einen Punkt oder eine affine Gerade abgebildet wird.

Wird die affine Gerade $g_{\tau_S} \setminus \{r\}$ auf einen Punkt abgebildet, so muss S' dieser Punkt sein, wegen $\mu(S) = S'$.
Wir nehmen an, dass $r \notin E$ ist. Dann muss aber auch $\Psi(r) = S'$ sein, da sonst das Bild von g_{τ_S} nur aus zwei Punkten bestehen würde, was nicht sein kann, da Ψ ein reichhaltiger, verallgemeinerter Homomorphismus von projektiven Räumen ist.
Dann muss g_{τ_N} auf $N'S'$ abgebildet werden.
Da Ψ eine verallgemeinerte projektive Erweiterung von μ ist, die Punkte auf $g_{\tau_N} \setminus \{r\}$ der Menge P_1 angehören und die einzigen Punkte auf N', die der Menge P_2 angehören die Punkte N' und S' sind und N auf N' abgebildet wird, liegen im Bild von der Geraden g_{τ_N} bezüglich Ψ lediglich zwei Punkte, was aber wegen der Reichhaltigkeit von Ψ nicht sein kann.
Somit ist $r \in E$.
Damit werden die Punkte der Geraden (des geschlitzten Raumes) $g_{\tau_N} \setminus \{r\}$ auf N' und $g_{\tau_S} \setminus \{r\}$ auf S', sowie sämtliche Geraden mit Schnittpunkt r auf einen Punkt abgebildet. Es wird demnach auch p auf $S' \in \tau_{S'}$ abgebildet. Alle weiteren Geraden von pNS sind Sekanten, da diese τ_N und τ_S in jeweils einen von r verschiedenen Punkt von P_1 schneiden.
Da diese beiden Punkte von P_1 distant sind und man zu zwei distanten Punkten einen dritten Punkt aus P_1 finden kann, der zu beiden distant ist, da unser Distantzraum stabil ist (wegen der Möglichkeit der Darstellung mittels eines Jordan-Systems), finden wir eine Ebene, die F_{Q_1} in einer Kette schneidet und die Sekante enthält. Für solche Ebenen haben wir aber schon gezeigt, dass Ψ Geraden bijektiv auf Geraden abbildet.
Damit bildet Ψ in diesem Fall alle Geraden aus pNS auf Punkte oder bijektiv auf Geraden ab.
Gehen wir nun von dem Fall aus, dass $g_{\tau_S} \setminus \{r\}$ nicht auf einen Punkt abgebildet wird, so muss diese affine Gerade bijektiv auf eine affine Gerade von $\tau_{S'}$, welche sich in $\Sigma_{N'}$ befindet, abgebildet werden.
Dann kann natürlich nicht $r \in E$ sein, da diese Gerade sonst auf einen Punkt abgebildet werden würde.
Da $p \in g_{\tau_S} \setminus \{r\}$ wird p auf einen Punkt $p' \in \tau_{S'}$ abgebildet.
Da $\mu(S) = S'$, wird die Gerade g_{τ_S} auf die Gerade durch $S'p'$ abgebildet.
Betrachten wir die Ebene $p'N'S'$ und die Gerade $g_{\tau_{N'}} := \tau_{N'} \cap p'N'S'$.
Dann muss r auf den Schnittpunkt $r' := S'p' \cap g_{\tau_{N'}}$ abgebildet werden, denn würde r auf einen Punkt $q \in S'p' \setminus \{r'\}$ abgebildet werden, dann

würde Nr auf die Sekante $N'q$ abgebildet werden. Da sämtliche Punkte von $Nr \setminus \{r\}$ aus P_1 stammen, können diese nur auf die Punkte N' oder q von $N'q$ abgebildet werden. Da N auf N' und r auf q abgebildet werden, besteht das Bild von Nr bezüglich Ψ aus den beiden Punkten N' und q, was wegen der Reichhaltigkeit von Ψ nicht sein kann.
Damit wird die Gerade g_{τ_S} bijektiv auf die Gerade $N'q$ abgebildet.
Da die restlichen Geraden durch S in der Ebene pNS Sekanten sind und diese auch entsprechend bijektiv auf Sekanten abgebildet werden, da sich alle Sekanten in Ebenen befinden, die eine Kette enthalten und man eine Sekante in pNS finden kann, die S nicht enthält (zum Beispiel pN) und somit alle Sekanten durch S in genau einen Punkt schneidet, folgt daraus, dass alle Geraden von pNS bijektiv auf Geraden abgebildet werden.
Damit haben wir gezeigt, dass in jedem Fall in der Ebene pNS die Menge $g_{\tau_S} \setminus \tau_N$ in die Menge $\tau_{S'}$ abgebildet wird.
Da die Stereographischen Projektionen (sowie deren Umkehrungen) Punkte, die sowohl in $\tau_S \setminus \tau_N$ als auch in Σ_N, liegen identisch abbildet (entsprechendes gilt für $\tau_{S'} \setminus \tau_{N'}$ und $\Sigma_{N'}$), ist auch in diesem Fall die Kompatibilität mit der stereographischen Projektion gegeben.
Es gilt also in jedem Fall $(\zeta')^{-1} \circ \mu \circ \zeta(p) = \Psi(p) \in \tau_{S'} \setminus \tau_{N'}$ für alle $p \in \tau_S \setminus \tau_N$.
Da μ nicht von der Wahl des Nord- und Südpols N und S abhängig ist, haben wir gezeigt, dass sämtliche (möglicherweise durch die Menge E geschlitzte) Geraden, welche Teilmenge einer Ebene sind, die Sekanten enthält, durch Ψ auf Punkte oder bijektiv auf Geraden abgebildet werden.
Für welche Geraden g müssen wir nun noch die Eigenschaft nachweisen, dass Ψ diese auf einen Punkt oder bijektiv auf eine Gerade abbildet?
Um diese Frage zu beantworten machen wir eine Fallunterscheidung für g.
Falls g den Tangentialraum τ_S in genau einem Punkt schneidet, so ist g entweder selber eine Sekante, oder es liegen Punkte auf g, deren Verbindungsgerade mit S eine Sekante ist. Im letzteren Fall wäre dann $< g \cup \{S\} >$ eine Ebene, die Sekanten enthält.
Liegt g in τ_S, nicht aber in τ_N, so gibt es offenbar Sekanten in der Ebene $< g \cup \{N\} >$.
Das bedeutet, dass die verbleibenden Geraden, die wir noch betrachten müssen, in $\tau_N \cap \tau_S$ liegt.
Um zu zeigen, dass auch in diesen Fall die Gerade g durch Ψ auf einen Punkt oder bijektiv auf eine Gerade abgebildet wird, betrachten wir die Ebene $\epsilon :=< g \cup \{S\} >$.

Dann ist $\epsilon_{aff} := \epsilon \setminus g$ eine affine Ebene und $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ ein Homomorphismus von der affinen Ebene ϵ_{aff} in den affinen Raum $\tau_{S'} \setminus \tau_{N'}$.
Wir können diese Ebene als Teilmenge von U_1 mit $0 = S \in \epsilon_{aff}$ auffassen. Entsprechend identifizieren wir, wie oben, den Bildraum $\tau_{S'} \setminus \tau_{N'}$ mit U_2. $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ lässt sich dann, als Homomorphismus von affinen Koordinatenräumen zerlegen in eine Parallelprojektion auf einem zum Kern der Abbildung $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ komplementären Vektorraum und eine anschließende Injektion in den Raum U_2.
Offenbar gibt es drei Fälle.
Die affine Ebene ϵ_{aff} wird durch $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ Bijektiv auf eine affine Ebene von U_2 abgebildet (der Kern von $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ hat die Dimension 0).
Die affine Ebene ϵ_{aff} wird durch $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ auf eine Gerade von U_2 abgebildet (der Kern von $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ ist eindimensional).
Die affine Ebene ϵ_{aff} wird durch $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ auf einen Punkt abgebildet (der Kern von $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ ist zweidimensional).
Wird die affine Ebene ϵ_{aff} bijektiv auf eine affine Ebene abgebildet, so kann kein Punkt von g der Menge E angehören. Sei $p \in g$ ein Punkt, dann entsprechen sämtliche von g verschiedene Geraden durch p in ϵ genau einer Richtung in ϵ_{aff} (g ist die Ferngerade von ϵ_{aff}). Da keine dieser affinen Geraden auf einen Punkt abgebildet werden, kann p kein Element von E sein.
Sei ϵ'_{aff} das Bild der affinen Ebene ϵ_{aff} bezüglich $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$. Dann schneidet $< \epsilon'_{aff} >$ den Tangentialraum $\tau_{N'}$ in einer Geraden g'.
Diese ist dann wie g in ϵ_{aff} die Ferngerade von ϵ'_{aff}.
Da die Parallelklassen durch $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ bijektiv auf die Parallelklassen von ϵ'_{aff} abgebildet werden und alle Punkte von g, bzw. g' Schnittpunkte der in den affinen Ebenen paralleler Geraden sind, wird g offenbar bijektiv auf g abgebildet.
Wir gehen nun davon aus, dass die Ebene ϵ_{aff} auf eine Gerade abgebildet wird, d.h. genau eine Richtung dem Kern von $\Psi\mid_{\epsilon_{aff}}$ angehört.
Sei $p \in g$ der Punkt auf der Ferngerade g in dem diese Richtung g im projektiven schneidet. Dann muss p der Menge E angehören.
Wäre $p \notin E$, so werden sämtliche Punkte der Richtung $pS \setminus \{p\}$ auf S abgebildet. p wird aber, wie bei den obigen Fällen, in denen wir Ebenen untersucht haben, die Sekanten enthalten (NSp ist beispielsweise eine solche Ebene) in die Menge $\tau_N \cap \tau_S$ abgebildet. Dann wäre aber das Bild von pS unter Ψ zweielementig, was wegen der Reichhaltigkeit von Ψ nicht sein kann.
Da nur die Geraden einer Richtung auf einen Punkt abgebildet werden, liegen die restlichen Punkte von g nicht in E.
Da die Gerade g die Menge E schneidet, werden sämtliche Punkte von

g auf einen Punkt abgebildet.
Falls die affine Ebene ϵ_{aff} auf einen Punkt abgebildet wird, so werden alle Richtungen von ϵ_{aff} auf einen Punkt abgebildet.
Man stellt analog zum obigen Fall fest, dass alle Punkte von g der Menge E angehören, die geschlitzte Menge $g \setminus E$ ist also keine Gerade des durch E geschlitzten Raumes.
Damit haben wir nun gezeigt, dass sämtliche Geraden des Geschlitzten Raumes $(V_1)^\Pi \setminus E$ bijektiv auf Geraden oder Punkte abgebildet werden.
Da $< E > \neq (V_1)^\Pi$ folgt aus Satz 1.1.5, dass Ψ ein Homomorphismus von projektiven Räumen ist. □

Da, wenn überhaupt, nur starke Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken projektive Erweiterungen gestatten, gehen wir nun davon aus, dass μ ein starker, nicht-trivialer Morphismus von Kettengeometrien über Quadriken ist.

Wir möchten nun zeigen, dass die Abbildung $\phi : U_1 \to U_2$ ein Morphismus von metrischen Vektorräumen ist.
Hierzu benötigen wir, dass die Kreise in U_1 mittels der stereographischen Projektione gewisse Entsprechungen im Residuum von N haben:
Durch drei nicht-kollineare Punkte $a_1, a_2, a_3 \in U_1$ geht genau ein Q_{U_1}-Kreis $m = k(a_1, a_2, a_3)$. Es ist $\zeta(m) = (\epsilon \cap F_{Q_1}) \setminus \tau_N$, wobei
$\epsilon =< \zeta(a_1), \zeta(a_2), \zeta(a_3) >$.
Sind $\zeta(a_1), \zeta(a_2), \zeta(a_2)$ paarweise distant, so ist $\epsilon \cap F_{Q_1}$ eine Kette und $k(a_1, a_2, a_3)$ ein Kreis der keine Gerade enthält. Ist $\epsilon \cap F_{Q_1}$ ein Geradenkreuz, so ist $k(a_1, a_2, a_3)$ ein Geradenkreuz oder zwei parallele Geraden (tritt im Fall ein, dass der Schnittpunkt vom Geradenkreuz in τ_N liegt)
Ist $\epsilon \cap F_{Q_1}$ ein Unterraum, so ist $\epsilon \cap F_{Q_1} = \epsilon$ eine Ebene.
Man sieht leicht, dass $\zeta^{-1}(\epsilon)$ dann auch eine Ebene ist.
Zum Nachweis dieser Identifikation verweisen wir auf (10.22) 4) und 5) in [32].

Bevor wir zeigen, dass ϕ ein Morphismus von metrischen Vektorräumen ist, benötigen wir noch einen Hilfssatz.

Satz 3.1.3. *Im Bild von ϕ befinden sich zwei reguläre Richtungen.*

Beweis. Wir betrachten die im Beweis von Satz 3.1.1 betrachtete Abbildung ϕ'.
Nach Lemma 3.4 in [5] wird durch ϕ' nicht die gesamte Punktmenge von $\Sigma_{R_1(1,0)}$ auf eine Gerade abgebildet. Der Bildraum ist also mindestens zweidimensional.

Damit ist auch der Bildraum von $\phi = ((\zeta')^{-1} \circ (\zeta_2) |_{\Sigma_{R_2(1,0)}}) \circ \phi' \circ (\zeta_1 \circ \zeta)$ wenigstens zweidimensional (beachte, dass die Abbildungen $((\zeta')^{-1} \circ (\zeta_2) |_{\Sigma_{R_2(1,0)}})$ und $(\zeta_1 \circ \zeta)$ Isomorphismen sind).
Dass im Bild von ϕ tatsächlich zwei verschiedene reguläre Richtungen liegen, sieht man wie folgt:
Wir fassen ϕ als Abbildung von $\tau_S \setminus \tau_N$ nach $\tau_{S'} \setminus \tau_{N'}$ auf. Sei C eine Kette durch N und S. Dann entspricht $C \setminus \{N\}$ einer Geraden in Σ_N. Diese Gerade entspricht wiederum einer Geraden g in $\tau_S \setminus \tau_N$ (betrachte $< C > \cap \tau_S \setminus \tau_N$).
Dann wird C durch μ auf eine Kette C' durch N' und S' abgebildet und die Gerade g wird entsprechend durch ϕ auf $g' :=< C' > \cap \tau_S \setminus \tau_N$ abgebildet.
Da, wie oben gezeigt, das Bild von ϕ wenigstens zweidimensional ist, gibt es einen Punkt $p \in \tau_S \setminus \tau_N$, der durch ϕ auf einen Punkt $p' \in \tau_S \setminus \tau_{N'}$ abgebildet wird, der nicht auf g' liegt.
Dann liegt die Ebene $\epsilon :=< g' \cup \{p'\} >$ im Bild von ϕ.
Wir betrachten $< C' \cup \{p'\} >$.
Der Schnitt der Quadrik F_{Q_2} mit diesem Unterraum ist, da dieser die Kette C' enthält, entweder ein Ovoid, ein Kegel oder ein Hyperboloid. In jedem Fall finden wir neben der Kette C' noch eine weitere Kette durch N' und S', nennen wir sie $\tilde{C}'$.
Dann ist $< \tilde{C}' > \cap \tau_{S'} \setminus \tau_{N'}$ eine von g' verschiedene, reguläre Richtung. Da μ ein starker Morphismus ist, sind sogar die Urbilder dieser beiden regulären Richtungen regulär. □

Jetzt können wir zeigen, dass ϕ ein Morphismus von metrischen Vektorräumen ist.

Satz 3.1.4. *Die Abbildung $\phi : U_1 \to U_2$ ist ein Morphismus von metrischen Vektorräumen.*

Beweis. Nach dem Satz 3.1.3 gibt es zwei reguläre, linear unabhängige Vektoren $v, u \in U_1$ mit $\phi(v), \phi(u)$ regulär und linear unabhängig. Andererseits ist ϕ sogar ein Homomorphismus von affinen Räumen, d.h. ϕ ist semilinear und zerlegbar in eine Parallelprojektion π und einen Isomorphismus.
Sei B_{ker} eine Basis von $ker(\phi)$. Es ist $u \notin Span(B_{ker} \cup v)$, da sonst $\alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_n k_n + \alpha v = u$ bedeuten würde, dass $\pi(u) = \alpha v$, also $\phi(\alpha u) = \sigma(\alpha)\phi(u)$. Damit wären $\phi(v)$ und $\phi(u)$ linear abhängig.
Wir bauen $B_{ker} \cup \{u, v\}$ zu einer Basis B von U aus. Dann ist $B \setminus B_{ker}$ eine Basis von einem Unterraum W von U und $\phi |_W$ injektiv.
Wir zeigen, dass $\phi |_W$ Kreise auf Kreise abbildet. Dann können wir den

Fundamentalsatz der affin-metrischen Geometrie auf $\phi\mid_W$ anwenden.
Sei $m = k(a_1, a_2, a_3)$ ein Kreis, $\epsilon = \zeta(a_1)\zeta(a_2)\zeta(a_3)$ die entsprechende Ebene, $\phi(a_1) =: a_1', \phi(a_2) =: a_2', \phi(a_3) =: a_3'$.
Ist $\epsilon \cap F_{Q_1}$ eine Kette, so wird $\epsilon \cap F_{Q_1}$ bijektiv auf die Kette $\epsilon' \cap F_{Q_2}$ mit $\epsilon' =< \zeta(a_1'), \zeta(a_2'), \zeta(a_3') >$ abgebildet. Da μ stark ist, werden gerade die Elemente aus $(\epsilon \cap F_{Q_1}) \cap \tau_N$ auf Elemente aus $(\epsilon' \cap F_{Q_2}) \cap \tau_{N'}$ abgebildet (man beachte, dass μ ein starker Morphismus ist und, dass μ Ketten auf Ketten abbildet).
Die Menge $(\epsilon \cap F_{Q_1}) \setminus \tau_N$ wird bijektiv auf $(\epsilon' \cap F_{Q_2}) \setminus \tau_{N'}$ abgebildet, was dem Kreis durch a_1', a_2', a_3' entspricht.
Ist $k(a_1, a_2, a_3)$ eine Ebene, so sind $\zeta(a_1), \zeta(a_2), \zeta(a_3)$ paarweise nicht distant. Dann sind es $\zeta'(a_1'), \zeta'(a_2'), \zeta'(a_3')$ auch nicht. Da ϕ ein Homomorphismus ist, wird die Ebene $k(a_1, a_2, a_3)$ auf die Ebene $k(a_1', a_2', a_3')$ abgebildet.
Ist $k(a_1, a_2, a_3)$ ein Geradenkreuz, so wird dieses auf ein Geradenkreuz durch die Punkte a_1', a_2' und a_3' abgebildet.
Da μ die Distanzrelation (und damit auch die Nichtdistanz) beidseitig erhält, bildet auch $\phi\mid_W^{-1}$ die bislang behandelten Kreistypen entsprechend ab.
Sei jetzt $k(a_1, a_2, a_3)$ zwei parallele Geraden. Nach Ausschlussverfahren muss $m' = k(a_1', a_2', a_3')$ zwei parallele Geraden sein, da sonst $k(a_1, a_2, a_3)$ ein regulärer Kreis, eine Ebene oder ein Geradenkreuz wäre.
Da ϕ ein Homomorphismus von affinen Räumen ist, werden die zwei parallelen Geraden durch die Punkte a_1, a_2 und a_3 auf zwei parallele Geraden durch die Punkte a_1', a_2' und a_3' abgebildet.
Nach dem Fundamentalsatz affin-metrischer Geometrien (siehe Satz 1.2.12) gibt es ein $\lambda \in K_2^*$ mit $\sigma(Q_1(w)) = \lambda Q_2(\phi(w))$ für alle $w \in W$.
Sei nun $r \notin W$.
Dann gibt es wie im Beweis von Satz 1.3.6 zwei Möglichkeiten, nämlich $r \in Span(B_{ker} \cup \{v\})$ oder nicht.
Falls dem so ist, bauen wir $B_{ker} \cup \{u\}$ zu einer Basis von U aus. Falls nicht, machen wir es mit $B_{ker} \cup \{v\}$.
Sei oBdA B die ausgebaute Basis von U mit $r, v \in B$ und $W' := Span(B \setminus B_{ker})$.
$\phi\mid_{W'}$ bildet ebenfalls Kreise auf Kreise ab, sodass wir mittels des Fundamentalsatzes der affin-metrischen Geometrie ein $\lambda' \in K_2^*$ mit $\sigma(Q_1(w)) = \lambda' Q_2(w)$ für alle $w \in W'$ erhalten.
Für v gilt nun $\sigma(Q_1(v)) = \lambda Q_2(\phi(v)) = \lambda' Q_2(\phi(v))$, also $\lambda = \lambda'$.
Damit ist ϕ ein Morphismus von metrischen Vektoräumen. $\square$

$\square$

Nun können wir unsere projektive Erweiterung von μ definieren.
Wir setzen:

$$\Psi_N : V_1 \to V_2, X + \alpha s + \beta n \mapsto \phi(X) + \sigma(\alpha)s' + \lambda^{-1}\sigma(\beta)n'$$

Man rechnet leicht nach, dass Ψ_N ein Morphismus von metrischen Vektorräumen ist (beachte, dass $Q_1(X + \alpha s + \beta n) = Q_1(X) - \alpha\beta$).
Mit $\bar{\Psi_N}$ bezeichnen wir den durch den Vektorraumhomomorphismus induzierten Homomorphismus der projektiven Räume $\Pi(V_1, K_1)$ und $\Pi(V_2, K_2)$.
Es wird sich herausstellen, dass $\bar{\Psi_N}$ eine projektive Erweiterung von μ ist.

Analog erhält man eine Abbildung Ψ_S indem man die stereographische Projektion mit Nordpol S und Südpol N betrachtet:
Bezeichnen wir mit $\tilde{\zeta}$ die Abbildung, die jeden Punkt p von $\tau_N \setminus \tau_S$ auf den Schnittpunkt $pS \cap \Sigma_S$ abbildet und sei $\tilde{\zeta}'$ entsprechend für N' und S' definiert.
Dann können wir, analog zu ϕ, nachweisen, dass die Abbildung $\tilde{\phi} := (\tilde{\zeta}')^{-1} \circ \mu \circ \tilde{\zeta}$ ein Morphismus der metrischen Vektorräume U_1 und U_2 ist mit Begleitisomorphismus $\tilde{\sigma}$.
Wir setzen dann:

$$\Psi_S : V_1 \to V_2, X + \alpha s + \beta n \mapsto \tilde{\phi}(X) + \tilde{\sigma}(\alpha)s' + \lambda^{-1}\tilde{\sigma}(\beta)n'$$

Dies ist natürlich ebenfalls ein Morphismus von metrischen Vektorräumen.
Analog zu $\bar{\Psi_N}$ bezeichnet $\bar{\Psi_S}$ den durch Ψ_S induzierten projektiven Homomorphismus.

Bevor wir zeigen können, dass $\bar{\Psi_N}$ eine projektive Erweiterung von μ ist, benötigen wir einen weiteren Hilfssatz.

Satz 3.1.5. *Sei $U < V$ ein Untervektorraum, $dim(U) \geq 4$. Wir setzen $Q_U := Q \mid_U$ und $M := F_{Q_U} \setminus (\tau_N \cup \tau_S)$.*
Die Quadrik F_{Q_U} enthalte wenigstens eine Kette.
Sei η eine Kollineation von $\Pi(U, K_1)$ mit $\eta(X) = X$ für alle $X \in M \cup \{S, N\}$.
Dann ist $\eta = id_{(U)^\Pi}$.

Beweis. Man siehe den Beweis von Lemma (10.24) in [32]. □

Satz 3.1.6. *Die Abbildung $\bar{\Psi_N}$ ist eine projektive Erweiterung von μ.*

Beweis. Wir möchten nun zeigen, dass $\bar{\Psi_N}$ eine projektive Erweiterung von μ ist.
$\bar{\Psi_N}$ stimmt offenbar mit μ auf $P_1 \setminus \tau_N$ überein, da Ψ_N entsprechend mittels ϕ definiert wurde. Analog stimmt $\bar{\Psi_S}$ mit μ auf $P_1 \setminus \tau_S$ überein und insgesamt stimmen $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ mit μ auf $P_1 \setminus (\tau_N \cup \tau_S)$ überein.
Wir möchten nun zeigen, dass $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ mit μ auch auf $P_1 \cap \tau_N \cap \tau_S$ übereinstimmen.
Sei dazu $p \in P_1 \cap \tau_N \cap \tau_S$, g_N die Gerade durch p und N, g_S die Gerade durch p und S. Wir betrachten eine beliebige Kette C durch N und S, sowie den durch die Kette und p aufgespannten, dreidimensionalen Teilraum U_p.
Eingeschränkt auf U_p ist die Quadrik ein Kegel mit Spitze p oder ein Hyperboloid.
Der Schnitt dieses Kegels bzw. Hyperboloids mit der Ebene durch pNS ist auf jeden Fall ein Geradenkreuz mit Schnittpunkt in p.
Wir zeigen, dass sowohl $\bar{\Psi_N}$ als auch $\bar{\Psi_S}$ in jedem dieser beiden Fälle das Geradenkreuz auf das selbe Geradenkreuz (und damit auch p auf den selben Schnittpunkt) abbilden.
Falls die Quadrik in U_p ein Kegel ist, so muss p die Spitze des Kegel sein. Betrachten wir einen von N und S verschiedenen Punkt a auf der Kette C, so ist pa eine Tangente. Alle Punkte auf dieser Tangente (außer p) sind zu N und S distant.
Wir finden also einen von a verschiedenen Punkt q auf dieser Tangenten, der sowohl zu N, als auch zu S distant ist. Dieser Punkt wird durch $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ auf dem selben Punkt abgebildet, da dieser nicht in den Tangentialräumen von N und S liegt. Da $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ die Kette C auf die selbe Kette abbilden und U_p keinen Radikalpunkt enthält, bilden diese beiden Abbildungen den dreidimensionalen Raum $U_p =< C \cup \{q\} >$ bijektiv auf den selben Teilraum in $\Pi(V_2, K_2)$ ab. Die in diesem Teilraum enthaltende Quadrik muss wieder ein Kegel sein, da $\bar{\Psi_N}$ (und natürlich auch $\bar{\Psi_S}$) durch einen Morphismus von metrischen Vektorräumen induziert ist.
Da $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ den Punkt N auf N' und den Punkt S auf S' abbilden, bilden diese beiden Abbildungen das auf dem Kegel in U_p liegende Geradenkreuz $Np \cup Sp$ auf das eindeutige, auf dem Kegel im Bildraum von U_p liegende Geradenkreuz durch N' und S' ab.
Nennen wir den Schnittpunkt p'. Dann wird offenbar p durch $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ auf p' abgebildet.
Falls die in U_p enthaltende Quadrik ein Hyperboloid ist, so betrachten wir wieder einen von N und S verschiedenen Punkt a auf C. Durch

diesen Punkt gehen zwei Tangenten g_1 und g_2, die jeweils einem Regulus von dem Hyperboloid angehören.
Durch N und S gehen ebenfalls zwei Tangenten (eine Tangente von N ist die Gerade Np und eine von S ist die Gerade Sp) die jeweils einer der beiden Reguli angehören.
Da nur eine der beiden Tangenten von N und entsprechend von S die Gerade g_1 in einem von a verschiedenen Punkt schneidet findet man auf g_1 einen Punkt $q_1 \neq a$, der sowohl zu N, als auch zu S distant ist. Ebenso findet man einen Punkt $q_2 \neq a$ auf g_2, welcher distant zu N und S ist.
Damit bilden, wie im Fall eines Kegel oben, die Abbildungen $\bar{\Psi}_N$ und $\bar{\Psi}_S$ den Raum U_p bijektiv auf den selben dreidimensionalen Raum in $\Pi(V_2, K_2)$ ab (man beachte, dass ein Hyperboloid keinen Radikalpunkt enthält).
Die Quadrik im Bildraum ist ebenfalls ein Hyperboloid, da $\bar{\Psi}_N$ (und entsprechend $\bar{\Psi}_S$) durch Morphismen von metrischen Vektorräumen induziert wurden und demnach die Distanzrelation in beide Richtungen erhalten.
Ebenso bilden $\bar{\Psi}_N$ und $\bar{\Psi}_S$ die Gerade $g_1 = aq_1$ und $g_2 = aq_2$ auf die selbe Gerade ab, da die Punkte a, q_1 und q_2 sowohl zu N, also auch zu S distant sind.
Damit bilden $\bar{\Psi}_N$ und $\bar{\Psi}_S$ entsprechend die Reguli des Hyperboloid in U_1 jeweils auf die selben Reguli des Hyperboloid im Bildraum ab.
Damit wird das Geradenkreuz $Np \cup Sp$ auch in diesen Fall durch $\bar{\Psi}_N$ und $\bar{\Psi}_S$ auf das selbe Geradenkreuz im Bildraum abgebildet, sowie der Schnittpunkt p auf dem Schnittpunkt des Geradenkreuzes im Bildraum (bezeichnen wir diesen Schnittpunkt weiterhin mit p').
Setzen wir $g_N := Np$ und $g_S := Sp$.
Da wir $\mid K_1 \mid \geq 5$ vorausgesetzt haben, findet man jeweils zwei verschiedene Punkte $p_{1N}, p_{2N} \in g_N \setminus \{N, p\}$ und $p_{1S}, p_{2S} \in g_S \setminus \{S, p\}$.
Aus der Sicht von $\bar{\Psi}_N$ wissen wir, dass μ bis auf den Punkt p die Gerade g_S auf die Gerade $g'_S := \bar{\Psi}_N(p_{1S})\bar{\Psi}_N(p_{2S})$ abbildet. Für p ist es noch nicht klar, ob $\mu(p) = \Psi_N(p)$ gilt.
Analoges gilt für g_N und $\bar{\Psi}_S$ (nennen wir die Bildgerade entsprechend g'_N).
Da p kein Radikalpunkt ist, liegt p auf mindestens einer Kette. Sei d ein auf einer beliebigen Kette durch p liegender, von p verschiedener Punkt. Wir können d als Nordpol und p als Südpol betrachten. Dann liegt das oben betrachtete Geradenkreuz im Tangentialraum τ_p und wird durch die durch d und p induzierte Stereographische Projektion auf ein Geradenkreuz abgebildet.
Dieses Geradenkreuz muss jenes durch g'_N und g'_S sein. Damit muss

aber μ auch p auf p' abbilden.
Damit stimmen $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ mit μ auf $P_1 \cap \tau_N \cap \tau_S$ überein.
Um den Rest zu zeigen, zeigen wir, dass $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ den selben Kern und das selbe Bild besitzen.
Dazu betrachten wir $p \in (V_{Q_1}^{\perp})^{\Pi}$. Sei U_p wieder der durch p und einer beliebigen Kette durch NS aufgespannten dreidimensionalen Raum. Dieser ist wieder ein Kegel mit Spitze p. Wir finden auch einen einfachen Punkt $d \in U_p$, welcher nicht auf der Kette durch NS liegt und welcher distant zu N und S ist (man betrachte einen Punkt auf der Kette durch NS ungleich N, S und wähle einen Punkt auf der Geraden durch p und diesen Punkt, welcher von diesen beiden Punkten verschieden ist).
$\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ stimmen mit μ in d überein. Bildet μ den Punkt d auf einen auf der Bildkette durch $N'S'$ gelegenen Punkt ab, so wird U_p sowohl durch $\bar{\Psi_N}$ als auch durch $\bar{\Psi_S}$ auf die Ebene durch die Bildkette von NS abgebildet, dann liegt p sowohl im Kern von $\bar{\Psi_N}$ als auch im Kern von $\bar{\Psi_S}$. Falls nicht, wird der Raum U_p bijektiv auf einen dreidimensionalen Raum sowohl durch $\bar{\Psi_N}$ als auch durch $\bar{\Psi_S}$ abgebildet.
Dann liegt p weder im Kern von $\bar{\Psi_N}$ noch im Kern von $\bar{\Psi_S}$.
Somit stimmen die Kerne von $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ überein.
Wir betrachten nun einen beliebigen, N und S umfassenden, zu $ker(\bar{\Psi_N}) = ker(\bar{\Psi_S})$ komplementären Unterraum W (kann man konstruieren, indem man wieder entsprechende Basen ausbaut).
Dann sind $\bar{\Psi_N} \mid_W$ und $\bar{\Psi_S} \mid_W$ bijektiv.
Nach Satz 1.2.7 hat W eine Basis aus einfachen Punkten. Sei B eine solche Basis. Wir betrachten wieder eine beliebige Kette durch NS in W.
Sei $b \in B$. Falls b nicht auf der Kette liegt, so ist die Quadrik des durch die Kette durch NS (nennen wir sie K) und dem Punkt b aufgespannten, dreidimensionalen projektiven Raumes ein Ovoid, eine Kegel oder ein Hyperboloid.
(Wir bezeichnen mit $<>$ die lineare Hülle in $\Pi(V_1, K_1), \Pi(V_2, K_2)$ in der Hoffnung, dass keine Verwechslungsgefahr besteht.)
In jedem Fall kann man ein d auf der Quadrik finden, welches zu N und S distant ist. Dann gilt offenbar:
$< \bar{\Psi_N}(\{b\} \cup K) >= \bar{\Psi_N}(< \{b\} \cup K >) = \bar{\Psi_N}(< \{d\} \cup K >) =$
$< \bar{\Psi_N}(\{d\} \cup K) >=< \bar{\Psi_S}(\{d\} \cup K) >=$
$\bar{\Psi_S}(< \{d\} \cup K >) = \bar{\Psi_S}(< \{b\} \cup K >)$, da W ein Austauschraum ist.
Es ist dann $Bild(\bar{\Psi_N}) = \bar{\Psi_N}(< B \cup K >) = \bar{\Psi_N}(< \cup_{b \in B}(\{b\} \cup K) >) = < \cup_{b \in B} < \bar{\Psi_N}(\{b\} \cup K) >>=< \cup_{b \in B} < \bar{\Psi_S}(\{b\} \cup K) >>= \bar{\Psi_S}(< \cup_{b \in B}(\{b\} \cup K >) = \bar{\Psi_S}(< B \cup K >) = Bild(\bar{\Psi_S})$.

Damit stimmen auch die Bilder von $\bar{\Psi_N}$ und $\bar{\Psi_S}$ überein.
Damit können wir die Bijektion $\bar{\Psi_N}\mid_W^{-1}\circ\bar{\Psi_S}\mid_W: W\to W$ betrachten.
Nach Satz 3.1.5 gilt $\bar{\Psi_N}\mid_W^{-1}\circ\bar{\Psi_S}\mid_W = id_W$, also $\bar{\Psi_N}\mid_W = \bar{\Psi_S}\mid_W$.
Insgesamt haben wir $\bar{\Psi_N} = \bar{\Psi_S}$ gezeigt.
Da $\bar{\Psi_S}$ auf τ_N mit μ übereinstimmt, ist insgesamt $\bar{\Psi_N} = \bar{\Psi_S}$ eine projektive Erweiterung von μ.

□

Abschließend zeigen wir noch, dass die projektive Erweiterung $\bar{\Psi_N}$ die eindeutige projektive Erweiterung von μ ist.

Satz 3.1.7. *Die projektive Erweiterung $\bar{\Psi_N}$ ist eindeutig bestimmt. Der Morphismus μ besitzt also eine eindeutige projektive Erweiterung.*

Beweis. Um die Eindeutigkeit einer projektiven Erweiterung von μ zu zeigen, sei $\bar{\Psi}$ eine weitere projektive Erweiterung, induziert durch den Morphismus von metrischen Vektorräumen Ψ mit Begleitisomorphismus σ'.
Der Punkt $v+\alpha n+\beta s$ wird also abgebildet auf $K_1\Psi(v+\alpha n+\beta s) = K_1(\Psi(v)+\sigma'(\alpha)\Psi(n)+\sigma'(\beta)\Psi(s)$.
Für $\Psi(K_1 n) = K_2 n'$, $\Psi(K_1 s) = K_2 s'$ gibt es $\lambda_1,\lambda_2\in K_2$ mit $\Psi(n) = \lambda_1 n', \Psi(s) = \lambda_2 s'$.
Der Punkt wird also abgebildet auf $K_2(\lambda_2^{-1}\Psi(v)+\sigma'(\alpha)\lambda_2^{-1}\lambda_1 n'+\sigma'(\beta)s')$.
Dabei muss offenbar $\lambda_2^{-1}\Psi(v)$ der von μ induzierte Morphismus ϕ affin-Metrischer Räume sein (damit stimmt auch schon der Begleitisomorphismus von Ψ mit dem von Ψ_N überein. Es ist also $\sigma' = \sigma$).
Dieser erfüllt offenbar $\sigma(Q_1(v)) = \lambda Q_2(\Phi(v))$ für ein $\lambda\in K_2$.
Wir betrachten nun einen Punkt $K_1(v+Q_1(v)n+s)$ unserer Kettengeometrie mit $Q_1(v)\neq 0$ (man betrachte z.B. $w_1\in U_1$ mit $Q_1(w_1) = 1$).
Dieser wird durch Ψ abgebildet auf den Punkt der Kettengeometrie $K_2(\phi(v)+\lambda_2^{-1}\lambda_1\sigma(Q_1(v))n'+s')$.
Auf Grund der Eindeutigkeit der Darstellung der Punkte der Kettengeometrie nach Satz 2.2.2 ist $K_2(\phi(v)+\lambda_2^{-1}\lambda_1\sigma(Q_1(v))n'+s') = K_2(\phi(v)+Q_2(\phi(v))n'+s')$. Es ist also $\lambda_2^{-1}\lambda_1\sigma(Q_1(v)) = Q_2(\phi(v)) = \lambda^{-1}\sigma(Q_1(v))$, also $\lambda_2^{-1}\lambda_1 = \lambda^{-1}$ wegen $Q_1(v)\neq 0$.
Damit ist $\Psi = \Psi_N$, also die Eindeutigkeit gezeigt. □

3.2. **Triviale Morphismen.**

Wir wollen nun unsere Aufmerksamkeit den trivialen Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken schenken.
Es sind also wieder (V_1, K_1, Q_1) und (V_2, K_2, Q_2) metrische Vektorräume, welche die Generalvoraussetzung 1.3.1 erfüllen und $\Sigma(Q_1) = (P_1, \mathbf{C}_1)$ und $\Sigma(Q_2) = (P_2, \mathbf{C}_2)$ die entsprechenden Kettenräume.
Wir nehmen $\mid K_1 \mid, \mid K_2 \mid \geq 5$ an.
Ein trivialer Morphismus ist ein Morphismus (erhält also die Distanzrelation), der alle Ketten von $\Sigma(Q_1)$ auf genau eine Kette in $\Sigma(Q_2)$ abbildet.
Da Bilder von Ketten wiederum Ketten sein müssen, werden Ketten bijektiv auf die eine Kette abgebildet.
Betrachten wir also einen beliebigen trivialen Morphismus $\tau : P_1 \to P_2$, der auf eine Kette $C' \in \mathbf{C}_2$ abbildet, so ist $(\tau \mid_C)^{-1}$ für alle Ketten $C \in \mathbf{C}_1$ ein trivialer Morphismus, der von dem Kettenraum, der nur aus C' besteht in den Kettenraum $\Sigma(Q_1)$ abbildet.
$\tau_C := (\tau \mid_C)^{-1} \circ \tau$ ist dann ein trivialer Morphismus von P_1 nach P_1, welcher die Kette C fix lässt.
Aus einem trivialen Morphismus gewinnen wir also stets einen Morphismus, der unsere "Lieblingskette"C fix lässt.
Betrachten wir einen Punkt $p \in C$, so werden durch τ_C genau die Punkte aus P_1 auf p abgebildet, die bei τ auf das selbe Element abgebildet werden, wie p. Die Abbildung τ_C ist also durch τ und C eindeutig bestimmt.
Da τ_C die Distanzrelation erhält, darf τ_C nur solche Punkte auf p abbilden, die mit p auf einer Tangente liegen.
Die Existenz eines Ovoid schliesst die Möglichkeit eines trivialen Morphismus aus. Denn sonst könnten wir eine Kette C in diesem Ovoid, sowie einen Punkt p auf dem Ovoid betrachten, der nicht auf C liegt. Dieser müsste dann durch τ_C auf einen Punkt auf C abgebildet werden, was mangels Tangenten im Ovoid nicht sein kann.
Betrachten wir eine beliebige Kette $C \in \mathbf{C}_1$ und einen Punkt $p \in P_1$, welcher nicht auf C liegt, so können wir uns die Frage stellen auf welche möglichen Punkte in C, die Abbildung τ_C den Punkt p abbilden kann.
Hierzu betrachten wir den dreidimensionalen Unterraum $< \{p\} \cup C >$. Dieser schneidet die Quadrik F_{Q_1} entweder einem Kegel oder einem Hyperboloid.
Im Falle eines Kegels gilt: Ist p nicht die Spitze des Kegels, so gibt es eine eindeutige Tangente, die p und C schneidet. Es gibt also nur einen möglichen Bildpunkt für p auf C.

Falls tatsächlich p die Spitze des Kegels ist, so kann es keinen trivialen Morphismus geben, wie wir später zeigen werden (dies ist neben der Existenz eines Ovoid das einzige Ausschlusskriterium für die Möglichkeit eines von P_1 ausgehenden trivialen Morphismus).
Im Falle eines Hyperboloid gehen durch p genau zwei Tangenten, die im Hyperboloid liegen und C in jeweils einem Punkt schneiden. Diese beiden Tangenten stammen jeweils aus zwei Geradenscharen R_1 und R_2, welche aus windschiefen Geraden bestehen und deren Vereinigung die gesamte Punktmenge des Hyperboloid ist (siehe Satz 1.2.10).
Durch jeden Punkt p gibt es jeweils eindeutige Tangente g_i^p aus $R_i, i = 1,2$ mit eindeutigen Schnittpunkten $g_i^p \cap C$.
Es gibt also zwei mögliche Bildpunkte für p.
Tatsächlich verhält es sich so, dass wenn z.B. p durch τ_C auf $g_1^p \cap C$ abgebildet wird, alle Punkte q des Hyperboloiden auf den entsprechenden Schnittpunkt von C mit der Geraden g_1^q aus R_1 abgebildet werden.
Der triviale Morphismus ist auf dem Hyperboloid betrachtet also eine Projektion entlang einer der beiden Geradenscharen auf C.
Dies werden wir nun beweisen.
Seien p, q zwei verschiedene Punkte des Hyperboloid, die nicht auf C liegen und $\tau_C(p) = C \cap g_1^p =: p'$ und $\tau_C(q) = C \cap g_2^q =: q'$ und sei $g_1^p \in R_1$ und $g_2^q \in R_2$.
Wir behandeln zunächst den Fall, dass p und q distant sind.
Sei $r := g_1^p \cap g_2^q$. Dann ist $r \notin C$, da τ_C die Distanzrelation erhält und $r \neq p, q$.
Der Punkt r wird entweder durch $g_1^r = g_1^p$ (g_1^r ist die Tangente aus R_1 durch r) auf p' abgebildet oder auf q' durch $g_2^r = g_2^q$.
Sagen wir oBdA r wird auf q' abgebildet.
Da auf jeder Geraden wenigstens drei Punkte liegen, finden wir auf $g_2^{p'}$ einen Punkt t, welcher zu p distant ist (die einzigen nicht distanten Punkte auf $g_2^{p'}$ sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit g_1^p).
Da der Kettenraum stabil ist, finden wir eine Kette durch r und t, nennen wir sie C^*.
Wir betrachten nun τ_{C^*}. Wohin bildet diese Abbildung nun p' ab?
Es gibt nur die beiden Möglichkeiten t und r. Der Punkt r kann es nicht sein, da q auf r abgebildet wird und die Bilder von p und q verschieden sind.
Wird p' auf t abgebildet, so wird auch p auf t abgebildet, was aber der Tatsache widerspricht, dass τ_{C^*} die Distanzrelation erhält.
Somit haben wir für diesen Fall einen Widerspruch.
Seien nun p, q nicht distant, also oBdA $g_1^q = g_1^p$.
Sei oBdA $\tau_C(p) = C \cap g_1^p =: p'$ und $\tau_C(q) = C \cap g_2^q =: q'$.

Wir betrachten $g_2^{p'}$. Sämtliche Punkte $t \neq p'$ auf dieser Geraden werden durch τ_C auf $C \cap g_1^t$ abgebildet, da sie zu p distant sind und τ_C die Distanzrelation erhält.
Diese Punkte sind auch zu q distant und da q auf $C \cap g_2^q$ abgebildet wird, sind wir wieder im ersten Fall. $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass es im projektiven Raum von $\Sigma(Q_1)$ keinen dreidimensionalen Unterraum geben kann, in dem die Quadrik ein Kegel mit Spitze, welche nicht im Radikal der Quadrik F_{Q_1} liegt ist und ein von P_1 ausgehender, trivialer Morphismus existiert.
Wir nehmen an, es gäbe einen solchen Unterraum und einen trivialen Morphismus $\tau : P_1 \to P_2$. Sei v die besagte Kegelspitze und C eine Kette im Kegel.
Wir betrachten τ_C. Es muss einen Punkt $p \in C$ geben, mit $\tau_C(v) = p$, d.h. alle Punkte auf der Geraden pv werden auf dem selben Punkt, wie v abgebildet. Betrachten wir nun einen Punkt $q \in C$ mit $p \neq q$, so werden alle Punkte auf $vq \setminus \{v\}$ auf q abgebildet. Da, wegen $\mid K_1 \mid \geq 5$ auf den Geraden mindestens sechs Punkte liegen, finden wir auf vq noch einen Punkt $t \neq q, v$, welcher ebenfalls auf q abgebildet wird.
Da jeder Punkt einer Kettengeometrie auf einer Kette liegt, können wir eine Kette C^* durch v betrachten.
Eine solche Kette ist natürlich nicht im Kegel enthalten, da v die Spitze des Kegels ist. Weiter betrachten wir den dreidimensionalen Raum $< \{q\} \cup C^* >$.
Die Quadrik in diesem Raum kann kein Kegel sein, denn sonst würden q, t und v auf einer Tangenten liegen, also mindestens einer der Punkte q oder t das selbe Bild bezüglich τ_{C^*} und damit auch bezüglich τ wie v besitzen, da mindestens einer dieser Punkte nicht die Spitze des Kegels ist.
Also ist die Quadrik ein Hyperboloid, welcher die Gerade vq enthält.
Die Punkte des Hyperboloid, welche auf dem selben Punkt abgebildet werden werden genau durch einen der beiden Reguli R_1 oder R_2 des Hyperboloid beschrieben, wie wir zuvor gezeigt haben. Da auf vq zwei von q verschiedene Punkte liegen und diese auf dem selben Punkt abgebildet werden, muss die gesamte Gerade vq auf dem selben Punkt abgebildet werden, also auch v und q, was ein Widerspruch ist. $\square$

Für die Klein-Quadrik (siehe Beispiel 1.2.1 (5)) im projektiven Raum $\Pi(K^6, K)$ gibt es nach (4.35)(2) in [9] einen Teilraum, dessen Schnitt mit der Klein-Quadrik ein Kegel ist. Die Spitze dieses Kegels liegt, wegen $(K^6)^\perp = \{0\}$ nicht im Radikal der Quadrik.

Somit kann es keinen von der Klein-Quadrik ausgehenden, trivialen Morphismus geben.

Wir gehen nun davon aus, dass $\Sigma(Q_1)$ weder einen Ovoid, noch einen Kegel bei dem die Spitze kein Radikalpunkt der Quadrik F_{Q_1} ist, enthält und werden einen trivialen Morphismus $\tau : P_1 \to P_1$ konstruieren, der eine Kette festhält.
Sei dazu C eine Kette in $\Sigma(Q_1)$.
Wir betrachten sämtliche Hyperboloide, die C als Kette enthalten.
Unser Ziel ist es, für jeden Hyperboloid durch C einen seiner beiden Reguli festzulegen, um so später einen trivialen Morphismus zu definieren.
Dabei müssen wir geschickt vorgehen, da bei beliebiger Festlegung die Distanzrelation nicht mehr erhalten bleibt.
Wir definieren daher für jedes Paar (H_1, H_2) von Hyperboloiden, die C als Kette enthalten, eine Bijektion $\pi_{(H_1,H_2)} : H_1 \to H_2$ folgendermaßen:
Falls $H_1 = H_2$ setzen wir $\pi_{(H_1,H_2)} := id_{H_1}$.
Falls nicht, so schneiden sich H_1 und H_2 genau in C.
Sei $p \in H_1$ ein Punkt. Falls $p \in C$, so bilden wir p auf p ab. Falls nicht, so betrachten wir den Tangentialraum τ_p von p. Dieser schneidet H_1 in einem Geradenkreuz mit p als Schnittpunkt und schneidet C in zwei Punkten a, b. Da dieser aber auch eine Hyperebene ist, schneidet τ_p den dreidimentionalen Raum, welcher H_2 enthält in einer Ebene, die a, b enthält.
Da eine Ebene die Quadrik in einem Unterraum, einer Kette oder einem Geradenkreuz schneidet, wird H_2 offenbar in einer Kette oder einem Geradenkreuz geschnitten, da der Schnitt die distanten Punkte a und b enthält. Da aber keine Kette C^* im Tangentialraum von p liegen kann, da p sonst die Spitze des in $< C^* \cup \{p\} >$ enthaltenen Kegels wäre, p aber ein einfacher Punkt ist und wir gefordert haben, dass F_{Q_1} keinen Kegel mit Spitze, welche nicht im Radikal von F_{Q_1} liegt enthält, muss H_2 von τ_p in einem Geradenkreuz geschnitten werden. Nennen wir den Schnittpunkt des Geradenkreuzes q.
Dann setzen wir $\pi_{(H_1,H_2)} := q$.

Wir zeigen nun, dass $\pi_{(H_1,H_2)}$ auch bijektiv ist.
Dazu betrachten wir $\pi := \pi_{(H_2,H_1)} \circ \pi_{(H_1,H_2)}$.
Sei $p \in H_1$. Falls $p \in C$, so wird p durch π auf p abgebildet. Falls nicht, so wird p durch $\pi_{(H_1,H_2)}$ auf einem Punkt q, der nicht auf C liegt abgebildet. Es ist also pq eine Tangente. Der Punkt q wird durch $\pi_{(H_2,H_1)}$ auf ein Geradenkreuzschnitt abgebildet, der a, b, p enthält. Dieser Geradenkreuzschnitt ist aber gerade p. Somit ist $\pi = id_{H_1}$, also $\pi_{(H_1,H_2)}$

injektiv und da auch $\pi_{(H_1,H_2)} \circ \pi_{(H_2,H_1)} = id_{H_2}$ ist $\pi_{(H_1,H_2)}$ auch bijektiv.
Ist g eine Gerade, die in H_1 liegt, so ist auch $\pi_{(H_1,H_2)}(g)$ eine Gerade. Denn sei $g \subset H_1$ eine Gerade, $p \in g \setminus C$. Dann schneidet g die Kette C in einem Punkt a. Sei $p' := \pi_{(H_1,H_2)}(p)$. Dann ist der Ebenenschnitt $< p, a, p' >$ mit der gesamten Quadrik kein Geradenkreuz, da p und p' nicht distant sind, sondern die ganze Ebene $< p, a, p' >$. Je zwei Punkte dieser Ebene liegen auf Tangenten. Das heisst, dass q zu sämtlichen Punkten auf $p'a$ nicht distant ist. $\pi_{(H_1,H_2)}(q)$ ist der Schnitt eines Geradenkreuzes, wobei $p'a$ eine der beiden Geraden ist. Also liegt $\pi_{(H_1,H_2)}(q)$ auf der Geraden $p'a$. Da $\pi_{(H_2,H_1)} = \pi^{-1}_{(H_1,H_2)}$ und auch diese Abbildung Geraden in Geraden abbildet, folgt, dass $\pi_{(H_1,H_2)}$ Geraden auf Geraden abbildet.
Offenbar bildet $\pi_{(H_1,H_2)}$ Reguli auf Reguli ab, denn wären etwa g_1, g_2 zwei verschiedene windschiefe Geraden, die dem selben Regulus in H_1 angehören, so bildet $\pi_{(H_1,H_2)}$ diese Geraden auf zwei disjunkte Geraden in H_2 ab, die dem selben Regulus von H_2 angehören, da diese Abbildung bijektiv ist.
Auch können wir einsehen, dass $\pi_{(H_1,H_2)}$ die Distanzrelation erhält.
Sei p ein Punkt von H_1, welcher auf einen Punkt $q = \pi_{(H_1,H_2)}$ in H_2 abgebildet wird. Der Tangentialraum von p schneidet H_1 in einem Geradenkreuz mit Schnittpunkt p und H_2 in einem Geradenkreuz mit Schnittpunkt q. Daraus und aus der Tatsache, dass $\pi_{(H_2,H_1)} = \pi^{-1}_{(H_1,H_2)}$ folgt unmittelbar, dass p zu genau den selben Punkten in H_2 distant ist, wie q und umgekehrt q genau zu den selben Punkten in H_1 distant ist, wie p. Da $\pi_{(H_1,H_2)}$ auch Geraden auf Geraden abbildet, wird das Geradenkreuz durch p auf das von q abgebildet, es werden also genau die nicht-distanten Punkte von p in H_1 auf die zu p und damit auch von q nicht-distanten Punkte in H_2 abgebildet. Daraus folgt für Punkte r in H_1:
Es ist $p \triangle r \iff \pi_{(H_1,H_2)}(p) \triangle \pi_{(H_1,H_2)}(r)$ und $p \triangle r \iff p \triangle \pi_{(H_1,H_2)}(r)$.$\square$

Nun können wir eine Äquivalenzrelation auf den Reguli definieren, die zu Hyperboloide, welche C als Kette enthalten gehören.
Sei $R(H_1)$ ein Regulus von H_1 und $R(H_2)$ einer von H_2 und $\pi_{(H_1,H_2)}(R(H_1)) := \{\pi_{(H_1,H_2)}(g) \mid g \in R(H_1)\}$.
Dann setzen wir $R(H_1) \sim R(H_2)$, falls $\pi_{(H_1,H_2)}(R(H_1)) = R(H_2)$.
Da $\pi_{(H_1,H_1)} = id_{H_1}$ ist $\sim$ reflexiv.
Da $\pi_{(H_2,H_1)} = \pi^{-1}_{(H_1,H_2)}$ und Reguli auf Reguli abbildet, ist $\sim$ auch symmetrisch.
Um die Transitivität zu zeigen, nehmen wir an, $\sim$ sei nicht transitiv.

Dann gibt es drei Hyperboloide H_1, H_2 und H_3, welche C als Kette enthalten, für deren Reguli die Transitivität von $\sim$ wie folgt nicht erfüllt ist:
Seien $R_j^{H_i}$ für $j = 1, 2$ die beiden Reguli von H_i für $i = 1, 2, 3$.
Wir nehmen oBdA an, dass $R_1^{H_1} \sim R_1^{H_2}$ (dann ist natürlich auch $R_2^{H_1} \sim R_2^{H_2}$) und $R_1^{H_2} \sim R_1^{H_3}$ (analog gilt $R_2^{H_2} \sim R_2^{H_3}$), nicht aber $R_1^{H_1} \sim R_1^{H_3}$. Dann muss $R_1^{H_1} \sim R_2^{H_3}$ und $R_2^{H_1} \sim R_1^{H_3}$ gelten.
Wir betrachten zwei verschiedene Punkte a und b auf der Kette C.
In jedem der drei Hyperboloide H_i gibt es zwei Geraden durch a, die jeweils zu einen der beiden Reguli gehören, sagen wir $g_1^i(a) \in R_1^{H_i}$ und $g_2^i(a) \in R_2^{H_i}$. Analog findet man Geraden $g_1^i(b) \in R_1^{H_i}$ und $g_2^i(b) \in R_2^{H_i}$ durch b.
Wir setzen $p_i := g_1^i(a) \cap g_2^i(b)$ und $q_i := g_2^i(a) \cap g_1^i(b)$.
Aus den obigen Bedingungen an $\sim$ folgt, dass $\pi_{(H_1,H_2)}(p_1) = p_2$, $\pi_{(H_1,H_2)}(q_1) = q_2$, sowie $\pi_{(H_2,H_3)}(p_2) = p_3$ und $\pi_{(H_2,H_3)}(q_2) = q_3$, aber $\pi_{(H_1,H_3)}(p_1) = q_3$ und $\pi_{(H_1,H_3)}(q_1) = p_3$ ist.
Da die Projektionen $\pi_{(H_1,H_2)}, \pi_{(H_2,H_3)}$ und $\pi_{(H_1,H_3)}$ die Distanzrelation erhalten, gilt $p_1 \triangle q_2$, $q_2 \triangle p_3$, aber auch $p_1 \triangle p_3$. Damit haben wir drei paarweise distante Punkte p_1, q_2, p_3 durch die eine Kette C^* geht und auf der a nicht liegt, da a zu allen drei Punkten p_1, q_2, p_3 nicht distant ist.
Betrachten wir den dreidimensionalen Raum $< C^* \cup \{a\} >$, so ist die in diesen Raum enthaltende Quadrik offenbar ein Kegel mit Spitze a, also einer Spitze, die nicht im Radikal der Quadrik F_{Q_1} liegt. Damit haben wir einen Widerspruch.
Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, die offenbar sämtliche, zu Hyperboloide durch C gehörige Reguli in zwei Äquivalenzklassen aufteilt. $\square$

Nun können wir einen trivialen Morphismus $\tau : P_1 \to P_1$ auf eine Kette C von $\Sigma(Q_1)$ wie folgt definieren:
Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, werden die Reguli auf den Hyperboloiden, die C enthalten in zwei Klassen aufgeteilt, sagen wir $R_1^{\sim}$ und $R_2^{\sim}$.
Für $p \in C$ setzen wir $\tau(p) := p$.
Für $p \notin C$ betrachten wir den Teilraum $< C \cup \{p\} >$.
Die in diesem Teilraum enthaltende Quadrik ist entweder ein Kegel, deren Spitze im Radikal von F_{Q_1} liegt oder ein Hyperboloid, der C als Kette enthält.
Falls die Quadrik ein Kegel ist, so gibt es eine eindeutige Tangente durch p, die im Kegel liegt und die C in einem Punkt q schneidet.

Dann setzen wir $\tau(p) := q$.
Ist die Quadrik hingegen ein Hyperboloid, so gibt es durch p genau eine Tangente durch p, die einem Regulus der Klasse $R_1^{\sim}$ angehört, sowie einen eindeutigen Schnittpunkt q mit C besitzt. Dann setzen wir $\tau(p) := q$.
Auf diese Weise wird jedem Punkt eindeutig ein Punkt auf C zugewiesen.
Wir möchten nun zeigen, dass τ ein trivialer Morphismus ist.
Dazu zeigen wir zunächst, dass τ die Distanzrelation erhält.
Seien hierzu p und q zwei distante Punkte in P_1.
Liegen p und q beide in C, so werden p auf p und q auf q abgebildet.
Liegt nur einer der Punkte auf C, sagen wir p, so betrachten wir die im Teilraum $< C \cup \{q\} >$ enthaltende Quadrik.
Diese ist entweder ein Kegel oder ein Hyperboloid.
Nach Definition von τ wird q sowohl im Falle eines Kegel, als auch im Falle eines Hyperboloid auf einen Schnitt von C mit einer Tangente durch q abgebildet. Da q zu p distant ist, schneidet die Tangente C nicht in p.
Falls weder p noch q in C liegen, betrachten wir den Teilraum $< \{p\} \cup \{q\} \cup C >$.
Dieser ist entweder dreidimensional oder vierdimensional.
Falls der Teilraum dreidimensional ist, gibt es für die im Teilraum enthaltende Quadrik wieder die beiden Fälle, dass es sich bei der Quadrik um einen Kegel, bzw. einen Hyperboloid handelt.
In beiden Fällen werden sämtliche Punkte mittels τ auf Schnitte von Tangenten durch diese Punkte mit C abgebildet. Da die Tangenten in beiden Fällen eindeutig und disjunkt sind (man beachte, dass beim Kegel die Spitze kein Punkt der Kettengeometrie ist und, dass im Falle eines Hyperboloid die Tangenten aus dem in $R_1^{\sim}$ enthaltenden Regulus stammen müssen), werden p und q auf distante Punkte abgebildet.
Falls der Teilraum vierdimensional ist, so erfüllt die im Teilraum enthaltende Quadrik die Generalvoraussetzung 1.3.1.
Da der Teilraum vierdimensional ist, ist die Dimensionsbedingung in 1.3.1 offenbar erfüllt. Da der Teilraum die Kette C enthält, besitzt die Quadrik auch mindestens eine Sekante.
Die Quadrik ist auch nicht in der Vereinigung zweier Hyperebenen enthalten. Hierzu nehmen wir an, es gäbe zwei Hyperebenen ϵ_1 und ϵ_2 im Teilraum, deren Vereinigung die im Teilraum enthaltende Quadrik enthält.
Dann muss auch die Kette C in dieser Vereinigung enthalten sein.
Falls die Ebene $< C >$ in keiner der beiden Hyperebenen enthalten

ist, so schneiden die Hyperebenen diese Ebene jeweils in einer Geraden. Dann wird aber auch die Kette C nur in höchstens vier Punkten geschnitten. Da wir $\mid K_1 \mid \geq 5$ vorausgesetzt haben, liegen aber mindestens sechs Punkte auf C. Damit wäre aber C nicht in der Vereinigung der beiden Hyperebenen enthalten.

Nehmen wir nun an, dass $< C >$ in einer der beiden Hyperebenen, sagen wir, ϵ_1 enthalten ist, nicht aber in ϵ_2. Die Quadrik besitzt eine Basis aus einfachen Punkten. Damit finden wir einen einfachen Punkt r in ϵ_2, der nicht in ϵ_1 enthalten ist.

Betrachten wir $< C \cup \{r\} >$. Die Hyperebene ϵ_1 schneidet diesen Teilraum nur in $< C >$, da sie sonst den Punkt r enthalten würde. Dann liegen aber die restlichen Punkte der in $< C \cup \{r\} >$ enthaltenden Quadrik in ϵ_2. Diese Punkte reichen aber aus, um den dreidimensionalen Teilraum $< C \cup \{r\} >$ aufzuspannen, denn die in diesen Teilraum enthaltende Quadrik ist entweder ein Hyperboloid oder ein Kegel und man findet offenbar durch drei paarweise verschiedene Punkte a, b und $c \in C$ drei in dieser Quadrik liegenden Tangenten g_a, g_b und g_c mit $g_a \cap C = \{a\}, g_b \cap C = \{b\}$ und $g_c \cap C = \{c\}$, die ausreichen um $< C \cup \{r\} >$ aufzuspannen. Da $g_a, g_b, g_c \subset < (g_a \cup g_b \cup g_c) \setminus C >$ spannen die Punkte, die auf der Quadrik in $< C \cup \{r\} >$, jedoch nicht auf C liegen, diesen Teilraum auf. Da ϵ_2 eine Hyperebene ist, umfasst ϵ_2 diesen Raum und damit widersprüchlicherweise auch C.

Nehmen wir nun an, dass C im Schnitt beider Hyperebenen liegt.

Da die Quadrik in $< \{p\} \cup \{q\} \cup C >$ eine Basis aus einfachen Punkten besitzt, finden wir entsprechende einfache Punkte r und t, wobei $r \in \epsilon_1 \setminus \epsilon_2$ und $s \in \epsilon_2 \setminus \epsilon_1$ liegt.

Dann schneidet die Gerade rt die Hyperebene ϵ_1 genau in r und ϵ_2 genau in t.

Diese Gerade muss eine Sekante sein, denn sonst wäre sie eine Tangente und würde dann Punkte der Quadrik enthalten, die nicht in der Vereinigung der beiden Hyperebenen liegen.

Damit sind r und t distant.

Da die in $< C \cup \{r\} >$, bzw. $< C \cup \{s\} >$ enthaltenden Quadriken entweder Hyperboloide, bzw. Kegel sind gibt es für r und t jeweils höchstens zwei Punkte auf C, zu denen diese beiden Punkte nicht distant sind.Das heisst, dass man einen Punkt auf s auf C findet, zu dem r und t distant sind.

Betrachten wir die Kette C^* durch r, s, t, so ist diese weder in ϵ_1 noch in ϵ_2 enthalten. Damit ergibt sich der selbe Widerspruch wie oben bei dem Fall in dem C nicht in beiden Hyperebenen enthalten war.

Damit haben wir gezeigt, dass die in $< \{p\} \cup \{q\} \cup C >$ enthaltende Quadrik ein Kettenraum ist. Da $\mid K_1 \mid \geq 5$ besteht die Möglichkeit

der Darstellung dieser Kettengeometrie über einer Quadrik mittels eines starken Jordan-Systems. Damit ist dieser Kettenraum im Übrigen auch ein stabiler Kettenraum, woraus folgt, dass wir zu unseren distanten Punkten p und q noch einen dritten Punkt finden, welcher zu beiden Punkten distant ist.
Damit liegt dann eine Kette C' in $< \{p\} \cup \{q\} \cup C >$ auf der die beiden Punkte p und q liegen.
Wir möchten zeigen, dass p und q durch τ auf distante Punkte auf C abgebildet werden. Da die Punkte auf C paarweise distant sind, werden p und q nur in dem Fall, bei dem sie auf das selbe Element in C abgebildet werden nicht auf zwei distante Punkte abgebildet.
Wir nehmen an es gibt einen Punkt $a \in C$ mit $\tau(p) = \tau(q) = a$.
Dann betrachten wir die in $< C' \cup \{a\} >$ enthaltende Quadrik.
Diese kann kein Kegel sein, da sonst a die Spitze des Kegels sein müsste und a ein einfacher Punkt ist.
Damit ist die Quadrik ein Hyperboloid in dem durch a die beiden Tangenten ap und aq gehen.
Betrachten wir nun den dreidimensionalen Unterraum $< C \cup \{p\} >$. Da der Raum $< \{p\} \cup \{q\} \cup C >$ vierdimensional ist, ist $< C \cup \{p\} >$ eine Hyperebene, welcher $< C' \cup \{a\} >$ in einer Ebene ϵ schneidet, da p und q mit C nicht in einem dreidimensionalen Raum liegen. Diese Ebene ϵ enthält die Tangente pa. Damit schneidet ϵ den Hyperboloid in $< C' \cup \{a\} >$ in einem Geradenkreuz, bei dem eine Gerade die Gerade pa ist.
Dann muss die in $< C \cup \{p\} >$ enthaltende Quadrik ebenfalls ein Hyperboloid sein, da sie ebenfalls von ϵ in dem Geradenkreuz geschnitten wird, bei dem der Schnittpunkt ein einfacher Punkt ist, denn der Punkt ist in H enthalten. Dieser Punkt kann also nicht die Spitze eines Kegels sein.
Analog ist die in $< C \cup \{q\} >$ enthaltende Quadrik ein Hyperboloid.
Bezeichnen wir den Hyperboloid in $< C \cup \{p\} >$ mit H_1 und den in $< C \cup \{q\} >$ mit H_2.
Beide Quadriken H_1 und H_2 enthalten die Kette C. Wir können die Projektion $\pi_{(H_1,H_2)}$ betrachten.
Da H_1 die Tangente pa enthält, geht durch a ein Geradenkreuz, welches pa enthält. Analoges gilt für qa.
Nach Konstruktion von τ liegt pa auf einen Regulus der Klasse $R_1^{\sim}$, da $\tau(p) = a$. Entsprechend liegt auch qa auch einen Regulus in $R_1^{\sim}$.
Da aber $\pi_{(H_1,H_2)}$ das Geradenkreuz von a in H_1 auf das in H_2 abbildet und die Distanzrelation erhält und p und q distant sind, können die Reguli denen pa und qa angehören nicht der selben Äquivalenzklasse angehören.

Damit haben wir gezeigt, dass τ die Distanzrelation erhält.
Wir zeigen nun, dass τ Ketten von $\Sigma(Q_1)$ bijektiv auf die Kette C abbildet.
Sei dazu C^* eine Kette von $\Sigma(Q_1)$.
Da τ die Distanzrelation erhält, bildet τ die Kette C^* injektiv in C ab.
Wir betrachten nun ein Element $a \in C$ und wollen ein Urbild auf C^* finden. Falls $C = C^*$, so bildet τ nach Konstruktion a auf a ab.
Falls der Teilraum $< C \cup C^* >$ dreidimensional ist, so geht durch jede Kette in der Quadrik dieses Teilraumes genau eine Tangente (aus $R_1^\sim$ im Falle, dass die Quadrik ein Hyperboloid ist). Somit haben wir ein Urbild von a gefunden, wenn wir den eindeutigen Schnittpunkt von der Tangente durch a mit C^* betrachten.
Falls der Teilraum $< C \cup C^* >$ von einer höheren Dimension als drei ist, betrachten wir die im Teilraum $< C^* \cup \{a\} >$ enthaltende Quadrik.
Falls a auf C^* liegt, wird natürlich a auf a abgebildet.
Falls nicht, so ist der Teilraum $< C^* \cup \{a\} >$ dreidimensional.
Für den Fall, dass die in $< C^* \cup \{a\} >$ enthaltende Quadrik ein Kegel mit Spitze s ist, geht durch a die eindeutige Tangente as, welche C^* in einem Punkt p schneidet.
Der Punkt s liegt nach unseren Voraussetzungen im Radikal der Quadrik von $\Sigma(Q_1)$.
Wir betrachten nun die im Teilraum $< C \cup \{p\} >$ enthaltende Quadrik.
Da diese die Tangente $pa = as$ enthält, also den Radikalpunkt s, muss diese Quadrik ein Kegel sein.
Nach Konstruktion von τ ist $\tau(p) = a$.
Betrachten wir nun den verbleibenden Fall, dass die Quadrik in $< C^* \cup \{a\} >$ ein Hyperboloid ist und oBdA a nicht auf C^* liegt.
Dann gehen durch a zwei Tangenten, die C^* in zwei Punkten, nennen wir sie p und q schneiden.
Betrachten wir nun den Teilraum $< C \cup \{p\} \cup \{q\} >$. Falls dieser dreidimensional ist, so ist die in diesen Raum enthaltende Quadrik ein Hyperboloid, der das Geradenkreuz $pa \cup qa$ enthält. Nach Konstruktion von τ wird dann entweder p oder q auf a abgebildet.
Falls dieser Raum vierdimensional ist, können wir wie beim Nachweis, dass τ die Distanzrelation erhält zeigen, dass die in diesem Raum enthaltende Quadrik die Generalvoraussetzung 1.3.1 erfüllt. Die Quadrik ist also ein stabiler Kettenraum.
Wir finden also einen Punkt r in $< C \cup \{p\} \cup \{q\} >$, der zu p und q distant ist und auf einer Kette C' in diesen Unterraum liegt und den Punkt a nicht enthält, da a nicht distant zu p und q ist.
Dann ist die in $< C' \cup \{a\} >$ enthaltende Quadrik ein Hyperboloid H, da sie das Geradenkreuz $pa \cup qa$ enthält und analog zum obigen Beweis,

dass τ die Distanzrelation erhält sieht man, dass die in $< C \cup \{p\} >$ und $< C \cup \{q\} >$ enthaltenden Quadriken Hyperboloide H_1 und H_2 sind, welche die Kette C enthalten.
Wir können wieder die Projektion $\pi_{(H_1,H_2)}$ betrachten, die die Tangente pa in H_1 nicht auf die Tangente qa in H_2 abbildet, da p und q distant sind und $\pi_{(H_1,H_2)}$ die Distanzrelation erhält.
Somit gehören pa und qa zu Reguli, die unterschiedlichen Äquivalenzklassen liegen. Eine der beiden Geraden, sagen wir pa liegt also auf einen Regulus der Klasse $R_1^{\sim}$.
Nach Konstruktion von τ wird p auf a abgebildet.
Damit bildet τ Ketten surjektiv und damit bijektiv auf die Kette C ab, ist also ein trivialer Morphismus. $\square$

Natürlich hätten wir uns bei unserer Definition von τ auch dafür entscheiden können, Punkte $p \notin C$ bei denen die in $< C \cup \{p\} >$ enthaltende Quadrik ein Hyperboloid ist, auf den Schnittpunkt der Tangente durch p mit C, die einem Regulus der Klasse $R_2^{\sim}$ angehört abzubilden. Dann hätten wir, falls die Quadrik F_{Q_1} einen Hyperboloid enthält, einen weiteren trivialen Morphismus gefunden, der auf die Kette C abbildet.
Man sieht leicht, dass man bei der Definition von τ die Äquivalenzklassen $R_1^{\sim}$ und $R_2^{\sim}$ berücksichtigen muss.
Denn gäbe es zwei Hyperboloide H_1 mit den Reguli $R^1_{H_1} \in R_1^{\sim}$ und $R^2_{H_1} \in R_2^{\sim}$ und H_2 mit den Reguli $R^1_{H_2} \in R_1^{\sim}$ und $R^2_{H_2} \in R_2^{\sim}$ in der Quadrik F_{Q_1}, welche die Kette C enthalten, so muss τ natürlich die Punkte von H_1 und H_2 entlang einer der beiden Reguli abbilden.
Nehmen wir an τ würde die Punkte von H_1 entlang $R^1_{H_1}$ abbilden und die Punkte von H_2 entlang $R^2_{H_2}$. Wir betrachten einen Punkt $a \in C$. Durch diesen gehen zwei Tangenten $g^1_{H_1} \in R^1_{H_1}$ und $g^2_{H_1} \in R^2_{H_1}$ von H_1, sowie $g^1_{H_2} \in R^1_{H_2}$ und $g^2_{H_2} \in R^2_{H_2}$. Betrachten wir zwei von a verschiedene Punkte $p \in g^1_{H_1}$ und $q \in g^2_{H_1}$. Dann sind p und q offenbar distant. Da $\pi_{(H_1,H_2)}(g^1_{H_1}) = g^1_{H_2}$ und $\pi_{(H_1,H_2)}(g^2_{H_1}) = g^2_{H_2}$ (man beachte die Klassenzugehörigkeit der Tangenten bezüglich $R_1^{\sim}$ und $R_2^{\sim}$) und da $\pi_{(H_1,H_2)}$ die Distanzrelation erhält, wird q auf einen zu p distanten Punkt $q' \in g^2_{H_2}$ abgebildet. Dieser wird aber nach obigen Annahmen durch τ auf a abgebildet, genau wie p. Damit haben wir einen Widerspruch.

Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass triviale Morphismen nur von solchen Kettengeometrien über Quadriken ausgehen können, bei denen die Quadrik weder einen Ovoid, noch einen Kegel enthält, dessen Spitze kein Radikalpunkt der Quadrik ist.

Falls zwischen zwei Kettengeometrien über Quadriken ein trivialer Morphismus existiert, so können wir diesen eindeutig zerlegen in eine Projektion auf eine beliebige Kette des Definitionsbereichs und eine anschließende Bijektion von dieser Kette auf die Kette im Bildraum.
Für die Projektion auf unsere Lieblingskette gibt es höchstens zwei Möglichkeiten, die, falls dreidimensionale Teilräume, die einen Hyperboloid enthalten vorhanden sind, durch eine der beiden Regulusklassen bestimmt ist.

Literatur

[1] Bartolone, C.G.: Jordan Homomorphisms, Chain Geometries and the fundamental Theorem. Abh. Math Sem. Univ. Hamburg 59 (1989), 93-99

[2] Benz, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Berlin: Springer. 1973.

[3] Beutelspacher, A., Rosenbaum, U.: Projektive Geometrie: Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen, 2. Auflage. Vieweg. Wiesbaden 2004.

[4] Bibik, M.: Kettengeometrien über Jordan-Systemen und zugehörige Morphismen, Dissertation Uni Hamburg, 2015.

[5] Blunck, A.: Chain Spaces over Jordan Systems, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 64 (1994), 33-49.

[6] Blunck, A.: Chain Spaces via Clifford Algebras, Mh. Math. 123 (1997), 93-107.

[7] Blunck, A., Havlicek, H.: The connected components of the projective line over a ring. Adv. Geom. 1 (2001), no. 2, 107–117.

[8] Blunck, A., Herzer, A.: Kettengeometrien. Eine Einführung. Shaker Verlag, 2005.

[9] Blunck, A. : Skript zur Vorlesung Vertiefung Geometrie WiSe 2018/19, Universität Hamburg.

[10] Brauner, H. : Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen. Monatshefte für Mathematik 77 (1973), 10-20.

[11] Brauner, H. : Zur Theorie linearer Abbildungen. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 53 (1983), 154–169 .

[12] Faure, C.-A., Frölicher, A.: Modern Projective Geometry. Springer-Science+Business Media Dordrecht. 2000.

[13] Faure, C.-A., Frölicher, A.: Morphisms of Projective Geometries and of corresponding lattices. Geometriae Dedicata 47 (1993), 25-40.

[14] Faure, C.-A., Frölicher, A.: Morphisms of Projective Geometries and Semilinear Maps. Geometriae Dedicata 53 (1994), 237-262.

[15] Faure, C.-A.: Partial lineations between arguesian projective spaces. Arch. Math. 79 (2002), 308-316.

[16] Havlicek, H.: zur Theorie linearer Abbildungen I. Journal of Geometry 16 (1981), 152-167.

[17] Havlicek, H.: zur Theorie linearer Abbildungen II. Journal of Geometry 16 (1981), 168-180.

[18] Herzer, A.: Chain geometries. In: Bueckenhout, F.(ed.) Handbook of Incidence Geometry, Amsterdam: Elsevier. 1995.

[19] Hotje, H.: Einbettung gewisser Kettengeometrien in Projektive Räume. Journal of Geometry (1974), 85-94

[20] Jacobson, N.: Basic Algebra II second Edition, Dover Publications, Inc..2009.

[21] Karzel, Helmut Bericht über projektive Inzidenzgruppen. Math.-Verein. 67 (1964/65), Abt. 1, 58–92.

[22] Karzel, H., Sörensen, K., Windelberg, D. : Einführung in die Geometrie. UTB Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen 1973.

[23] Lenz, H.: Vorlesungen über projektive Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. Leipzig 1965.

[24] Lingenberg, R.: Grundlagen der Geometrie I. Bibliographisches Institut AG Mannheim. 1969.

[25] Pieper, I.: Zur Konstruktion geschlitzter Inzidenzgruppen. J. Geom. 2 (1972), 35–68.

[26] Pieper, I.: Zur Konstruktion geschlitzter Inzidenzgruppen. J. Geom. 2 (1972), 35–68.

[27] Radó, F. Non-injective collineations on some sets in Desarguesian projective planes and extension of non-commutative valuations. Aequationes Math. 4 (1970), 307–321.

[28] Radó, F. Darstellung nicht-injektiver Kollineationen eines projektiven Raumes durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen. Math. Z. 110 (1969), 153–170.

[29] Schröder, E.: Fundamentalsätze der metrischen Geometrie. Journal of Geometry (1986), 36-59.

[30] Schröder, E.: Vorlesungen über Geometrie Band 1: Möbiussche, Elliptische und Hyperbolische Ebenen. Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich. 1991.

[31] Schröder, E.: Vorlesungen über Geometrie Band 2: Affine und projektive Geometrie. Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich.1991.

[32] Schröder, E.: Vorlesungen über Geometrie Band 3: Metrische Geometrie. Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich.1992.

[33] Sörensen, K.: Der Fundamentalsatz für Projektionen. Mitt. Math. Ges. Hamburg 11 (1985), 303-309.

[34] Werner, M.: Quadrikenmodell einer Kettengeometrie. Journal of Geometry 18 (1982), 161-168.

[35] Werner, M.: zu einer Aussage über die kettengeometrischen Erzeugenden. Math. Z. (1982), 79-80.

[36] Werner, M.: Zur Darstellung der Automorphismengruppe einer Kinematischen Kettengeometrie im Quadrikenmodell. Journal of Geometry 19 (1982), 146-153.

[37] Werner, M.: Zur Problematik des Einbettungsbegriffs bei Kettengeometrien. Geometriae Dedicata 13 (1982), 165-171.

3.3. Zusammenfassung.

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Beschreibung der Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken mittels projektiven Erweiterungen.
Wir zeigen, dass Morphismen solcher Kettengeometrien nur dann einer projektiven Erweiterung fähig sind, falls diese stark sind. Umgekehrt konstruieren wir zu jedem starken Morphismus eine projektive Erweiterung und beweisen deren Eindeutigkeit. Außerdem lässt sich jede projektive Erweiterung zerlegen in eine Zentralprojektion, die von einem Unterraum des Radikals der Quadrik im Definitionsbereich ausgeht und einer anschließenden Kollineation.
Wir betrachten auch triviale Morphismen von Kettengeometrien über Quadriken.
Wir zeigen, dass jeder triviale Morphismus eindeutig zerlegt werden kann in einen trivialen Morphismus auf eine vorher festgelegte Kette im Definitionsbereich und einer Bijektion auf die entsprechende Kette im Bildraum. Nicht von jeder Kettengeometrie über einer Quadrik kann ein trivialer Morphismus ausgehen. Wir zeigen, dass triviale Morphismen genau dann möglich sind, wenn die der Kettengeometrie zugrunde liegende Quadrik keinen Ovoid enthält, sowie keinen Kegel dessen Spitze sich nicht im Radikal der Quadrik befindet.

3.4. Summary.

In this thesis we deal with the description of the morphisms of chain geometries over quadrics using projective extensions.
We show that morphisms of such chain geometries only admit a projective expansion if they are strong. Conversely, we construct a projective extension for every strong morphism and prove its uniqueness. In addition, every projective extension can be decomposed into a central projection, which starts from a subspace of the radical of the quadric in the domain and a subsequent collineation.
We also consider trivial morphisms of chain geometries over quadrics.
We show that every trivial morphism can be uniquely decomposed into a trivial morphism onto a predefined chain in the domain and a bijection onto the corresponding chain in the image space. A trivial morphism

cannot start from every chain geometry over a quadric. We show that trivial morphisms are possible if and only if the quadric underlying the chain geometry does not contain an ovoid or a cone whose apex is not in the radical of the quadric.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertationsschrift selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Unterschrift: ....

Ort/Datum: 21.10.2022 ....

Index